# Σημειώσεις από την ομιλία μου στο Μαθηματικό Τμήμα τού Πανεπιστημίου Αθηνών (την 18η Μαΐου 2000)

Δ. Ι. Νταής

# Σημειώσεις επί τής ομιλίας μου στο Μαθηματικό Τμήμα τού Πανεπιστημίου Αθηνών

ΜΕΡΟΣ Α′

Κατ' αρχάς θα σας παρουσιάσω ένα αποτέλεσμα από τη διδακτορική μου διατριβή. Αυτό αναφέρεται σε ένα αλγεβροτοπολογικό πρόβλημα στη μιγαδική διάσταση $\mathbf{3}$. Γι' αυτόν τον λόγο θα προτιμούσα να ξεκινήσω με μια σύντομη ανασκόπηση κάποιων γνωστών θεωρημάτων και χρησίμων εννοιών από την τοπολογία των μιγαδικών πολυπτυγμάτων διάστασης $\mathbf{1}$ και $\mathbf{2}$.

# 1. Δισδιάστατα Κλειστά Τοπολογικά Πολυπτύγματα

Η πλήρης τοπολογική ταξινόμηση των κλειστών επιφανειών (ήτοι των δισδιαστάτων συμπαγών, συνεκτικών τοπολογικών πολυπτυγμάτων χωρίς σύνορο), κι επομένως και των συμπαγών επιφανειών Riemann (οι οποίες εμπεριέχονται στην κλάση των προσανατολίσιμων), είναι απολύτως εφικτή.

**1. Θεώρημα Ταξινόμησης. (M. Dehn, P. Heegaard, 1907, και F. Levi, 1929)**
*Μια οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια είναι **ομοιομορφική** ή με τη δισδιάστατη σφαίρα $\mathbb{S}^2$, ή με μια επιφάνεια $M_g$ σχηματιζόμενη από τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$ στην οποία έχουμε προσθέσει $g \geq 1$ χερούλια, ή με μια επιφάνεια $N_p$ σχηματιζόμενη από τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$ από την οποία έχουμε απομακρύνει $p \geq 1$ δίσκους και τους έχουμε αντικαταστήσει με $p$ ταινίες τού Möbius. Μεταξύ των προαναφερθέντων αυτών επιφανειών δεν υπάρχουν δύο επιφάνειες που να είναι ομοιομορφικές. Οι επιφάνειες $\mathbb{S}^2$ και $M_g$ είναι προσανατολίσιμες, ενώ οι $N_p$ δεν είναι. Η $M_g$ είναι ομοιομορφική με το συνεκτικό άθροισμα τής $\mathbb{S}^2$ και $g$ τόρων, ενώ η $N_p$ είναι ομοιομορφική με το συνεκτικό άθροισμα τής $\mathbb{S}^2$ και $p$ δισδιάστατων πραγματικών προβολικών χώρων $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Επίσης υφίστανται οι εξής ισομορφισμοί ομάδων :*

$$\pi_1(\mathbb{S}^2) \cong \{1\}, \;\; \pi_1(M_g) \cong \left\{ a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \;\middle|\; \prod_{i=1}^{g} a_i\, b_i\, a_i^{-1}\, b_i^{-1} = 1 \right\},$$

*και*

$$\pi_1(N_p) \cong \left\{ a_1, a_2, \ldots, a_q \;\middle|\; \prod_{i=1}^{q} a_i^2 = 1 \right\},$$

*και αντιστοίχως*

$$\begin{cases} H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}) \cong H_0(M_g, \mathbb{Z}) \cong H_0(N_p, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \\ H_1(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}) \cong \{1\}, \; H_1(M_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}, \; H_1(N_p, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{p-1} \oplus \mathbb{Z}_2, \\ H_2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \; H_2(M_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \; H_2(N_p, \mathbb{Z}) \cong \{1\}, \end{cases}$$

*ενώ η χαρακτηριστική Euler δίνεται προφανώς από τους τύπους*

$$e\left(\mathbb{S}^2\right) = 2, \quad e\left(M_g\right) = 2 - 2g, \;\; e\left(N_p\right) = 2 - p.$$

Το $g$ (κι αντιστοίχως, το $q$) καλείται το **γένος** τής $M_g$ (κι αντιστοίχως, τής $N_p$) και είναι η μοναδική **τοπολογική αναλλοίωτος** που απαιτείται για την τοπολογική ταξινόμηση. Μια πλήρης ταξινόμηση *όλων* των τοπολογικών, κλειστών πολυπτυγμάτων ως προς ομοιομορφισμό σε μεγαλύτερες διαστάσεις είναι αδύνατη. (Το 1958 ο A. A. Markov απέδειξε ότι *κάθε* πεπερασμένως παριστώμενη ομάδα μπορεί να καταστεί θεμελιώδης ομάδα ενός τετραδιάστατου, κλειστού πολυπτύγματος, και ότι το *γενικό* πρόβλημα ταξινόμησης είναι αλγοριθμικώς *μη επιλύσιμο*). Εντούτοις τα πράγματα είναι εντελώς διαφορετικά όταν περιοριζόμαστε στην κατηγορία των απλά συνεκτικών, κλειστών, λείων πολυπτυγμάτων.

## 2. Τετραδιάστατα Απλά Συνεκτικά, Κλειστά Τοπολογικά Πολυπτύγματα

Έστω $M$ ένα κλειστό, προσανατολισμένο, απλά συνεκτικό τοπολογικό 4-διάστατο πολύπτυγμα. Βάσει τού δυϊσμού τού Poincaré έχουμε $H_4(M,\mathbb{Z}) \cong H^0(M,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Η επιλογή ενός γεννήτορα τής $H_4(M,\mathbb{Z})$ καθορίζει την επιλογή ενός προσανατολισμού για το $M$. Μετά την παγίωση αυτής τής επιλογής, ο γεννήτορας τής $H_4(M,\mathbb{Z})$ λέγεται **θεμελιώδης κλάση** τού $M$ και συμβολίζεται ως $[M]$. Επειδή το $M$ είναι απλά συνεκτικό, έχουμε $H_1(M,\mathbb{Z}) = H_3(M,\mathbb{Z}) = 0$. Επομένως οι πληροφορίες που απαιτούνται γύρω από τον χαρακτηρισμό τού $M$ σε επίπεδο ομολογίας επικεντρώνονται στην $H_2(M,\mathbb{Z})$. Σημειωτέον ότι οι (πεπερασμένως παραγόμενες, αβελιανές) ομάδες $H^2(M,\mathbb{Z})$ και $H_2(M,\mathbb{Z})$ δεν έχουν στρέψη, καθότι

$$H^2(M,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_2(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}(\underbrace{H_1(M,\mathbb{Z})}_{=0},\mathbb{Z}),$$

και $H^2(M,\mathbb{Z}) \cong H_2(M,\mathbb{Z})$ (δυϊσμός τού Poincaré).

• **Κάποιες υπενθυμίσεις από τη θεωρία των συμμετρικών διγραμμικών $\mathbb{Z}$-μορφών:** Έστω $L$ ένα **κιγκλίδωμα** (lattice, ήτοι μια πεπερασμένως παραγομένη, ελεύθερη αβελιανή ομάδα), η οποία έχει **βαθμίδα** (rank) ίση με $r = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(L) = \dim_{\mathbb{R}}(L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$. Μια συνάρτηση $Q : L \times L \to \mathbb{Z}$ καλείται **συμμετρική διγραμμική μορφή** όταν είναι $\mathbb{Z}$-γραμμική και ως προς τις δύο μεταβλητές και ισχύει $Q(a,b) = Q(b,a)$, για κάθε $(a,b) \in L \times L$. Εάν μεταβούμε στο τανυστικό γινόμενο $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε μια πραγματική διγραμμική μορφή

$$Q^{\mathbb{R}} : (L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

και να επιλέξουμε μια κατάλληλη διατεταγμένη $\mathbb{R}$-βάση $\{e_1, \ldots, e_r\}$ τού δ.χ. $(L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$, η οποία διαγωνοποιεί την $Q^{\mathbb{R}}$:

$$\left(Q^{\mathbb{R}}(e_i, e_j)\right)_{1 \le i,j \le r} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_{r-1} & \\ & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε ως $b_+$ τον αριθμό των θετικών $\lambda_i$ και ως $b_-$ τον αριθμό των αρνητικών $\lambda_i$. (Τα $\lambda_i$ μπορούν να επιλεγούν έτσι, ώστε να παίρνουν μόνον τις τιμές $\{0, \pm 1\}$). Το **πρόσημο** (ή το «σημείο» ή η «υπογραφή», sign, signature) τής $Q$ είναι εξ ορισμού ίσο με τη διαφορά

$$\boxed{\mathrm{sign}(Q) := b_+ - b_-}$$

Η $Q$ ονομάζεται **ορισμένη** μορφή όταν $\mathrm{rank}(Q) = \mathrm{sign}(Q)$ ή $\mathrm{rank}(Q) = -\,\mathrm{sign}(Q)$ (Στην πρώτη περίπτωση λέμε πως η $Q$ είναι **θετικώς ορισμένη**, και στη δεύτερη πως είναι **αρνητικώς ορισμένη**). Όταν $\mathrm{rank}(Q) \neq \pm\, \mathrm{sign}(Q)$, τότε η $Q$ είναι **αόριστη** (indefinite). Η $Q$ ονομάζεται **άρτια** όταν $Q\,(a,a) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 2)$, για *κάθε* $a \in L$, και **περιττή** στην *αντίθετη περίπτωση*. Έστω τώρα $\{l_1, \ldots, l_r\}$ μια $\mathbb{Z}$-βάση τού $L$. Η **διακρίνουσα** τής $Q$ είναι η ορίζουσα τού πίνακα $Q\,(l_i, l_j)$ (και βεβαίως δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη επιλογή τής βάσης). Η $Q$ λέγεται **μη εκφυλισμένη** (non-degenerate) όταν η διακρίνουσά της δεν ισούται με το μηδέν. (Για τις μη εκφυλισμένες $Q$ κανένα από τα παραπάνω ορισθέντα $\lambda_i$ δεν μπορούν να είναι ίσα με το μηδέν). Η $Q$ λέγεται **μονομοδιακή** (unimodular) όταν η διακρίνουσά της ισούται με $\pm 1$. (Η $Q$ είναι μονομοδιακή εάν και μόνον εάν ο ομομορφισμός $L \ni a \mapsto \theta\,(a) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\,(L, \mathbb{Z})$, όπου $\theta\,(a)\,(b) := Q(a,b)$, είναι ισομορφισμός).

Δυο $Q_1 : L_1 \times L_1 \to \mathbb{Z}$ και $Q_2 : L_2 \times L_2 \to \mathbb{Z}$ λέμε πως είναι **ισόμορφες** (χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $Q_1 \cong Q_2$) όταν υπάρχει ένας ισομορφισμός κιγκλιδωμάτων $\varphi : L_1 \to L_2$, τέτοιος ώστε να ισχύει $Q_2 \circ (\varphi \times \varphi) = Q_1$. (Αντιστοίχως ορίζεται και η ισομορφία για μορφές υπεράνω τού $\mathbb{R}$).

**2. Πρόταση. (Νόμος αδρανείας τού Sylvester)** *Η βαθμίδα και το πρόσημο καθορίζουν όλες τις* ***πραγματικές*** *συμμετρικές, διγραμμικές (ενδεχομένως και εκφυλισμένες) μορφές ως προς* $\mathbb{R}$*-ισομορφισμό.*

**3. Πρόταση. (Επί των μονομοδιακών αρτίων συμμετρικών δ.μ.)** *Οι μονομοδιακές, άρτιες συμμετρικές διγραμμικές* $\mathbb{Z}$*-μορφές* $Q$ *έχουν πρόσημο*

$$\mathrm{sign}\,(Q) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 8)\,.$$

**4. Πρόταση. (Επί των μονομοδιακών, ορισμένων συμμετρικών δ. μ.)** *Για δοθέντα φυσικό αριθμό* $r$*, υπάρχουν μόνον* ***πεπερασμένες*** *κλάσεις* $\mathbb{Z}$*-ισομορφίας μονομοδιακών, ορισμένων συμμετρικών διγραμμικών* $\mathbb{Z}$*-μορφών βαθμίδας* $r$*.* (*Αυτές όμως είναι πάρα πολλές. Για παράδειγμα, υπάρχουν περισσότερες από* $10^{51}$ *όταν* $r = 40$).

**5. Πρόταση. (Ταξινόμηση μονομοδιακών, αορίστων συμμετρικών δ. μ.)** *Οι μονομοδιακές, αόριστες συμμετρικές διγραμμικές* $\mathbb{Z}$*-μορφές* $Q$ ***ταξινομούνται πλήρως*** *με τη βοήθεια τής βαθμίδας τους, των* $b_+, b_-$*, και τού τύπου τους* (*δηλαδή τού εάν αυτές είναι άρτιες ή περιττές*).

(i) *Εάν η* $Q$ *είναι περιττή, τότε*

$$Q \cong b_+\ (\mathbf{1}) \oplus b_-\ (-\mathbf{1})$$

(ii) *Εάν η* $Q$ *είναι άρτια, τότε*

$$\begin{cases} Q \cong \frac{-\mathrm{sign}(Q)}{8}\ (-E_8) \oplus \frac{\mathrm{sign}(Q)+\mathrm{rank}(Q)}{2}\,\mathbb{H}, & \textit{εάν}\ \ \mathrm{sign}\,(Q) \leq 0, \\[2ex] Q \cong \frac{\mathrm{sign}(Q)}{8}\, E_8 \oplus \frac{\mathrm{sign}(Q)-\mathrm{rank}(Q)}{2}\,\mathbb{H}, & \textit{εάν}\ \ \mathrm{sign}\,(Q) \geq 0. \end{cases}$$

*όπου*

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*είναι ο λεγομένος **πίνακας τού υπερβολικού επιπέδου*** (*με* $\text{rank}(\mathbb{H}) = 2,\ \text{sign}(\mathbb{H}) = 0$) *και*

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

*με* $\text{rank}(\pm E_8) = 8, \text{sign}(\pm E_8) = \pm 8.$

• **Μορφές τομών.** Εάν το $M$ είναι, όπως πιο πάνω, ένα κλειστό, προσανατολισμένο, συνεκτικό, απλά συνεκτικό τοπολογικό 4-διάστατο πολύπτυγμα, τότε το **κυαθώδες γινόμενο** (cup product) επάγει μια μονομοδιακή, μη εκφυλισμένη, συμμετρική διγραμμική μορφή

$$\begin{gathered} Q_M : H^2(M,\mathbb{Z}) \times H^2(M,\mathbb{Z}) \to H^4(M,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \\ (a,b) \longmapsto Q_M(a,b) := \langle a \smile b, [M] \rangle \in \mathbb{Z}, \end{gathered}$$

η οποία καλείται **μορφή τομών** (intersection form) τού $M$. (Το $\langle .,. \rangle : H^i(M,\mathbb{Z}) \times H_i(M,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ συμβολίζει το γινόμενο Kronecker, με $\langle \mu, \nu \rangle = \theta(\mu)(\nu)$, όπου $\theta : H^i(M,\mathbb{Z}) \hookrightarrow \text{Hom}(H_i(M,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ ο φυσικός μονομορφισμός. Εδώ για όλα τα $i = 0,1,2,3,4$ ο $\theta$ είναι προφανώς ισομορφισμός.)

**6. Παράδειγμα.** Η $H^2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, \mathbb{Z}) \cong H_2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ παράγεται (σε επίπεδο ομολογίας) από τα $\alpha = \mathbb{S}^2 \times \{p\}$ και $\beta = \{q\} \times \mathbb{S}^2$, όπου το $p$ είναι ένα σημείο τού πρώτου αντιτύπου τής $\mathbb{S}^2$ και το $q$ ένα σημείο τού δευτέρου. Επειδή $\alpha \cdot \beta = 1, \alpha \cdot \alpha = \beta \cdot \beta = 0$, η μορφή τομών $Q_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2}$ δίνεται μέσω τού υπερβολικού πίνακα $\mathbb{H}$.

**7. Παράδειγμα.** Η μορφή τομών τού $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ είναι ισόμορφη με την $(\mathbf{1})$, ενώ η μορφή τομών τού $\overline{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}$ είναι ισόμορφη με την $(-\mathbf{1})$ (όπου στο $\overline{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}$ έχουμε προσδώσει προσανατολισμό αντίθετο τού προσανατολισμού τού $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$).

**8. Παράδειγμα.** Η μιγαδική υπερεπιφάνεια τού Fermat

$$S_d = \left\{ [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{3} z_i^d = 0 \right\}$$

είναι απλά συνεκτική (Lefschetz Hyperplane Theorem), και έχουμε

$$\begin{cases} Q_{S_d} \cong \frac{d^3-6d^2+11d-3}{3}\,(\mathbf{1}) \oplus \frac{(d-1)\left(2d^2-4d+3\right)}{3}\,(-\mathbf{1}), & \text{εάν } d \equiv 1 \,(\text{mod } 2), \\ Q_{S_d} \cong \frac{d\left(d^2-4\right)}{24}\,(-E_8) \oplus \frac{d^3-6d^2+11d-3}{3}\,\mathbb{H}, & \text{εάν } d \equiv 0 \,(\text{mod } 2). \end{cases}$$

**9. Παράδειγμα.** Για το συνεκτικό άθροισμα $M\#N$ δυο τέτοιων πολυπτυγμάτων $M,N$ έχουμε $H^2(M\#N,\mathbb{Z}) \cong H^2(M,\mathbb{Z}) \oplus H^2(N,\mathbb{Z})$, απ' όπου έπεται ότι $Q_{M\#N} \cong Q_M \oplus Q_N$. Για παράδειγμα, η μορφή τομών τού $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\#\overline{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}$ δίνεται από τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**10. Θεώρημα. (J. H. C. Whitehead, 1949)** *Εάν τα $M$ και $N$ είναι απλά συνεκτικά, κλειστά, προσανατολισμένα 4-διάστατα τοπολογικά πολυπτύγματα, τότε τα $M$ και $N$ είναι* ***ομοτοπικώς ισοδύναμα*** *εάν και μόνον εάν οι μορφές τομών τους είναι ισόμορφες (δηλ. $Q_M \cong Q_N$).*

**11. Παράδειγμα.** Οι μορφές τομών των $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ και $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\#\overline{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}$ είναι μη ισόμορφες, κι επομένως αυτά τα πολυπτύγματα είναι ομοτοπικώς μη ισοδύναμα. (Σημειωτέον ότι οι μορφές αυτές, ειλημμένες υπεράνω τού $\mathbb{R}$, είναι ισόμορφες!)

**12. Θεώρημα. (V. A. Rohlin, 1952)** *Εάν το $M$ είναι ένα κλειστό, απλά συνεκτικό, προσανατολισμένο τετραδιάστατο* ***λείο*** *πολύπτυγμα, το οποίο διαθέτει άρτια μορφή τομών $Q_M$, τότε*

$$\mathrm{sign}\,(Q_M) \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 16)$$

**13. Θεώρημα. (C. T. C. Wall, 1964)** *Έστω ότι τα $M$ και $N$ είναι δυο κλειστά, απλά συνεκτικά, λεία* (= $\mathcal{C}^\infty$-διαφορίσιμα) *πολυπτύγματα διάστασης 4. Εάν οι μορφές τομών τους είναι ισόμορφες, τότε υπάρχει ένας $k \geq 0$, ούτως ώστε το $M\#_k(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ να είναι* ***διαφορομορφικό*** *με το $N\#_k(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$.*

**14. Παρατήρηση.** Υπάρχουν κλειστά, απλά συνεκτικά, λεία πολυπτύγματα διάστασης 4, τα οποία είναι μεταξύ τους ομοτοπικώς ισοδύναμα, αλλά **μη** διαφορομορφικά! Το ένα παράδειγμα που γνωρίζω είναι αυτό τού ζεύγους $M = S_4\#\overline{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}$ και $N = \#_3\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\#_{20}\overline{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}$, με $Q_M \cong Q_N \cong 2\,(-E_8) \oplus 3\,\mathbb{H}$, αλλά η απόδειξη τής μη ύπαρξης διαφορομορφισμού έπεται από τον υπολογισμό των λεγομένων **πολυωνύμων τού Donaldson**, τα οποία αποτελούν διαφορομορφικές αναλλοιώτους, αλλά ορίζονται σχετικά δύσκολα. Το άλλο παράδειγμα (βλ. παρ. 17.) μπορεί να παρουσιαστεί πολύ πιο εύκολα, κάνοντας χρήση αλγεβρογεωμετρικών αναλλοιώτων και τού **περίφημου θεωρήματος τού Freedman.**

**15. Θεώρημα. (M. Freedman, 1982)** (i) *Δοθείσας μιας μονομοδιακής, αρτίας συμμετρικής διγραμμικής $\mathbb{Z}$-μορφής, υπάρχει (ως προς ομοιομορφισμό) ακριβώς* ***ένα*** *απλά συνεκτικό, κλειστό 4-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα, το οποίο την εκπροσωπεί.*

(ii) *Δοθείσας μιας μονομοδιακής, περιττής συμμετρικής διγραμμικής $\mathbb{Z}$-μορφής, υπάρχουν (ως προς ομοιομορφισμό) ακριβώς* ***δύο*** *απλά συνεκτικά, κλειστά 4-διάστατα τοπολογικά πολύπτυγματα, τα οποία την εκπροσωπούν. Το ένα μάλιστα εξ αυτών δεν μπορεί να είναι ποτέ λείο.*

***Επομένως τα απλά συνεκτικά, κλειστά 4-διάστατα λεία πολύπτυγματα προσδιορίζονται (ως προς ομοιομορφισμό) μέσω των μορφών τομών τους. Εάν, για παράδειγμα, τα $M$ και $N$ είναι δυο απλά συνεκτικά, κλειστά 4-διάστατα λεία πολύπτυγματα με $Q_M \cong Q_N$, τότε τα $M$ και $N$ οφείλουν να είναι όχι μόνον ομοτοπικώς ισοδύναμα (κατά το Θεώρημα τού Whitehead), αλλά και ομοιομορφικά!***

**16. Πόρισμα. (Η Εικασία τού Poincaré είναι αληθής στη διάσταση** $4$) *Εάν ένα απλά συνεκτικό, κλειστό, προσανατολισμένο* $4$*-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα* $M$ *είναι ομοτοπικώς ισοδύναμο με τη σφαίρα* $\mathbb{S}^4$, *τότε το* $M$ *οφείλει να είναι ομοιομορφικό με την* $\mathbb{S}^4$.

**17. Παράδειγμα. (Ebeling, 1990)** Οι πλήρεις διατομές

$$M_{(3,3,6,7,7,10)} \subset \mathbb{P}^8_{\mathbb{C}} \ , \ M_{(2,2,3,3,3,3,3,5,9)} \subset \mathbb{P}^{11}_{\mathbb{C}}$$

είναι μεταξύ τους ομοιομορφικές, αλλά **όχι** και διαφορομορφικές.

**18. Θεώρημα. (S. K. Donaldson, 1982)** *Εάν μια ορισμένη, μονομοδιακή, συμμετρική διγραμμική μορφή μπορεί να υλοποιηθεί ως μορφή τομών ενός λείου, απλά συνεκτικού, κλειστού, τετραδιάστατου πολυπτύγματος, τότε αυτή θα είναι ισόμορφη με* $k\ (\mathbf{1})$ *ή* $k\ (-\mathbf{1})$, *για κάποιον* $k \geq 1$.

**19. Παρατήρηση.** Παρότι οι μονομοδιακές, ορισμένες συμμετρικές διγραμμικές $\mathbb{Z}$-μορφές είναι, όπως προαναφέραμε, πάμπολλες, το θεώρημα τού Donaldson μάς πληροφορεί ότι μόνον οι διαγωνοποιήσιμες με άσσους μπορούν να αποτελέσουν μορφές τομών λείων, απλά συνεκτικών, κλειστών, τετραδιάστατων πολυπτυγμάτων.

**20. Θεώρημα. (M. Furuta, 1995)** *Εάν μια άρτια μορφή* $Q$ *μπορεί να υλοποιηθεί ως μορφή τομών ενός λείου, απλά συνεκτικού, κλειστού, τετραδιάστατου τοπολογικού πολυπτύγματος, τότε*

$$\text{rank}\,(Q) > \frac{10}{8}\,|\text{sign}\,(Q)|$$

**21. Εικασία. (Kas-Kirby)** *Υπάρχει η ακόλουθη καλυτέρευση τής παραπάνω ανισότητας* :

$$\text{rank}\,(Q) \geq \frac{11}{8}\,|\text{sign}\,(Q)|$$

## 3. Επί των διαφόρων αναλλοιώτων των συμπαγών, συνεκτικών $\mathbb{C}$-δισδιαστάτων μιγαδικών πολυπτυγμάτων.

Έστω $X$ ένα τέτοιο πολύπτυγμα (= συμπαγής, συνεκτική μιγαδική επιφάνεια). Τότε υπάρχουν οι εξής αναλλοίωτοι:

| **Αναλλοίωτοι** | **Ειδικά Ονόματα και Συμβολισμοί** |
|---|---|
| Τοπολογικές | (i) Η Θεμελιώδης Ομάδα $\pi_1(X)$<br>(ii) Οι Αριθμοί τού Betti $b_i = \dim_{\mathbb{Q}} H^i(X, \mathbb{Q})$<br>(iii) $b_+(X)$, $b_-(X)$, $\tau(X) = \mathrm{sign}(Q_X) = b_+(X) - b_-(X)$ |
| Αναλυτικές | (i) Ο Αριθμός τού Picard $\rho(X) = \mathrm{rank}\, \mathrm{NS}(X)$<br>(ii) Οι Αριθμοί τού Hodge $h^{p,q}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega_X^p)$<br>(iii) Η Διάσταση τού Kodaira $\mathbf{kod}(X)$ |
| Μικτές | (i) Ο 1ος Αριθμός τού Chern $c_1^2(T_X)[X] = K_X^2$<br>(ii) Ο 2ος Αριθμός τού Chern $c_2(T_X)[X] = e(X)$ |

**Σχόλια:** (a) Σημαντικό ρόλο σε διάφορα ερωτήματα, που αφορούν σε ταξινομήσεις, διαδραματίζουν και οι εξής αριθμοί:

$$q(X) := h^1(X, \mathcal{O}_X) = h^{0,1}(X) = h^{2,1}(X) \qquad [\textbf{αρρητότητα} \text{ τού } X]$$

$$p_g(X) := h^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)) = h^{2,0}(X) = h^{0,2}(X) \qquad [\textbf{γεωμετρικό γένος} \text{ τού } X]$$

$$P_n(X) := h^0(X, \mathcal{O}_X(nK_X)) \qquad [n\textbf{-οστό πολυγένος} \text{ τού } X]$$

(b) Εκκινώντας από την «εκθετική» σύντομη ακριβή ακολουθία δραγμάτων

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

$$\left[f \longmapsto e^{2\pi\sqrt{-1}\, f}\right]$$

παίρνουμε τη μακρά ακριβή ακολουθία ομάδων συνομολογίας

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \underbrace{H^0(X,\mathbb{Z})}_{\simeq \mathbb{Z}} & \longrightarrow & \underbrace{H^0(X,\mathcal{O}_X)}_{\simeq \mathbb{C}} & \longrightarrow & \underbrace{H^0(X,\mathcal{O}_X^*)}_{\simeq \mathbb{C}} & & \text{—} \\
H^1(X,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}_X^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow & & H^2(X,\mathcal{O}_X) \to \cdots \\
 & & \text{επί} \downarrow & & \| & & \cup & & \\
0 & \longrightarrow & \underbrace{\mathrm{Pic}^0(X)}_{=\mathrm{Ker}(\delta)} & \hookrightarrow & \mathrm{Pic}(X) & \twoheadrightarrow & \mathrm{NS}(X) \longrightarrow 0 & &
\end{array}$$

$\mathrm{Pic}(X) =$ **ομάδα τού Picard** $= \{$όλες οι ολόμορφες δέσμες ευθειών υπεράνω τού $X\}$,

$\mathrm{NS}(X) = \mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Pic}^0(X) =$ **ομάδα των Neron και Severi**.

(c) Η **διάσταση τού Kodaira** ορίζεται ως εξής

$$\mathbf{kod}(X) := \begin{cases} -\infty, \text{ όταν } P_n(X) = 0, \ \forall n, \ n \geq 1 \\ \min\left\{ a \in \mathbb{N}_0 \ \middle| \ \begin{array}{l} \text{το κλάσμα } \dfrac{P_n(X)}{n^a} \\ \text{είναι φραγμένο} \\ \text{ως συνάρτηση τού } n \end{array} \right\}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και παίρνει τιμές $\mathbf{kod}(X) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$. (Η $\mathbf{kod}(X)$ ορίζεται παρομοίως και για κάθε μιγαδικό πολύπτυγμα ή ποικιλότητα $X$ οιασδήποτε διάστασης, και παίρνει τιμές $\mathbf{kod}(X) \in \{-\infty, 0, 1, 2, ..., \ \dim_{\mathbb{C}} X\}$.)

(d) Ισχύουν οι εξής τύποι

$\triangleright$ **Χαρακτηριστική τού Euler**:

$$\boxed{e(X) = 2 - b_1(X) + b_2(X)}$$

$\triangleright$ **Χαρακτηριστική των Euler και Poincaré για το δράγμα δομής**

$$\boxed{\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X) + p_g(X)}$$

όπου

$$\boxed{\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{K_X^2 + e(X)}{12} = \frac{c_1^2(T_X)[X] + c_2(T_X)[X]}{12}} \tag{1}$$

βάσει τού θεωρήματος Riemann-Roch.

$\triangleright$ **Τύπος τού Hirzebruch για το πρόσημο** τής $Q_X$ :

$$\boxed{\tau(X) = \mathrm{sign}(Q_X) = \frac{K_X^2 - 2e(X)}{3} = \frac{c_1^2(T_X)[X] - 2c_2(T_X)[X]}{3}} \tag{2}$$

(e) Τόσο η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X)$, όσο και οι αριθμοί

$$h^{p,0}(X), \ q(X), \ p_g(X), \ P_n(X), \ \mathbf{kod}(X), \ \chi(\mathcal{O}_X)$$

αποτελούν **αμφίρρητες αναλλοιώτους.**

(f) Οι αριθμοί $c_1^2(T_X)[X] = K_X^2$, $c_2(T_X)[X] = e(X)$ είναι **αναλλοίωτοι τού ομοτοπικού τύπου** (για τον πρώτο βλ. (2)). Το ίδιο ισχύει και για τους αριθμούς Hodge, διότι

$$\begin{cases} b_1(X) = h^{1,0}(X) + h^{0,1}(X) \\ b_1(X) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2) \Longrightarrow h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X), \quad b_+(X) = 2h^{2,0}(X) + 1 \\ b_1(X) \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2) \Longrightarrow h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X) - 1, \quad b_+(X) = 2h^{2,0}(X) \end{cases}$$

(g) **Γενικά περί των αριθμών τού Hodge.**

Εάν $X$ είναι ένα οποιοδήποτε μιγαδικό πολύπτυγμα (μιγαδικής) διάστασης $d$,

$$T_X^{(\mathbb{R})} = \bigcup_{x \in X} T_{X,x}^{(\mathbb{R})} \longrightarrow X, \quad T_{X,x}^{(\mathbb{R})} \cong \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_d} \right\}$$

η πραγματική εφαπτόμενή του δέσμη και

$$T_X^{(\mathbb{C})} = T_X^{(\mathbb{R})} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigcup_{z \in X} T_{X,z}^{(\mathbb{C})} \longrightarrow X$$

η μιγαδοποίησή της (complexification), όπου

$$T_{X,z}^{(\mathbb{C})} \cong \mathbb{C} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_d} \right\} \cong \mathbb{C} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_d}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z_d}} \right\}$$

ως προς ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $z = (z_1, \ldots, z_d)$, $z_j = x_j + \sqrt{-1} y_j$, $\forall j$, $1 \leq j \leq d$, τότε έχουμε μια διάσπαση

$$T_X^{(\mathbb{C})} = T_X^{'(\mathbb{C})} \oplus T_X^{''(\mathbb{C})}, \ \underbrace{T_X^{'(\mathbb{C})} = \mathbb{C} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_d} \right\}}_{\text{ολόμορφο τμήμα}}, \ \underbrace{T_X^{''(\mathbb{C})} = \mathbb{C} \left\{ \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z_d}} \right\}}_{\text{αντιολόμορφο τμήμα}}.$$

Έστω $\mathcal{E}_X^{(p,q)}$ το δράγμα των φύτρων των (διαφορίσιμων) διαφορικών μορφών διβαθμού $(p, q)$, οριζόμενο ως εξής:

$$\{\text{ανοικτά υποσύνολα τού } X\} \ni U \longmapsto \mathcal{E}_X^{(p,q)}(U) = \Gamma \left( U, \bigwedge^p \left( T_X^{'(\mathbb{C})} \right)^{\vee} \otimes \bigwedge^q \left( T_X^{''(\mathbb{C})} \right)^{\vee} \right).$$

Κάθε $(p, q)$-διαφορική μορφή $\omega$ γράφεται, ως προς ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $(z_1, \ldots, z_d)$, ως

$$\omega = \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_p \\ j_1 < j_2 < \cdots < j_q}} \omega_{i_1, i_2, .., i_p, j_1, j_2, .., j_q}(z) \ dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}.$$

Για κάθε $\omega$ ορίζεται το διαφορικό $\overline{\partial}\omega$

$$\overline{\partial}\omega = \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \cdots < i_p \\ j_1 < j_2 < \cdots < j_q}} \left[ \overline{\partial}\omega_{i_1, i_2, .., i_p, j_1, j_2, .., j_q}(z) \right] \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}$$

και μέσω αυτού ένας ομομορφισμός δραγμάτων

$$\overline{\partial} = \overline{\partial}^{p,q} : \mathcal{E}_X^{(p,q)} \longrightarrow \mathcal{E}_X^{(p,q+1)}, \ \text{ για κάθε } p, q \geq 0.$$

Το δράγμα $\Omega_X^p := \mathrm{Ker}\left( \mathcal{E}_X^{(p,0)} \longrightarrow \mathcal{E}_X^{(p,1)} \right)$ καλείται δράγμα των φύτρων των **ολόμορφων** $(p, 0)$-διαφορικών μορφών. (Ιδιαιτέρως για $p = d$, $\Omega_X^d = \mathcal{O}_X(K_X)$, όπου $K_X := \bigwedge^d \left( T_X^{'(\mathbb{C})} \right)^{\vee}$ είναι η λεγομένη **κανονιστική δέσμη** ή ο **κανονιστικός διαιρέτης** τού $X$). Επειδή $\overline{\partial}^{p,q+1} \circ \overline{\partial}^{p,q} = 0$, το $\left( \mathcal{E}_X^{(p,\bullet)}, \overline{\partial}^{p,\bullet} \right)$ αποτελεί ένα αλυσωτό σύμπλεγμα, και η $(p, q)$-ομάδα συνομολογίας τού Dolbeault ορίζεται ως η $H_{\overline{\partial}}^{p,q}(X) :=$

$H^q\left(\left(\mathcal{E}_X^{(p,\bullet)}, \overline{\partial}^{p,\bullet}\right), \mathbb{R}\right)$.

▷ **Θεώρημα τού Dolbeault:**

$$\boxed{H^q\left(X, \Omega_X^p\right) \cong H_{\overline{\partial}}^{p,q}(X)}$$

Για **συμπαγή** $X$, το κεντρικό θεώρημα που αφορά στα ελλειπτικά σύμπλοκα μάς δίνει:

$$\boxed{h^{p,q}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^q\left(X, \Omega_X^p\right) < +\infty}$$

Επίσης:

$$\begin{cases} h^{0,0}(X) = h^{d,d}(X) = 1 & \text{[λόγω συνεκτικότητας]} \\ h^{p,q}(X) = h^{d-p,d-q}(X) & \text{[δυϊσμός Kodaira-Serre]} \\ h^{\mu,\nu}(X \times Y) = \displaystyle\sum_{\substack{p+r=\mu \\ q+s=\nu}} h^{p,q}(X)\, h^{r,s}(Y) & \text{[ιδιότητα γινομένου]} \end{cases}$$

▷ **Θεώρημα αποσύνθεσης συνομολογιακών ομάδων (Θεώρημα τού Hodge)**

Έστω $X$ ένα μιγαδικό πολύπτυγμα διάστασης $d$, τέτοιο ώστε για κάθε σημείο $z \in X$ να υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο Hermite $h_z$ (ήτοι μια μιγαδική, θετικώς ορισμένη 1/2-γραμμική μορφή, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον σχηματισμό συζυγών)

$$T_{X,z}^{(\mathbb{C})} \times T_{X,z}^{(\mathbb{C})} \longrightarrow \mathbb{C}$$

για κάθε ίνα τής $T_X^{(\mathbb{C})}$. Με τη βοήθεια ενός τοπικού συστήματος συντεταγμένων το $h_z$ αναπαρίσταται (τοπικώς) ως

$$h_z = \sum_{1 \le i,j \le d} h_{ij}\, z_i \otimes \overline{z}_j,$$

όπου ο $(h_{ij})$ είναι ένας θετικώς ορισμένος, ερμιτιανός, συμμετρικός πίνακας. Ορίζουμε τη (θεμελιώδη) διαφορική $(1,1)$-μορφή τού $h_z$ ως εξής

$$\Phi_z := \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{1 \le i,j \le d} h_{ij}\;\, z_i \wedge \overline{z}_j.$$

Εάν αυτή είναι κλειστή, δηλ. $\overline{\partial}\Phi_z = 0$, για όλα τα $z \in X$, τότε λέμε πως το $X$ είναι ένα πολύπτυγμα **Kähler.** Για όλα τα συμπαγή μιγαδικά πολυπτύγματα $X$, τα οποία είναι Kähler, ισχύει:

$$\boxed{H^i\left(X, \mathbb{C}\right) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^q\left(X, \Omega_X^p\right)}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$b_i\,(X) = \sum_{p+q=i} h^{p,q}(X), \qquad h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$$

και

$$b_{2q+1}(X) = 2\left[\sum_{p=0}^{q} h^{p,2q+1-p}\,(X)\right] \equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)\,.$$

**22. Παρατήρηση.** Όταν το $X$ είναι προβολικώς αλγεβικό, δηλαδή όταν επιδέχεται μια εμφύτευση ως ένα αλγεβρικό υποσύνολο εντός ενός προβολικού χώρου $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$, τότε το $X$ είναι πολύπτυγμα Kähler.

Αλλ' ας επανέλθουμε στις συμπαγείς μιγαδικές επιφάνειες.

**23. Θεώρημα.** **(Αλγεβρογεωμετρική Ταξινόμηση Enriques-Kodaira)** *Κάθε συμπαγής, συνεκτική μιγαδική επιφάνεια, η οποία είναι προβολικώς αλγεβρική, διαθέτει ένα* ***ελαχιστοτικό μοντέλο*** (minimal model), *το οποίο είναι καταχωρημένο στον κατάλογο που ακολουθεί. Το μοντέλο αυτό είναι μοναδικό, με μόνη εξαίρεση τις επιφάνειες $X$ με $\mathbf{kod}\,(X) = -\infty$.*

| **Κλάσεις επιφανειών** $X$ | $\mathbf{kod}(X)$ | $b_1(X)$ | $b_2(X)$ | $K_X^2$ | $e(X)$ | $q(X)$ | $p_g(X)$ | $\chi(\mathcal{O}_X)$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ | $-\infty$ | 0 | 1 | 9 | 3 | 0 | 0 | 1 | |
| Ρητές ευθειογενείς επιφάνειες Hirzebruch $\Sigma_n = \mathbb{P}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(n)\right), n \neq 1$ | $-\infty$ | 0 | 2 | 8 | 4 | 0 | 0 | 1 | |
| Άρρητες ευθειογενείς επιφάνειες $\mathbb{P}_C(E)$, όπου $g = g(C) > 0$ | $-\infty$ | $2g$ | 2 | $8(1-g)$ | $4(1-g)$ | $g$ | 0 | $1-g$ | |
| Επιφάνειες $K3$ | 0 | 0 | 22 | 0 | 24 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| Επιφάνειες τού Enriques | 0 | 0 | 10 | 0 | 12 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| Αβελιανές επιφάνειες | 0 | 4 | 6 | 0 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| Υπερελλειπτικές επιφάνειες | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 12 |
| Γνήσιες ελαχιστοτικές ελλειπτικές επιφάνειες | 1 | | | 0 | $\geq 0$ | | | $\geq 0$ | |
| Ελαχιστοτικές επιφάνειες γενικού τύπου | 2 | | | $> 0$ | $> 0$ | | | $> 0$ | |

| **Κλάσεις επιφανειών** $X$ | $\pi_1(X)$ | $Q_X$ | $\tau(X)$ |
|---|---|---|---|
| Προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ | $\{1\}$ | $\langle \mathbf{1} \rangle$ | 1 |
| Ρητές ευθειογενείς επιφάνειες Hirzebruch $\Sigma_n = \mathbb{P}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}}(n)\right), n \neq 1$ | $\{1\}$ | $\langle \mathbb{H} \rangle,\ n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$<br>$\langle \mathbf{1} \rangle \oplus \langle -\mathbf{1} \rangle,\ n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ | 0 |
| Άρρητες ευθειογενείς επιφάνειες $\mathbb{P}_C(E)$, όπου $g = g(C) > 0$ | $\pi_1(C)$ | $\langle \mathbb{H} \rangle,\ \deg(E) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$<br>$\langle \mathbf{1} \rangle \oplus \langle -\mathbf{1} \rangle,\ \deg(E) \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ | 0 |
| Επιφάνειες $K3$ | $\{1\}$ | $2\langle -E_8 \rangle \oplus 3\langle \mathbb{H} \rangle$ | $-16$ |
| Επιφάνειες τού Enriques | $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ | $\langle -E_8 \rangle \oplus 3\langle \mathbb{H} \rangle$ | $-8$ |
| Αβελιανές επιφάνειες | $\mathbb{Z}^4$ | $3\langle \mathbb{H} \rangle$ | 0 |
| Υπερελλειπτικές επιφάνειες | $1 \to \mathbb{Z}^4 \to \pi_1(X) \to G \to 1$ | $\langle \mathbb{H} \rangle$ | 0 |
| Γνήσιες ελαχιστοτικές ελλειπτικές επιφάνειες | | | |
| Ελαχιστοτικές επιφάνειες γενικού τύπου | | | |

**24. Παρατήρηση.** Το θεώρημα γενικεύεται και για τα $X$, τα οποία δεν είναι κατ' ανάγκην προβολικώς αλγεβρικά, αλλά ο αντίστοιχος κατάλογος είναι πολύ ευρύτερος.

**25. Παρατήρηση.** Για να διευκολυνθούμε στη συνέχιση τής προηγούμενης συζήτησής μας, ας περιοριστούμε στην εξέταση μόνον των επιφανειών $X$ με $\mathbf{kod}\,(X) \leq 0$, οι οποίες είναι **απλά συνεκτικές**. Το ίδιο το $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ δεν προκαλεί κανένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Οι $\Sigma_n$ διαχωρίζονται προφανώς σε δύο κλάσεις ομοιομορφίας, ήτοι σε εκείνη για $n$ άρτιους και σε εκείνη για $n$ περιττούς. (Εφαρμόστε το Θεώρημα τού Freedman.) Όπως όμως απέδειξε ο Brieskorn το 1965, αυτή η ταξινόμηση συμπίπτει και με τη διαφορομορφική ταξινόμηση. Από την άλλη μεριά, για τις επιφάνειες με $\mathbf{kod}\,(X) = 0$ ισχύει το εξής ισχυρό θεώρημα:

**26. Θεώρημα. (M. Artin, 1960, K. Kodaira, 1966, etal.)** *Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες για δυο τυχούσες συμπαγείς, συνεκτικές, μιγαδικές επιφάνειες $X$ και $X'$ με $\mathbf{kod}\,(X) = \mathbf{kod}\,(X') = 0$.*

(i) *Οι $X$ και $X'$ είναι **ομοτοπικώς ισοδύναμες**.*

(ii) *Η $X$ μπορεί να **παραμορφωθεί** δίνοντάς μας την $X'$, δηλαδή υπάρχουν συνεκτικοί, ανηγμένοι αναλυτικοί χώροι $\mathcal{X}$ και $T$, καθώς και μια λεία, γνήσια ολόμορφη απεικόνιση $\Phi : \mathcal{X} \to T$, με δύο σημεία $t, t' \in T$, τέτοια ώστε να ισχύει $X \cong \Phi^{-1}(t)$ και $X' \cong \Phi^{-1}(t')$. (Όταν αυτή η συνθήκη ικανοποιείται, τότε οι επιφάνειες $X$ και $X'$ είναι ιδιαιτέρως **διαφορομορφικές**.)*

(iii) $\pi_1(X) \cong \pi_1(X')$ *και* $b_2(X) = b_2(X')$.

**27. Παρατήρηση.** Η συνθήκη (iii) είναι εξαιρετικά απλή και ελέγχεται εύκολα. Όπως βλέπει κανείς από τον κατάλογο τής ταξινόμησης που δώσαμε, οι 4 κλάσεις μιγαδικών επιφανειών με διάσταση Kodaira $= 0$ είναι τοπολογικώς διαχωρισμένες. Εξ αυτών, οι **επιφάνειες K 3** (ονομασθείσες έτσι προς τιμήν των **K**ummer, **K**ähler και **K**odaira), οριζόμενες μέσω των συνθηκών $K_X \cong \mathcal{O}_X$ και $q\,(X) = 0$, είναι οι μόνες επιφάνειες που είναι **απλά συνεκτικές** και προφανώς **έχουν όλες τον ίδιο διαφορομορφικό τύπο.** (Ακόμη και τα μέλη των άλλων τριών κλάσεων, τα οποία διαθέτουν ισόμορφες θεμελιώδεις ομάδες, έχουν τον ίδιο διαφορομορφικό τύπο.)

# 4. Εξαδιάστατα λεία, κλειστά, απλά συνεκτικά πολυπτύγματα και μιγαδικά τριπτύγματα Calabi-Yau.

Η περιγραφή των τοπολογικών 6-διάστατων, κλειστών, λείων πολυπτυγμάτων είναι αρκετά περίπλοκη, καθότι απαιτείται μια πληθώρα χαρακτηριστικών κλάσεων και άλλων βοηθητικών εννοιών για τη διατύπωση ακόμη και των πιο στοιχειωδών αποτελεσμάτων. Για ευνόητους λοιπόν λόγους θα περιοριστούμε στην κλάση εκείνων των 6-διάστατων κλειστών, προσανατολισμένων, λείων πολυπτυγμάτων $M$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(I) $\pi_1(M) \cong \{1\}$
(II) Η δεύτερη χαρακτηριστική κλάση $w_2(M) \in H^2(M, \mathbb{Z}_2)$ των Stiefel και Whitney είναι μηδέν.

Σε τέτοια $M$ αντιστοιχούμε μια τετράδα αναλλοιώτων $(H^2(M,\mathbb{Z}), b_3(M), Q_M, [p_1]_M)$, όπου

(i) $H^2(M,\mathbb{Z})$ είναι η **δεύτερη ομάδα συνομολογίας** τού $M$,

(ii) $b_3(M)$ είναι ο **τρίτος αριθμός τού Betti** για το $M$,

(iii) $Q_M$ είναι η **συμμετρική, τριγραμμική $\mathbb{Z}$-μορφή**

$$\begin{gathered} Q_M : H^2(M,\mathbb{Z}) \times H^2(M,\mathbb{Z}) \times H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^6(M,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \\ (a,b,c) \longmapsto Q_M\,(a,b,c) := \langle a \smile b \smile c, [M] \rangle \end{gathered}$$

η επαγομένη από το κυαθώδες γινόμενο, και

(iv) $[p_1]_M$ είναι η **γραμμική $\mathbb{Z}$-μορφή**

$$[p_1]_M : H^4(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^6(M,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \ \ a \longmapsto [p_1]_M\,(a) := \langle p_1\,(M) \smile a, [M] \rangle$$

η επαγομένη από την πρώτη χαρακτηριστική κλάση τού Pontrjagin $p_1\,(M) \in H^4(M,\mathbb{Z})$ τού $M$.

**28. Θεώρημα. (C. T. C. Wall, 1966)** *Ας υποθέσουμε ότι*

$$\mathcal{A} = \left\{ \text{όλες οι τετράδες } (H,b,Q,[p]) \;\middle|\; \begin{array}{l} H \text{ πεπερασμένως παραγομένη, ελεύθερη αβελιανή ομάδα,} \\ b \text{ ένας άρτιος μη αρνητικός ακέραιος,} \\ Q \text{ μια συμμετρική τριγραμμική } \mathbb{Z}\text{-μορφή} \\ Q : H \times H \times H \to \mathbb{Z}, \\ [p] \text{ μια γραμμική } \mathbb{Z}\text{-μορφή } [p] : H \to \mathbb{Z}, \text{ με} \\ Q\,(a,a,b) \equiv Q\,(a,b,b) \,(\mathrm{mod}\ 2)\,, \forall a,b \in H, \\ [p]\,(a) \equiv 4\,Q\,(a,a,a) \,(\mathrm{mod}\ 24)\,, \forall a \in H. \end{array} \right\},$$

*και*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{c} \text{6-διάστατα κλειστά, προσανατολισμένα, λεία} \\ \text{πολυπτύγματα } M \text{τα οποία πληρούν τις ιδιότητες (I) και (II)} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{B} \mid \text{οι ομάδες συνομολογίας τού } M \text{δεν έχουν στρέψη}\}$$

*Τότε ισχύουν τα εξής :*

(i) *Εάν* $M \in \mathcal{B}$, *τότε* $(H^2(M,\mathbb{Z}), b_3(M), Q_M, [p_1]_M) \in \mathcal{A}$.

(ii) *Εάν τα* $M, N \in \mathcal{B}$ *είναι διαφορομορφικά, τότε*

$$(H^2(M,\mathbb{Z}), b_3(M), Q_M, [p_1]_M) \text{ “} \cong \text{” } (H^2(N,\mathbb{Z}), b_3(N), Q_N, [p_1]_N).$$

(iii) *Για κάθε τετράδα* $(H, b, Q, [p]) \in \mathcal{A}$ *υπάρχουν μόνον* ***πεπερασμένα*** *το πλήθος* $M \in \mathcal{B}$ *με διαφορετικούς διαφορομορφικούς τύπους* (*αλλά μόνον* ***ένα*** $M \in \mathcal{C}$), *ούτως ώστε*

$$(H, b, Q, [p]) \text{ “} \cong \text{” } (H^2(M,\mathbb{Z}), b_3(M), Q_M, [p_1]_M).$$

**29. Παρατήρηση.** (i) Υπάρχουν και κάποια ανάλογα θεωρήματα, οφειλόμενα στους Jupp (1973) και Zupr (1975), που αφορούν σε ταξινομήσεις ως προς ομοτοπική ισοδυναμία, αλλά η διατύπωσή τους απαιτεί πολλές τεχνικές λεπτομέρειες.

(ii) Η πρώτη ρητή κλάση τού Pontrjagin $p_1^{\mathbb{Q}}(M) \in H^4(M,\mathbb{Q})$ αναλλοίωτος τού ομοτοπικού τύπου (Zupr).

Από εδώ και στο εξής θα περιοριστούμε στην εξέταση των Calabi-Yau τριπτυγμάτων, το υποκείμενο τοπολογικό 6-διάστατο πολύπτυγμα των οποίων πληροί τις προαναφερθείσες συνθήκες.

**30. Ορισμός.** Ένα προβολικώς αλγεβρικό, μιγαδικό πολύπτυγμα (μιγαδικής) διάστασης $d$ καλείται **πολύπτυγμα Calabi-Yau**, όταν έχει **τετριμμένη κανονιστική δέσμη** (ή, ισοδυνάμως, τετριμμένο κανονιστικό διαιρέτη, trivial canonical divisor), δηλ. $K_X \cong \mathcal{O}_X$, και όταν ταυτοχρόνως ισχύει:

$$H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0, \ \ \forall i, \quad 1 \leq i \leq d-1.$$

**31. Παρατήρηση.** (i) Τα πολυπτύγματα Calabi-Yau αποτελούν την άμεση γενίκευση των επιφανειών K3 σε υψηλότερες διαστάσεις και έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως τα τελευταία 15 χρόνια στη μαθηματική φυσική, και ειδικότερα στη θεωρία των υπερχορδών.

(ii) Η πρώτη χαρακτηριστική κλάση τού Chern $c_1(X) \in H^2(X,\mathbb{Z})$ τέτοιων $X$ είναι μηδέν, καθότι

$$c_1(X) := c_1\left(T_X^{'(\mathbb{C})}\right) = -c_1\left(T_X^{'(\mathbb{C})}\right)^{\vee} = -c_1(\bigwedge^d \left(T_X^{'(\mathbb{C})}\right)^{\vee}) = -c_1(K_X),$$

ενώ η δεύτερη χαρακτηριστική κλάση $w_2(X) \in H^2(M,\mathbb{Z}_2)$ των Stiefel και Whitney είναι μηδέν, διότι αποτελεί την εικόνα τής $c_1(X)$ μέσω τής $H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathbb{Z}_2)$. Εξάλλου η πρώτη χαρακτηριστική κλάση τού Pontrjagin $p_1(X) \in H^4(M,\mathbb{Z})$ ισούται με $p_1(X) = c_1^2(X) - 2c_2(X) = -2c_2(X)$.

(iii) Για τα τριπτύγματα Calabi-Yau $X$ ($d = 3$) ισχύει ιδιαιτέρως

$$e(X) = 2(h^{1,1}(X) - h^{1,2}(X)) = 2(b_2(X) + 1) - b_3(X),$$

ενώ από την εκθετική ακριβή ακολουθία παίρνουμε Pic$(X) \cong H^2(X,\mathbb{Z})$, οπότε

$$\rho(X) = \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\operatorname{Pic}(X)) = b_2(X) = h^{1,1}(X), \quad h^{1,2}(X) = \frac{1}{2}b_3(X) - 1.$$

**Βασικό Ερώτημα:** Είναι δυνατόν να γενικευθεί το Θεώρημα 26. τού Kodaira σε υψηλότερες διαστάσεις;

Η απάντηση είναι **αρνητική**.

**32. Θεώρημα. (Δ. Νταής, 1994)** *Είναι αδύνατη η ύπαρξη ενός άμεσου αναλόγου τού θεωρήματος 26. τού Kodaira για συμπαγή μιγαδικά πολυπτύγματα $X$ με $\mathbf{kod}(X) = 0$ ήδη από τη (μιγαδική) διάσταση 3. Συγκεκριμένα, υπάρχει ένας αλγόριθμος παραγωγής τριπτυγμάτων Calabi-Yau, τα οποία **είναι απλά συνεκτικά, διαθέτουν τους ίδιους αριθμούς Betti, είναι αμφιρρήτως ισοδύναμα, αλλά δεν είναι ούτε διαφορομορφικά, ούτε καν ομοτοπικώς ισοδύναμα.***

Η παραγωγή τέτοιων τριπτυγμάτων βασίζεται στην εξής **αλγεβρογεωμετρική κατασκευή**: Εκκινώντας από συστήματα «βαρών» $(w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{N}^m$ και $(d_1, d_2, \ldots, d_k) \in (\mathbb{N}_{\geq 2})^k$, θεωρούμε **βεβαρημένες πλήρεις διατομές**

$$X = \left\{ [z_1 : z_2 : \ldots : z_m] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{m-1}(w_1, \ldots, w_m) \;\middle|\; f_1(z_1 : z_2 : \ldots : z_m) = \cdots = f_k(z_1 : z_2 : \ldots : z_m) = 0 \right\}$$

πολυβαθμού $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$, με $m - k = 4$, και

$$\sum_{j=1}^{k} d_j - \sum_{i=1}^{m} w_i = 0.$$

Υποθέτοντας ότι αυτές είναι «σχεδόν λείες» (quasi-smooth), «καλοδιαμορφωμένες» (well-formed) και «καλοδιαστρωματωμένες» (well-stratified) [αποφεύγω εδώ τους τεχνικίστικους αυτούς ορισμούς], τις εξαναγκάζουμε να έχουν ιδιώματα προερχόμενα μόνον από τον περιβάλλοντα βεβαρημένο προβολικό χώρο $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{m-1}(w_1, \ldots, w_m)$ και να έχουν τετριμμένο δυϊκό δράγμα $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$. (Το $\omega_X$ αποτελεί το ανάλογο τού $K_X$ για τέτοιας λογής **ιδιάζουσες** ποικιλότητες).

• **Η ομάδα τού Picard** $\mathrm{Pic}(X)$. Αυτή είναι άπειρη κυκλική, έχοντας ως γεννήτορα ένα συστρεπτό δράγμα τής μορφής $\mathcal{O}_X(\ell)$, με το $\ell$ προσδιορίσιμο ως μια (σχετικώς απλή) έκφραση εξαρτώμενη μόνον από τα βάρη.

• **Το ιδιάζον χωρίο τους**

$$\mathrm{Sing}(X) = X \cap \mathrm{Sing}\left(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{m-1}(w_1, \ldots, w_m)\right)$$

έχει διάσταση $\leq 1$ και αποτελείται από σημεία ή/ και μιγαδικές καμπύλες. Όμως όλα τα ιδιώματά του είναι **κυκλικά πηλικοϊδιώματα**, παριστώμενα τοπικώς ως

$$(X, x) \cong \left(\mathbb{C}^3/G, [\mathbf{0}]\right)$$

όπου η $G$ είναι μια κυκλική πεπερασμένη υποομάδα τού $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ , ο γεννήτορας τής οποίας δρα γραμμικώς επί τού $\mathbb{C}^3$ ως εξής:

$$\left(\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\lambda_3} \end{pmatrix}, (z_1, z_2, z_3)\right) \longmapsto \left(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\lambda_1} z_1, e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\lambda_2} z_2, e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}\lambda_3} z_3\right)$$

(όπου $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, n-1] \cap \mathbb{Z},\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, n)$).

• **Τι κατορθώνουμε με τη χρήση τής τορικής γεωμετρίας;** Να κατασκευάσουμε «απτές» διαλύσεις $\varphi : Y \longrightarrow X$ όλων των ιδιωμάτων των $X$, ούτως ώστε:

(Ι) $K_Y \cong \mathcal{O}_Y$ (δηλ. οι $\varphi$ να είναι **μη αποκλίνουσες**, non-discrepant or crepant), οπότε τα $Y$ να είναι Calabi-Yau (και μάλιστα απλά συνεκτικά).

(ΙΙ) Να είμαστε σε θέση να βρούμε **κατασκευαστικά** μια $\mathbb{Q}$-βάση τής ρητής ομάδας τού Picard

$$\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(Y) := \mathrm{Pic}(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

μέσω **συνδυαστικής περιγραφής** των εκάστοτε προκυπτόντων **εξαιρετέων διαιρετών** (exceptional divisors).

(ΙΙΙ) Να προσδιορίσουμε διεξοδικά τύπους για τους (μη τετριμμένους) **αριθμούς τού Betti**

$$\boxed{\begin{aligned} b_2(Y) &= b_2(X) + \#\,(\text{εξαιρετέοι διαιρέτες}) \\ b_3(Y) &= b_3(X) + \sum_{\substack{C \in \mathrm{Sing}(X) \\ C \text{ καμπύλη}}} (n_C - 1)\ b_1(C) \end{aligned}}$$

εξαρτώμενους (στην τελική τους μορφή) μόνον από τα βάρη και τους πολυβαθμούς.

(IV) Να εφαρμόσουμε **θεωρία τομών** (intersection theory) για τα μέλη τής προσδιορισθείσας $\mathbb{Q}$-βάσης τής $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(Y)$, σε συνδυασμό τόσο με κλασικά αλγεβρογεωμετρικά μέσα (Riemann-Roch, Grauert-Riemenschneider and Kawamata-Vieweg vanishing theorems, Zariski fibration lemma, Castelnuovo-Enriques fibration, Mumford's version of moving lemma, ampelness criteria etc.), όσο και με μέσα προερχόμενα από τη διακριτή γεωμετρία (τριγωνάκια!), και τέλος

(V) απεικονίζοντας τετράδες

$$\begin{aligned} (\mathrm{Pic}(Y))^4 \ \ni\ & (a,b,c,d) \longmapsto Q_Y(a,b,c) \cdot [c_2](d) + Q_Y(d,a,b) \cdot [c_2](c) + \\ & + Q_Y(c,d,a) \cdot [c_2](b) + Q_Y(b,c,d) \cdot [c_2](a), \end{aligned}$$

όπου $Q_Y$ είναι η συνήθης τριγραμμική μορφή και η $[c_2]$ η γραμμική μορφή $\frac{1}{2}[p_1]$ , να κατασκευάσουμε **βοηθητικές διγραμμικές $\mathbb{Z}$-μορφές**

$$\Psi_Y : \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Pic}(Y)) \times \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Pic}(Y)) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

(με $\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Pic}(Y))$ τον δεύτερο συμμετρικοποιητή τής ομάδας Picard), και να χρησιμοποιήσουμε τις $\mathbb{Q}$-μορφές $\Psi_Y^{\mathbb{Q}} = \Psi_Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ προκειμένου να φτάσουμε στην επιθυμητή διαφοροποίηση ως προς την ομοτοπική ισοδυναμία (μέσω τού Θεωρήματος 28. τού Wall και τής παρ. 17. (ii).)

**33. Παράδειγμα.** Η υπερεπιφάνεια Fermat

$$X = \left\{ [z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \in \mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}\ (1,2,3,12,18) \,\middle|\, z_1^{36} + z_2^{18} + z_3^{12} + z_4^3 + z_5^2 = 0 \right\}$$

βαθμού 36 έχει ομάδα Picard $\mathrm{Pic}(X) = \langle \mathbf{L}_X \rangle, \mathbf{L}_X = \mathcal{O}_X(6), b_2(X) = 1, b_3(X) = 182$, ενώ το ιδιάζον της χωρίο αποτελείται από δύο ελλειπτικές καμπύλες $C_1, C_2$ (ήτοι καμπύλες γένους 1), οι οποίες τέμνονται σε ένα ειδικό σημείο $P$. Κοντά στο $P$ το $X$ είναι τής μορφής $\left(\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_6, [\mathbf{0}]\right)$, σε κάθε σημείο τής $C_1 \smallsetminus \{P\}$ είναι τής μορφής $\left(\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_2, [\mathbf{0}]\right)$, ενώ σε κάθε σημείο τής $C_2 \smallsetminus \{P\}$ είναι τής μορφής $\left(\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3, [\mathbf{0}]\right)$. Αναλύοντας τα δεδομένα των ομάδων που δρούν διαπιστώνουμε ότι κάθε μη αποκλίνουσα διάλυση τού $X$ θα διαθέτει 4 εξαιρετέους διαιρέτες (έναν προερχόμενο από την $C_1 \smallsetminus \{P\}$, δύο προερχόμενους από την $C_2 \smallsetminus \{P\}$ και έναν ακόμα οφειλόμενο στο $P$). Ας θεωρήσουμε τις 5 «τοροειδείς» αποϊδιωματοποιήσεις $\varphi_i : Y_i \to X,\ i = 1, 2, ..., 5$ που εκφράζονται μέσω των 5 δυνατών κιγκλιδωματικών τριγωνοποιήσεων τού τριγώνου $e_1, e_2, e_3$ (βλ. σχήμα) κι ας συμβολίσουμε τους αντίστοιχους εξαιρετέους διαιρέτες ως $\left\{ D_1^{(i)}, D_2^{(i)}, D_3^{(i)}, D_4^{(i)} \right\}$. Για κάθε $i = 1, 2, ..., 5$ έχουμε

$$\begin{cases} b_2(Y_i) = b_2(X) + 4 = 1 + 4 = 5 = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \mathrm{Pic}(Y_i) \\ b_3(Y) = b_3(X) + (2-1) \cdot 1 + (3-1) \cdot 1 = 182 + 3 = 185 \end{cases}$$

Τώρα θέτοντας $\mathbf{L}_{Y_i} = \varphi_i^*(\mathbf{L}_X)$, παίρνουμε

$$\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(Y_i) \cong (\mathbb{Q}\, c_1(\mathbf{L}_{Y_i})) \oplus \bigoplus_{j=1}^{4} \left( \mathbb{Q}\, c_1 \left( \mathcal{O}_{Y_i} \left( D_j^{(i)} \right) \right) \right).$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε για κάθε $i = 1, 2, ..., 5$ τους $\binom{6}{2} \times \binom{6}{2} = (15 \times 15)$-πίνακες τομών τής διγραμμικής $\mathbb{Q}$-μορφής

$$\Psi_{Y_i}^{\mathbb{Q}} : \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(Y_i)) \times \mathrm{Sym}^2(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(Y_i)) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

ως προς αυτήν τη βάση, και τους συμβολίζουμε με $\mathcal{M}_1, ..., \mathcal{M}_5$. Εάν δύο από τα $Y_1, ..., Y_5$ ήσαν διαφορομορφικά (ή ακόμα και ομοτοπικώς ισοδύναμα) τότε θα έπρεπε οι αντίστοιχες $\mathbb{Q}$-μορφές $\Psi^{\mathbb{Q}}$ να είναι ισόμορφες. Τώρα οι $\mathcal{M}_1, ..., \mathcal{M}_5$ είναι όλες τους εκφυλισμένες με

$$\mathrm{rank}(\mathcal{M}_1) = \mathrm{rank}(\mathcal{M}_3) = 14,\ \mathrm{rank}(\mathcal{M}_2) = 10,\ \ \mathrm{rank}(\mathcal{M}_4) = \mathrm{rank}(\mathcal{M}_5) = 13.$$

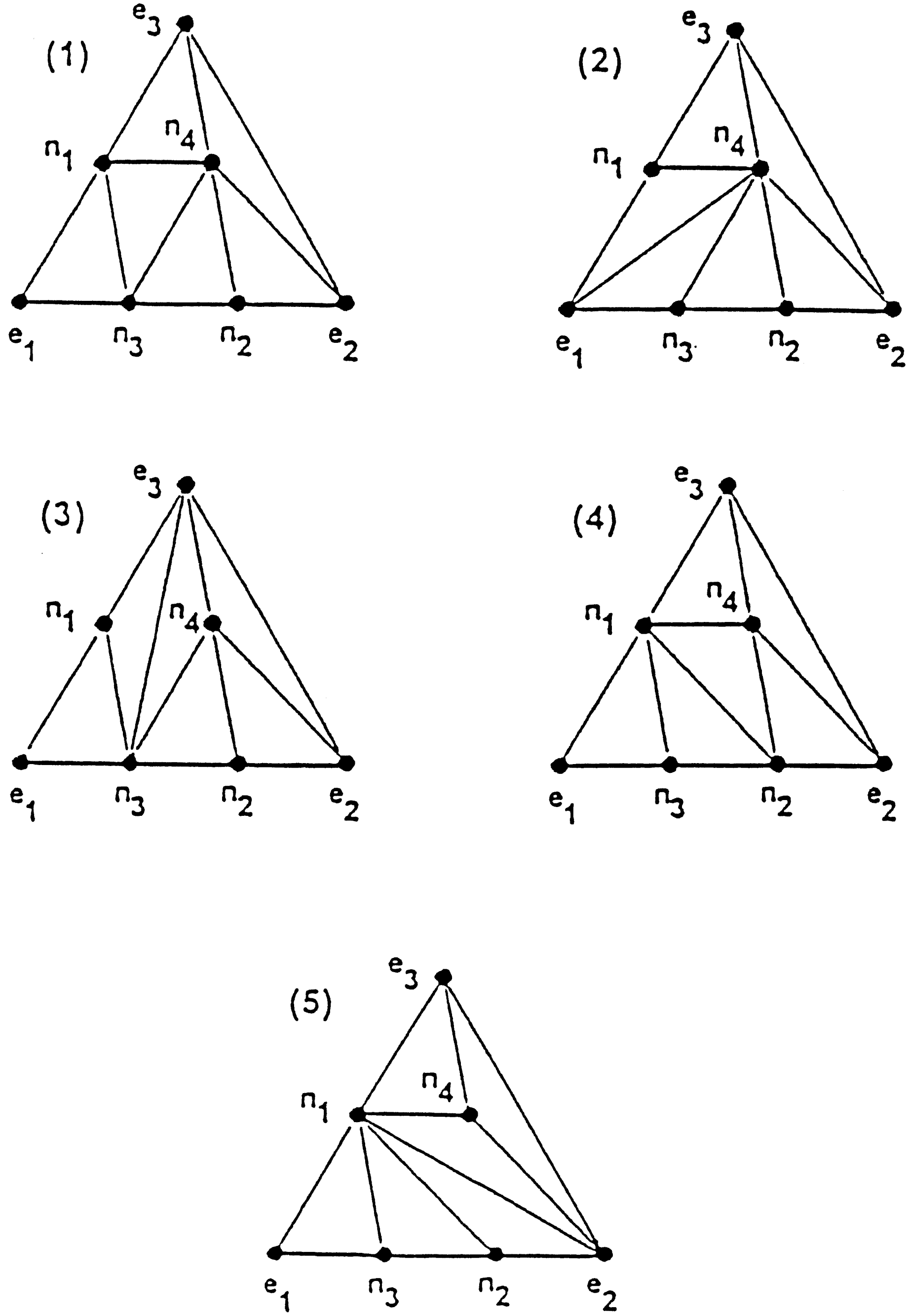
Εφαρμόζοντας το θεώρημα αδρανείας τού Sylvester, μας υπολείπεται η σύγκριση των $\Psi_{Y_1}^{\mathbb{Q}}, \Psi_{Y_3}^{\mathbb{Q}}$ και $\Psi_{Y_4}^{\mathbb{Q}}, \Psi_{Y_5}^{\mathbb{Q}}$, αντιστοίχως, αν βεβαίως χρησιμοποιήσουμε μόνον τη βαθμίδα. Όμως μια πιο προσεκτική μελέτη μάς δείχνει ότι οι $\Psi_{Y_4}^{\mathbb{Q}}, \Psi_{Y_5}^{\mathbb{Q}}$ έχουν διαφορετικά πρόσημα. Στην πραγματικότητα, έως εδώ εργαστήκαμε μόνον υπεράνω τού $\mathbb{R}$. Οι $\Psi_{Y_1}^{\mathbb{Q}}, \Psi_{Y_3}^{\mathbb{Q}}$ είναι όμως «επίμονες», καθότι υπεράνω τού $\mathbb{R}$ **είναι** ισόμορφες. (Έχουν ίσες βαθμίδες και ίσα πρόσημα). Τούτο όμως δεν ισχύει και υπεράνω τού $\mathbb{Q}$. Εάν θεωρήσουμε τις μη εκφυλισμένες τετραγωνικές $\mathbb{Q}$-μορφές $\widehat{\Psi}_{Y_1}^{\mathbb{Q}}, \widehat{\Psi}_{Y_3}^{\mathbb{Q}}$ των $\Psi_{Y_1}^{\mathbb{Q}}, \Psi_{Y_3}^{\mathbb{Q}}$ (αφού απαλλαγούμε από τους πυρήνες των γραμμικών απεικονίσεων που αντιστοιχούν στις $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_3$, και κάνουμε τις απαραίτητες αλλαγές βάσεων), παίρνουμε δύο νέους πίνακες $\widehat{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_3}$ που αντιστοιχούν στις $\widehat{\Psi}_{Y_1}^{\mathbb{Q}}, \widehat{\Psi}_{Y_3}^{\mathbb{Q}}$. Εάν οι $\widehat{\Psi}_{Y_1}^{\mathbb{Q}}, \widehat{\Psi}_{Y_3}^{\mathbb{Q}}$ ήσαν ισόμορφες ως τετραγωνικές $\mathbb{Q}$-μορφές, τότε θα έπρεπε να έχουμε

$$\frac{\det\left(\widehat{\mathcal{M}_1}\right)}{\det\left(\widehat{\mathcal{M}_3}\right)} = r^2, \text{ για κάποιον } r \in \mathbb{Q}$$

(κι αυτό, γιατί αν υπήρχε $\mathcal{N} \in GL(14, \mathbb{Q}) : \widehat{\mathcal{M}_1} = \mathcal{N}\widehat{\mathcal{M}_3}\mathcal{N}^t$, τότε θα είχαμε: $\det\left(\widehat{\mathcal{M}_1}\right) = \det\left(\widehat{\mathcal{M}_3}\right) \cdot (\det(\mathcal{N}))^2$). Όμως στην προκειμένη περίπτωση

$$\left(\frac{\det\left(\widehat{\mathcal{M}_1}\right)}{\det\left(\widehat{\mathcal{M}_3}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{25}{788768}\sqrt{2119}\sqrt{49298} \notin \mathbb{Q}.$$

**Συμπέρασμα:** Τα τριπτύγματα Calabi-Yau $Y_1, ..., Y_5$ είναι ανά ζεύγη μη ομοτοπικώς ισοδύναμα.



(1)
e3
n1
n4
e1
n3
n2
e2
(2)
e3
n1
n4
e1
n3
n2
e2
(3)
e3
n1
n4
e1
n3
n2
e2
(4)
e3
n1
n4
e1
n3
n2
e2
(5)
e3
n1
n4
e1
n3
n2
e2