**Παν. Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών** **Άλγεβρα ΙΙ (ΜΕΜ 222)**

**Εξέταση Σεπτεμβρίου 2016** **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

# <u>ΜΕΡΟΣ Α. ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>

**<u>ΘΕΜΑ 1ο</u>** Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε υποομάδα τής $(\mathbb{Z},+)$ είναι κυκλική, και μάλιστα τής μορφής $(d\,\mathbb{Z},+)$, για κάποιον $d \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Κάθε υποομάδα μιας κυκλικής ομάδας είναι κυκλική.

(iii) Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα. Εάν $g \in G$ και $\mathrm{ord}(g) = n \in \mathbb{N}$, τότε $(g^m = e_G,$ για κάποιον $m \in \mathbb{Z}) \Longleftrightarrow n \,|m$ .

(iv) Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα με τάξη $|G| = m \in \mathbb{N}$. Εάν η $G$ είναι κυκλική, παραγόμενη από ένα στοιχείο $g \in G$ και $a = g^n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε το $a$ παράγει μια υποομάδα $H$ τής $G$ τάξεως $|H| = \frac{m}{\text{μκδ}(m,n)}$.

**<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>** (i) Να ορισθεί η *απεικόνιση προσημάνσεως* sgn: $(\mathfrak{S}_n,\circ) \longrightarrow (\{\pm 1\},\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, μέσω «παραβατικών ζευγών» και να δοθεί και αποδειχθεί ο «κλειστός» τύπος για τον υπολογισμό της. Κατόπιν τούτου, κάνοντας χρήση τού εν λόγω τύπου να αποδειχθεί ότι είναι η sgn αποτελεί επιμορφισμό μεταξύ των ως άνω αναγραφομένων ομάδων.

(ii) Να αποδειχθεί (κατόπιν χρήσεως τού (i) και λοιπής θεωρητικής αιτιολογήσεως) ότι η εναλλάσσουσα ομάδα $\mathfrak{A}_n$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής $\mathfrak{S}_n$.

**<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Poincaré* (περί τής αριθμητικής συμπεριφοράς τού δείκτη υποομάδων εντός μιας δεδομένης ομάδας).

**<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>** Εάν $\langle m\rangle$ και $\langle n\rangle$ είναι δυο ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων παραγόμενα από τους $m,n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$, να αποδειχθεί ότι ισχύουν τα εξής:

(i) $\langle m\rangle \cap \langle n\rangle = \langle \text{εκπ}(m,n)\rangle$, (ii) $\langle m\rangle + \langle n\rangle = \langle \text{μκδ}(m,n)\rangle$,

(iii) $\langle m\rangle\,\langle n\rangle = \langle mn\rangle$, (iv) $\langle m\rangle : \langle n\rangle = \left\langle \frac{m}{\text{μκδ}(m,n)} \right\rangle$.

**<u>ΘΕΜΑ 5ο</u>** Έστω $R$ ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και έστω $\mathfrak{m}_R := R\smallsetminus R^{\times}$. Να αποδειχθεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) $a - b \in \mathfrak{m}_R$ για κάθε $a, b \in \mathfrak{m}_R$.

(ii) Το $\mathfrak{m}_R$ είναι ένα ιδεώδες τού $R$.

(iii) Το $\mathfrak{m}_R$ είναι ένα μεγιστικό ιδεώδες τού $R$.

(iv) Για κάθε $a \in R$ έχουμε είτε $a \in R^{\times}$ είτε $1_R - a \in R^{\times}$.

# <u>ΜΕΡΟΣ Β. ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ</u>

**<u>ΘΕΜΑ 6ο</u>** Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα. Εάν $x, y \in G$, να αποδειχθούν οι συνεπαγωγές

(i) $[xy^2 = y^3x \;\text{ και }\; x^3y = yx^2] \Longrightarrow x = y = e_G$, και

(ii) $[x^2 = e_G \;\text{ και }\; x^{-1}y^2x = y^3] \Longrightarrow y^5 = e_G$.

**<u>ΘΕΜΑ 7ο</u>** (i) Εάν $(G,\cdot)$ είναι μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα, να αποδειχθεί ότι η ομάδα $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z})$ όλων των ομομορφισμών από αυτήν στην $(\mathbb{Z},+)$ είναι τετριμμένη.

(ii) Να αποδειχθεί ότι για κάθε αβελιανή ομάδα $(G,\cdot)$ υφίσταται ισομορφισμός $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},G) \xrightarrow{\cong} G$.

**ΘΕΜΑ 8ο** (i) Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα τάξεως $|G| = pq$, όπου $p, q$ είναι δυο πρώτοι αριθμοί με $p < q$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει *το πολύ μία* $H \in \mathbf{Subg}(G)$ τάξεως $|H| = q$ και ότι αυτή (εάν υπάρχει) οφείλει να είναι ορθόθετη.

(ii) Έστω $f : G \longrightarrow H$ ένας επιμορφισμός ομάδων, όπου η $H$ είναι αβελιανή τάξεως $|H| = 105$. Να δειχθεί ότι η $G$ διαθέτει ορθόθετες υποομάδες έχουσες δείκτες $3, 5, 7, 15, 21, 35$ και $105$ εντός αυτής.

**ΘΕΜΑ 9ο** Έστω $R$ ένας μεταθετικός δακτύλιος και έστω $I$ ένα ιδεώδες αυτού. Εάν τα $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι πρώτα ιδεώδη τού $R$, τέτοια ώστε $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$, να αποδειχθεί ότι $\exists\, j \in \{1, \ldots, n\} : I \subseteq \mathfrak{p}_j$.

**ΘΕΜΑ 10ο** Έστω $R$ ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Εάν υποτεθεί ότι $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_n$ είναι $n$ μεγιστικά ιδεώδη τού $R$ με $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$ για οιουσδήποτε $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 = R$.

(ii) $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$.

(iii) $(\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{n-1}) + \mathfrak{m}_n = R$.

(iv) $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$.

Εν συνεχεία, υποτιθεμένου ότι ο $R$ είναι μια απειροπληθής ακεραία περιοχή έχουσα πεπερασμένου πλήθους αντιστρέψιμα στοιχεία, να αποδειχθούν και τα ακόλουθα:

(v) $\{a \in R \mid a^m = 0 \text{ για κάποιον θετικό ακέραιο } m\} = \{0_R\}$.

(vi) Ο $R$ διαθέτει άπειρα σαφώς διακεκριμένα μεγιστικά ιδεώδη.

(vii) Στην ειδική περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$, από το (vi) εξάγεται μια (επιπρόσθετη) απόδειξη για το ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.

---

- **Ζητείται να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη. Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.**

- **Η εξέταση χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος της οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θεωρητικά θέματα τής επιλογής τους (από τα 1-5), χωρίς να χρησιμοποιούν σημειώσεις ή βιβλία. Ύστερα από την αποπεράτωση αυτής τής διαδικασίας παραδίδουν τις κόλλες τους στον επιτηρητή και (προκειμένου να μεταβούν στο δεύτερο μέρος τής εξετάσεως) λαμβάνουν άλλες κόλλες.**

- **Στο δεύτερο μέρος οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θέματα τής επιλογής τους (από τα 6-10) που σχετίζονται με τις εφαρμογές, έχοντας εκ παραλλήλου τη δυνατότητα χρησιμοποιήσεως των σημειώσεων τού διδάξαντος ή/και των βιβλίων που διενεμήθησαν για την παρακολούθηση τού μαθήματος.**

- **Εντός των γραπτών οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού). Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

---

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!