Παν. Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών και Εφ. Μαθηματικών **Άλγεβρα ΙΙ (ΜΕΜ 222)**

Εξέταση Ιουνίου 2016 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΜΕΡΟΣ Α. ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Cayley.*

ΘΕΜΑ 2ο (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεώρημα τού Lagrange*.

(ii) Να αποδειχθεί ότι για την $\mathfrak{A}_4$ δεν ισχύει το αντίστροφο τού θεωρήματος τού Lagrange.

ΘΕΜΑ 3ο Κάθε αποδειχθεί ότι κάθε ομάδα τάξεως 6 είναι ισόμορφη είτε με την $(\mathbb{Z}_6, +)$ είτε με την $(\mathbf{D}_3, \circ)$.

ΘΕΜΑ 4ο Να διατυπωθεί το *λήμμα τού Zorn* και να αποδειχθεί μέσω αυτού ότι κάθε γνήσιο ιδεώδες I ενός μη τετριμμένου δακτυλίου R με μοναδιαίο στοιχείο περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες τού R.

ΘΕΜΑ 5ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *2ο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων*.

ΜΕΡΟΣ Β. ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο (i) Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα για την οποία υπάρχει κάποιος $k \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$(ab)^{k+j} = a^{k+j} b^{k+j}, \ \ \forall (a, b) \in G \times G \ \text{ και } \ \forall j \in \{0, 1, 2\}.$$

Να αποδειχθεί ότι η εν λόγω ομάδα είναι αβελιανή.

(ii) Εάν $(G, \cdot)$ είναι μια αβελιανή ομάδα και $(x, y) \in G \times G$ με $x^n = y^n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθεί ότι $y = xw$ για κάποιο $w \in G$ με $\mathrm{ord}(w) \mid n$.

ΘΕΜΑ 7ο (i) Να δειχθεί ότι η προσθετική πηλικοομάδα $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ είναι ισόμορφη με την $(\mathcal{E}_\infty, \cdot)$.

(ii) Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(a) $\mathbb{Z}(p^\infty) \cong \mathcal{E}_{p^\infty}$.

(b) Εάν $(G, \cdot)$ είναι μια ομάδα με $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} H_n$, όπου $H_n \in \mathbf{CSubg}(G)$,

$$\{e_G\} = H_0 \sqsubset H_1 \sqsubset \cdots \sqsubset H_j \sqsubset H_{j+1} \sqsubset \cdots$$

και $|H_n| = p^n, \forall n \in \mathbb{N}_0$, τότε $G \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$.

ΘΕΜΑ 8ο (i) Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων τής $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{25}$ που έχουν τάξη 5;

(ii) Να αποδειχθεί ότι $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8)/\langle 0, 4, [0]_8 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$.

ΘΕΜΑ 9ο (i) Εάν $n \in \mathbb{N}$, πόσα (σαφώς διακεκριμένα) πολυώνυμα βαθμού $\leq n$ περιέχονται εντός τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_2[\mathsf{X}]$;

(ii) Να αποδειχθεί ότι ο σταθερός όρος οιουδήποτε πολυωνύμου $\varphi(\mathsf{X}) \in \mathbb{Z}_4[\mathsf{X}]^\times$ ισούται είτε με το $[1]_4$ είτε με το $[3]_4$. Εν συνεχεία, να αποδειχθεί ότι μεταξύ των αντιστρεψίμων στοιχείων τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_4[\mathsf{X}]$ συγκαταλέγονται και (απειροπληθή) πολυώνυμα θετικού βαθμού.

ΘΕΜΑ 10ο Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Εάν υποτεθεί ότι $\mathfrak{m}_1, ..., \mathfrak{m}_n$ είναι n μεγιστικά ιδεώδη τού R με $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$ για οιουσδήποτε $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 = R$.

(ii) $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$.

(iii) $(\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{n-1}) + \mathfrak{m}_n = R$.

(iv) $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$.

Εν συνεχεία, υποτιθεμένου ότι ο R είναι μια απειροπληθής ακεραία περιοχή έχουσα πεπερασμένου πλήθους αντιστρέψιμα στοιχεία, να αποδειχθούν και τα ακόλουθα:

(v) $\{a \in R \mid a^m = 0 \text{ για κάποιον θετικό ακέραιο } m\} = \{0_R\}$.

(vi) Ο R διαθέτει άπειρα σαφώς διακεκριμένα μεγιστικά ιδεώδη.

(vii) Στην ειδική περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$, από το (vi) εξάγεται μια (επιπρόσθετη) απόδειξη για το ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.

- **Ζητείται να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**

- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.**

- **Η εξέταση χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος της οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θεωρητικά θέματα τής επιλογής τους (από τα 1-5), χωρίς να χρησιμοποιούν σημειώσεις ή βιβλία. Ύστερα από την αποπεράτωση αυτής τής διαδικασίας παραδίδουν τις κόλλες τους στον επιτηρητή και (προκειμένου να μεταβούν στο δεύτερο μέρος τής εξετάσεως) λαμβάνουν άλλες κόλλες.**

- **Στο δεύτερο μέρος οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θέματα τής επιλογής τους (από τα 6-10) που σχετίζονται με τις εφαρμογές, έχοντας εκ παραλλήλου τη δυνατότητα χρησιμοποιήσεως των σημειώσεων τού διδάξαντος ή/και των βιβλίων που διενεμήθησαν για την παρακολούθηση τού μαθήματος.**

- **Εντός των γραπτών οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**

- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**

- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!