Παράρτημα Α

Σχέσεις ισοδυναμίας και σχέσεις διατάξεως

Στο παράρτημα αυτό έχουν καταχωρισθεί κάποιες θεμελιώδεις έννοιες και ιδιότητες που αφορούν στις σχέσεις ισοδυναμίας και διατάξεως.

A.1 ΣΧΕΣΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

A.1.1 Ορισμός. Έστω A ένα σύνολο. Λέμε ότι μια διμελής σχέση $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ είναι
(i) **αυτοπαθής** (ή **ανακλαστική**) όταν $(x,x) \in \mathcal{R}$, $\forall x \in A$,

(ii) **συμμετρική** όταν για οιαδήποτε $x, y \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$(x,y) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (y,x) \in \mathcal{R},$$

(iii) **αντισυμμετρική** όταν για οιαδήποτε $x, y \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$(x,y) \in \mathcal{R} \ \text{ και } \ (y,x) \in \mathcal{R} \Longrightarrow x = y,$$

και (iv) **μεταβατική** όταν για οιαδήποτε $x, y, z \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$(x,y) \in \mathcal{R} \ \text{ και } \ (y,z) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x,z) \in \mathcal{R}.$$

A.1.2 Ορισμός. Έστω A ένα σύνολο. Μια διμελής σχέση $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ καλείται **σχέση ισοδυναμίας** επί τού A όταν είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική. Εάν η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί τού A και $x \in A$, τότε ορίζουμε ως **κλάση ισοδυναμίας** τού x **ως προς την** $\mathcal{R}$ το σύνολο

$$\boxed{[x] := \{\, y \in A \mid (x,y) \in \mathcal{R} \}.} \tag{A.1}$$

(Όταν εργαζόμαστε με διαφορετικές σχέσεις ισοδυναμίας (A.1) και υφίσταται κίνδυνος συγχύσεως τού τι οφείλει να σημαίνει το σύμβολο $[x]$, τότε γράφουμε $[x]_{\mathcal{R}}$ αντί τού $[x]$.) Κάθε στοιχείο τού $[x]$ καλείται **εκπρόσωπος** τής κλάσεως ισοδυναμίας $[x]$. Τέλος, ως

$$\boxed{A/\mathcal{R} := \{\, [x] \mid x \in A\}}$$

συμβολίζουμε το **σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας** (ως προς την $\mathcal{R}$).

A.1.3 Παρατήρηση. Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Εάν οι

$$\varnothing \neq \mathcal{R} \subseteq A \times A, \;\; \varnothing \neq \mathcal{R}' \subseteq A \times A$$

είναι δυο σχέσεις ισοδυναμίας επί τού A, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}'$.

(ii) $[x]_{\mathcal{R}} \subseteq [x]_{\mathcal{R}'}$, $\forall x \in A$.

Όταν $\mathcal{R} \subsetneqq \mathcal{R}'$, λέμε ότι η σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R}$ είναι **λεπτότερη** τής $\mathcal{R}'$ (ή ότι η $\mathcal{R}'$ είναι **αδρότερη** τής $\mathcal{R}$).

A.1.4 Σημείωση. (Εναλλακτικός συμβολισμός) Ενίοτε, για λόγους συμβολιστικής συντομίας, χρησιμοποιούμε στον ορισμό A.1.2 το σύμβολο “$\sim$” αντί τού $\mathcal{R}$ και γράφουμε $x \sim y$ αντί τού $(x,y) \in \mathcal{R}$, $x \nsim y$ αντί τού $(x,y) \notin \mathcal{R}$, $[x]_{\sim}$ αντί τού $[x]_{\mathcal{R}}$ και $A/\sim$ αντί τού $A/\mathcal{R}$ (ονομάζοντας το $A/\sim$ «σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας *ως προς την* “$\sim$”»).

A.1.5 Ορισμός. Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Ένα υποσύνολο $\mathfrak{X}$ τού δυναμοσυνόλου $\mathfrak{P}(A)$ τού A ονομάζεται **διαμελισμός**[1] τού συνόλου A όταν πληρούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

(i) $B \neq \varnothing$, $\forall B \in \mathfrak{X}$.

(ii) Για οιαδήποτε $B, B' \in \mathfrak{X}$ ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$B \cap B' \neq \varnothing \Longleftrightarrow B = B'.$$

(iii) $A = \bigcup\{\, B \mid B \in \mathfrak{X}\}$.

A.1.6 Παραδείγματα. Έστω A ένα μη κενό σύνολο.

(i) Το $\{A\}$ αποτελεί έναν διαμελισμό τού A.

(ii) Εάν $A \supsetneqq A' \neq \varnothing$, τότε το $\{A', A\smallsetminus A'\}$ είναι διαμελισμός τού A.

(iii) Εάν τα $\mathfrak{X}$ και $\mathfrak{X}'$ είναι δυο διαμελισμοί τού A, τότε και το

$$\mathfrak{Z} := \{C \mid \exists B \in \mathfrak{X},\; B' \in \mathfrak{X}' : \varnothing \neq B \cap B' = C\}$$

είναι διαμελισμός τού A.

[1] Αντ’ αυτού χρησιμοποιείται ενίοτε και ο όρος «διαμέριση».

Η επόμενη πρόταση μας πληροφορεί ότι κάθε σχέση ισοδυναμίας επί ενός μη κενού συνόλου προσδιορίζει (κατά φυσικό τρόπο) έναν διαμελισμό αυτού.

A.1.7 Πρόταση. *Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Εάν η "$\sim$" είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί τού A, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) $[x] \neq \varnothing$ *για κάθε* $x \in A$.

(ii) *Εάν* $x, y \in A$, *τότε* $x \sim y \Longleftrightarrow [x] = [y]$.

(iii) *Εάν* $x, y \in A$, *τότε* $x \nsim y \Longleftrightarrow [x] \cap [y] = \varnothing$.

(iv) *Το σύνολο* $A/\sim := \{\,[x] \mid x \in A\}$ *των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την "$\sim$" είναι ένας διαμελισμός τού A.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Έστω τυχόν $x \in A$. Τότε, επειδή $x \sim x$, έχουμε $x \in [x] \Rightarrow [x] \neq \varnothing$.

(ii) Εάν $x \sim y$ και $z \in [x]$, τότε, λόγω τής συμμετρικής και τής μεταβατικής ιδιότητας, έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} x \sim z \Rightarrow z \sim x \\ \text{και } x \sim y \end{array}\right\} \Longrightarrow z \sim y \Longrightarrow y \sim z \Longrightarrow z \in [x],$$

οπότε $[x] \subseteq [y]$. Εάν εναλλάξουμε τους ρόλους των x και y και εφαρμόσουμε την ίδια επιχειρηματολογία, τότε συμπεραίνουμε ότι $[y] \subseteq [x]$. Άρα τελικώς $[x] = [y]$. Και αντιστρόφως· εάν $[x] = [y]$, τότε $x \sim y$, διότι $y \in [y]$.

(iii) Εάν $x \nsim y$ και εάν υποθέσουμε ότι $\exists z \in [x] \cap [y]$, τότε, λόγω τής συμμετρικής και τής μεταβατικής ιδιότητας, έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} y \sim z \\ \text{και } x \sim z \Rightarrow z \sim x \end{array}\right\} \Longrightarrow y \sim x \Longrightarrow x \sim y.$$

Άτοπο! Άρα $[x] \cap [y] = \varnothing$. Και αντιστρόφως· εάν $[x] \cap [y] = \varnothing$ και εάν υποθέσουμε ότι $x \sim y$, τότε

$$x \sim y \underset{\text{(ii)}}{\Longleftrightarrow} [x] = [y] \Longrightarrow [x] \cap [y] = [x] \underset{\text{(i)}}{\neq} \varnothing.$$

Άτοπο! Κατά συνέπειαν, $x \nsim y$.

(iv) Από τα ανωτέρω (i), (ii) και (iii) έπεται ότι το σύνολο

$$A/\sim := \{\,[x] \mid x \in A\} \subseteq \mathfrak{P}(A)$$

πληροί τις συνθήκες (i) και (ii) τού ορισμού A.1.5. Από την άλλη μεριά, επειδή

$$[x] \subseteq A,\ \forall x \in A \Longrightarrow \bigcup\{\,[x] \mid x \in A\} \subseteq A$$

και *για κάθε* $z \in A$, $z \in [z] \in \bigcup\{\,[x] \mid x \in A\} \Longrightarrow A \subseteq \bigcup\{\,[x] \mid x \in A\}$, συμπεραίνουμε τελικώς ότι $A = \bigcup\{\,[x] \mid x \in A\}$, οπότε το $A/\sim$ πληροί *και* τη συνθήκη (iii) τού ορισμού A.1.5. $\square$

A.1.8 Παρατήρηση. Η επανειλημμένως και ποικιλοτρόπως χρησιμοποιούμενη έκφραση, ότι κανείς «ταυτίζει» συγκεκριμένα στοιχεία ενός δεδομένου μη κενού συνόλου A, τα οποία έχουν κάποιες «προδιαγεγραμμένες» ιδιότητες, ισοδυναμεί με τη μετάβαση από το A στο $A/\sim$, όπου η “$\sim$” είναι μια κατάλληλη σχέση ισοδυναμίας.

A.1.9 Παράδειγμα. Έστω $A = \{$όλοι οι άνθρωποι τής γης$\}$. Εάν ορίσουμε την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας “$\sim$” επί τού A:

$$x \sim y \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\text{οι } x \text{ και } y \text{ γεννήθηκαν στο ίδιο κράτος}),$$

τότε το σύνολο $A/\sim$ μας παρέχει μια παραμέτρηση των κρατών τής γης (καθότι κάθε κλάση ισοδυναμίας απαρτίζεται από τους κατοίκους τής γης τους γεννηθέντες σε ένα συγκεκριμένο κράτος).

A.1.10 Παράδειγμα. Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Εάν ορίσουμε την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας “$\sim$” επί τού A: $x \sim y \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x = y$, τότε η κλάση ισοδυναμίας $[x]$ οιουδήποτε $x \in A$ είναι το μονοσύνολο $\{x\}$. Άρα

$$A/\sim = \{\{x\} \mid x \in A\}, \;\; A = \bigcup \{\{x\} \mid x \in A\} = \{x \mid x \in A\}.$$

Προσοχή! Το $A/\sim$ είναι *υποσύνολο τού* $\mathfrak{P}(A)$ και δεν θα πρέπει κανείς να το συγχέει, εν προκειμένω, με το ίδιο το σύνολο A.

A.1.11 Ορισμός. (i) Η ένωση $A \cup B$ δυο συνόλων A και B ονομάζεται (**συνολοθεωρητική**) **αποσυνδετή ένωση** των A και B όταν $A \cap B = \varnothing$. (Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι τα A και B είναι *ξένα μεταξύ τους*.)

(ii) Έστω I ένα μη κενό σύνολο. Με τον όρο (**συνολοθεωρητική**) **αποσυνδετή ένωση** των μελών μιας οικογενείας συνόλων $(A_i)_{i \in I}$ εννοούμε την ένωση[2] $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ *όταν ισχύει* $A_i \cap A_j = \varnothing$, *για κάθε* $(i, j) \in I \times I$, $i \neq j$, ήτοι όταν τα μέλη τής προκειμένης οικογενείας είναι *ανά δύο* (δηλαδή *ανά ζεύγη*) *ξένα μεταξύ τους*. Για να επισημάνουμε ότι κάποιο δοθέν σύνολο A είναι η αποσυνδετή ένωση μιας οικογενείας συνόλων $(A_i)_{i \in I}$ κάνουμε χρήση τού ειδικού συμβολισμού

$$A = \coprod_{i \in I} A_i.$$

(iii) Γενικότερα, εάν το S είναι ένα σύνολο, τα στοιχεία τού οποίου είναι *σύνολα*, τότε η ένωση $\bigcup S := \{x \mid x \in A \text{ για κάποιο } A \in S\}$ καλείται (**συνολοθεωρητική**) **αποσυνδετή ένωση** (συμβολιζόμενη, ιδιαιτέρως, ως $\coprod S$) όταν τα στοιχεία τού S είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους.

[2] $\bigcup\limits_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$.

A.1.12 Σημείωση. Εάν η "$\sim$" είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί ενός μη κενού συνόλου A, τότε, όπως απεδείχθη στην πρόταση A.1.7, το $\{[x] \mid x \in A\}$ αποτελεί έναν διαμελισμό τού A. Παρότι πληρούνται οι συνθήκες A.1.7 (i)-(iv), το A *δεν είναι κατ' ανάγκην αποσυνδετή ένωση* των μελών τής οικογενείας $\{[x] \mid x \in A\}$, διότι δεν έχουμε αποκλείσει ρητώς την (ενδεχόμενη) *επανάληψη* ορισμένων εξ αυτών! Ως εκ τούτου, για να γραφεί το A ως αποσυνδετή ένωση απαιτείται να περιορισθούμε σε ένα υποσύνολό του $\widehat{A}$ με την εξής ιδιότητα: *Για οιαδήποτε στοιχεία* $x, y \in \widehat{A}$ *ισχύει η συνεπαγωγή* $x \neq y \Longrightarrow [x] \neq [y]$. Εν τοιαύτη περιπτώσει,

$$A = \coprod \{[x] \mid x \in \widehat{A}\}.$$

Κάθε υποσύνολο τού A που έχει αυτήν την ιδιότητα καλείται **πλήρες σύστημα εκπροσώπων τού** A **ως προς την** "$\sim$".

Δοθέντος ενός διαμελισμού ενός μη κενού συνόλου είναι δυνατόν να ορισθεί επ' αυτού (τού συνόλου) μια σχέση ισοδυναμίας έχουσα τον εν λόγω διαμελισμό ως σύνολο των αντιστοίχων κλάσεων ισοδυναμίας.

A.1.13 Πρόταση. *Έστω* $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{P}(A)$ *ένας διαμελισμός ενός μη κενού συνόλου* A. *Επί τού* A *ορίζουμε τη διμελή σχέση* " $\sim_{\mathfrak{X}}$ " *ως ακολούθως*:

$$x \sim_{\mathfrak{X}} y \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\exists B \in \mathfrak{X} : \text{αμφότερα τα } x \text{ και } y \text{ ανήκουν στο } B).$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) *Η* " $\sim_{\mathfrak{X}}$ " *είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί τού* A.

(ii) $A/\sim_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Κατά το A.1.5 (iii) υπάρχει για κάθε $x \in A$ κάποιο $B \in \mathfrak{X}$ με $x \in B$, οπότε $x \sim_{\mathfrak{X}} x$ και η " $\sim_{\mathfrak{X}}$ " είναι αυτοπαθής. Το ότι η " $\sim_{\mathfrak{X}}$ " είναι και συμμετρική είναι προφανές από τον ορισμό της. Υπολείπεται να αποδειχθεί ότι η " $\sim_{\mathfrak{X}}$ " είναι μεταβατική. Προς τούτο θεωρούμε $x, y, z \in A$ για τα οποία ισχύουν οι $x \sim_{\mathfrak{X}} y$ και $y \sim_{\mathfrak{X}} z$. Εξ ορισμού, υπάρχουν $B, B' \in \mathfrak{X}$ με $x, y \in B$ και $y, z \in B'$. Επειδή $y \in B \cap B'$, έχουμε $B \cap B' \neq \varnothing$, οπότε $B = B'$ (δυνάμει τού A.1.5 (ii)). Επομένως, $x, z \in B \Rightarrow x \sim_{\mathfrak{X}} z$.

(ii) Έστω τυχόν $x \in A$. Θεωρούμε την κλάση ισοδυναμίας του $[x]_{\sim_{\mathfrak{X}}} \in A/\sim_{\mathfrak{X}}$. Κατά το A.1.5 (iii) υπάρχει κάποιο $B \in \mathfrak{X}$ με $x \in B$. Προφανώς, για οιοδήποτε $y \in A$ ισχύουν οι αμφίπλευρες συνεπαγωγές

$$\begin{aligned} & y \in [x]_{\sim_{\mathfrak{X}}} \Leftrightarrow x \sim_{\mathfrak{X}} y \ \ (\text{εξ ορισμού}) \Leftrightarrow \exists B' \in \mathfrak{X} : x, y \in B \ \ (\text{εξ ορισμού}) \\ & \Leftrightarrow y \in B \ \ (\text{διότι } x \in B \cap B' \Rightarrow B \cap B' \neq \varnothing \underset{\text{A.1.5 (ii)}}{\Longrightarrow} B = B'). \end{aligned}$$

Άρα $[x]_{\sim_{\mathfrak{X}}} = B \in \mathfrak{X}$ και, ως εκ τούτου, $A/\sim_{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{X}$.

Και αντιστρόφως· εάν $B \in \mathfrak{X}$, τότε (σύμφωνα με το A.1.5 (i)) υπάρχει κάποιο $x \in B$. Χρησιμοποιώντας τήν προηγηθείσα επιχειρηματολογία (όταν δείχναμε τον εγκλεισμό "$\subseteq$") καταλήγουμε στο ότι $B = [x]_{\sim_{\mathfrak{X}}}$. Άρα ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $A/\sim_{\mathfrak{X}} \supseteq \mathfrak{X}$. $\square$

Η «ταύτιση» των σχέσεων ισοδυναμίας των οριζομένων επί ενός μη κενού συνόλου και των διαμελισμών αυτού υλοποιείται μέσω μιας κατάλληλης *αμφιρρίψεως* ως ακολούθως:

A.1.14 Θεώρημα. (Αντιστοιχία μεταξύ σχέσεων ισοδυναμίας και διαμελισμών) *Έστω A ένα μη κενό σύνολο. Τότε η απεικόνιση*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{σχέσεις ισοδυναμίας} \\ \text{οριζόμενες επί τού } A \end{array} \right\} \xrightarrow{\Psi} \left\{ \begin{array}{c} \text{διαμελισμοί} \\ \text{τού } A \end{array} \right\}$$

η οριζόμενη από τον τύπο

$$\boxed{\sim \longmapsto \Psi(\sim) := A/ \sim}$$

είναι μια αμφίρριψη έχουσα την απεικόνιση

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{διαμελισμοί} \\ \text{τού } A \end{array} \right\} \xrightarrow{\Upsilon} \left\{ \begin{array}{c} \text{σχέσεις ισοδυναμίας} \\ \text{οριζόμενες επί τού } A \end{array} \right\}$$

την οριζόμενη από τον τύπο

$$\boxed{\mathfrak{X} \longmapsto \Upsilon(\mathfrak{X}) := \sim_{\mathfrak{X}}}$$

ως αντίστροφό της.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδειχθεί ότι οι συνθέσεις $\Upsilon \circ \Psi$ και $\Psi \circ \Upsilon$ είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις. Έστω "$\sim$" *τυχούσα* σχέση ισοδυναμίας επί τού A. Τότε

$$\Upsilon(\Psi(\sim)) = \Upsilon(A/ \sim) = \sim_{(A/\sim)} .$$

Θα αποδείξουμε ότι η " $\sim_{(A/\sim)}$ " είναι η αρχικώς θεωρηθείσα " $\sim$ " (απ' όπου έπεται ότι η $\Upsilon \circ \Psi$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση). Προς τούτο είναι αρκετό να ελεγχθεί ότι για οιαδήποτε $x, y \in A$ ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$x \sim y \Longleftrightarrow x \sim_{(A/\sim)} y.$$

Εάν $x \sim y$, τότε (κατά το A.1.7 (ii)) $[x] = [y]$, οπότε θεωρώντας ως B την κλάση ισοδυναμίας $[x] = [y] \in A/ \sim$ αμφότερα τα x και y ανήκουν στο B, πράγμα που σημαίνει ότι $x \sim_{(A/\sim)} y$. Και αντιστρόφως· εάν $x \sim_{(A/\sim)} y$, τότε υπάρχει κάποιο $z \in A$, τέτοιο ώστε αμφότερα τα x και y να ανήκουν στην κλάση ισοδυναμίας του $(B :=)\ [z] \in A/ \sim$. Ως εκ τούτου, $[x] = [z] = [y]$, οπότε $x \sim y$.

Εν συνεχεία θεωρούμε *τυχόντα* διαμελισμό $\mathfrak{X}$ τού A. Προφανώς,

$$\Psi(\Upsilon(\mathfrak{X})) = \Psi(\sim_{\mathfrak{X}}) = A/ \sim_{\mathfrak{X}} .$$

Σύμφωνα με το (ii) τής προτάσεως A.1.13 το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $A/ \sim_{\mathfrak{X}}$ είναι ο αρχικώς θεωρηθείς διαμελισμός $\mathfrak{X}$ τού A. Άρα η $\Psi \circ \Upsilon$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση. □

A.2 ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ ΚΑΙ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ

A.2.1 Ορισμός. Έστω $\mathfrak{X}$ ένα μη κενό σύνολο. Μια διμελής σχέση $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ λέγεται **σχέση μερικής διατάξεως** (ή απλώς **μερική διάταξη**) επί τού $\mathfrak{X}$ όταν η $\mathcal{R}$ είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική (βλ. A.1.1). Εν τοιαύτη περιπτώσει το ζεύγος $(\mathfrak{X}, \mathcal{R})$ ονομάζεται **μερικώς διατεταγμένο σύνολο**. Συνήθως, αντί τού $\mathcal{R}$, για μια σχέση μερικής διατάξεως χρησιμοποιείται ο συμβολισμός "$\preceq$". (Για τη σύγκριση στοιχείων τού $\mathfrak{X}$ είθισται να χρησιμοποιούνται αμφότεροι οι συμβολισμοί "$\preceq$" και "$\prec$", όπου $x \prec y$ αποτελεί συντομογραφία τού ($x \preceq y$ και $x \neq y$)). Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathfrak{X}, \preceq)$ λέγεται **ολικώς** (ή **γραμμικώς**) **διατεταγμένο σύνολο** (και η "$\preceq$" **σχέση ολικής διατάξεως**) όταν όλα τα στοιχεία τού $\mathfrak{X}$ είναι μεταξύ τους ανά δύο *συγκρίσιμα*, δηλαδή όταν

$$(\forall x, y \in \mathfrak{X}) \ \ [x \preceq y \ \text{ ή } \ y \preceq x] \, .$$

A.2.2 Παραδείγματα. (i) Έστω Ω ένα σύνολο. Το $(\mathfrak{P}(\Omega), \subseteq)$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Σημειωτέον ότι το $(\mathfrak{P}(\Omega), \subseteq)$ δεν είναι ολικώς διατεταγμένο όταν $\mathrm{card}(\Omega) \geq 2$.

(ii) Όχι μόνον το δυναμοσύνολο δοθέντος συνόλου, αλλά -γενικότερα- *κάθε* σύνολο με *σύνολα* ως στοιχεία του καθίσταται μερικώς διατεταγμένο ως προς τη σχέση εγκλεισμού "$\subseteq$".

(iii) Τα ζεύγη $(\mathfrak{X}, \leq)$, όπου $\mathfrak{X} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ και "$\leq$" η συνήθης αριθμητική διάταξη, αποτελούν παραδείγματα ολικώς διατεταγμένων συνόλων.

(iv) Έστω $(\mathfrak{X}, \preceq)$ τυχόν μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Εάν το $\mathfrak{X}$ εφοδιασθεί με την *ανάστροφη* διμελή σχέση $x \succeq y \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} y \preceq x, \ \forall (x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, τότε το $(\mathfrak{X}, \succeq)$ είναι ωσαύτως μερικώς διατεταγμένο σύνολο, το λεγόμενο **ανάστροφο τού** $(\mathfrak{X}, \preceq)$.

A.2.3 Ορισμός. Έστω ότι το $(\mathfrak{X}, \preceq)$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Εάν $(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ με $x \prec y$, τότε το x λέγεται **προηγούμενο τού** y και το y **επόμενο τού** x (ως προς την "$\preceq$"). Εν τοιαύτη περιπτώσει το y λέγεται, ιδιαιτέρως, **αμέσως επόμενο τού** x και το x **αμέσως προηγούμενο τού** y (ως προς την "$\preceq$") όταν

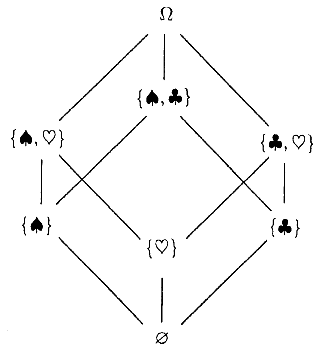
$$\nexists z \in \mathfrak{X} : x \prec z \prec y.$$

A.2.4 Ορισμός. Έστω $(\mathfrak{X}, \preceq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Όταν το $\mathfrak{X}$ είναι πεπερασμένο, τότε είθισται να «οπτικοποιούμε» τον τρόπο διατάξεως των στοιχείων του μέσω ενός ειδικού διαγράμματος, τού λεγομένου **διαγράμματος τού Hasse**[3] **για το** $(\mathfrak{X}, \preceq)$. Αυτό κατασκευάζεται ως ακολούθως: Όλα τα στοιχεία τού $\mathfrak{X}$ τοποθετούνται στο επίπεδο σχεδιάσεως και για κάθε ζεύγος $(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, όπου το y είναι αμέσως επόμενο τού x (ως προς την "$\preceq$"), τα x και y συνδέονται με ένα ευθύγραμμο τμήμα, ενώ το y τίθεται *υψηλότερα* τού x. Κατ' αυτόν τον τρόπο, για κάθε ζεύγος $(z, w) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$, όπου το w είναι επόμενο τού z (ως προς την "$\preceq$"), τα

[3] Προς τιμήν τού Γερμανού μαθηματικού Helmut Hasse (1898-1979) ο οποίος εισήγαγε και χρησιμοποίησε αυτά τα διαγράμματα.

z και w συνδέονται εντός τού διαγράμματος μέσω διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων.

A.2.5 Παράδειγμα. Το διάγραμμα τού Hasse για το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathfrak{P}(\Omega), \subseteq)$, όπου $\Omega := \{\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit\}$, είναι το



A.2.6 Ορισμός. Έστω ότι το $(\mathfrak{X}, \preceq)$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και ότι $\varnothing \neq \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}$. Τότε το $(\mathfrak{Y}, \preceq|_{\mathfrak{Y}})$ αποτελεί μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς την " $\preceq|_{\mathfrak{Y}}$ ", όπου $\preceq|_{\mathfrak{Y}} := \preceq \cap (\mathfrak{Y} \times \mathfrak{Y})$ **η μερική διάταξη η επαγομένη επί τού** $\mathfrak{Y}$. (Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι το $(\mathfrak{Y}, \preceq|_{\mathfrak{Y}})$ είναι **μερικώς διατεταγμένο υποσύνολο τού** $(\mathfrak{X}, \preceq)$. Ενίοτε γράφουμε απλώς " $\preceq$ " αντί τού " $\preceq|_{\mathfrak{Y}}$ ", προσέχοντας -εκ παραλλήλου- να είναι κατανοητό το τι υπονοείται από τα εκάστοτε συμφραζόμενα.)

A.2.7 Ορισμός. Έστω ότι τα $(\mathfrak{X}_1, \preceq_1)$ και $(\mathfrak{X}_2, \preceq_2)$ είναι δυο μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Λέμε ότι μια απεικόνιση $f : \mathfrak{X}_1 \longrightarrow \mathfrak{X}_2$ είναι **ισότονη** (ή ότι *διατηρεί* τις μερικές διατάξεις αυτών) όταν για οιαδήποτε $x, y \in \mathfrak{X}_1$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$x \preceq_1 y \Longrightarrow f(x) \preceq_2 f(y),$$

και ότι είναι **αντίτονη** (ή ότι *αντιστρέφει* τις μερικές διατάξεις αυτών) όταν για οιαδήποτε $x, y \in \mathfrak{X}_1$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$x \preceq_1 y \Longrightarrow f(y) \preceq_2 f(x).$$

A.2.8 Παραδείγματα. Έστω Ω ένα σύνολο και έστω $X \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Θεωρούμε το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathfrak{P}(\Omega), \subseteq)$ (βλ. A.2.2 (i)). Η απεικόνιση

$$f : \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{P}(\Omega), \;\; A \longmapsto f(A) := A \cap X,$$

είναι ισότονη, ενώ η $f : \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow \mathfrak{P}(\Omega), \;\; A \longmapsto f(A) := \Omega \smallsetminus A$, είναι αντίτονη.

A.2.9 Ορισμός. Έστω ότι τα $(\mathfrak{X}_1, \preceq_1)$ και $(\mathfrak{X}_2, \preceq_2)$ είναι δυο μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Μια *ισότονη αμφίρριψη* $f : \mathfrak{X}_1 \longrightarrow \mathfrak{X}_2$ έχουσα *ισότονη αντίστροφο* καλείται **ισομορφισμός μερικώς διατεταγμένων συνόλων**. Λέμε ότι δυο μερικώς διατεταγμένα σύνολα $(\mathfrak{X}_1, \preceq_1)$ και $(\mathfrak{X}_2, \preceq_2)$ είναι **ισόμορφα** όταν υφίσταται ένας τέτοιος ισομορφισμός μεταξύ αυτών.

A.2.10 Ορισμός. Έστω $(\mathfrak{X}, \preceq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

(i) Ένα στοιχείο $x \in \mathfrak{X}$ καλείται **μεγιστικό** (ή **μεγιστοτικό**) **στοιχείο** τού $\mathfrak{X}$ (ως προς την "$\preceq$") όταν δεν είναι προηγούμενο κανενός στοιχείου τού $\mathfrak{X}$, ήτοι όταν για κάθε στοιχείο $y \in \mathfrak{X}$ για το οποίο ισχύει $x \preceq y$ έχουμε $x = y$.

(ii) Ένα στοιχείο $x \in \mathfrak{X}$ καλείται **ελαχιστικό** (ή **ελαχιστοτικό**) **στοιχείο** τού $\mathfrak{X}$ (ως προς την "$\preceq$") όταν δεν είναι επόμενο κανενός στοιχείου τού $\mathfrak{X}$, ήτοι όταν για κάθε στοιχείο $y \in \mathfrak{X}$ για το οποίο ισχύει $y \preceq x$ έχουμε $x = y$.

A.2.11 Ορισμός. Έστω $(\mathfrak{X}, \preceq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

(i) Ένα στοιχείο $x \in \mathfrak{X}$ καλείται **μέγιστο στοιχείο** τού $\mathfrak{X}$ (ως προς την "$\preceq$") όταν

$$y \preceq x, \ \ \forall y \in \mathfrak{X}.$$

(ii) Ένα στοιχείο $x \in \mathfrak{X}$ καλείται **ελάχιστο στοιχείο** τού $\mathfrak{X}$ (ως προς την "$\preceq$") όταν

$$x \preceq y, \ \ \forall y \in \mathfrak{X}.$$

A.2.12 Παραδείγματα. Υπάρχουν μερικώς διατεταγμένα σύνολα χωρίς μέγιστο ή/και ελάχιστο στοιχείο. Επί παραδείγματι, το $\left\{ \frac{1}{n} \middle| \, n \in \mathbb{N} \right\}$ (ως προς τη συνήθη διάταξη των ρητών) έχει το 1 ως μέγιστο στοιχείο αλλά δεν έχει ελάχιστο. Επίσης, το $\mathfrak{P}(\Omega) \smallsetminus \{\Omega, \varnothing\}$, όπου $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, δεν διαθέτει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο (ως προς τη σχέση εγκλεισμού "$\subseteq$").

A.2.13 Πρόταση. *Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathfrak{X}, \preceq)$ διαθέτει το πολύ ένα μέγιστο και το πολύ ένα ελάχιστο στοιχείο. (Δηλαδή όταν υπάρχει μέγιστο (και αντιστοίχως, ελάχιστο) στοιχείο τού $(\mathfrak{X}, \preceq)$, τότε αυτό είναι μονοσημάντως ορισμένο[4].)*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathfrak{X}, \preceq)$ διέθετε τα $x, x' \in \mathfrak{X}$ ως μέγιστα στοιχεία του, τότε $x = x'$. Πράγματι· εξ ορισμού, $y \preceq x$ για κάθε $y \in \mathfrak{X}$ και $y \preceq x'$ για κάθε $y \in \mathfrak{X}$. Εφαρμόζοντας την πρώτη εξ αυτών των συνθηκών για $y = x'$ και τη δεύτερη για $y = x$ λαμβάνουμε $x' \preceq x$ και $x \preceq x'$. Λόγω τής αντισυμμετρικής ιδιότητας τής "$\preceq$" συνάγουμε ότι $x = x'$. Η απόδειξη τής μοναδικότητας τού ελαχίστου στοιχείου (όταν αυτό υπάρχει) είναι πανομοιότυπη. $\square$

A.2.14 Παρατήρηση. (i) Εάν ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathfrak{X}, \preceq)$ διαθέτει μέγιστο (και αντιστοίχως, ελάχιστο) στοιχείο, τότε αυτό είναι προφανώς *το μοναδικό* μεγιστικό (και αντιστοίχως, *το μοναδικό* ελαχιστικό) στοιχείο του (ως προς την "$\preceq$"). Όμως ένα μεγιστικό (και αντιστοίχως, ένα ελαχιστικό) στοιχείο δεν είναι κατ' ανάγκην μέγιστο (και αντιστοίχως, ελάχιστο) στοιχείο. (Πρβλ. B.2.33 (i).)

(ii) Προφανώς, κάθε *ολικώς* διατεταγμένο *πεπερασμένο* σύνολο διαθέτει πάντοτε *και* μέγιστο *και* ελάχιστο στοιχείο. Ωστόσο, ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο που διαθέτει *και* μέγιστο *και* ελάχιστο στοιχείο δεν είναι απαραιτήτως πεπερασμένο.

[4] Αυτό είθισται να συμβολίζεται ως $\max_{\preceq}(\mathfrak{X})$ (και αντιστοίχως, ως $\min_{\preceq}(\mathfrak{X})$) ή απλώς ως $\max(\mathfrak{X})$ (και αντιστοίχως, ως $\min(\mathfrak{X})$) όταν υπονοείται ποια είναι η "$\preceq$".

(Παράδειγμα: Το κλειστό διάστημα $[0,1]$ εντός τού $\mathbb{R}$ είναι ένα απειροσύνολο το οποίο έχει το 0 ως ελάχιστο και με το 1 ως μέγιστο στοιχείο του ως προς τη συνήθη διάταξη των πραγματικών αριθμών.) Επίσης, σε *ολικώς* διατεταγμένα σύνολα οι έννοιες μεγιστικό και μέγιστο στοιχείο (και αντιστοίχως, οι έννοιες ελαχιστικό και ελάχιστο στοιχείο) συμπίπτουν.

Α.2.15 Ορισμός. Έστω ότι το $(\mathfrak{X}, \preceq)$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και το $\mathfrak{Y}$ ένα μη κενό υποσύνολο τού $\mathfrak{X}$.

(i) Ένα στοιχείο $x \in \mathfrak{X}$ καλείται **άνω φράγμα** τού $\mathfrak{Y}$ εντός τού $\mathfrak{X}$ ως προς την "$\preceq$" όταν $y \preceq x, \forall y \in \mathfrak{Y}$.

(ii) Ένα στοιχείο $x \in \mathfrak{X}$ καλείται **κάτω φράγμα** τού $\mathfrak{Y}$ εντός τού $\mathfrak{X}$ ως προς την "$\preceq$" όταν $x \preceq y, \forall y \in \mathfrak{Y}$. Ως

$$\mathrm{A\Phi}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X}) := \{x \in \mathfrak{X} \,|\, x \text{ άνω φράγμα τού } \mathfrak{Y} \text{ (εντός τού } \mathfrak{X}) \text{ ως προς την } \text{“} \preceq \text{”}\}$$

συμβολίζουμε το σύνολο των άνω φραγμάτων τού $\mathfrak{Y}$ και ως

$$\mathrm{K\Phi}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X}) := \{x \in \mathfrak{X} \,|\, x \text{ κάτω φράγμα τού } \mathfrak{Y} \text{ (εντός τού } \mathfrak{X}) \text{ ως προς την } \text{“} \preceq \text{”}\}$$

το σύνολο των κάτω φραγμάτων τού $\mathfrak{Y}$ ως προς την "$\preceq$". Όταν $\mathrm{A\Phi}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X}) \neq \varnothing$ (και αντιστοίχως, $\mathrm{K\Phi}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X}) \neq \varnothing$), τότε λέμε ότι το $\mathfrak{Y}$ είναι **φραγμένο εκ των άνω** (και αντιστοίχως, **φραγμένο εκ των κάτω**).

(iii) Εάν το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathrm{A\Phi}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X}), \preceq|_{\mathrm{A\Phi}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})})$ έχει ελάχιστο στοιχείο, τότε αυτό καλείται **ελάχιστο άνω φράγμα** (ή **supremum**) **τού** $\mathfrak{Y}$ εντός τού $\mathfrak{X}$.

(iv) Εάν το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathrm{K\Phi}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X}), \preceq|_{\mathrm{K\Phi}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})})$ έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό καλείται **μέγιστο κάτω φράγμα** (ή **infimum**) **τού** $\mathfrak{Y}$ εντός τού $\mathfrak{X}$.

Α.2.16 Πρόταση. *Έστω $(\mathfrak{X}, \preceq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και έστω $\mathfrak{Y}$ ένα μη κενό υποσύνολο τού $\mathfrak{X}$. Όταν υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα (και αντιστοίχως, μέγιστο κάτω φράγμα) τού $\mathfrak{Y}$ εντός τού $\mathfrak{X}$ ως προς την "$\preceq$", τότε αυτό είναι μονοσημάντως ορισμένο*[5].

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αυτή έπεται άμεσα από την πρόταση Α.2.13. □

Α.2.17 Παραδείγματα. Μία από τις βασικότερες ιδιότητες τού $(\mathbb{R}, \leq)$ είναι ότι κάθε $\varnothing \neq \mathfrak{Y} \subseteq \mathbb{R}$ που είναι φραγμένο εκ των άνω διαθέτει ελάχιστο άνω φράγμα. Για το $(\mathbb{Q}, \leq)$ αυτό δεν είναι εν γένει αληθές. Επί παραδείγματι, το $\mathfrak{Y} := \left\{q \in \mathbb{Q} \;\middle|\; q^2 \leq 2\right\}$ ναι μεν είναι και εκ των άνω και εκ των κάτω φραγμένο αλλά δεν διαθέτει ούτε ελάχιστο άνω φράγμα ούτε μέγιστο κάτω φράγμα *εντός τού συνόλου* $\mathbb{Q}$! (Για ένα άλλο ενδιαφέρον παράδειγμα αριθμοθεωρητικής φύσεως βλ. Β.2.33 (ii).)

[5]Αυτό είθισται να συμβολίζεται ως $\sup_{\preceq}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})$ (και αντιστοίχως, ως $\inf_{\preceq}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})$) ή απλώς ως $\sup(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})$ (και αντιστοίχως, ως $\inf(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})$) όταν υπονοείται ποια είναι η "$\preceq$".

A.2.18 Ορισμός. Έστω $(\mathfrak{X}, \preceq)$ ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

(i) Κάθε μη κενό υποσύνολο $\mathfrak{Y}$ τού $\mathfrak{X}$ που είναι τέτοιο, ώστε το $(\mathfrak{Y}, \preceq|_{\mathfrak{Y}})$ να αποτελεί *ολικώς* διατεταγμένο σύνολο, καλείται **αλυσίδα** τού $(\mathfrak{X}, \preceq)$.

(ii) Λέμε ότι το $(\mathfrak{X}, \preceq)$ είναι **επαγωγικώς διατεταγμένο** όταν κάθε αλυσίδα του είναι φραγμένη εκ των άνω.

A.2.19 Παραδείγματα. (i) Το $(\mathbb{R}, \leq)$, όπου "$\leq$" είναι η συνήθης διάταξη των πραγματικών αριθμών, είναι επαγωγικώς διατεταγμένο.

(ii) Το $(\mathfrak{P}(\Omega), \subseteq))$, όπου Ω ένα μη κενό σύνολο, δεν είναι κατ' ανάγκην επαγωγικώς διατεταγμένο. Ωστόσο, κάθε υποσύνολο τού $\mathfrak{P}(\Omega)$ τής μορφής $\{B_1, B_2, B_3, ...\}$, όπου $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \cdots$, είναι επαγωγικώς διατεταγμένο[6] (ως προς την "$\subseteq$").

Το ακόλουθο *λήμμα τού Zorn*[7] εφαρμόζεται σε μια πληθώρα αποδείξεων θεωρημάτων σχετιζομένων με την ύπαρξη μεγιστικών στοιχείων (ως προς δεδομένες σχέσεις διατάξεως):

A.2.20 Λήμμα τού Zorn. *Κάθε επαγωγικώς διατεταγμένο σύνολο διαθέτει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

A.2.21 Σημείωση. Στο πλαίσιο τής Θεωρίας Συνόλων αποδεικνύεται (με τη βοήθεια τής λεγομένης *υπερπεπερασμένης επαγωγής*) ότι το λήμμα τού Zorn είναι ισοδύναμο με το *αξίωμα τής επιλογής*. (Προϋποθέτουμε ότι το τελευταίο συγκαταλέγεται στα λοιπά[8] αξιώματα τής Θεωρίας Συνόλων που χρησιμοποιούμε σιωπηρώς[9].)

A.2.22 Ορισμός. Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathfrak{X}, \preceq)$ καλείται **σύνδεσμος** όταν για οιαδήποτε στοιχεία $x, y \in \mathfrak{X}$ υπάρχει τόσον το μέγιστο κάτω φράγμα όσον και το ελάχιστο άνω φράγμα τού $\{x, y\}$ εντός τού $\mathfrak{X}$ ως προς την "$\preceq$". Τα φράγματα αυτά δηλούνται μέσω των συμβόλων $x \wedge y$ και $x \vee y$, αντιστοίχως.

A.2.23 Παραδείγματα. (i) Έστω Ω ένα σύνολο. Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathfrak{P}(\Omega), \subseteq)$ (βλ. A.2.2 (i)) είναι σύνδεσμος. Μάλιστα, για οιαδήποτε $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$ έχουμε $A \wedge B = A \cap B,\ A \vee B = A \cup B$.

(ii) Κάθε *ολικώς* διατεταγμένο σύνολο $(\mathfrak{X}, \preceq)$ (όπως, π.χ., τα ζεύγη τα αναφερόμενα στο (iii) τού εδαφίου A.2.2) είναι αυτομάτως σύνδεσμος. Εν προκειμένω, εάν

[6] Σημειωτέον ότι *το ίδιο το* $\{B_1, B_2, B_3, \ldots\}$ έχει το $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \mathfrak{P}(\Omega)$ ως άνω φράγμα του.

[7] Η ύπαρξη μεγιστικού στοιχείου αποδίδεται συνήθως στον Max August Zorn (1906-1993) λόγω τής εκ μέρους του δημοσιεύσεώς της σε ένα άρθρο στο περιοδικό Bulletin of A.M.S. το 1935 (με τίτλο: *A remark on method of trasfinite algebra*). Ωστόσο, αυτό το «λήμμα» (ή ισοδύναμες παραλλαγές του) ήταν χρόνια πριν γνωστό από εργασίες των μαθηματικών R.L. Moore (1882-1974) και K. Kuratowski (1896-1980).

[8] Πρόκειται για τα αξιώματα των Zermelo και Fraenkel, ήτοι τα αξιώματα: (i) τής εκτάσεως, (ii) τής εξειδικεύσεως, (iii) των (μη διατεταγμένων) ζευγών, (iv) τής ενώσεως, (v) τού δυναμοσυνόλου, (vi) τού απείρου, (vii) τής αντικαταστάσεως και (viii) τής κανονικότητας (Πρβλ. P. Halmos: *Naive Set Theory*, Springer-Verlag, 1960. Αυτό το κλασικό σύγγραμμα κυκλοφορεί και στα ελληνικά, σε μετάφραση Γ. Κολέτσου, από τις εκδόσεις «Σφαίρα-Εκκρεμές», υπό τον τίτλο *Αφελής Συνολοθεωρία*, Αθήνα, 2002.)

[9] Χρησιμοποιούμε το σύστημα αξιωμάτων ZF+AC (και αναφερόμαστε μόνον ακροθιγώς σε NBG-«κλάσεις», ήτοι *κλάσεις* υπό την έννοια τής *ευρύτερης* Θεωρίας των von Neumann, Bernays και Gödel, όταν, π.χ., γίνεται λόγος για την οικογένεια *όλων* των ομάδων, των ημιομάδων κ.ά. Πρβλ. 2.1.4 και 2.4.22).

$x, y \in \mathfrak{X}$ και $x \preceq y$, τότε $x \wedge y = x$ και $x \vee y = y$.

(iii) Το μερικώς (αλλά όχι και ολικώς) διατεταγμένο ζεύγος $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \preceq)$, όπου

$$\left[f \preceq g \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} [f(x) \leq g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}] \right],\ \forall (f, g) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}},$$

αποτελεί έναν σύνδεσμο, όπου $f \wedge g$ και $f \vee g$ είναι οι εξής πραγματικές συναρτήσεις:

$$(f \wedge g)(x) := \min\{f(x), g(x)\},\ (f \vee g)(x) := \max\{f(x), g(x)\},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(iv) Έστω $(\mathfrak{X}, \preceq)$ τυχών σύνδεσμος. Τότε το ανάστροφο μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathfrak{X}, \succeq)$ (το ορισθέν στο A.2.2 (v)) είναι ωσαύτως σύνδεσμος (καθότι η "$\succeq$" συνεπιφέρει την εναλλαγή των ρόλων των "$\wedge$" και "$\vee$") και καλείται **ανάστροφος τού συνδέσμου** $(\mathfrak{X}, \preceq)$.

A.2.24 Σημείωση. (i) Εάν το $(\mathfrak{X}, \preceq)$ είναι ένας σύνδεσμος και $x, y, z \in \mathfrak{X}$, τότε είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι αυτός έχει τις εξής ιδιότητες:

	Ιδιότητες	**σε συμβολική γραφή**
1.	ταυτοδυναμία	$x \wedge x = x, \quad x \vee x = x$
2.	μεταθετικότητα	$x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x$
3.	προσεταιριστικότητα	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
4.	απορροφητικότητα	$x \wedge (x \vee y) = x, \ x \vee (x \wedge y) = x$

(ii) Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ τού υποκειμένου συνόλου $\mathfrak{X}$ ενός συνδέσμου $(\mathfrak{X}, \preceq)$ διαθέτει μέγιστο κάτω φράγμα

$$x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n := x_1 \wedge (x_2 \wedge ... \wedge x_n)$$

και ελάχιστο άνω φράγμα

$$x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n := x_1 \vee (x_2 \vee ... \vee x_n)$$

εντός αυτού. (Επαγωγικός ορισμός.) Ωστόσο, όταν το $\mathfrak{X}$ είναι απειροσύνολο, ένα άπειρο υποσύνολό του $\mathfrak{Y}$ δεν διαθέτει κατ' ανάγκην αυτά τα φράγματα.

(iii) Ένας σύνδεσμος $(\mathfrak{X}, \preceq)$ καλείται **πλήρης σύνδεσμος** όταν *κάθε* υποσύνολό του $\mathfrak{Y}$ διαθέτει μέγιστο κάτω φράγμα και ελάχιστο άνω φράγμα. (Εν τοιαύτη περιπτώσει τα φράγματα αυτά συμβολίζονται ως $\bigwedge \mathfrak{Y}$ και $\bigvee \mathfrak{Y}$, αντιστοίχως.)

A.2.25 Ορισμός. Έστω $(\mathfrak{X}, \preceq)$ ένας σύνδεσμος και έστω $\mathfrak{Y}$ ένα μη κενό υποσύνολο τού $\mathfrak{X}$. Τότε το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\mathfrak{Y}, \preceq)$ (ή -ακριβέστερα- το $(\mathfrak{Y}, \preceq|_{\mathfrak{Y}})$, πρβλ. A.2.6) καλείται **υποσύνδεσμος τού** $(\mathfrak{X}, \preceq)$ όταν για οιαδήποτε $x, y \in \mathfrak{Y}$ έχουμε $x \wedge y \in \mathfrak{Y}$ και $x \vee y \in \mathfrak{Y}$.

Α.2.26 Ορισμός. Έστω ότι τα $(\mathfrak{X}_1, \preceq_1)$ και $(\mathfrak{X}_2, \preceq_2)$ είναι δυο σύνδεσμοι. Ένας ισομορφισμός (των υποκειμένων) μερικώς διατεταγμένων συνόλων $f : \mathfrak{X}_1 \longrightarrow \mathfrak{X}_2$ (υπό την έννοια τού ορισμού Α.2.9) καλείται **ισομορφισμός συνδέσμων**. Λέμε ότι δυο σύνδεσμοι $(\mathfrak{X}_1, \preceq_1)$ και $(\mathfrak{X}_2, \preceq_2)$ είναι **ισόμορφοι** όταν υφίσταται ένας τέτοιος ισομορφισμός μεταξύ αυτών.

Α.2.27 Πρόταση. *Έστω ότι τα* $(\mathfrak{X}_1, \preceq_1)$ *και* $(\mathfrak{X}_2, \preceq_2)$ *είναι δυο σύνδεσμοι. Για μια αμφίρριψη* $f : \mathfrak{X}_1 \longrightarrow \mathfrak{X}_2$ *οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Η* f *είναι ισομορφισμός συνδέσμων.*

(ii) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \forall (x, y) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_1$.

(iii) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \forall (x, y) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i)⇒(ii) Εάν η f είναι ισομορφισμός συνδέσμων και $(x, y) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_1$, τότε

$$x \wedge y \preceq_1 x \text{ και } x \wedge y \preceq_1 y \Rightarrow f(x \wedge y) \preceq_2 f(x) \text{ και } f(x \wedge y) \preceq_2 f(y),$$

οπότε το $f(x \wedge y)$ αποτελεί ένα κάτω φράγμα τού $\{f(x), f(y)\}$ εντός τού $\mathfrak{X}_2$ ως προς την " $\preceq_2$ ". Έστω τώρα ξ *τυχόν* κάτω φράγμα τού $\{f(x), f(y)\}$ εντός τού $\mathfrak{X}_2$ ως προς την " $\preceq_2$ ". Επειδή η f είναι αμφιρριπτική απεικόνιση, υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο $z \in \mathfrak{X}_1$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(z) = \xi$. Προφανώς,

$$\xi \preceq_2 f(x) \text{ και } \xi \preceq_2 f(y) \Rightarrow z \preceq_1 f^{-1}(f(x)) = x \text{ και } z \preceq_1 f^{-1}(f(y)) = y,$$

οπότε το z αποτελεί ένα κάτω φράγμα τού $\{x, y\}$ εντός τού $\mathfrak{X}_1$ ως προς την " $\preceq_1$ ". Αυτό σημαίνει ότι $z \preceq_1 x \wedge y$, απ' όπου έπεται ότι

$$f(z) = \xi \preceq_2 f(x \wedge y) \Rightarrow f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

(ii)⇒(i) Για οιοδήποτε ζεύγος $(x, y) \in \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_1$ με $x \preceq_1 y$ έχουμε $x \wedge y = x$, οπότε

$$f(x) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \Rightarrow f(x) \preceq_2 f(y).$$

Εξ αυτού έπεται ότι η f είναι ισότονη. Από την άλλη μεριά, για οιοδήποτε ζεύγος $(u, w) \in \mathfrak{X}_2 \times \mathfrak{X}_2$ με $u \preceq_2 w$ υπάρχουν μονοσημάντως ορισμένα $x, y \in \mathfrak{X}_1$, τέτοια ώστε να ισχύει $f(x) = u$ και $f(y) = w$. Κατά συνέπειαν,

$$f(x) = u = u \wedge w = f(x) \wedge f(y) = f(x \wedge y),$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(x \wedge y)) = x \wedge y \Rightarrow x \preceq_1 y,$$

ήτοι ότι $f^{-1}(u) \preceq_1 f^{-1}(w)$. Άρα και η αντίστροφος f^{-1} τής f είναι ισότονη και, ως εκ τούτου, η f είναι ισομορφισμός συνδέσμων. Η ισοδυναμία (i)⇔(iii) αποδεικνύεται παρομοίως. □