ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Γινόμενα ομάδων

Το **(ευθύ) γινόμενο** $G \times H$ δυο ομάδων G και H κατασκευάζεται ως ακολούθως: τα στοιχεία τού $G \times H$ είναι διατεταγμένα ζεύγη (g, h), όπου $g \in G$ και $h \in H$, ενώ ο πολλαπλασιασμός επ' αυτού ορίζεται μέσω τής

$$(g, h)(g', h') = (gg', hh').$$

Αμφότερα τα g, g' είναι στοιχεία τής G και, πολλαπλασιαζόμενα εντός τής G, μας δίνουν την πρώτη «συντεταγμένη» αυτού τού γινομένου. Η δεύτερη «συντεταγμένη» προέρχεται από τον πολλαπλασιασμό τού h με το h' εντός τής H. Επομένως, το (gg', hh') είναι ένα στοιχείο τού καρτεσιανού γινομένου $G \times H$. Η προσεταιριστικότητα έπεται άμεσα από την προσεταιριστικότητα των πολλαπλασιαστικών πράξεων των G και H. Επίσης, το (e, e) είναι το μοναδιαίο στοιχείο, ενώ το (g^{-1}, h^{-1}) είναι το αντίστροφο τού στοιχείου (g, h). (Ελπίζουμε να μην προξενείται σύγχυση από τη χρήση τού ιδίου συμβόλου για τα μοναδιαία στοιχεία των G και H.)

Δυνάμει τής συνάρτησης

$$G \times H \longrightarrow H \times G, \quad (g, h) \longmapsto (h, g),$$

είναι προφανές ότι $G \times H \cong H \times G$. Εάν κάποια από τις G και H τύχει να είναι άπειρη ομάδα, τότε η $G \times H$ είναι και αυτή άπειρη ομάδα· ειδάλλως, η τάξη τής $G \times H$ ισούται με το γινόμενο των τάξεων των G και H. Εάν αμφότερες οι G και H είναι αβελιανές, τότε και η $G \times H$ είναι αβελιανή. Και αντιστρόφως· η G είναι ισόμορφη με την υποομάδα $\{(g, e) \mid g \in G\}$ τής $G \times H$ (μέσω τού ισομορφισμού $g \longmapsto (g, e)$), ενώ η H είναι ισόμορφη με την υποομάδα $\{(e, h) \mid h \in H\}$ τής $G \times H$

(μέσω τού ισομορφισμού $h \longmapsto (e,h)$), οπότε, εάν η $G \times H$ είναι αβελιανή, τότε αμφότερες οι G και H είναι αβελιανές. Το ευθύ γινόμενο $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ μιας πεπερασμένης συλλογής ομάδων έχει, κατ' αναλογίαν προς την $G \times H$, ως στοιχεία του n-άδες $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπου $x_i \in G_i$, $\forall i$, $1 \le i \le n$, και ως πολλαπλασιασμό του τον

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_1', x_2', \ldots, x_n') = (x_1 x_1', x_2 x_2', \ldots, x_n x_n').$$

Και εδώ, η εναλλαγή τής διάταξης των συντεταγμένων μάς δίνει ισόμορφες ομάδες.

(10.1) Παραδείγματα. (i) Τα έξι στοιχεία τής ομάδας $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ είναι τα εξής:

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (0,2),\ (1,2).$$

Αυτά «συνδυάζονται» μεταξύ τους μέσω τής πράξης

$$(x,y) + (x',y') = (x +_2 x', y +_3 y')\,.$$

Ίσως να μας φαίνεται κάπως αξιοπερίεργο το ότι χρησιμοποιούμε την πρόσθεση ως πράξη μας, αλλά εντούτοις θα τηρούμε την προκειμένη σύμβαση οποτεδήποτε συναντούμε (ευθέα) γινόμενα κυκλικών ομάδων. Σημειωτέον ότι, επαναλαμβανόμενη η πρόσθεση τού στοιχείου $(1,1)$ με τον εαυτό του μπορεί να μας δώσει όλα τα στοιχεία τής $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Κατά συνέπειαν, η $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ είναι *κυκλική* και οφείλει, γι' αυτόν τον λόγο, να είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_6$. Ένας απτός ισομορφισμός μεταξύ των $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ και $\mathbb{Z}_6$ προκύπτει μέσω τής ακόλουθης απεικόνισης στοιχείων:

$$\begin{array}{lll} (0,0) \longmapsto 0, & (1,1) \longmapsto 1, & (0,2) \longmapsto 2, \\ (1,0) \longmapsto 3, & (0,1) \longmapsto 4, & (1,2) \longmapsto 5. \end{array}$$

(ii) Κατ' αναλογίαν, μπορούμε να καταγράψουμε τα τέσσερα στοιχεία τής ομάδας $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ως $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, χρησιμοποιώντας, εν προκειμένω, πρόσθεση κατά μόδιο 2 και στις δύο συντεταγμένες. Κάθε στοιχείο διάφορο τού $(0,0)$ έχει τάξη ίση με 2, οπότε η $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ δεν είναι κυκλική. Η $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ είναι ισόμορφη με την ομάδα των επιπέδων συμμετριών μιας σκακιέρας (βλ. κεφάλαιο 7), μέσω τής ακόλουθης απεικόνισης στοιχείων:

$$\begin{array}{ll} (0,0) \longmapsto e, & (1,0) \longmapsto q_1, \\ (0,1) \longmapsto q_2, & (1,1) \longmapsto r, \end{array}$$

και συχνά καλείται **ομάδα τού Klein**.

(iii) Συμβολίζοντας με το $\mathbb{R}^n$ το ευθύ γινόμενο n αντιτύπων τής ομάδας $\mathbb{R}$ μπορούμε, ως συνήθως, να εκλαμβάνουμε τα στοιχεία τού $\mathbb{R}^n$ ως διανύσματα υπό τη μορφή $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και τη συνήθη πρόσθεση

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ ως πράξη τής ομάδας $\mathbb{R}^n$.

(10.2) Θεώρημα. *Η ομάδα* $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ *είναι κυκλική εάν και μόνον εάν έχουμε* μκδ$(m, n) = 1$.

Απόδειξη. Έστω k η τάξη τού στοιχείου $(1, 1)$ εντός τής $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. Αθροίζοντας το $(1, 1)$ με τον εαυτό του k φορές παίρνουμε το $(0, 0)$, οπότε έχουμε

$$(k(\text{mod } m), k(\text{mod } n)) = (0, 0).$$

Αυτό σημαίνει ότι αμφότεροι οι m και n αποτελούν διαιρέτες τού k. Εάν μκδ$(m, n) = 1$, τότε το mn οφείλει να διαιρεί τον k, οπότε κατ' ανάγκην $k = mn$. Ως εκ τούτου, σε αυτήν την περίπτωση, η $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ είναι κυκλική με το $(1, 1)$ ως γεννήτορά της.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο d είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και n και ότι $d > 1$. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, εν προκειμένω, δεν είναι κυκλική. Προς τούτο ορίζουμε τους $m' = \frac{m}{d}$ και $n' = \frac{n}{d}$. Για κάθε στοιχείο (x, y) τής $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ έχουμε

$$\begin{aligned} m'dn'(x, y) &= (m'dn'x(\text{mod } m), m'dn'y(\text{mod } n)) \\ &= (mn'x(\text{mod } m), m'ny(\text{mod } n)) \\ &= (0, 0), \end{aligned}$$

οπότε η τάξη τού (x, y) είναι $\leq m'dn'$. Επομένως η ομάδα $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ δεν είναι κυκλική, διότι δεν περιέχει κανένα στοιχείο τάξης mn. □

(10.3) Παράδειγμα. Έστω I ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας και έστω $J = -I$. Τόσο ο I όσο και ο J μετατίθενται με κάθε άλλον πίνακα τής O_3, ενώ από κοινού σχηματίζουν μια υποομάδα τής O_3 τάξης 2. Θα δείξουμε ότι η O_3 είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο τής SO_3 και τής εν λόγω υποομάδας. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi : SO_3 \times \{I, J\} \longrightarrow O_3, \quad (A, U) \longmapsto AU.$$

Η φ διατηρεί την αλγεβρική δομή των μετεχουσών ομάδων, καθότι ισχύει

$$\varphi\left((A, U)(B, V)\right) = \varphi\left(AB, UV\right) = ABUV = \varphi\left(A, U\right)\varphi\left(B, V\right)$$

για τυχόντες $A, B \in SO_3$ και τυχόντες $U, V \in \{I, J\}$. Εάν $\varphi\left(A, U\right) = \varphi\left(B, V\right)$, τότε $AU = BV$, δίνοντάς μας την ισότητα $\det(AU) = \det(BV)$. Όμως

$$\det(AU) = \det(A)\det(U) = \det(U)$$

λόγω τού ότι $A \in SO_3$ και -παρομοίως- $\det(BV) = \det(V)$. Επομένως, $U = V$ και $A = B$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η φ είναι ενριπτική. Υπολείπεται ο έλεγχος τού ότι η φ είναι και επιρριπτική. Δοθέντος ενός $A \in O_3$, είτε $A \in SO_3$, οπότε έχουμε $A = \varphi(A, I)$, είτε $AJ \in SO_3$, οπότε έχουμε $A = \varphi(AJ, J)$. Τούτο ολοκληρώνει την επιχειρηματολογία μας.

Σημειώστε ότι (δυνάμει τής $I \longmapsto 0$, $J \longmapsto 1$) η $\{I, J\}$ είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_2$. Άρα

$$SO_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong O_3.$$

Αναλόγως δείχνει κανείς ότι

$$SO_n \times \mathbb{Z}_2 \cong O_n$$

για κάθε *περιττό* n. Αντιθέτως, όταν ο n είναι *άρτιος*, τότε *δεν* υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των $SO_n \times \mathbb{Z}_2$ και O_n (βλ. άσκηση 10.9).

Το ανωτέρω παράδειγμα γενικεύεται ως εξής: εάν τα H και K είναι δυο υποσύνολα μιας ομάδας G, τότε συμβολίζουμε ως HK τη συλλογή όλων των γινομένων xy, όπου $x \in H$ και $y \in K$.

(10.4) Θεώρημα. *Εάν οι H και K είναι δυο υποομάδες τής ομάδας G, για τις οποίες ισχύει $HK = G$ και $H \cap K = \{e\}$, και εάν -ταυτοχρόνως- κάθε στοιχείο τής H μετατίθεται με κάθε στοιχείο τής K, τότε*

$$G \cong H \times K.$$

Απόδειξη. Θα μιμηθούμε ό,τι κάναμε στο παράδειγμα (10.3). Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi : H \times K \longrightarrow G, \quad (x, y) \longmapsto xy.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \varphi((x,y)(x',y')) &= \varphi(xx', yy') \\ &= xx'yy' \\ &= xyx'y' \left(\begin{array}{c} \text{επειδή κάθε στοιχείο τής } H \\ \text{μετατίθεται με κάθε στοιχείο τής } K \end{array} \right) \\ &= \varphi(x,y)\,\varphi(x',y'). \end{aligned}$$

Επομένως, η φ μεταφέρει τον πολλαπλασιασμό τής $H \times K$ σε εκείνον τής G. Εξάλλου, εάν $\varphi(x, y) = \varphi(x', y')$, τότε

$$xy = x'y' \Longrightarrow (x')^{-1} x = y'y^{-1}.$$

Επειδή το αριστερό μέλος αυτής τής τελευταίας εξίσωσης ανήκει στην H και το δεξιό στην K, *και* τα δύο μέλη θα ανήκουν στην τομή $H \cap K = \{e\}$. Άρα

$$(x')^{-1} x = e = y'y^{-1} \Longrightarrow x = x', y = y',$$

οπότε η φ είναι αμφιρριπτική. Η φ είναι όμως και επιρριπτική, καθότι η ισότητα $HK = G$ σημαίνει ότι κάθε στοιχείο τής G γράφεται ως ένα γινόμενο xy, όπου $x \in H$ και $y \in K$. Άρα η φ είναι όντως ένας ισομορφισμός ομάδων. □

(10.5) Σημείωση. Ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$f_J : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \longmapsto -\mathbf{x},$$

καλείται **κεντρική αντιστροφή**. Τοποθετώντας εντός τού $\mathbb{R}^3$ ένα κανονικό στερεό, το οποίο είναι διάφορο τού κανονικού τετραέδρου, κατά τέτοιον τρόπο, ώστε το βαρύκεντρό του να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, διαπιστώνουμε ότι η κεντρική αντιστροφή συγκαταλέγεται πάντοτε στις συμμετρίες του. Εάν η G είναι η πλήρης ομάδα συμμετριών τού θεωρουμένου στερεού και εάν η H είναι η υποομάδα της η αποτελούμενη από τις περιστροφικές συμμετρίες του (οπότε τα στοιχεία της αντιστοιχούν σε πίνακες ανήκοντες στην SO_3), τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα (10.4), παίρνουμε τους ισομορφισμούς

$$G \cong H \times \langle f_J \rangle \cong H \times \mathbb{Z}_2.$$

Από αυτούς συνάγεται η ακόλουθη:

(10.6) Πρόταση. *Οι πλήρεις ομάδες συμμετριών τού κύβου και τού οκταέδρου είναι ισόμορφες τής $S_4 \times \mathbb{Z}_2$, ενώ οι πλήρεις ομάδες συμμετριών τού δωδεκαέδρου και τού εικοσαέδρου είναι ισόμορφες τής $A_4 \times \mathbb{Z}_2$.*

Ασκήσεις

10.1 Έστω ότι οι G και H είναι δυο ομάδες. Εάν το ευθύ γινόμενό τους $G \times H$ είναι μια κυκλική ομάδα, δείξτε ότι αμφότερες οι G και H είναι κυκλικές.

10.2 Δείξτε ότι η $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ δεν είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}$.

10.3 Αποδείξτε ότι η $\mathbb{C}$ είναι ισόμορφη τής $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και ότι η $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ είναι ισόμορφη τής $\mathbb{R}_{>0} \times C$.

10.4 Πολύ συχνά στη βιβλιογραφία, ως συνώνυμο τής *ομάδας τού Klein*, χρησιμοιείται **η ομάδα των τεσσάρων στοιχείων** (Vierergruppe) που συμβολίζεται με το γράμμα V. Δείξτε ότι η $\mathbb{Z}_3 \times V$ είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.

10.5 Δείξτε ότι η «διαγώνιος» $\{\,(x, x) \mid x \in G\}$ μιας ομάδας G είναι μια υποομάδα τής $G \times G$, η οποία είναι ισόμορφη με την ίδια την G.

10.6 Έστω ότι οι G και H είναι δυο ομάδες. Εάν η A είναι μια υποομάδα τής G και η B μια υποομάδα τής H, βεβαιωθείτε για το ότι η $A \times B$ είναι μια υποομάδα τής $G \times H$. Βρείτε μια υποομάδα τής $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, η οποία δεν είναι κατασκευασμένη κατ' αυτόν τον τρόπο (ήτοι δεν μπορεί να γραφεί ως το ευθύ γινόμενο δύο υποομάδων τής $\mathbb{Z}$).

10.7 Ποιες από τις ακόλουθες ομάδες είναι μεταξύ τους ισόμορφες;

$$\mathbb{Z}_{24}, \qquad D_4 \times \mathbb{Z}_3, \qquad D_{12}, \qquad A_4 \times \mathbb{Z}_2,$$

$$\mathbb{Z}_2 \times D_6, \qquad S_4, \qquad \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2.$$

10.8 Το στοιχείο $(\varepsilon, 1)$ τής $A_n \times \mathbb{Z}_2$ μετατίθεται με κάθε στοιχείο τής $A_n \times \mathbb{Z}_2$. Χρησιμοποιήστε αυτήν την ιδιότητα για να αποδείξετε ότι η $A_n \times \mathbb{Z}_2$ δεν είναι ισόμορφη με την S_n όταν $n \geq 3$.

10.9 Για ποιον λόγο η κατασκευή τού παραδείγματος (10.3) δεν οδηγεί στη θέσπιση ενός ισομορφισμού μεταξύ των ομάδων $SO_n \times \mathbb{Z}_2$ και O_n όταν ο n είναι άρτιος; Ποια στοιχεία τής O_n μετατίθενται με κάθε στοιχείο τής O_n; Δείξτε ότι όντως (όταν ο n είναι άρτιος) οι $SO_n \times \mathbb{Z}_2$ και O_n δεν είναι μεταξύ τους ισόμορφες.

10.10 Έστω G το σύνολο, τα στοιχεία τού οποίου είναι άπειρες ακολουθίες $(a_1, a_2, \ldots)$ ακεραίων αριθμών. Αυτό καθίσταται (όπως διαπιστώνεται εύκολα) μια ομάδα μέσω τής πράξης

$$(a_1, a_2, \ldots)(b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots).$$

Αποδείξτε ότι $G \times \mathbb{Z} \cong G \times G \cong G$.

10.11 Δείξτε ότι, όταν ο n είναι περιττός, η D_{2n} είναι ισόμορφη τής $D_n \times \mathbb{Z}_2$.

10.12 Εάν η G είναι μια μη κυκλική ομάδα τάξης 4, δείξτε ότι η G οφείλει να είναι ισόμορφη με την ομάδα τού Klein.

10.13 Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα στην οποία κάθε στοιχείο, που είναι διάφορο τού μοναδιαίου, έχει τάξη ίση με 2. Αποδείξτε ότι η G είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αντιτύπων τής $\mathbb{Z}_2$.