

Παράρτημα D

Πίνακες

Λίαν χρήσιμες (πολλαπλασιαστικές) ομάδες πινάκων προκύπτουν ως (ειδικής φύσεως) υποομάδες τής ομάδας των αντιστρεψίμων στοιχείων τού δακτύλιου $\text{Mat}_{n \times n}(R)$ των τετραγωνικών πινάκων με τις εγγραφές τους ειλημμένες από έναν μη τετριμμένο δακτύλιο R με μοναδιαίο στοιχείο.

D.1 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Έστω $(R, +, \cdot)$ τυχόν δακτύλιος. Για οιοδήποτε ζεύγος $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο $\text{Mat}_{m \times n}(R)$ των $(m \times n)$ -πινάκων με τις εγγραφές τους ειλημμένες από τον R (βλ. 1.3.6). Κάθε πίνακας

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(R) \quad (\text{D.1})$$

διαθέτει m γραμμές¹

$$\Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{A}) := (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}) \in \text{Mat}_{1 \times n}(R), \quad i \in \{1, \dots, m\},$$

και n στήλες

$$\Sigma\tau_j(\mathbf{A}) := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{m \times 1}(R), \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

(Η $\Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{A})$ καλείται i -οστή γραμμή και η $\Sigma\tau_j(\mathbf{A})$ j -οστή στήλη τού \mathbf{A} .) Προφανώς,

$$\mathbf{A} = (\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \ \cdots \ \Sigma\tau_n(\mathbf{A})) = \begin{pmatrix} \Gamma_{\mathcal{Q}_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_m}(\mathbf{A}) \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

¹Συχνά χρησιμοποιείται η ταύτιση τού $\text{Mat}_{1 \times n}(R)$ με το R^n (οπότε οι γραμμές αποτελούνται από διατεταγμένες n -άδες στοιχείων τού R).

- Για οιοσδήποτε πίνακες

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(R), \quad \mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(R) \quad (\text{D.3})$$

ισχύει (προφανώς) η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \iff a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}.$$

- Εάν $r \in R$, τότε για οιονδήποτε πίνακα (D.1) θέτουμε

$$r\mathbf{A} := (ra_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

- Το $\text{Mat}_{m \times n}(R)$ καθίσταται αβελιανή ομάδα με μέσω τής προσθετικής πράξεως²

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad (\text{D.4})$$

για οιοσδήποτε πίνακες (D.3) (Ποβλ. 1.3.6).

- Κάθε πίνακας (D.1) έχων το ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών (ήτοι $m = n$) καλείται **τετραγωνικός πίνακας**. Το υποσύνολο εγγραφών $\{a_{ii} \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ ενός πίνακα $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$ καλείται **κυρία διαγώνιος** και το $\{a_{i, n+1-i} \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ **δευτερεύουσα διαγώνιος** τού \mathbf{A} .

D.1.1 Ορισμός. (Ανάστροφος πίνακα) Ο **ανάστροφος** ενός $(m \times n)$ -πίνακα (D.1) είναι ο $(n \times m)$ -πίνακας

$$\mathbf{A}^\top = (a'_{st})_{\substack{1 \leq s \leq n \\ 1 \leq t \leq m}} \in \text{Mat}_{n \times m}(R),$$

όπου $a'_{st} := a_{ts}$ για κάθε ζεύγος $(s, t) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$. Σημειωτέον ότι³

$$\Gamma_{\mathcal{Q}_s}(\mathbf{A}^\top) = \Sigma_t(\mathbf{A})^\top, \quad \Sigma_t(\mathbf{A}^\top) = \Gamma_{\mathcal{Q}_t}(\mathbf{A})^\top, \quad \forall (s, t) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}. \quad (\text{D.5})$$

D.1.2 Πρόταση. Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{m \times n}(R)$ και $r \in R$, τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$.
- (ii) $(r\mathbf{A})^\top = r(\mathbf{A}^\top)$.
- (iii) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Τούτο έπεται άμεσα από τις ισότητες (D.5).

(ii)-(iii) Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ και

$$c_{ij} := ra_{ij}, \quad d_{ij} := a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\},$$

τότε $(r\mathbf{A})^\top = (c'_{st})_{\substack{1 \leq s \leq n \\ 1 \leq t \leq m}}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = (d'_{st})_{\substack{1 \leq s \leq n \\ 1 \leq t \leq m}}$, με

$$c'_{st} = c_{ts} = ra_{ts}, \quad d'_{st} = d_{ts} = a_{ts} + b_{ts}, \quad \forall (s, t) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}.$$

Επομένως, $(r\mathbf{A})^\top = r(\mathbf{A}^\top)$ και $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$. □

²Το ουδέτερο στοιχείο $0_{\text{Mat}_{m \times n}(R)}$ αυτής τής ομάδας είναι ο $(m \times n)$ -πίνακας, όλες οι εγγραφές τού οποίου είναι ίσες με το 0_R (και είθισται να σημειώνεται εν συντομία ως $\mathbf{0}_{m \times n}$).

³Στην ειδική περίπτωση όπου $m = n$, οι εγγραφές τού \mathbf{A}^\top αποκτώνται ύστερα από *κατοπτρισμό* των εγγραφών τού \mathbf{A} ως προς την κυρία διαγώνιο του.

D.1.3 Ορισμός. Στην ειδική περίπτωση όπου $m = n$, το σύνολο $\text{Mat}_{n \times n}(R)$ (ήτοι το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων) καθίσταται δακτύλιος μέσω τής προσθετικής πράξεως (D.4) και τής πολλαπλασιαστικής πράξεως

$$\mathbf{AB} := \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

για οιοσδήποτε $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ και $\mathbf{B} = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$. Εάν ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο, τότε και ο $\text{Mat}_{n \times n}(R)$ έχει μοναδιαίο στοιχείο. Αυτό είναι ο λεγόμενος **μοναδιαίος πίνακας**

$$\mathbf{I}_n := \begin{pmatrix} 1_R & 0_R & \cdots & 0_R & 0_R \\ 0_R & 1_R & \cdots & 0_R & 0_R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_R & 0_R & \cdots & 1_R & 0_R \\ 0_R & 0_R & \cdots & 0_R & 1_R \end{pmatrix}$$

με όλες τις εγγραφές τις ανήκουσες στην κυρία διαγώνιό του ίσες με το 1_R και με τις λοιπές εγγραφές του ίσες με το 0_R . Προφανώς,

$$\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ όπου } \delta_{ij} := \begin{cases} 1_R, & \text{όταν } i = j, \\ 0_R, & \text{όταν } i \neq j, \end{cases}$$

είναι το λεγόμενο **σύμβολο τού Kronecker**.

D.1.4 Σημείωση. (i) Εάν υποθέσουμε ότι ο R έχει μοναδιαίο στοιχείο και εάν για κάθε ζεύγος $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ ορίσουμε τον πίνακα

$$\mathbf{E}_{ij} := (\delta_{\mu i} \delta_{\nu j})_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(R),$$

ήτοι τον πίνακα τον έχοντα ως εγγραφή του στην i -οστή γραμμή και στην j -οστή στήλη το 1_R και ως λοιπές εγγραφές του το 0_R , τότε παρατηρούμε ότι *κάθε* τετραγωνικός πίνακας $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \mathbf{E}_{ij}.$$

(ii) Εάν ο R είναι μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, τότε για κάθε $n > 1$ ο δακτύλιος $\text{Mat}_{n \times n}(R)$ δεν είναι μεταθετικός, ακόμη και όταν ο ίδιος ο R είναι. (Βλ. D.2.19.)

D.1.5 Πρόταση. Για οιοσδήποτε πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ ισχύει η ισότητα

$$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφήνεται ως άσκηση. □

D.1.6 Παραδείγματα. (Ειδικοί τετραγωνικοί πίνακες) Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο.

(i) Ένας πίνακας

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(R) \quad (\text{D.6})$$

καλείται **διαγώνιος πίνακας** όταν υπάρχει κάποια n -άδα $(a_1, \dots, a_n) \in R^n$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$a_{ij} = \delta_{ij} a_i = \begin{cases} a_i, & \text{όταν } i = j, \\ 0_R, & \text{όταν } i \neq j. \end{cases}$$

(Εν τωιαύτη περιπτώσει, σημειώνουμε τον \mathbf{A} εν συντομία ως $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$.) Προφανώς, $\mathbf{I}_n = \text{diag}(1_R, 1_R, \dots, 1_R, 1_R)$. Το σύνολο των διαγωνίων πινάκων το συμβολίζουμε ως

$$\text{Diag}_n(R) := \{ \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots, a_n) \in R^n \}.$$

(ii) Ένας πίνακας (D.6) καλείται **άνω τριγωνικός** (και αντιστοίχως, **κάτω τριγωνικός**) όταν ισχύει $a_{ij} = 0_R$ για $i > j$ (και αντιστοίχως, για $i < j$), ήτοι όταν είναι τής μορφής

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0_R & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0_R & \cdots & \cdots & 0_R & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0_R & \cdots & \cdots & 0_R \\ a_{21} & a_{22} & 0_R & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_R \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ n-2} & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

αντιστοίχως, και **αυστηρώς άνω τριγωνικός** (και αντιστοίχως, **αυστηρώς κάτω τριγωνικός**) όταν $a_{ij} = 0_R$ για $i \geq j$ (και αντιστοίχως, για $i \leq j$), ήτοι όταν είναι τής μορφής

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0_R & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0_R & 0_R & a_{23} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2n} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0_R & \cdots & \cdots & 0_R & 0_R \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0_R & 0_R & \cdots & \cdots & 0_R \\ a_{21} & 0_R & 0_R & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_R \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\ n-2} & a_{n\ n-1} & 0_R \end{pmatrix},$$

αντιστοίχως. Τα σύνολα των άνω, κάτω, αυστηρώς άνω και αυστηρώς κάτω πινάκων τα συμβολίζουμε ως

$$\text{UT}_n(R), \text{LT}_n(R), \text{SUT}_n(R) \text{ και } \text{SLT}_n(R),$$

αντιστοίχως⁴.

⁴Οι βραχυγραφίες Diag, UT, LT, SUT και SLT επελέγησαν κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να θυμίζουν τα αρχικά των όρων diagonal, upper triangular, lower triangular, strictly upper triangular, strictly lower triangular.

(iii) Ένας πίνακας (D.6) καλείται **μοναδιαίως άνω τριγωνικός** (και αντιστοίχως, **μοναδιαίως κάτω τριγωνικός**) όταν είναι τής μορφής

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1_R & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0_R & 1_R & a_{23} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2n} \\ \vdots & & & \ddots & a_{n-1n} \\ 0_R & \cdots & \cdots & 0_R & 1_R \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1_R & 0_R & \cdots & \cdots & 0_R \\ a_{21} & 1_R & 0_R & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_R \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-2} & a_{nn-1} & 1_R \end{pmatrix},$$

αντιστοίχως. Τα σύνολα αυτών των πινάκων τα συμβολίζουμε ως $UT_n^{[1]}(R)$ και $LT_n^{[1]}(R)$, αντιστοίχως.

D.1.7 Σημείωση. (i) Τα $Diag_n(R)$, $UT_n(R)$, $LT_n(R)$, $SUT_n(R)$ και $SLT_n(R)$ αποτελούν υποδακτύλιους τού δακτυλίου $Mat_{n \times n}(R)$. Οι $Diag_n(R)$, $UT_n(R)$ και $LT_n(R)$ έχουν τον I_n ως μοναδιαίο τους στοιχείο. (Αντιθέτως, οι $SUT_n(R)$ και $SLT_n(R)$ είναι δακτύλιοι χωρίς μοναδιαίο στοιχείο.)

(ii) Το $SUT_n(R)$ είναι ένας υποδακτύλιος τού δακτυλίου $UT_n(R)$.

(iii) Το $SLT_n(R)$ είναι ένας υποδακτύλιος τού δακτυλίου $LT_n(R)$.

(iv) Το $Diag_n(R)$ είναι ένας υποδακτύλιος τού δακτυλίου $UT_n(R) \cap LT_n(R)$.

(v) Οι κάτωθι αμφίπλευρες συνεπαγωγές είναι προφανείς:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \in UT_n(R) \Leftrightarrow \mathbf{A}^\top \in LT_n(R), \\ \mathbf{A} \in SUT_n(R) \Leftrightarrow \mathbf{A}^\top \in SLT_n(R), \\ \mathbf{A} \in UT_n^{[1]}(R) \Leftrightarrow \mathbf{A}^\top \in LT_n^{[1]}(R). \end{array} \right\}$$

D.2 ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και έστω $n \in \mathbb{N}$. Η ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων (αντιστρεψίμων πινάκων) τού δακτυλίου $Mat_{n \times n}(R)$ (που καλείται, ιδιαιτέρως, γενική γραμμική ομάδα βαθμού n υπεράνω τού R και συμβολίζεται ως $GL_n(R)$) μπορεί να περιγραφεί (μέσω τού θεωρήματος D.2.18) με τη βοήθεια των οριζουσών των πινάκων των ανηγόντων σε αυτόν. Γι' αυτόν τον λόγο είναι απαραίτητη η παράθεση των κύριων ιδιοτήτων των οριζουσών. Επιπρόσθετες σημαντικές ομάδες πινάκων προκύπτουν ως υποομάδες τής προαναφερθείσας ομάδας.

D.2.1 Ορισμός. Έστω τυχόν πίνακας $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in Mat_{n \times n}(R)$. Το στοιχείο

$$\det(\mathbf{A}) := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right)$$

τού R καλείται **ορίζουσα** τού \mathbf{A} (όπου \mathfrak{S}_n η συμμετρική ομάδα και $\text{sgn}(\sigma)$ η εικόνα οιασδήποτε $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ μέσω τής απεικόνισης προσημάνσεως $\text{sgn}: \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$, βλ. 3.1.1 και 3.3.1).

D.2.2 Παραδείγματα. Για $n = 2$ λαμβάνουμε $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ και για $n = 3$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

D.2.3 Πρόταση. Για κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ ισχύει η ισότητα

$$\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A}), \quad (\text{D.7})$$

δηλαδή η ορίζουσα οιασδήποτε τετραγωνικού πίνακα ισούται με την ορίζουσα τού αναστρόφου του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, τότε $\mathbf{A}^\top = (a'_{rs})_{1 \leq r, s \leq n}$, όπου

$$a'_{rs} := a_{sr}, \quad \forall (r, s) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}^\top) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n a'_{i\sigma(i)} \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{j\sigma^{-1}(j)} \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma^{-1}) \left(\prod_{j=1}^n a_{j\sigma^{-1}(j)} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n a_{j\sigma(j)} \right) = \det(\mathbf{A}), \end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα έπεται από το ότι $\text{sign}(\sigma) = \text{sign}(\sigma^{-1})$ για κάθε $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (βλ. 3.3.5 (ii)) και η πέμπτη από το ότι η απεικόνιση $\mathfrak{S}_n \ni \sigma \mapsto \sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ είναι αμφιρριπτική. \square

D.2.4 Σημείωση. Λόγω τής (D.7) η ορίζουσα τού \mathbf{A} μπορεί να γραφεί και υπό τη μορφή

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i} \right). \quad (\text{D.8})$$

D.2.5 Πρόταση. Εάν όλες οι εγγραφές κάποιας γραμμής (και αντιστοίχως, κάποιας στήλης) ενός πίνακα $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ είναι ίσες με 0_R , τότε $\det(\mathbf{A}) = 0_R$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\exists k \in \{1, \dots, n\}$: $\Gamma_{\mathcal{Q}_k}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}_{1 \times n}$ ($:= 0_{\text{Mat}_{1 \times n}(R)}$), τότε

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\left(\prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} a_{i \sigma(i)} \right) \underbrace{a_{k \sigma(k)}}_{=0_R} \right) = 0_R.$$

Εάν $\exists k \in \{1, \dots, n\}$: $\Sigma\tau_k(\mathbf{A}) = \mathbf{0}_{n \times 1}$, τότε $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top) = 0_R$ λόγω της προτάσεως D.2.3, τής ισότητας $\Sigma\tau_k(\mathbf{A}) = \Gamma_{\mathcal{Q}_k}(\mathbf{A}^\top)$ και τής προηγηθείσας επιχειρηματολογίας. \square

D.2.6 Πρόσημα. $\det(\mathbf{0}_{n \times n}) = 0_R$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από την πρόταση D.2.5. \square

D.2.7 Πρόταση. Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ ($n \geq 2$) με $\Sigma\tau_i(\mathbf{A}) = \Sigma\tau_j(\mathbf{A})$ (και αντιστοίχως, με $\Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{A}) = \Gamma_{\mathcal{Q}_j}(\mathbf{A})$) για κάποιους $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$, τότε $\det(\mathbf{A}) = 0_R$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\Sigma\tau_i(\mathbf{A}) = \Sigma\tau_j(\mathbf{A})$ για κάποιους $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$, τότε θέτουμε $\tau := [i \ j]$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{A}_n \amalg (\mathfrak{A}_n \circ \tau)$$

(βλ. απόδειξη τής προτάσεως 3.3.9), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n a_{i \sigma(i)} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{i \sigma(i)} \right) - \sum_{\rho \in \mathfrak{A}_n \circ \tau} \left(\prod_{i=1}^n a_{i \rho(i)} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{i \sigma(i)} \right) - \sum_{\sigma \in \mathfrak{A}_n} \left(\prod_{i=1}^n a_{i \sigma(\tau(i))} \right). \end{aligned}$$

Επειδή $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ και $\tau(k) = k$, $\forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}$, έχουμε για κάθε μετάταξη $\sigma \in \mathfrak{A}_n$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n a_{i \sigma(\tau(i))} &= a_{i \sigma(\tau(i))} a_{j \sigma(\tau(j))} \prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}} a_{k \sigma(\tau(k))} \\ &= a_{i \sigma(j)} a_{j \sigma(i)} \prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}} a_{k \sigma(k)} \\ &= a_{i \sigma(i)} a_{j \sigma(j)} \prod_{k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\}} a_{k \sigma(k)} = \prod_{i=1}^n a_{i \sigma(i)} \end{aligned}$$

(με την προτελευταία ισότητα οφειλόμενη στο ότι $\Sigma\tau_i(\mathbf{A}) = \Sigma\tau_j(\mathbf{A})$), οπότε $\det(\mathbf{A}) = 0_R$. Εάν $\Gamma_{\mathcal{Q}_i}(\mathbf{A}) = \Gamma_{\mathcal{Q}_j}(\mathbf{A})$ για κάποιους $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$, τότε $\Sigma\tau_i(\mathbf{A}^\top) = \Sigma\tau_j(\mathbf{A}^\top)$, οπότε βάσει τής προηγηθείσας επιχειρηματολογίας (αλλά με τον \mathbf{A}^\top στη θέση τού \mathbf{A}) λαμβάνουμε $\det(\mathbf{A}^\top) = 0_R$ και, κατ' επέκταση, $\det(\mathbf{A}) = 0_R$ (μέσω τής (D.7)). \square

D.2.8 Λήμμα. Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \text{Mat}_{1 \times n}(R)$, και $r, r' \in R$, τότε

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma_{\mathcal{Q}_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_{k-1}}(\mathbf{A}) \\ r\Gamma_{\mathcal{Q}_k}(\mathbf{A}) + r'\mathbf{b} \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_{k+1}}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_n}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = r \det(\mathbf{A}) + r' \det \begin{pmatrix} \Gamma_{\mathcal{Q}_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_{k-1}}(\mathbf{A}) \\ \mathbf{b} \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_{k+1}}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_n}(\mathbf{A}) \end{pmatrix}$$

και

$$\begin{aligned} & \det(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{k-1}(\mathbf{A}) (r\Sigma\tau_k(\mathbf{A}) + r'\mathbf{b}^\top) \Sigma\tau_{k+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{A})) \\ &= r \det(\mathbf{A}) + r' \det(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{k-1}(\mathbf{A}) \mathbf{b}^\top \Sigma\tau_{k+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{A})) \end{aligned}$$

για κάθε⁵ $k \in \{1, \dots, n\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για οιονδήποτε $k \in \{1, \dots, n\}$ η ορίζουσα τού πίνακα

$$(c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \mathbf{C} := \begin{pmatrix} \Gamma_{\mathcal{Q}_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_{k-1}}(\mathbf{A}) \\ r\Gamma_{\mathcal{Q}_k}(\mathbf{A}) + r'\mathbf{b} \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_{k+1}}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathcal{Q}_n}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$$

γράφεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n c_{i\sigma(i)} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} a_{i\sigma(i)} \right) (ra_{k\sigma(k)} + r'b_{\sigma(k)}) \\ &= r \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right) \right) + r' \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} a_{i\sigma(i)} \right) b_{\sigma(k)} \right), \end{aligned}$$

οπότε η πρώτη ισότητα είναι αληθής. Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται παρομοίως. \square

D.2.9 Πρόταση. Για κάθε $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ ισχύουν τα εξής:

⁵Όταν $k = 1$ (και αντιστοίχως, όταν $k = n$), η ειδικής φύσεως γραμμή (στήλη) τοποθετείται στην πρώτη (και αντιστοίχως, στην n -οστή) θέση και οι γραμμές (στήλες) με δείκτες 1 έως $k - 1$ (και αντιστοίχως, με δείκτες $k + 1$ έως n) παραλείπονται.

(i) (a) Εάν $n \geq 2$ και $k, l \in \{1, \dots, n\}$ με $k \neq l$, τότε για κάθε $r \in R$ έχουμε

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma_{Q_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_{k-1}}(\mathbf{A}) \\ \Gamma_{Q_k}(\mathbf{A}) + r\Gamma_{Q_l}(\mathbf{A}) \\ \Gamma_{Q_{k+1}}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_n}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}).$$

(b) Εάν $k \in \{1, \dots, n\}$ και $r \in R$, τότε

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma_{Q_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_{k-1}}(\mathbf{A}) \\ r\Gamma_{Q_k}(\mathbf{A}) \\ \Gamma_{Q_{k+1}}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_n}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = r \det(\mathbf{A}).$$

(ii) (a) Εάν $n \geq 2$ και $k, l \in \{1, \dots, n\}$ με $k \neq l$, τότε για κάθε $r \in R$ έχουμε

$$\det(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{k-1}(\mathbf{A}) (\Sigma\tau_k(\mathbf{A}) + r\Sigma\tau_l(\mathbf{A})) \Sigma\tau_{k+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{A})) = \det(\mathbf{A}).$$

(b) Εάν $k \in \{1, \dots, n\}$ και $r \in R$, τότε

$$\det(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{k-1}(\mathbf{A}) (r\Sigma\tau_k(\mathbf{A})) \Sigma\tau_{k+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{A})) = r \det(\mathbf{A}).$$

(iii) Για κάθε $r \in R$ ισχύει η ισότητα

$$\det(r\mathbf{A}) = r^n \det(\mathbf{A}).$$

(iv) Για κάθε $\tau \in \mathfrak{S}_n$ ισχύουν οι ισότητες

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma_{Q_{\tau(1)}}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_{\tau(n)}}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \det(\Sigma\tau_{\tau(1)}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{\tau(n)}(\mathbf{A})) = \text{sgn}(\tau) \det(\mathbf{A}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) (a) Προφανώς,

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma_{Q_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_{k-1}}(\mathbf{A}) \\ \Gamma_{Q_k}(\mathbf{A}) + r\Gamma_{Q_l}(\mathbf{A}) \\ \Gamma_{Q_{k+1}}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_n}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}) + r \det \begin{pmatrix} \Gamma_{Q_1}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_{k-1}}(\mathbf{A}) \\ \Gamma_{Q_l}(\mathbf{A}) \\ \Gamma_{Q_{k+1}}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{Q_n}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A}),$$

με την πρώτη ισότητα συναγόμενη από το λήμμα D.2.8 και τη δεύτερη από το ότι η $\Gamma_{Q_l}(\mathbf{A})$ εμφανίζεται (στον δεύτερο προσθετέο) τόσον στη θέση k όσον και στη θέση l (βλ. πρόταση D.2.7).

(b) Έπεται κατόπιν εφαρμογής τού λήμματος D.2.8 (για $r' = 0_R$).

(ii) Τα (a) και (b) προκύπτουν άμεσα από τα (a) και (b) τού (i) (λαμβάνοντας υπ' όψιν την πρόταση D.2.3).

(iii) Αρκεί να εφαρμοσθεί n φορές το (i) (b) (για τις n γραμμές τού $r\mathbf{A}$).

(iv) Έστω τυχούσα μετάταξη $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Η απεικόνιση $\mathfrak{S}_n \ni \sigma \mapsto \tau \circ \sigma \in \mathfrak{S}_n$ είναι αμφιροπτική (έχουσα την $\mathfrak{S}_n \ni \sigma \mapsto \tau^{-1} \circ \sigma \in \mathfrak{S}_n$ ως αντίστροφό της). Επίσης, για κάθε $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ έχουμε

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)^2 \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau^2 \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma). \quad (\text{D.9})$$

(Βλ. 3.3.5 (i).) Η ορίζουσα τού πίνακα

$$(b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = \mathbf{B} := \begin{pmatrix} \Gamma_{\mathfrak{Q}_\tau(1)}(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \Gamma_{\mathfrak{Q}_\tau(n)}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(R)$$

(με $b_{ij} = a_{\tau(i)j}$, $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$) γράφεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &\stackrel{(\text{D.8})}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n b_{\sigma(i)i} \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n a_{\tau(\sigma(i))i} \right) \\ &\stackrel{(\text{D.9})}{=} \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) \left(\prod_{i=1}^n a_{(\tau \circ \sigma)(i)i} \right) \\ &= \operatorname{sgn}(\tau) \sum_{\rho \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\rho) \left(\prod_{i=1}^n a_{\rho(i)i} \right) \stackrel{(\text{D.8})}{=} \operatorname{sgn}(\tau) \det(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα (που αφορά στις στήλες) αποδεικνύεται παρομοίως. \square

D.2.10 Πρόταση. (Ορίζουσα άνω/κάτω τριγωνικού πίνακα) Η ορίζουσα οιοιδήποτε $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \operatorname{UT}_n(R) \cup \operatorname{LT}_n(R)$ ισούται με το γινόμενο των εγγραφών τής κυρίας διαγωνίου του:

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii}. \quad (\text{D.10})$$

Ιδιαίτερος, $\det(\operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)) = \prod_{i=1}^n a_i$, $\forall (a_1, \dots, a_n) \in R^n$, και $\det(\mathbf{I}_n) = 1_R$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \operatorname{UT}_n(R)$, τότε $a_{ij} = 0_R$ για όλους τους δείκτες $i, j \in \{1, \dots, n\}$ με $i > j$. Για $n = 1$ η (D.10) είναι προφανής. Για $n \geq 2$ και για κάθε $\sigma \neq \operatorname{id}$ υπάρχει κατ' ανάγκην κάποιος $k \in \{1, \dots, n\}$ με $k > \sigma(k)$, οπότε

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{\operatorname{id}\}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\left(\prod_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}} a_{i\sigma(i)} \right) \underbrace{a_{k\sigma(k)}}_{=0_K} \right) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Άρα η (D.10) είναι αληθής και για $n \geq 2$. Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{LT}_n(R)$, τότε

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

λόγω τής προτάσεως D.2.3 και τού ότι $\mathbf{A}^\top \in \text{UT}_n(R)$. \square

D.2.11 Θεώρημα. (Τύπος γινομένου) *Η ορίζουσα τού γινομένου δύο πινάκων $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ ισούται με το γινόμενο των οριζουσών τους, ήτοι*

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}). \quad (\text{D.11})$$

Ως εκ τούτου, $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $n = 1$, τότε η (D.11) είναι προφανής. Εάν $n \geq 2$, τότε θέτουμε $\mathbf{C} := \mathbf{AB}$, όπου $\mathbf{B} := (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, παρατηρούμε ότι για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$ ισχύει η ισότητα

$$\Sigma\tau_j(\mathbf{C}) = \sum_{k=1}^n b_{kj} \Sigma\tau_k(\mathbf{A}).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}) &= \det(\Sigma\tau_1(\mathbf{C}) \Sigma\tau_2(\mathbf{C}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{C})) \\ &= \det\left(\left(\sum_{k_1=1}^n b_{k_1 1} \Sigma\tau_{k_1}(\mathbf{A})\right) \Sigma\tau_2(\mathbf{C}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{C})\right) \\ &\stackrel{\text{D.2.8}}{=} \sum_{k_1=1}^n b_{k_1 1} \det(\Sigma\tau_{k_1}(\mathbf{A}) \Sigma\tau_2(\mathbf{C}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{C})) \\ &= \sum_{k_1=1}^n b_{k_1 1} \det\left(\Sigma\tau_{k_1}(\mathbf{A}) \left(\sum_{k_2=1}^n b_{k_2 2} \Sigma\tau_{k_2}(\mathbf{A})\right) \Sigma\tau_3(\mathbf{C}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{C})\right) \\ &= \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n b_{k_1 1} b_{k_2 2} \det(\Sigma\tau_{k_1}(\mathbf{A}) \Sigma\tau_{k_2}(\mathbf{A}) \Sigma\tau_3(\mathbf{C}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{C})) \\ &= \cdots = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \cdots \sum_{k_n=1}^n \left(\prod_{j=1}^n b_{k_j j}\right) \det(\Sigma\tau_{k_1}(\mathbf{A}) \Sigma\tau_{k_2}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{k_n}(\mathbf{A})). \end{aligned}$$

Το ανωτέρω πολλαπλό άθροισμα περιέχει n^n προσθετέους! Εντούτοις, πολλοί εξ αυτών μηδενίζονται. Πράγματι, κάθε προσθετέος αντιστοιχεί στην επιλογή μίας (και μόνον) διατεταγμένης n -άδας

$$(k_1, \dots, k_n) \in \underbrace{\{1, \dots, n\} \times \cdots \times \{1, \dots, n\}}_{n \text{ φορές}}. \quad (\text{D.12})$$

Για τους προσθετέους που αντιστοιχούν σε n -άδες (D.12) με $k_\mu = k_\nu$ για κάποιους $\mu, \nu \in \{1, \dots, n\}$, $\mu < \nu$, έχουμε $\det(\Sigma\tau_{k_1}(\mathbf{A}) \Sigma\tau_{k_2}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{k_n}(\mathbf{A})) = 0_R$. (Βλ. πρόταση D.2.7.) Επομένως, υπολείπονται μόνον οι προσθετέοι που αντιστοιχούν σε n -άδες (D.12) για τις οποίες (για οιοδήποτε $(\mu, \nu) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$) ισχύει

η συνεπαγωγή $\mu \neq \nu \implies k_\mu \neq k_\nu$. Τούτη ισοδυναμεί με την ενριπτικότητα τής απεικονίσεως

$$\{1, \dots, n\} \ni \nu \longmapsto k_\nu \in \{1, \dots, n\}.$$

Επειδή κάθε ενριπτική απεικόνιση από ένα πεπερασμένο σύνολο στον εαυτό του είναι κατ' ανάγκην αμφιριπτική και οι αμφιριπτικές απεικονίσεις από το $\{1, \dots, n\}$ επί τού $\{1, \dots, n\}$ είναι (εξ ορισμού) τα στοιχεία τής \mathfrak{S}_n , αρκεί (για τον προσδιορισμό τής ορίζουσας $\det(\mathbf{C}) \in R$) να αντικαταστήσουμε το ανωτέρω πολλαπλό άθροισμα με ένα άθροισμα που να περιλαμβάνει μόνον εκείνες τις n -άδες (k_1, \dots, k_n) για τις οποίες $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n : k_\nu = \sigma(\nu), \forall \nu \in \{1, \dots, n\}$. Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\prod_{j=1}^n b_{\sigma(j)j} \right) \det(\Sigma\tau_{\sigma(1)}(\mathbf{A}) \Sigma\tau_{\sigma(2)}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{\sigma(n)}(\mathbf{A})) \\ &\stackrel{\text{D.2.9 (iv)}}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\prod_{j=1}^n b_{\sigma(j)j} \right) \operatorname{sgn}(\sigma) \det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{j=1}^n b_{\sigma(j)j} \right) \det(\mathbf{A}) \\ &\stackrel{\text{(D.8)}}{=} \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}), \end{aligned}$$

και η (D.11) είναι αληθής. □

D.2.12 Ορισμός. Έστω τυχόν πίνακας $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(R)$ ($n \geq 2$). Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$, συμβολίζουμε ως

$$\mathbf{A}_{[i,j]}^\# \in \operatorname{Mat}_{(n-1) \times (n-1)}(R)$$

τον υποπίνακα τού \mathbf{A} τον προκύπτοντα ύστερα από διαγραφή τής i -οστής γραμμής $\Gamma_{\mathbf{A}}(i)$ και τής j -οστής στήλης $\Sigma\tau_j(\mathbf{A})$:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \hline a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ \hline a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array} \right),$$

ήτοι τον $\mathbf{A}_{[i,j]}^\# := (a_{st}^\#)_{1 \leq s, t \leq n-1}$, όπου

$$a_{st}^\# := \begin{cases} a_{st}, & \text{όταν } 1 \leq s \leq i-1 \text{ και } 1 \leq t \leq j-1, \\ a_{s+1,t}, & \text{όταν } i \leq s \leq n-1 \text{ και } 1 \leq t \leq j-1, \\ a_{s,t+1}, & \text{όταν } 1 \leq s \leq i-1 \text{ και } j \leq t \leq n-1, \\ a_{s+1,t+1}, & \text{όταν } i \leq s \leq n-1 \text{ και } j \leq t \leq n-1. \end{cases}$$

Το στοιχείο

$$\operatorname{cof}_{ij}(\mathbf{A}) := (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{[i,j]}^\#) \in R$$

τού δακτυλίου αναφοράς ονομάζεται **συμπαράγοντας** (ή **αλγεβρικό συμπλήρωμα**) τού \mathbf{A} ως προς το ζεύγος δεικτών i, j , και ο

$$\text{adj}(\mathbf{A}) := ((\text{cof}_{ij}(\mathbf{A}))_{1 \leq i, j \leq n})^\top \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$$

ο πίνακας ο προσαρτημένος στον \mathbf{A} .

D.2.13 Λήμμα. Έστω $\mathbf{A} = (a_{\mu\nu})_{1 \leq \mu, \nu \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ ($n \geq 2$). Για οιοσδήποτε $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$[a_{kj} = 0_R, \forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}] \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{[i,j]}^\#) = a_{ij} \text{cof}_{ij}(\mathbf{A}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε μετάταξη $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, για την οποία ισχύει $\sigma(n) = n$, η

$$\bar{\sigma} : \{1, \dots, n-1\} \longrightarrow \{1, \dots, n-1\}, \bar{\sigma}(k) := \sigma(k), \forall k \in \{1, \dots, n-1\},$$

είναι μια μετάταξη ανήκουσα στην \mathfrak{S}_{n-1} με $\text{sgn}(\bar{\sigma}) = \text{sgn}(\sigma)$ και η απεικόνιση

$$\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n) = n\} \longrightarrow \mathfrak{S}_{n-1}, \sigma \longmapsto \bar{\sigma},$$

ισομορφισμός ομάδων. Θέτοντας

$$\rho := \begin{bmatrix} 1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n-1 & n \\ 1 & \dots & j-1 & j+1 & j+2 & \dots & n & j \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_n,$$

παρατηρούμε ότι $\rho = [jn] \circ [jn-1] \circ \dots \circ [jj+2] \circ [jj+1]$, οπότε $\text{sgn}(\rho) = (-1)^{n-j}$. (Βλ. 3.3.3 και 3.3.5 (i).) Ο πίνακας

$$\mathbf{B} := (\Sigma\tau_{\rho(1)}(\mathbf{A}) \Sigma\tau_{\rho(2)}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{\rho(n)}(\mathbf{A}))$$

έχει ως ορίζουσά του την $\det(\mathbf{B}) \stackrel{\text{D.2.9 (iv)}}{=} \text{sgn}(\rho) \det(\mathbf{A}) = (-1)^{n-j} \det(\mathbf{A})$. Θέτοντας, κατ' αναλογία,

$$\tau := \begin{bmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n-1 & n \\ 1 & \dots & i-1 & i+1 & i+2 & \dots & n & i \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_n,$$

παρατηρούμε ότι $\tau = [in] \circ [in-1] \circ \dots \circ [ii+2] \circ [ii+1]$, οπότε $\text{sgn}(\tau) = (-1)^{n-i}$. Ο πίνακας

$$(c_{st})_{1 \leq s, t \leq n} = \mathbf{C} := \begin{pmatrix} \Gamma_{\tau(1)}(\mathbf{B}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_{\tau(n)}(\mathbf{B}) \end{pmatrix}$$

έχει ως ορίζουσά του την $\det(\mathbf{C}) \stackrel{\text{D.2.9 (iv)}}{=} \text{sgn}(\tau) \det(\mathbf{B}) = (-1)^{n-i} (-1)^{n-j} \det(\mathbf{A})$, οπότε

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{C}). \tag{D.13}$$

Επειδή

$$[a_{kj} = 0_R, \forall k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}] \Rightarrow [c_{kn} = 0_R, \forall k \in \{1, \dots, n-1\}],$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^n c_{i\sigma(i)} \right) = \sum_{\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n)=n\}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{i=1}^{n-1} c_{i\sigma(i)} \right) c_{nn} \\ &= c_{nn} \left(\sum_{\bar{\sigma} \in \mathfrak{S}_{n-1}} \operatorname{sgn}(\bar{\sigma}) \left(\prod_{i=1}^{n-1} c_{i\bar{\sigma}(i)} \right) \right) = c_{nn} \det(\mathbf{C}_{[n,n]}^\#). \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να χρησιμοποιηθεί η (D.13) σε συνδυασμό με τις ισότητες $c_{nn} = a_{ij}$ και $\mathbf{C}_{[n,n]}^\# = \mathbf{A}_{[i,j]}^\#$. \square

D.2.14 Πρόταση. Έστω τυχόν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(R)$ ($n \geq 2$).

(i) Εάν $j \in \{1, \dots, n\}$, τότε

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \operatorname{cof}_{kj}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{[k,j]}^\#). \quad (\text{D.14})$$

(Ανάπτυγμα της $\det(\mathbf{A})$ ως προς τις εγγραφές της στήλης $\Sigma\tau_j(\mathbf{A})$.)

(ii) Εάν $i \in \{1, \dots, n\}$, τότε

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \operatorname{cof}_{ik}(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{[i,k]}^\#). \quad (\text{D.15})$$

(Ανάπτυγμα της $\det(\mathbf{A})$ ως προς τις εγγραφές της γραμμής $\Gamma\Omega_i(\mathbf{A})$.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Θεωρούμε τα n στοιχεία

$$\mathbf{e}_k := (0_R, \dots, 0_R, \underbrace{1_R}_{k\text{-οστή συντεταγμένη}}, 0_R, \dots, 0_R) \in R^n, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

και εφράζουμε μέσω αυτών την j -οστή στήλη του \mathbf{A} ως ακολούθως:

$$\Sigma\tau_j(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \mathbf{e}_k^\top.$$

Προφανώς,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det \left(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{j-1}(\mathbf{A}) \left(\sum_{k=1}^n a_{kj} \mathbf{e}_k^\top \right) \Sigma\tau_{j+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{A}) \right) \\ &\stackrel{\text{D.2.8}}{=} \sum_{k=1}^n a_{kj} \det \left(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{j-1}(\mathbf{A}) \mathbf{e}_k^\top \Sigma\tau_{j+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{A}) \right) \\ &\stackrel{\text{D.2.13}}{=} \sum_{k=1}^n a_{kj} \left((-1)^{k+j} \cdot 1_R \cdot \det(\mathbf{A}_{[k,j]}^\#) \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(\mathbf{A}_{[k,j]}^\#). \end{aligned}$$

(ii) Επειδή $\mathbf{A}^\top = (a'_{rs})_{1 \leq r, s \leq n}$, όπου $a'_{rs} := a_{sr}$, $\forall (r, s) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$, έχουμε (κατόπιν αναπτύξεως τής $\det(\mathbf{A}^\top)$ ως προς τις εγγραφές τής $\Sigma\tau_i(\mathbf{A}^\top)$)

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) & \stackrel{(D.7)}{=} \det(\mathbf{A}^\top) \stackrel{(i)}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a'_{ki} \det((\mathbf{A}^\top)^\#_{[k,i]}) \\ & = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det((\mathbf{A}^\top)^\#_{[k,i]}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det((\mathbf{A}^\#_{[i,k]})^\top) \\ & \stackrel{(D.7)}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det((\mathbf{A}^\#_{[i,k]})). \end{aligned}$$

Άρα αμφότερες οι (D.14) και (D.15) είναι αληθείς. \square

D.2.15 Θεώρημα. Για κάθε $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(R)$ ($n \geq 2$) ισχύουν οι ισότητες

$$\boxed{\text{adj}(\mathbf{A}) \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{I}_n = \mathbf{A} \text{adj}(\mathbf{A}).} \quad (D.16)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για οιοσδήποτε $i, j \in \{1, \dots, n\}$ η εγγραφή τού πίνακα $\text{adj}(\mathbf{A}) \mathbf{A}$ η ευρισκόμενη στην i -στή του γραμμή και στην j -οστή του στήλη είναι η

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{kj} \det(\mathbf{A}^\#_{[k,i]}) \\ & \stackrel{(*)}{=} \begin{cases} \det(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{i-1}(\mathbf{A}) \Sigma\tau_j(\mathbf{A}) \Sigma\tau_{i+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{j-1}(\mathbf{A}) \Sigma\tau_j(\mathbf{A}) \Sigma\tau_{j+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{A})), \\ \quad \text{όταν } i \leq j \text{ και} \\ \det(\Sigma\tau_1(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{j-1}(\mathbf{A}) \Sigma\tau_j(\mathbf{A}) \Sigma\tau_{j+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_{i-1}(\mathbf{A}) \Sigma\tau_j(\mathbf{A}) \Sigma\tau_{i+1}(\mathbf{A}) \cdots \Sigma\tau_n(\mathbf{A})), \\ \quad \text{όταν } j \leq i, \end{cases} \\ & = \begin{cases} \det(\mathbf{A}), & \text{όταν } i = j, \\ 0_R, & \text{όταν } i \neq j \text{ (βλ. πρόταση D.2.7)}. \end{cases} \end{aligned}$$

(Η ορίζουσα τού δεξιού μέλους στην $(*)$ έχει το άθροισμα τού αριστερού μέλους ως ανάπτυγμα ως προς την i -οστή στήλη.) Άρα $\text{adj}(\mathbf{A}) \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \mathbf{I}_n$. Η ισότητα $\mathbf{A} \text{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \mathbf{I}_n$ αποδεικνύεται παρομοίως (κάνοντας χρήση τού (ii) τής προτάσεως D.2.14). \square

D.2.16 Ορισμός. Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και έστω $n \in \mathbb{N}$. Μέσω τού μονοειδούς $(\text{Mat}_{n \times n}(R), \cdot)$ ορίζεται η (πολλαπλασιαστική) ομάδα των αντιστρεψίμων πινάκων

$$\boxed{\text{GL}_n(R) := (\text{Mat}_{n \times n}(R))^\times}$$

με τις εγγραφές τους ειλημμένες από τον R , η οποία καλείται, ιδιαιτέρως, **γενική γραμμική ομάδα (βαθμού n υπεράνω τού R)**.

D.2.17 Πρόταση. Για κάθε $\mathbf{A} \in \text{GL}_n(R)$ (όπου R τυχόν μη τετριμμένος δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο) έχουμε $\mathbf{A}^\top \in \text{GL}_n(R)$ και

$$\boxed{(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ και (προφανώς) $(\mathbf{I}_n)^\top = \mathbf{I}_n$, από την πρόταση D.1.5 προκύπτει ότι

$$(\mathbf{A}^{-1})^\top \mathbf{A}^\top = (\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1})^\top = \mathbf{I}_n = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A})^\top = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}^{-1})^\top,$$

οπότε ο \mathbf{A}^\top είναι αντιστρέψιμος και $(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top$. \square

D.2.18 Θεώρημα. Για κάθε μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R με μοναδιαίο στοιχείο και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{GL}_n(R) = \{\mathbf{A} \in \mathbf{Mat}_{n \times n}(R) \mid \det(\mathbf{A}) \in R^\times\}. \quad (\text{D.17})$$

Επιπροσθέτως, για κάθε $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(R)$,

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det(\mathbf{A})^{-1} \quad (\text{D.18})$$

και για $n \geq 2$,

$$\mathbf{A}^{-1} = \det(\mathbf{A})^{-1} \mathbf{adj}(\mathbf{A}). \quad (\text{D.19})$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $n = 1$ οι ισότητες (D.17) και (D.18) είναι προφανείς. Ας υποθέσουμε ότι $n \geq 2$. Εάν $\mathbf{A} \in \mathbf{Mat}_{n \times n}(R)$ και $\det(\mathbf{A}) \in R^\times$, τότε θέτοντας $\mathbf{B} := \det(\mathbf{A})^{-1} \mathbf{adj}(\mathbf{A})$ συνάγουμε μέσω της (D.16) ότι

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n = \mathbf{BA} \Rightarrow \mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(R).$$

Και αντιστρόφως: εάν $\mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(R)$, τότε υπάρχει αντίστροφο στοιχείο \mathbf{A}^{-1} τού \mathbf{A} . Κατά το θεώρημα D.2.11 και την πρόταση D.2.10,

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1_R = \det(\mathbf{A}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{A}),$$

οπότε $\det(\mathbf{A}) \in R^\times$ και $\det(\mathbf{A})^{-1} = \det(\mathbf{A}^{-1})$. (Η ισότητα (D.19) έπεται άμεσα από την (D.16).) \square

D.2.19 Σημείωση. Η γενική γραμμική ομάδα $\mathbf{GL}_n(R)$ δεν είναι αβελιανή στην περίπτωση όπου $n \geq 2$. Επί παραδείγματι, θεωρώντας τούς αντιστρέψιμους πίνακες

$$\mathbf{A} := \mathbf{E}_{1,2} + \mathbf{E}_{2,1}, \quad \mathbf{B} := \mathbf{E}_{1,1} + \mathbf{E}_{1,2} + \mathbf{E}_{2,2}$$

(όπου $\mathbf{E}_{i,j} \in \mathbf{Mat}_{n \times n}(R)$ όπως ορίστηκαν στο D.1.4 (i)), διαπιστώνουμε ότι

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E}_{1,2} + \mathbf{E}_{2,1} + \mathbf{E}_{2,2} \neq \mathbf{E}_{1,1} + \mathbf{E}_{1,2} + \mathbf{E}_{2,1} = \mathbf{BA}.$$

D.2.20 Παραδείγματα. (i) $\mathbf{GL}_n(F) = \{\mathbf{A} \in \mathbf{Mat}_{n \times n}(F) \mid \det(\mathbf{A}) \neq 0_F\}$ για κάθε σώμα F (διότι $F^\times = F \setminus \{0_F\}$).

(ii) Επειδή $\text{card}(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})) = \text{card}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \text{card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} > \aleph_0$, η $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ είναι ομάδα άπειρη (και μάλιστα υπεραριθμήσιμη).

(iii) $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{\mathbf{A} \in \mathbf{Mat}_{n \times n}(\mathbb{Z}) \mid \det(\mathbf{A}) \in \{\pm 1\}\}$.

D.2.21 Πρόβλημα. *Εάν R είναι ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, τότε οι ομάδες των αντιστρεψίμων στοιχείων των υποδακτύλιων $\text{UT}_n(R)$ και $\text{LT}_n(R)$ του $\text{Mat}_{n \times n}(R)$ (βλ. D.1.6 (ii) και D.1.7 (i)) είναι οι*

$$\text{UT}_n(R)^\times = \{ \mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{UT}_n(R) \mid a_{ii} \in R^\times, \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$$

και

$$\text{LT}_n(R)^\times = \{ \mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{LT}_n(R) \mid a_{ii} \in R^\times, \forall i \in \{1, \dots, n\} \}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $\text{UT}_n(R)^\times \subseteq \text{GL}_n(R) \cap \text{UT}_n(R)$ (βλ. D.1.7 (i) και C.1.13 (v)), για κάθε αντιστρέψιμο άνω τριγωνικό πίνακα $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ ισχύει

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a_{ii} \in R^\times \xrightarrow[\text{C.1.13 (iv)}]{\text{D.10}} [a_{ii} \in R^\times, \forall i \in \{1, \dots, n\}].$$

Επομένως, $\text{UT}_n(R)^\times \subseteq \{ \mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{UT}_n(R) \mid a_{ii} \in R^\times, \forall i \in \{1, \dots, n\} \}$. Ο αντίστροφος εγκλιτισμός “ \supseteq ” είναι προφανής. Η δεύτερη ισότητα (που αφορά στους αντιστρέψιμους κάτω τριγωνικούς πίνακες) αποδεικνύεται παρομοίως. \square

D.2.22 Πρόταση. *Εάν R είναι ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, τότε το σύνολο*

$$\text{SL}_n(R) := \{ \mathbf{A} \in \text{GL}_n(R) \mid \det(\mathbf{A}) = 1_R \}$$

αποτελεί μια υποομάδα τής $\text{GL}_n(R)$ (τη λεγόμενη *ειδική γραμμική ομάδα βαθμού n υπεράνω του R*) που είναι γνήσια όταν $1_R \neq -1_R$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς, $\mathbf{I}_n \in \text{SL}_n(R)$ και για οιοσδήποτε πίνακες $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{SL}_n(R)$ έχουμε

$$\det(\mathbf{AB}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}^{-1}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})^{-1} = 1_R$$

(δυνάμει των (D.11) και (D.18)), οπότε $\text{SL}_n(R) \subseteq \text{GL}_n(R)$ (βλ. πρόταση 2.1.16). Εξάλλου, όταν $1_R \neq -1_R$, έχουμε⁶

$$\begin{pmatrix} -1_R & 0_R & \cdots & 0_R & 0_R \\ 0_R & 1_R & \cdots & 0_R & 0_R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_R & 0_R & \cdots & 1_R & 0_R \\ 0_R & 0_R & \cdots & 0_R & 1_R \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(R) \setminus \text{SL}_n(R),$$

απ' όπου έπεται ότι $\text{SL}_n(R) \subsetneq \text{GL}_n(R)$. \square

D.2.23 Πρόταση. *Εάν R είναι ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο, τότε το σύνολο $\text{UT}_n^{[1]}(R)$ (και αντιστοίχως, το $\text{LT}_n^{[1]}(R)$), βλ. D.1.6 (iii), εφοδιαζόμενο με τον πολλαπλασιασμό τετραγωνικών πινάκων, αποτελεί μια υποομάδα τής $\text{SL}_n(R)$ (τη λεγόμενη *ομάδα των μοναδιαίως άνω, και αντιστοίχως, των μοναδιαίως κάτω τριγωνικών $(n \times n)$ -πινάκων υπεράνω του R*).*

⁶ Αντιθέτως, για το σώμα \mathbb{Z}_2 χαρακτηριστικής 2 λαμβάνουμε $\text{SL}_2(\mathbb{Z}_2) = \text{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να χρησιμοποιηθεί εκ νέου η πρόταση D.2.10. \square

D.2.24 Παράδειγμα. Για οιονδήποτε μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R με μοναδιαίο στοιχείο η ομάδα των μοναδιαίως άνω τριγωνικών (3×3) -πινάκων

$$\mathbf{Heis}(R) := \mathbf{UT}_3^{[1]}(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1_R & a & c \\ 0_R & 1_R & b \\ 0_R & 0_R & 1_R \end{pmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$$

καλείται (κλασική) **ομάδα τού Heisenberg** υπεράνω τού R .

D.2.25 Ορισμός. Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Ένας πίνακας $\mathbf{A} \in \mathbf{Mat}_{n \times n}(R)$ καλείται **μετατακτικός πίνακας** όταν ακριβώς μία εκ των εγγραφών οιασδήποτε στήλης του και οιασδήποτε γραμμής του ισούται με το 1_R , ενώ οι λοιπές εγγραφές της είναι ίσες με το 0_R . Το σύνολο των $(n \times n)$ -μετατακτικών πινάκων σημειώνεται με το σύμβολο $\mathbf{PMat}_{n \times n}(R)$.

D.2.26 Παρατήρηση. Προφανώς, $\text{card}(\mathbf{PMat}_{n \times n}(R)) = n!$. Επιπροσθέτως, για κάθε μετάταξη $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ορίζεται ο πίνακας

$$\mathbf{P}_\sigma := (\delta_{i\sigma(i)})_{1 \leq i, j \leq n} = (\mathbf{e}_{\sigma(1)}^\top \mathbf{e}_{\sigma(2)}^\top \cdots \mathbf{e}_{\sigma(n)}^\top) \in \mathbf{PMat}_{n \times n}(R),$$

όπου $\mathbf{e}_k := (0_R, \dots, 0_R, \underbrace{1_R}_{k\text{-οστή συντεταγμένη}}, 0_R, \dots, 0_R) \in R^n$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$. Κατά το

(iv) τής προτάσεως D.2.9,

$$\det(\mathbf{P}_\sigma) = \text{sgn}(\sigma) \det(\mathbf{I}_n) \in \{\pm 1_R\} \subseteq R^\times \xrightarrow{(D.17)} \mathbf{P}_\sigma \in \mathbf{GL}_n(R).$$

D.2.27 Πρόταση. Το σύνολο $\mathbf{PMat}_{n \times n}(R)$ των μετατακτικών πινάκων αποτελεί μια υποομάδα τής γενικής γραμμικής ομάδας $(\mathbf{GL}_n(R), \cdot)$ και η απεικόνιση

$$\mathfrak{S}_n \ni \sigma \longmapsto \mathbf{P}_\sigma \in \mathbf{PMat}_{n \times n}(R) \quad (D.20)$$

έναν ισομορφισμό ομάδων. Ως εκ τούτου, η συμμετρική ομάδα \mathfrak{S}_n είναι εμφυτεύσιμη στη γενική γραμμική ομάδα $(\mathbf{GL}_n(R), \cdot)$. (Βλ. 2.4.14 και 2.4.17.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απεικόνιση $\mathfrak{S}_n \ni \sigma \longmapsto \mathbf{P}_\sigma \in \mathbf{GL}_n(R)$ είναι μονομορφισμός ομάδων. Πράγματι για οιασδήποτε μετάταξεις $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\sigma \circ \tau} &= (\mathbf{e}_{\sigma(\tau(1))}^\top \mathbf{e}_{\sigma(\tau(2))}^\top \cdots \mathbf{e}_{\sigma(\tau(n))}^\top) \\ &= (\mathbf{e}_{\sigma(1)}^\top \mathbf{e}_{\sigma(2)}^\top \cdots \mathbf{e}_{\sigma(n)}^\top) (\mathbf{e}_{\tau(1)}^\top \mathbf{e}_{\tau(2)}^\top \cdots \mathbf{e}_{\tau(n)}^\top) = \mathbf{P}_\sigma \cdot \mathbf{P}_\tau \end{aligned}$$

και $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \mathbf{P}_\sigma = \mathbf{I}_n\} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid (\mathbf{e}_{\sigma(1)}^\top \cdots \mathbf{e}_{\sigma(n)}^\top) = (\mathbf{e}_1^\top \cdots \mathbf{e}_n^\top)\} = \{\text{id}\}$. Άρα η απεικόνιση $\sigma \longmapsto \mathbf{P}_\sigma$ καθορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ τής \mathfrak{S}_n και τής εικόνας της. Η εικόνα της περιέχεται στο $\mathbf{PMat}_{n \times n}(R)$ και έχει τάξη $n!$, οπότε ισούται κατ'ανάγκη με το $\mathbf{PMat}_{n \times n}(R)$. Είναι προφανές ότι $\mathbf{PMat}_{n \times n}(R) \subseteq \mathbf{GL}_n(R)$ (βλ. το (i) τής προτάσεως 2.4.6) και ότι η (D.20) είναι ισομορφισμός ομάδων. \square

D.2.28 Σημείωση. (i) Η εμφύτευση $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(R)$ χρησιμοποιείται (πρακτικά) ως επί το πλείστον στην περίπτωση όπου είτε $R = \mathbb{Z}$ είτε ο R είναι σώμα.

(ii) Ο περιορισμός τής $\sigma \mapsto \mathbf{P}_\sigma$ επί τής εναλλάσσουσας ομάδας \mathfrak{A}_n δίδει μια εμφύτευση $\mathfrak{A}_n \hookrightarrow \mathrm{SL}_n(R)$, καθώς έχουμε

$$\{\mathbf{P}_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{A}_n\} = \mathrm{PMat}_{n \times n}(R) \cap \mathrm{SL}_n(R).$$

D.2.29 Ορισμός. Μέσω των προτάσεων D.1.5, D.2.17 και 2.1.16 είναι άμεσος ο έλεγχος του ότι το σύνολο

$$\mathbf{O}_n(F) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_n(F) \mid \mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^{-1}\}$$

αποτελεί μια υποομάδα τής $(\mathrm{GL}_n(F), \cdot)$ για οιοδήποτε σώμα F . Αυτή η υποομάδα καλείται, ιδιαιτέρως, **ορθογώνια ομάδα** βαθμού n (και τα στοιχεία της **ορθογώνιοι πίνακες**) υπεράνω του F , ενώ η ομάδα

$$\mathbf{SO}_n(F) := \mathbf{O}_n(F) \cap \mathrm{SL}_n(F)$$

καλείται **ειδική ορθογώνια ομάδα** βαθμού n υπεράνω του F .

D.2.30 Ορισμός. Για οιοδήποτε σώμα F ορίζουμε τον $(2n \times 2n)$ -πίνακα

$$\widehat{\mathbf{I}}_n := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ \hline -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n \times n} \end{array} \right) \in \mathrm{GL}_{2n}(F).$$

Το σύνολο⁷

$$\mathrm{Sp}_n(F) := \left\{ \mathbf{A} \in \mathrm{GL}_{2n}(F) \mid \mathbf{A}^\top \cdot \widehat{\mathbf{I}}_n = \widehat{\mathbf{I}}_n \cdot \mathbf{A}^{-1} \right\}$$

αποτελεί μια υποομάδα τής $(\mathrm{GL}_{2n}(F), \cdot)$, τη λεγόμενη **συμπλεκτική ομάδα** βαθμού n υπεράνω του F . (Τα στοιχεία τής $\mathrm{Sp}_n(F)$ καλούνται **συμπλεκτικοί πίνακες** υπεράνω του F .)

D.2.31 Παρατήρηση. (i) $\mathbf{A} \in \mathrm{Sp}_n(F) \iff \mathbf{A}^\top \in \mathrm{Sp}_n(F)$ (διότι $\widehat{\mathbf{I}}_n^{-1} = -\widehat{\mathbf{I}}_n$).

(ii) Εάν $n = 1$, τότε $\mathrm{Sp}_1(F) = \mathrm{SL}_2(F)$. Πράγματι, για κάθε $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(F)$ έχουμε αφ' ενός μεν

$$\mathbf{A}^\top \cdot \widehat{\mathbf{I}}_1 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_F & 1_F \\ -1_F & 0_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix},$$

αφ' ετέρου δε

$$\widehat{\mathbf{I}}_1 \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0_F & 1_F \\ -1_F & 0_F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix}.$$

Προφανώς, $\mathbf{A}^\top \cdot \widehat{\mathbf{I}}_1 = \widehat{\mathbf{I}}_1 \cdot \mathbf{A}^{-1} \iff (ad - bc)^{-1} = 1_F \iff ad - bc = 1_F$.

⁷Προσοχή! Ορισμένοι συγγραφείς χρησιμοποιούν το σύμβολο $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ αντί του $\mathrm{Sp}_n(F)$.

D.2.32 Ορισμός. Εάν ως \bar{z} συμβολίσουμε τον συζυγή οιοδήποτε μιγαδικού αριθμού z και $\mathbf{A} = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$, τότε λέμε ότι ο πίνακας $\overline{\mathbf{A}} := (\bar{z}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ είναι ο **συζυγής** και ο πίνακας $\overline{\mathbf{A}^\top}$ ο **αναστροφοσυζυγής** τού \mathbf{A} .

D.2.33 Πρόταση. Εάν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ και $z \in \mathbb{C}$, τότε ισχύουν τα κάτωθι:

(i) $\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$, $\overline{z\mathbf{A}} = \bar{z}\overline{\mathbf{A}}$ και $\overline{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{B}}$.

(ii) $\overline{\mathbf{A}^\top} = \overline{\mathbf{A}}^\top$.

(iii) Εάν $\mathbf{A} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, τότε $\overline{\mathbf{A}} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ και $(\overline{\mathbf{A}})^{-1} = \overline{\mathbf{A}^{-1}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφήνεται ως άσκηση. □

D.2.34 Ορισμός. Μέσω των προτάσεων D.1.5, D.2.17, D.2.33 και 2.1.16 είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι το σύνολο

$$\mathbf{U}_n(\mathbb{C}) := \left\{ \mathbf{A} \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \overline{\mathbf{A}^\top} = \mathbf{A}^{-1} \right\}$$

αποτελεί μια υποομάδα τής $(\text{GL}_n(\mathbb{C}), \cdot)$. Αυτή η υποομάδα καλείται, ιδιαιτέρως, **μοναδιακή ομάδα** βαθμού n (και τα στοιχεία της **μοναδιακοί πίνακες**) υπεράνω τού \mathbb{C} , ενώ η ομάδα

$$\mathbf{SU}_n(\mathbb{C}) := \mathbf{U}_n(\mathbb{C}) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$$

καλείται **ειδική μοναδιακή ομάδα** βαθμού n υπεράνω τού \mathbb{C} .

D.2.35 Παρατήρηση. Εάν χρησιμοποιήσουμε τη συνήθη «ταύτιση» των \mathbb{C}^n και \mathbb{R}^{2n} μέσω τής αμφιρήςως

$$\mathbb{C}^n \ni (z_1, \dots, z_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n},$$

όπου $z_j := x_j + iy_j$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, τότε μπορούμε να ταυτίσουμε την $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ με μια υποομάδα τής $\text{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ και να συμπεράνουμε ότι

$$\mathbf{U}_n(\mathbb{C}) = \mathbf{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathbf{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathbf{Sp}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathbf{Sp}_n(\mathbb{R}).$$