ΚΕΦΑΛΑΙΟ 21

Πεπερασμένως παραγόμενες αβελιανές ομάδες

Μια ομάδα ονομάζεται **πεπερασμένως παραγόμενη** όταν διαθέτει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων. Οι πεπερασμένως παραγόμενες αβελιανές ομάδες είναι δυνατόν να ταξινομηθούν. Με αυτό εννοούμε ότι μπορούμε να καταρτίσουμε έναν κατάλογο (έστω και απειροπληθών) «απότυπων παραδειγμάτων», με κανένα από αυτά ισόμορφο με κάποιο άλλο, ούτως ώστε, εάν μας δοθεί μια *τυχούσα* πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή ομάδα, αυτή να οφείλει να είναι ισόμορφη με μία από εκείνες τού καταλόγου μας.

(21.1) Θεώρημα. *Κάθε πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή ομάδα είναι ισόμορφη με ένα ευθύ γινόμενο κυκλικών ομάδων τής μορφής*

$$\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k - 1} \times \mathbb{Z}_{m_k} \times \mathbb{Z}^s,$$

όπου ο m_i διαιρεί τον m_{i+1} για όλους τούς $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Η $\mathbb{Z}^s$ χρησιμοποιείται ως συντόμευση τού ευθέος γινομένου s αντιτύπων τής προσθετικής ομάδας των ακεραίων. Ο αριθμός s καλείται η **βαθμίδα** τής ομάδας μας, ενώ οι $m_1, \ldots, m_k$ είναι οι **συντελεστές στρέψης** της. Δύο ειδικές περιπτώσεις τού ως άνω θεωρήματος αξίζει να διατυπωθούν χωριστά.

(21.2) Πόρισμα. *Κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα είναι ισόμορφη με ένα ευθύ* *γινόμενο κυκλικών ομάδων τής μορφής*

$$\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k-1} \times \mathbb{Z}_{m_k},$$

όπου ο m_i διαιρεί τον m_{i+1} για όλους τούς $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

(21.3) Πόρισμα. *Κάθε πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή ομάδα, εντός τής οποίας δεν υπάρχουν στοιχεία πεπερασμένης τάξης, είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αντιτύπων τής $\mathbb{Z}$.* (Αυτό εμπίπτει στη γενική διατύπωση τού θεωρήματος (21.1) όταν επιτρέπουμε στον k να ισούται με μηδέν. Μια ομάδα, η οποία είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο s αντιτύπων τής $\mathbb{Z}$, καλείται **ελεύθερη αβελιανή ομάδα** βαθμίδας s.)

(21.4) Παραδείγματα. (i) Μην ξεγελιέστε από ομάδες όπως η $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$. Εκ πρώτης όψεως, ενδέχεται να σας προβληματίζει το γεγονός ότι το 6 δεν είναι διαιρέτης τού 10. Όμως, κάνοντας διπλή χρήση τού θεωρήματος (10.2), παίρνουμε

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30},$$

ήτοι μία ομάδα η οποία βρίσκεται στον κατάλογό μας.

(ii) Μια αβελιανή ομάδα τάξης 12 οφείλει να είναι ισόμορφη είτε με την $\mathbb{Z}_{12}$ είτε με την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$. Αυτό επιβεβαιώνει και πάλι τους υπολογισμούς τού κεφαλαίου 20.

(iii) Η υποομάδα τής $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, η οποία παράγεται από τα στοιχεία -1 και $\frac{i}{2}$, είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.

(iv) Η ομάδα $\mathbb{R}$ δεν είναι πεπερασμένως παραγόμενη (βλ. άσκηση 21.12) και, επομένως, δεν μπορεί να είναι ισόμορφη με καμία από τις ομάδες τού καταλόγου μας.

Έστω G μια πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή ομάδα, η οποία διαθέτει r σαφώς διακεκριμένα στοιχεία $x_1, \ldots, x_r$ ως γεννήτορές της. Εάν δεν υπάρχει σύνολο $r-1$ στοιχείων που να μπορεί να την παραγάγει, τότε ονομάζουμε το $\{x_1, \ldots, x_r\}$ **ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων**. Επειδή η θεωρούμενη ομάδα είναι αβελιανή, κάθε $g \in G$ μπορεί να γραφεί κατά έναν ιδιαίτερα όμορφο τρόπο ως μία λέξη

$$g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \qquad (\triangledown)$$

όπου οι $n_1, \ldots, n_r$ είναι ακέραιοι αριθμοί, απλώς με το να συλλέξουμε μαζί τις δυνάμεις των διαφόρων γεννητόρων. Μια έκφραση τής μορφής

$$e = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \qquad (\triangledown\triangledown)$$

ονομάζεται **σχέση** (υφιστάμενη) μεταξύ των γεννητόρων μας. Ας σημειωθεί ότι εάν ο q είναι ένας ακέραιος, τότε και το $\{x_1 x_2^q, x_2, \ldots, x_r\}$ είναι ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων τής G, διότι κάθε λέξη $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$ μπορεί να επαναγραφεί με τη βοήθεια των νέων αυτών γεννητόρων ως $(x_1 x_2^q)^{n_1} x_2^{n_2 - q n_1} \cdots x_r^{n_r}$.

Απόδειξη τού θεωρήματος (21.1). Ας υποθέσουμε, εν πρώτοις, ότι η G έχει ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων $\{x_1, \ldots, x_r\}$, για το οποίο η μόνη υφιστάμενη σχέση είναι η τετριμμένη που την αποκτούμε όταν θέτουμε $n_1 = \cdots = n_r = 0$ στην $(\bigtriangledown\bigtriangledown)$. Τότε η έκφραση $(\bigtriangledown)$ για το g, η παρεχόμενη μέσω αυτών των γεννητόρων, είναι μονοσημάντως ορισμένη και η συνάρτηση

$$G \longrightarrow \mathbb{Z}^r, \quad g \longmapsto (n_1, \ldots, n_r)\,,$$

αποτελεί έναν ισομορφισμό.

Η πραγμάτευση τής γενικής περίπτωσης είναι, όπως θα αναμενόταν, περισσότερο κοπιώδης. Εν προκειμένω, ανεξαρτήτως τού πώς επιλέγουμε ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων για την G, υφίσταται πάντοτε (τουλάχιστον) μία μη τετριμμένη σχέση μεταξύ των γεννητόρων. Αλλά *ανάμεσα σε όλες τις σχέσεις, τις υφιστάμενες μεταξύ όλων των δυνατών ελαχιστοτικών συνόλων γεννητόρων τής G, θα υπάρχει μία δύναμη ενός γεννήτορα, η οποία θα διαθέτει έναν ελάχιστο θετικό ακέραιο αριθμό ως εκθέτη, ας τον πούμε* m_1. Ας υποθέσουμε ότι ο m_1 εμφανίζεται ως εκθέτης τού x_1 στη σχέση

$$e = x_1^{m_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \qquad (\bigtriangledown \bigtriangledown \bigtriangledown)$$

την υφιστάμενη μεταξύ των γεννητόρων $x_1, \ldots, x_r$. Ισχυριζόμαστε ότι ο m_1 είναι ένας διαιρέτης τού n_2. Πράγματι· εάν

$$n_2 = q m_1 + u, \;\; q \in \mathbb{Z}, \;\; \text{για κάποιον ακέραιο } u, \;\; 0 \le u < m_1,$$

τότε

$$\begin{aligned} e &= x_1^{m_1} x_2^{q m_1 + u} x_3^{n_3} \cdots x_r^{n_r} \\ &= (x_1 x_2^q)^{m_1} x_2^u x_3^{n_3} \cdots x_r^{n_r}. \end{aligned}$$

Αλλά, επειδή *και* το $\{x_1 x_2^q, x_2, \ldots, x_r\}$ είναι ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων τής G, τούτο θα ήταν αντιφατικό προς την επιλογή τού m_1 (ως τού *ελαχίστου* θετικού εκθέτη), εκτός και εάν το u ήταν ίσο με το μηδέν. Επομένως έχουμε $n_2 = q m_1$, όπως ακριβώς ισχυρισθήκαμε. Κατ' αναλογίαν, μπορούμε να δείξουμε ότι ο m_1 είναι διαιρέτης καθενός εκ των $n_3, \ldots, n_r$, ήτοι ότι $n_i = q_i m_1$, όπου $q_i \in \mathbb{Z}$, για κάθε i, $3 \le i \le r$.

Μεταβαίνουμε, εν συνεχεία, σε ένα *νέο* σύστημα γεννητόρων $\{z_1, x_2, \ldots, x_r\}$, όπου

$$z_1 = x_1 x_2^q x_3^{q_3} \cdots x_r^{q_r}$$

και παρατηρούμε ότι η σχέση ($\bigtriangledown\bigtriangledown\bigtriangledown$) γράφεται ως

$$e = z_1^{m_1}.$$

Η αρχική επιλογή μας για τον εκθέτη m_1 μας εγγυάται ότι δεν υπάρχει μικρότερος θετικός ακέραιος, στον οποίον υψούμενο το z_1 να μας δίνει το ουδέτερο στοιχείο e, οπότε η τάξη τού z_1 ισούται με το m_1. Έστω $H = \langle z_1 \rangle$ και έστω G_1 η υποομάδα τής G η παραγόμενη από τα $x_2, \ldots, x_r$. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι $HG_1 = G$ και $H \cap G_1 = \{e\}$, οπότε, βάσει τού θεωρήματος (10.4), έχουμε

$$G \cong H \times G_1 \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times G_1.$$

Κατόπιν τούτου εργαζόμαστε με την G_1 (στη θέση τής G) και εκτελούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία. Και πάλι υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: ή $G_1 \cong \mathbb{Z}^{r-1}$ ή $G_1 \cong \mathbb{Z}_{m_2} \times G_2$. Επομένως, η αρχική ομάδα G ή θα είναι ισόμορφη με την ομάδα $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}^{r-1}$ ή θα είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times G_2$. Στη δεύτερη περίπτωση ο θετικός ακέραιος m_2 εμφανίζεται ως εκθέτης, ας πούμε τού y_2, σε μια υφιστάμενη σχέση τής μορφής

$$e = y_2^{m_2} y_3^{n_3'} \cdots y_r^{n_r'}$$

μεταξύ των μελών ενός ελαχιστοτικού συνόλου γεννητόρων $\{y_2, \ldots, y_r\}$ τής G_2. Επειδή το $\{z, y_2, \ldots, y_r\}$ αποτελεί ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων τής G και επειδή

$$e = z_1^{m_1} y_2^{m_2} y_3^{n_3'} \cdots y_r^{n_r'},$$

βλέπουμε ότι ο m_1 *είναι ένας διαιρέτης τού* m_2. Τώρα πλέον διαθέτουμε όλα τα ουσιαστικά συστατικά για την αποπεράτωση τής απόδειξή μας και μπορούμε -κατ' αναλογίαν- να συνεχίσουμε με την G_2 (στη θέση τής G_1). Τελικώς, η όλη διαδικασία λήγει ύστερα από την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους τέτοιων βημάτων, καθότι η G είναι πεπερασμένως παραγόμενη και σε κάθε βήμα ελαττώνουμε τον αριθμό των γεννητόρων κατά ένα. $\square$

Για να ολοκληρώσουμε την ταξινόμησή μας οφείλουμε να δείξουμε ότι, εάν δυο πεπερασμένως παραγόμενες αβελιανές ομάδες είναι μεταξύ τους ισόμορφες, τότε αυτές διαθέτουν την ίδια βαθμίδα και τους ίδιους συντελεστές στρέψης.

(21.5) Θεώρημα. *Έστω ότι οι G_1, G_2 είναι δυο πεπερασμένως παραγόμενες αβελιανές ομάδες, ισόμορφες με τα ευθέα γινόμενα*

$$G_j \cong \mathbb{Z}_{m_1^{(j)}} \times \mathbb{Z}_{m_2^{(j)}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_{k_j}^{(j)}} \times \mathbb{Z}^{s_j}, \;\; j = 1, 2,$$

(όπως στο θεώρημα (21.1)). *Εάν οι G_1 και G_2 είναι μεταξύ τους ισόμορφες, τότε* $k_1 = k_2$,

$$m_i^{(1)} = m_i^{(2)}, \ \forall i, \ 1 \leq i \leq k_1 = k_2 \ \ \textit{και} \quad s_1 = s_2 \, .$$

Προς τούτο θα χρειασθούμε τα δύο απλά λήμματα που ακολουθούν.

(21.6) Λήμμα. *Έστω ότι οι m και q είναι δυο θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Το πλήθος των ακεραίων αριθμών r, οι οποίοι ικανοποιούν τις $0 \leq r < m$ και $m \,|qr$, ισούται με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των m και q.*

Απόδειξη. Εάν ο d είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και q, τότε τους γράφουμε ως $m = m'd$ και $q = q'd$, παίρνοντας μκδ$(m', q') = 1$. Καθώς $m\,|qr$, έχουμε $m'd\,|q'dr$, και επομένως $m'\,|r$. Τούτο σημαίνει ότι $r \in \{0, m', 2m', \ldots , (d-1)m'\}$. Και αντιστρόφως· καθένας εξ αυτών των ακεραίων ικανοποιεί τις δύο υποθέσεις μας, οπότε το ζητούμενο πλήθος ισούται πράγματι με d. □

(21.7) Λήμμα. *Εάν $H \cong \mathbb{Z}_m$, το πλήθος των στοιχείων $x \in H$, τα οποία ικανοποιούν την $x^q = e$, ισούται με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των m και q. Πιο γενικά, εάν*

$$H \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k-1} \times \mathbb{Z}_{m_k},$$

τότε τούτο το πλήθος ισούται με μκδ$(m_1, q) \cdot$ μκδ$(m_2, q) \cdot \cdots \cdot$ μκδ(m_k, q) .

Απόδειξη. Το πλήθος των εν λόγω στοιχείων τής H παραμένει προφανώς αμετάβλητο κατόπιν εφαρμογής ενός οιουδήποτε ισομορφισμού, οπότε ο πρώτος ισχυρισμός δεν είναι παρά μια αναδιατύπωση τού λήμματος (21.6). (Επειδή η πράξη τής ομάδας $\mathbb{Z}_m$ είναι η πρόσθεση κατά μόδιο m, η q-οστή δύναμη ενός στοιχείου της, ας πούμε τού r, ισούται με το ουδέτερο στοιχείο εάν και μόνον εάν ο m διαιρεί τον qr). Για την επαλήθευση τού δευτέρου ισχυρισμού, εάν υποτεθεί ότι η q-οστή δύναμη ενός στοιχείου $(r_1, \ldots , r_k)$ τής $\mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ είναι το ουδέτερο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι έχουμε ακριβώς μκδ(m_1, q) επιλογές για το r_1, ακριβώς μκδ(m_2, q) επιλογές για το r_2 κ.ο.κ. □

Πρώτο μέρος τής απόδειξης τού θεωρήματος (21.5). Τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης εντός τής G_j, όπου $j \in \{1, 2\}$, συγκροτούν μια υποομάδα

$$H_j = \mathbb{Z}_{m_1^{(j)}} \times \mathbb{Z}_{m_2^{(j)}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_{k_j}^{(j)}} \times \{e\}.$$

Ένας οιοσδήποτε ισομορφισμός μεταξύ των G_1 και G_2 στέλνει τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης να απεικονισθούν σε στοιχεία πεπερασμένης τάξης. Συνεπώς,

$H_1 \cong H_2$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη τής γενικότητας, ότι $k_1 \geq k_2$ και εφαρμόζουμε το λήμμα (21.7) για τις H_1, H_2 και για $q = m_1^{(1)}$. Τότε

$$\prod_{\nu=1}^{k_1} \text{μκδ}(m_\nu^{(1)}, m_1^{(1)}) = \prod_{\nu=1}^{k_2} \text{μκδ}(m_\nu^{(2)}, m_1^{(1)}),$$

οπότε

$$\left(m_1^{(1)}\right)^{k_1} = \prod_{\nu=1}^{k_2} \text{μκδ}(m_\nu^{(2)}, m_1^{(1)}).$$

Κάθε παράγοντας τού δεξιού μέλους αυτής τής ισότητας είναι $\leq m_1^{(1)}$, πράγμα που σημαίνει ότι κατ' ανάγκην $k_1 = k_2$ και ότι $m_1^{(1)} \Big| m_1^{(2)}$. Από την άλλη μεριά, κατόπιν εφαρμογής τού ιδίου τεχνάσματος για $q = n_1$, παίρνουμε

$$\left(m_1^{(2)}\right)^{k_2} = \left(m_1^{(2)}\right)^{k_1} = \prod_{\nu=1}^{k_1} \text{μκδ}(m_\nu^{(1)}, m_1^{(2)}),$$

απ' όπου συνάγουμε ότι $m_1^{(2)} \Big| m_1^{(1)}$. Άρα, στην παρούσα φάση, γνωρίζουμε ήδη ότι $k_1 = k_2$ και $m_1^{(1)} = m_1^{(2)}$. Για λόγους συντομίας θέτουμε $k = k_1 (= k_2)$.

Εφαρμόζοντας το λήμμα (21.7) για τις H_1, H_2 και για $q = m_2^{(1)}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} m_1^{(1)} \left(m_2^{(1)}\right)^{k-1} &= \prod_{\nu=1}^{k} \text{μκδ}(m_\nu^{(2)}, m_2^{(1)}) \\ &= m_1^{(1)} \cdot \prod_{\nu=2}^{k} \text{μκδ}(m_\nu^{(2)}, m_2^{(1)}), \end{aligned}$$

οπότε $m_2^{(1)} \Big| m_2^{(2)}$. Εφαρμόζοντας εκ νέου το λήμμα (21.7) για τις υποομάδες H_1, H_2 και για $q = m_2^{(2)}$, παίρνουμε αναλόγως

$$m_1^{(1)} \cdot \prod_{\nu=2}^{k} \text{μκδ}(m_\nu^{(1)}, m_2^{(2)}) = m_1^{(1)} \left(m_2^{(2)}\right)^{k-1},$$

οπότε και $m_2^{(2)} \Big| m_2^{(1)}$. Άρα τελικώς έχουμε και $m_2^{(1)} = m_2^{(2)}$. Αφήνουμε ως άσκηση για τον αναγνώστη την περιγραφή των λεπτομερειών τής συνέχισης αυτής τής διαδικασίας, καθώς και τον έλεγχο τού τι συμβαίνει όταν θεωρούμε ως q το $m_3^{(1)}$ (και κατόπιν τούτου το $m_3^{(2)}$) κ.ο.κ. □

(21.8) Λήμμα. *Εάν $\mathbb{Z}^{s_1} \cong \mathbb{Z}^{s_2}$, τότε $s_1 = s_2$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη τής γενικότητας, ότι $s_1 \leq s_2$. Έστω $\varphi : \mathbb{Z}^{s_1} \longrightarrow \mathbb{Z}^{s_2}$ ένας ισομορφισμός. Εκλαμβάνουμε την $\mathbb{Z}^{s_2}$ ως την υποομάδα τής $\mathbb{R}^{s_2}$ την αποτελούμενη από εκείνα της τα στοιχεία, οι συντεταγμένες των οποίων είναι ακέραιοι αριθμοί. Χρησιμοποιώντας τό x_i για τον συμβολισμό τού στοιχείου τής $\mathbb{Z}^{s_1}$, το οποίο έχει ως i-οστή του συντεταγμένη το 1 και όλες τις άλλες του συντεταγμένες ίσες με το μηδέν, εκφράζουμε κάθε $(r_1, \ldots, r_{s_1}) \in \mathbb{Z}^{s_1}$ ως

$$(r_1, \ldots, r_{s_1}) = r_1 x_1 + \cdots + r_{s_1} x_{s_1},$$

οπότε

$$\varphi\left((r_1, \ldots, r_{s_1})\right) = r_1 \varphi(x_1) + \cdots + r_{s_1} \varphi(x_{s_1}).$$

Ως εκ τούτου, η εικόνα $\mathrm{Im}(\varphi)$ τού ισομορφισμού φ περιέχεται στον (διανυσματικό) υπόχωρο τού $\mathbb{R}^{s_2}$ τον παραγόμενο από το σύνολο $\{\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{s_1})\}$. Επειδή όμως αυτός ο υπόχωρος οφείλει να περιέχει την ομάδα $\mathbb{Z}^{s_2}$, πρέπει να ισούται με ολόκληρο τον χώρο $\mathbb{R}^{s_2}$. Άρα $s_1 = s_2$. □

Δεύτερο μέρος τής απόδειξης τού θεωρήματος (21.5). Διαθέτουμε έναν ομομορφισμό ομάδων

$$G_1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{s_1}, \quad (r_1, \ldots, r_k, r_{k+1}, \ldots, r_{k+s}) \longmapsto (r_{k+1}, \ldots, r_{k+s}),$$

ο οποίος είναι επιρριπτικός και έχει ως πυρήνα του την υποομάδα H_1. Επομένως,

$$G_1/H_1 \cong \mathbb{Z}^{s_1}.$$

Παρομοίως δείχνουμε ότι

$$G_2/H_2 \cong \mathbb{Z}^{s_2}.$$

Όπως ήδη εξηγήσαμε προηγουμένως, κάθε ισομορφισμός μεταξύ των G_1 και G_2 στέλνει την H_1 να απεικονισθεί επί τής H_2. Κατά συνέπειαν, θα επάγει έναν ισομορφισμό μεταξύ των ομάδων πηλίκων G_1/H_1 και G_2/H_2. Βάσει τού λήμματος (21.8), $s_1 = s_2$. □

Η απόδειξη που δώσαμε για το θεώρημα (21.1) είναι μεν αποδοτική, αλλά διόλου διαφωτιστική σε ό,τι αφορά στην αναγνώριση μιας πεπερασμένως παραγομένης αβελιανής ομάδας από ένα δοθέν σύνολο γεννητόρων και σχέσεων. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε πως κάτι τέτοιο είναι όντως εφικτό και μάλιστα κατά έναν συστηματικό τρόπο. Η ακολουθούμενη μέθοδος περιλαμβάνει πράξεις γραμμών και στηλών πινάκων· γι' αυτόν τον λόγο θα αλλάξουμε τον χρησιμοποιούμενο συμβολισμό μας καθιστώντας τον *προσθετικό*, δηλαδή θα γράφουμε $x + y$ για την πράξη τής ομάδας, 0 για το *ουδέτερο* (ή ταυτοτικό) στοιχείο και $-x$ (αντί τού x^{-1}) για το *αντίθετο* στοιχείο (αντί τού *αντιστρόφου*). Έτσι, στη συνηθέστερή του εκδοχή, το θεώρημα (21.1) αναφέρεται στην αβελιανή ομάδα την παρεχομένη από $k+s$ γεννήτορες $x_1, \ldots, x_{k+s}$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$m_1 x_1 = 0, \ \ldots \ , m_k x_k = 0.$$

Αυτή είναι ισόμορφη τής ομάδας πηλίκων A/N, όπου η A είναι μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα, τα στοιχεία τής οποίας είναι γραμμικοί συνδυασμοί τής μορφής

$$n_1 x_1 + \cdots + n_{k+s} x_{k+s}$$

με *ακεραίους* συντελεστές $n_1, \ldots, n_{k+s}$, ενώ η N είναι η υποομάδα τής A η παραγόμενη από τα $m_1 x_1, \ldots, m_k x_k$.

Ασκήσεις

21.1 Βρείτε τους συντελεστές στρέψης για καθεμιά από τις ακόλουθες ομάδες: (a) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20}$, (b) $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{42}$, (c) $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{16}$.

21.2 Έστω G μια αβελιανή ομάδα τάξης 100. Δείξτε ότι η G οφείλει να περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο τάξης 10. Ποιοι είναι οι συντελεστές στρέψης τής G, εάν υποτεθεί ότι δεν υπάρχει στοιχείο τής G με τάξη > 10;

21.3 Εάν η τάξη μιας πεπερασμένης αβελιανής ομάδας δεν μπορεί να διαιρεθεί με το τετράγωνο ενός θετικού ακεραίου αριθμού, δείξτε ότι η προκειμένη ομάδα οφείλει να είναι κυκλική.

21.4 Ταξινομήστε τις αβελιανές ομάδες τάξης $81, 144$ και 216.

21.5 Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Εάν μια αβελιανή ομάδα G έχει τάξη $|G| = p^n$ και περιέχει $p-1$ στοιχεία τάξης p, δείξτε ότι η G είναι κυκλική.

21.6 Εάν οι G, A, B είναι πεπερασμένες αβελιανές ομάδες και εάν $G \times A \cong G \times B$, αποδείξτε ότι $A \cong B$.

21.7 Έστω G μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα τάξης 360 που δεν περιέχει κανένα στοιχείο τάξης 12 ή 18. Βρείτε τους συντελεστές στρέψης τής G. Πόσα στοιχεία τάξης 6 περιέχει η G;

21.8 Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένως παραγόμενη, μη τετριμμένη υποομάδα τής $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ οφείλει να είναι ισόμορφη με μία από τις $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}^s$ ή $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^s$, για κάποιον θετικό ακέραιο s.

21.9 Έστω G μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Συμβολίστε ως $\#(q)$ το πλήθος των στοιχείων x τής G τα οποία ικανοποιούν την ισότητα $x^q = e$. Προσδιορίστε τους συντελεστές στρέψης τής G όταν $\#(2) = 16$, $\#(4) = 32$, $\#(3) = 9$, $\#(9) = 81$ και όταν -ταυτοχρόνως- ισχύει $x^{36} = e$ για κάθε $x \in G$.

21.10 Επαναλάβετε ό,τι κάνατε στην άσκηση 21.9, αλλά τούτη τη φορά υπό την προϋπόθεση ότι $\#(2) = 4$, $\#(3) = 3$, $\#(5) = 125$ και ότι $x^{30} = e$ για κάθε $x \in G$.

21.11 Αβελιανοποιήστε τις

(a) $Q \times S_4$, (b) $D_{12} \times A_4$,

(c) $G \times \mathbb{Z}_{10}$, όπου η G είναι η δικυκλική ομάδα τάξης 12,

και καταγράψτε τους συντελεστές στρέψης των προκυπτουσών αβελιανών ομάδων.

21.12 Αποδείξτε ότι η $\mathbb{R}$ δεν μπορεί να παραχθεί από πεπερασμένου πλήθους στοιχεία, δείχνοντας ότι κάθε πεπερασμένως παραγόμενη ομάδα έχει *αριθμήσιμο* υποκείμενο σύνολο.

21.13 Ας υποθέσουμε ότι η G είναι μια ομάδα για την οποία χρησιμοποιούμε τον προσθετικό συμβολισμό. Η G καλείται **διαιρετή ομάδα** (ή **ομάδα με διαίρεση**) όταν, δοθέντος ενός $x \in G$ και ενός θετικού ακεραίου m, μπορούμε πάντοτε να βρούμε ένα στοιχείο y τής G, τέτοιο ώστε να ισχύει $my = x$. Για παράδειγμα, οι ομάδες $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ και C είναι διαιρετές ομάδες. Δείξτε ότι, αντιθέτως, οι $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}_{>0}$ δεν είναι διαιρετές ομάδες. Αποδείξτε ότι καμία μη τετριμμένη, διαιρετή ομάδα δεν μπορεί να είναι πεπερασμένως παραγόμενη.

21.14 Δείξτε ότι η $\mathbb{Q}_{>0}$ περιέχει μια ελεύθερη αβελιανή υποομάδα βαθμίδας s για αυθαιρέτως μεγάλες τιμές τού s.