Πανεπιστημιακά Μαθηματικά Κείμενα

4

Επιμέλεια Σειράς: Νίκος Μαρμαρίδης

Καθηγητής Μαθηματικών Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Εκδόσεις

Leader Books

ΑΘΗΝΑ 2002

Πανεπιστημιακα Μαθηματικα Κειμενα

1. **Rotman, J.J.**: Θεωρία Galois, xii+185 σελίδες, έτος εκδόσεως 2000.
2. **Rudin, W.**: Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως, xvi+524 σελίδες, έτος εκδόσεως 2000.
3. **Fine, B. & Rosenberger, G.**: Το Θεμελιώδες Θεώρημα τής Άλγεβρας, xix+264 σελίδες, έτος εκδόσεως 2001.

Mark Antony Armstrong

Ομάδες και Συμμετρία

Μετάφραση από τα αγγλικά, πρόλογος στην ελληνική έκδοση,
ιστορικά και βιβλιογραφικά συμπληρώματα,
και επιστημονική επιμέλεια:

Δημήτριος Ι. Νταής

Εκδόσεις

Leader Books

ΑΘΗΝΑ 2002

Τίτλος Πρωτοτύπου: **Groups and Symmetry**
Συγγραφέας: **M.A. Armstrong**
Έκδοση: 1988, Springer - Verlag,
New York, Berlin, Heidelberg

Μετάφραση από τα αγγλικά, ηλεκτρονική
επεξεργασία και επ. επιμέλεια: **Δημήτριος Νταής**
Δρ. Παν/μίου Βόννης
Επίκουρος καθηγητής τού Τμήματος
Μαθηματικών και Στατιστικής
τού Παν/μίου Κύπρου
e-mail: ddais@ucy.ac.cy

Γλωσσική Επιμέλεια: **Κατερίνα Λαγού**
Φιλόλογος, e-mail: klagou@cc.uoi.gr

Τεχνική Επιμέλεια Σχημάτων και
Υποστήριξη Λογισμικού: **Αλέξανδρος Πολύμερος**
Φυσικός, Ειδικός Ανάπτυξης Λογισμικού
e-mail: apolimer@panafonet.gr

Σειρά: Πανεπιστημιακά
Μαθηματικά Κείμενα

Επιστημονική Επιμέλεια Σειράς: **Νίκος Μαρμαρίδης**
Καθηγητής τού Τμήματος Μαθηματικών
τού Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
e-mail: nmarmar@cc.uoi.gr

1η έκδοση για την Ελλάδα: 2002

ISBN 960-7901-28-X

Εκδόσεις
LEADER BOOKS A.E.
Παναγή Κυριακού 17, Αμπελόκηποι,
11521 Αθήνα
Τηλ.: 010/64.52.825-64.50.048, Fax: 010/64.49.924

web-page: http://www.leaderbooks.com, e-mail: info@leaderbooks.com

Παραγωγή: Cosmoware
Αγ. Ιωάννου 53, Αγία Παρασκευή
Τηλ.: 010/60.13.922, Fax: 010/60.01.642

Πρόλογος τού μεταφραστή

• **Ομάδες.** Η Θεωρία Ομάδων είναι ένας από τους πλέον βασικούς κλάδους τής Άλγεβρας με εφαρμογές εκτεινόμενες σε όλο το φάσμα των θετικών επιστημών.

Θα μπορούσε κανείς να ισχυρισθεί με βάσιμα επιχειρήματα ότι η έννοια τής *ομάδας* «ενυπήρχε» ήδη (εμμέσως πλην σαφώς) σε διάφορες εργασίες των μαθηματικών τής αρχαιότητας. Ως *αλγεβρική δομή* πρωτοπαρουσιάσθηκε σε αριθμοθεωρητικές εργασίες των L. Euler (1707-1783), C.-F. Gauss (1777-1855) κ.ά. κατά τα τέλη τού 18ου και τις αρχές τού 19ου αιώνα, και, εν συνεχεία, στη θεωρία μεταθέσεων των θέσεων μηδενισμού αλγεβρικών εξισώσεων[1] των J.-L. Lagrange (1736-1813), E. Galois (1811-1832) κ.ά. Ωστόσο, ο τελικώς καθιερωθείς «ορισμός» της, όπως τον αντιλαμβανόμαστε στις ημέρες μας, αποκρυσταλλώθηκε σε ένα άρθρο[2] τού A. Cayley (1821-1895) το οποίο δημοσιεύθηκε το 1854, καθώς και σε κατοπινές δημοσιεύσεις[3] του περί τα μέσα τής δεκαετίας τού 1870. (Αρκετοί ιστορικοί υπογραμμίζουν και την πολύτιμη συμβολή των R. Dedekind (1831-1916), C. Jordan (1838-1922) και W. van Dyck (1856-1934) στην παγίωση αυτού τού ορισμού.)

Η Θεωρία Ομάδων σύντομα διευρύνθηκε, αυτονομήθηκε, και -με την πάροδο τού χρόνου- κατέστη απαραίτητη τόσο για τη διδασκαλία των αρχών τής Σύγχρονης Άλγεβρας όσο και για τη μελέτη πλουσιοτέρων μαθηματικών δομών.

• **Συμμετρία.** Στην καθομιλουμένη με τη λέξη *συμμετρία* εκφράζουμε την αναγωγή σε κάποιο μέτρο έχοντας στον νου μας την αρμονική και ισορροπημένη σχέση που διέπει τα μέρη ενός όλου. Στην αρχαιοελληνική γραμματεία το επίθετο *σύμμετρος* αντιστοιχεί κυρίως στο επίθετο *ρητός*.

Ο συσχετισμός τής μαθηματικής υλοποίησης τής συμμετρίας με την ποιοτική

[1] Πρβλ. ROTMANN J.J.: *Θεωρία Galois*, Π.Μ.Κ., Τόμος **1**, σε μετάφραση και επ. επιμέλεια Ν. Μαρμαρίδη, από τις εκδόσεις Leader Books, Αθήνα 2000.

[2] CAYLEY A.: *On the theory of groups, as depending in the symbolic equation* $\Theta^n = 1$, Phil. Mag. **7**, (1854).

[3] Πρβλ. SCHOLZ E. (Hrsg.): *Geschichte der Algebra*, B.I., Mannheim, 1990, σελ. 309.

αισθητική διάταξη και τη μορφική αναλογία διαφόρων σχηματισμών που απαντούν στη φύση, στο ζωικό βασίλειο ή ακόμη και σε ποικίλα δημιουργήματα τής ζωγραφικής, τής γλυπτικής, τής αρχιτεκτονικής, τής μουσικής και των άλλων καλών τεχνών περιγράφεται κατά τρόπο υποδειγματικό στο πασίγνωστο (και ενθέρμως συνιστώμενο) σύγγραμμα[4] [1] τού Hermann Weyl[5].

Από συνολοθεωρητική άποψη ομιλούμε ενίοτε για *ομάδα συμμετριών* ενός συνόλου X εννοώντας τις αμφιρριπτικές συναρτήσεις από το X επί τού εαυτού του, ήτοι τις μετατάξεις τού X (μαζί με τη συνήθη πράξη τής σύνθεσης). Από την καθαρώς γεωμετρική σκοπιά είθισται να αναφερόμαστε σε *συμμετρίες* υπονοώντας τα μέλη τής ομάδας των ορθογωνίων μετασχηματισμών (πρβλ. κεφ. 9).

Η ομαδοθεωρητική ερμηνεία γεωμετρικών ιδιοτήτων επιπέδων σχημάτων και στερεών σωμάτων (στον τρισδιάστατο χώρο) ακολούθησε μια μακρά ιστορική πορεία· ίσως, μάλιστα, η χρονική απαρχή μιας συστηματικής μελέτης της να μπορεί να τοποθετηθεί στο έτος 1872, οπότε και εμφανίζεται το περίφημο Erlanger Programm τού Felix Klein (1849-1925), σύμφωνα με το οποίο όλες οι γνωστές «γεωμετρίες» είναι δυνατόν να περιγραφούν μέσω καταλλήλων ομάδων μετασχηματισμών[6].

Για παράδειγμα, στο επίπεδο, η Προβολική Γεωμετρία ασχολείται με εκείνες τις ιδιότητες των σχημάτων, οι οποίες μένουν αναλλοίωτες ως προς τους προβολικούς μετασχηματισμούς, η Ευκλείδεια Γεωμετρία με τις ιδιότητες που μένουν αναλλοίωτες ως προς όλα τα στοιχεία τής ευκλείδειας ομάδας (πρβλ. κεφ. 24) κ.ο.κ. Αντιστοίχως, η Ελλειπτική και η Υπερβολική Γεωμετρία χαρακτηρίζονται από τις ομάδες των προβολικοτήτων που μεταφέρουν μια κατάλληλη κωνική τομή (ή, στη διάσταση τρία, μια κατάλληλη δευτεροβάθμια επιφάνεια) στον εαυτό της.

• **Το κρίσιμο ερώτημα.** Τι είδους πρόσβαση στη Στοιχειώδη Θεωρία Ομάδων είναι επιθυμητή προκειμένου να εισαγάγουμε προπτυχιακούς φοιτητές στα πρώτα θεμελιώδη αποτελέσματά της;

Το ερώτημα αυτό επιδέχεται, βεβαίως, ποικίλες απαντήσεις εξαρτώμενες από τον διαθέσιμο χρόνο για την παρουσίασή της, τις προτιμήσεις τού εκάστοτε διδάσκοντος και το γενικότερο επίπεδο τού ακροατηρίου. Ωστόσο, δεν θα πρέπει να διαφεύγει την προσοχή μας το ότι η πρόωρη τάση θεματολογικής εξειδίκευσης, η προσκόλληση σε υπερφορμαλιστικές αντιλήψεις περί τού «καθαρού» μαθηματι-

[4] Αριθμοί ευρισκόμενοι εντός αγκυλών παραπέμπουν στη βιβλιογραφία που παρατίθεται στο τέλος τού παρόντος βιβλίου.

[5] Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο H. Weyl κλείνοντας το εν λόγω σύγγραμμα (βλ. σελ. 145): «Η *συμμετρία* είναι ένα απέραντο θέμα, σημαντικό τόσο στην τέχνη όσο και στη φύση. Τα Μαθηματικά βρίσκονται στη ρίζα της και θα ήταν δύσκολο να εντοπίσουμε κάτι πιο κατάλληλο από αυτήν προκειμένου να περιγράψουμε τη λειτουργία τής μαθηματικής νόησης».

[6] Για μια διεξοδική ιστορική εξέταση τής συμπόρευσης και αλληλοσυμπλήρωσης τής Θεωρίας Ομάδων και τής Γεωμετρίας παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο τού H. Wussing: *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1969.

κού λόγου ή η πρωθύστερη δολιχοδρόμηση σε πολυδαίδαλες αποδεικτικές τεχνικές απομακρύνουν -κατά κανόνα- τον αρχάριο από τον πρώτιστο στόχο του (που δεν μπορεί να είναι κανείς άλλος παρά η απόκτηση μιας ευρείας, αλλά συγχρόνως *ανεπιτήδευτης* και *θελκτικής* μαθηματικής παιδείας), ενώ παραλλήλως τον αποστερούν, σε πολλές περιπτώσεις, από τη δυνατότητα ενεργούς συμμετοχής του στα εκπαιδευτικά δρώμενα, οδηγώντας τον σε μια άνευ όρων υποταγή του στην ξηρά αποστήθιση και στη βεβιασμένη συσσώρευση τυποποιημένων γνώσεων.

Ακόμη και ο ίδιος ο Felix Klein, στις παραδόσεις του γύρω από την ανάπτυξη των μαθηματικών τού 19ου αιώνα, προειδοποιεί για τον κίνδυνο που ελλοχεύει από την παιδαγωγική οπτική γωνία, όταν ο διδάσκων εμμένει σε μια τυφλή, σχεδόν φετιχιστική αφοσίωση στην αξιωματική και τυποκρατική προσέγγιση τής Θεωρίας Ομάδων. Πιο συγκεκριμένα, αναφερόμενος σε μαθησιακές διαδικασίες που βασίζονται στην «εξ ουρανού πίπτουσα» πρόταξη των «αξιωμάτων» τής ομάδας υπογραμμίζει τα εξής[7]:

«Εν προκειμένω, η όποια έκκληση προς τη φαντασία τίθεται σε δεύτερη μοίρα. Αντ' αυτής διαφυλάσσεται επιμελώς ο λογικός σκελετός, πράγμα που εκφράζει μια γενική [παιδαγωγική] κατευθυντήρια γραμμή στην οποία θα επανέλθουμε αρκετές φορές κατά τη διάρκεια τής [παρούσας] παράδοσης. Αυτή η αφηρημένη διατύπωση [των αξιωμάτων μέσω των οποίων ορίζεται η έννοια τής ομάδας] είναι εξαίρετη όταν κανείς ασχολείται με την επεξεργασία των αποδείξεων, αλλά σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να θεωρηθεί ως κατάλληλη για την ανάπτυξη νέων ιδεών και [εργασιακών] μεθόδων· για να ακριβολογούμε, πρόκειται για το τελικό αποτέλεσμα (το επιστέγασμα) μιας *ήδη* προηγηθείσας εξελικτικής πορείας. Ως εκ τούτου, ναι μεν διευκολύνει επιφανειακώς το μάθημα, αφού κανείς μπορεί μέσω αυτής να αποδείξει γνωστά θεωρήματα κατά τρόπο εύκολο και πλήρη , αλλά, από την άλλη μεριά, έτσι δυσκολεύεται ο διδασκόμενος, διότι τίθεται αντιμέτωπος με κάτι το *ήδη τετελεσμένο*, χωρίς να γνωρίζει το πώς καταλήξαμε σε αυτούς τους ορισμούς και μη μπορώντας να φαντασθεί (να αναπαραστήσει στο μυαλό του) απολύτως τίποτα. Εν γένει, αυτή η μέθοδος [παρουσίασης] μειονεκτεί, καθότι δεν συντελεί στην καλλιέργεια τού [δημιουργικού] στοχασμού. Το μόνο που απαιτείται είναι να μην παραβαίνουμε τις τέσσερεις εντολές[8]».

Παρότι η χρονική απόσταση που μας χωρίζει από τις αρχές τού προηγουμένου αιώνα είναι όντως αισθητή, οφείλουμε να λάβουμε σοβαρά υπ' όψιν αυτές τις παρατηρήσεις, διότι *κάθε* φοιτητής που πρωτοσυναντά την έννοια τής ομάδας εκκινεί -ούτως ή άλλως- από το «σημείο μηδέν».

Μήπως λοιπόν θα ήταν πιο πρόσφορο το να τού παράσχουμε αρχικώς κάποια *εύληπτα παραδείγματα* συνόλων εφοδιασμένων με μια συγκεκριμένη «πράξη», από τα οποία να συναγάγεται (*εκ των υστέρων*, λόγω των *ομοειδών* ιδιοτήτων τής

[7]Βλέπε: Klein F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert*, Teil I, Springer, 1926, σελ. 335.

[8]Εδώ υπονοούνται: η κλειστότητα τής (εκάστοτε θεωρουμένης) πράξης, η προσεταιριστικότητα τής πράξης, η ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου και η ύπαρξη αντιστρόφου.

εν λόγω πράξης) *και* η αδήριτη *ανάγκη εισαγωγής* μιας αλγεβρικής δομής; Πράγματι· μια τέτοιου είδους εναλλακτική απάντηση στο ως άνω ερώτημα (με πολλαπλά παιδαγωγικά οφέλη) δίνεται μέσω τής προσφυγής μας σε παραδείγματα από την (κατ' ουσίαν σχολική) Γεωμετρία. Ίσως τα ενδεικτικότερα εξ αυτών να είναι οι *περιστροφικές συμμετρίες* των κανονικών πολυγώνων και των κανονικών στερεών (πρβλ. κεφ. 1, 4, 5, 7, 8 κ.ά.)

Ο διδάσκων, χρησιμοποιώντας -κατ' αυτόν τον τρόπο- την έννοια τής «συμμετρίας» και τον ανεξάντλητο πλούτο των γεωμετρικών εφαρμογών, είναι πλέον ελεύθερος να διαμορφώσει ένα -από κάθε άποψη- ενδιαφέρον και γοητευτικό προπτυχιακό μάθημα, αναδεικνύοντας την ομορφιά ενός τμήματος των Μαθηματικών, το οποίο μπορεί να προκύψει ως αποτέλεσμα σύζευξης διαφορετικών «κλάδων», χωρίς -ωστόσο- να είναι αναγκασμένος να προβαίνει σε ταχυδακτυλουργίες ή να απεκδύεται την απαραίτητη συνοδευτική αυστηρότητα κατά τη διάρκεια τής όποιας επιχειρηματολογίας του. (Τούτο, βεβαίως, *δεν* αποκλείει την παράλληλη ή και κατοπινή ενασχόληση με την Αφηρημένη Θεωρία Ομάδων. Τουναντίον μάλιστα· η γεωμετρική «νομιμοποίησή της» ενδέχεται να την καταστήσει σταδιακώς ακόμη πιο ελκυστική, αφού είναι δυνατόν να εξάψει το ενδιαφέρον τού ακροατή ή τού αναγνώστη για το *μέχρι πού* μπορεί να φθάσει υπακούοντας στις προαναφερθείσες «τέσσερεις εντολές».)

• **Οι «αρετές» τού παρόντος βιβλίου**. Ο συγγραφέας διακρίνεται για τη δυνατότητα να περιγράφει ουσιώδη θεωρήματα με τρόπο λιτό και απέριττο. Το βιβλίο διαπνέεται από ένα πνεύμα «φιλικό» προς τον αναγνώστη, τον οποίο επιδιώκει να κερδίσει με μια κατ' εξοχήν «φυσική» παρουσίαση των επιμέρους θεμάτων υπό το πρίσμα τής (τόσο σημαίνουσας, όπως προείπαμε) γεωμετρικής τους νοηματοδότησης. Η ύλη του, κατανεμημένη σε 28 σύντομα κεφάλαια, μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για τη δόμηση αυτονόμων πανεπιστημιακών παραδόσεων όσο και για τη διεξαγωγή ενδιαφερόντων σεμιναρίων προπτυχιακού επιπέδου· εξάλλου, είναι ιδεώδης ακόμη και για κατ' ιδίαν μελέτη, καθόσον περιλαμβάνει:

(α) πληθώρα επεξεργασμένων παραδειγμάτων που συνδράμουν στον μηχανισμό κατανόησης τής αναπτυσσόμενης θεωρίας,
(β) άνω των 300 ασκήσεων (κυμαινόμενου βαθμού δυσκολίας) οι οποίες συμπληρώνουν τις γνώσεις που αποκτώνται εντός τού κυρίως κειμένου,
(γ) πολλά γεωμετρικά σχήματα που διευκολύνουν την ανάπτυξη των ενορατικών ικανοτήτων τού αναγνώστη, και
(δ) βοηθητικές μεθοδολογικές επεξηγήσεις εντός των παρεχομένων αποδείξεων.

Οι όποιες «έξωθεν παρεμβάσεις» στην ελληνική έκδοση περιορίσθηκαν:

(i) σε σύντομα ιστορικά σχόλια τα οποία αναφέρονται στα κανονικά πολύεδρα (κεφ. 8), στα πλεξίδια (κεφ. 12), στις ταξινομήσεις των απλών πεπερασμένων ομάδων (κεφ. 15), των πεπερασμένων ομάδων περιστροφών (κεφ. 19), των ομάδων

μικρής τάξης (κεφ. 20) , και στο θεώρημα των Nielsen και Schreier (κεφ. 28),
(ii) σε υποσημειώσεις διευκρινιστικού χαρακτήρα, και
(iii) στην ένταξη τής αρίθμησης ορισμένων παραδειγμάτων, προτάσεων και παρατηρήσεων στη λοιπή διπλοψήφια αρίθμηση τού βιβλίου.

• **Προαπαιτούμενες γνώσεις**. Αυτές είναι εν περιλήψει οι ακόλουθες:

(α) ***Από τη Στοιχειώδη Συνολοθεωρία***. Αποδοχή τής «απλοϊκής» θεώρησης τής εννοίας τού *συνόλου* ως μιας συλλογής κάποιων πλήρως καθορισμένων αντικειμένων (συνήθως μέσω μιας χαρακτηριστικής κοινής ιδιότητας). Υποσύνολα συνόλου. Κενό σύνολο ($\varnothing$). Τομή ($A \cap B$), ένωση ($A \cup B$) και διαφορά ($A \smallsetminus B$) δυο συνόλων A και B, καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$, και οι κύριες ιδιότητές τους. Γενικεύσεις αυτών των εννοιών και ιδιοτήτων για οικογένειες συνόλων. Διμελείς σχέσεις. Ανακλαστικές, συμμετρικές, αντισυμμετρικές και μεταβατικές διμελείς σχέσεις[9]. Συνήθεις σχέσεις διάταξης.

(β) ***Από τον Προτασιακό Λογισμό***. Στο παρόν βιβλίο συνήθη σύμβολα από τον προτασιακό και συνολοθεωρητικό λογισμό, όπως π.χ. τα σύμβολα «$\in$», «$\forall$», «$\exists$», «$\Longrightarrow$», «$\Longleftrightarrow$», «$\subseteq$», «$\subsetneqq$», τού «ανήκειν», τού «για κάθε», τού «υπάρχειν», τής απλής και αμφίπλευρης συνεπαγωγής, και τού (συνολοθεωρητικού) «περιέχεσθαι» και «γνησίως περιέχεσθαι», αντιστοίχως, χρησιμοποιούνται ελευθέρως (αλλά εντούτοις με αρκετή φειδώ).

(γ) ***Από τη Στοιχειώδη Θεωρία Αριθμών***[10]. Βασικές ιδιότητες διαιρετότητας ακεραίων. Μέγιστος κοινός διαιρέτης (μκδ) και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (εκπ) δύο ακεραίων αριθμών. Πρώτοι αριθμοί. Θεμελιώδες Θεώρημα τής Αριθμητικής. Ισοϋπόλοιποι αριθμοί, ισοτιμίες $a = b (\mathrm{mod}\, n)$, και οι κύριες ιδιότητές τους.

(δ) ***Συναρτήσεις***. Μια *συνάρτηση* f από ένα σύνολο X σε ένα σύνολο Y είναι μια διατεταγμένη τριάδα (X, Y, Γ_f) για την οποία:

(i) το σύνολο $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ είναι μια διμελής σχέση από το X στο Y με *πεδίο ορισμού* της το $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(\Gamma_f) = X$, *πεδίο τιμών* της το $\mathrm{Rg}(f) = Y$, και *εικόνα* της το $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}(\Gamma_f) \subseteq Y$, και

(ii) για κάθε $x \in X$ υπάρχει *ακριβώς ένα* $y \in Y$, ούτως ώστε $(x, y) \in \Gamma_f$.

▷ Το σύνολο Γ_f ονομάζεται *το γράφημα* τής συνάρτησης f. Για δοθέν $x \in X$, το μονοσημάντως ορισμένο στοιχείο $y \in Y$, για το οποίο $(x, y) \in \Gamma_f$, καλείται *η τιμή* που λαμβάνει η f στο x ή *η εικόνα τού* x *μέσω τής* f, και σημειώνεται ως $y = f(x)$. Επίσης, είθισται να λέμε πως η συνάρτηση f *στέλνει το* x *να απεικονισθεί* στο y.

[9] Οι λεγόμενες *σχέσεις ισοδυναμίας* (ήτοι διμελείς σχέσεις οι οποίες είναι ανακλαστικές, συμμετρικές και μεταβατικές) μελετώνται εν σπουδή στο κεφάλαιο 12 τού παρόντος βιβλίου.

[10] Βλ. κεφ. 4 (σελ. 135-184) τού σχολικού βιβλίου:

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης (Β′ Τάξης Ενιαίου Λυκείου), Ο.Ε.Δ.Β, Εκδ. Δ′, 2001. (Ομάδα συγγραφής: Λ. Αδαμόπουλος, Β. Βισκαδουράκης, Δ. Γαβαλάς, Γ. Πολύζος, Α. Σβέρκος.)

Ο συνήθης συμβολισμός για μια συνάρτηση f από το σύνολο X στο σύνολο Y είναι ο εξής:

$$f : X \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto f(x) \, .$$

Εάν $A \subseteq X$ και $B \subseteq Y$, τότε το σύνολο $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ καλείται *η εικόνα τού* A, ενώ το σύνολο $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ καλείται *η αντίστροφη εικόνα* ή *το αρχέτυπο τού* B *μέσω τής* f. (Ιδιαιτέρως, όταν $A = X$, $f(X) = \mathrm{Im}(f)$.)

$\triangleright$ Έστω ότι η $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνάρτηση, τα A, B υποσύνολα τού X και τα C, D υποσύνολα τού Y. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $f(\varnothing) = \varnothing = f^{-1}(\varnothing)$, $f(X) \subseteq Y$.

(ii) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$. Και αντιστοίχως, $C \subseteq D \Longrightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$.

(iii) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ και $f\left(f^{-1}(C)\right) \subseteq C$.

(iv) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ και $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(v) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, ενώ $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(vi) $B \subseteq A \Longrightarrow f(A) \smallsetminus f(B) \subseteq f(A \smallsetminus B)$.

(vii) $D \subseteq C \Longrightarrow f^{-1}(C \smallsetminus D) = f^{-1}(C) \smallsetminus f^{-1}(D)$.

$\triangleright$ Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια συνάρτηση. Εάν $U \subseteq X$, τότε η $f|_U : U \longrightarrow Y$, όπου $f|_U(x) = f(x)$, για κάθε $x \in U$, λέγεται *περιορισμός* τής f επί τού υποσυνόλου U.

$\triangleright$ Έστω $g : U \longrightarrow Y$ μια συνάρτηση, όπου το U είναι ένα υποσύνολο ενός συνόλου X. Κάθε συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$, για την οποία ισχύει $g = f|_U$, ονομάζεται *επέκταση* τής g υπεράνω τού συνόλου X. (Οι επεκτάσεις τής g υπεράνω τού συνόλου X δεν είναι κατ' ανάγκην μονοσημάντως ορισμένες.)

$\triangleright$ Μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow Y$ λέγεται

(i) *ενριπτική* (ή *ερριπτική* ή *ένα προς ένα*-συνάρτηση (1-1)), ή απλώς *ένριψη*, όταν

$$\forall \; x, y \in X, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y,$$

(ii) *επιρριπτική* (ή *επί*-συνάρτηση), ή απλώς *επίρριψη*, όταν $f(X) = Y$, δηλαδή όταν

$$(\forall \, y \in Y, \;\; \exists \, x \in X : \;\; y = f(x)) \, , \;\; \text{και}$$

(iii) *αμφιρριπτική* (ή *ένα πρός ένα και επί*-συνάρτηση), ή απλώς *αμφίρριψη*, όταν είναι ταυτοχρόνως και ενριπτική και επιρριπτική.

Για παράδειγμα, η *ταυτοτική συνάρτηση* $1_X : X \longrightarrow X$, όπου $1_X(x) = x$, $\forall x$, $x \in X$, είναι προφανώς αμφιρριπτική, ενώ για οιοδήποτε υποσύνολο $A \subseteq X$ η *ενθετική συνάρτηση* $1_X|_A : A \longrightarrow X$ είναι ενριπτική.

▷ Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια τυχούσα συνάρτηση. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Η f είναι ενριπτική $\Longleftrightarrow$ ($f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ για όλα τα $A, B \subseteq X$).

(ii) Η f είναι ενριπτική $\Longleftrightarrow$ ($A = f^{-1}(f(A))$ για όλα τα $A \subseteq X$).

(iii) Η f είναι επιρριπτική $\Longleftrightarrow$ ($f\left(f^{-1}(C)\right) = C$ για όλα τα $C \subseteq Y$).

(iv) Η f είναι αμφιρριπτική $\Longleftrightarrow$ ($f(X \smallsetminus A) = Y \smallsetminus f(A)$ για όλα τα $A \subseteq X$).

▷ Ας υποθέσουμε πως οι $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$ είναι δυο συναρτήσεις. Η *σύνθεση* gf των συναρτήσεων g και f (συμβολιζόμενη ενίοτε και ως $g \circ f$) είναι η συνάρτηση

$$gf : X \longrightarrow Z\ ,$$

η οποία ορίζεται μέσω τού τύπου $(gf)(x) = g(f(x)), \forall x, x \in X$, έχοντας ως πεδίο ορισμού της το $\mathrm{Dom}(gf) = X$, ως πεδίο τιμών της το $\mathrm{Rg}(gf) = Z$ και ως εικόνα της την $\mathrm{Im}(gf) = \mathrm{Im}\big(g\,|_{\mathrm{Im}(f)}\big)$. Ας σημειωθεί ότι, εάν $A \subseteq X$ και $B \subseteq Z$, τότε $(gf)(A) = g(f(A))$ και $(gf)^{-1}(B) = f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)$, ενώ, εάν η $h : Z \longrightarrow W$ είναι μια επιπρόσθετη συνάρτηση, η σύνθεση συναρτήσεων έχει την *προσεταιριστική ιδιότητα*, ήτοι $h(gf) = (hg)f$.

▷ Ας υποθέσουμε πως οι $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow Z$ είναι δυο συναρτήσεις. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές:

(i)	f, g ενριπτικές	$\Longrightarrow$	gf ένριψη
(ii)	f, g επιρριπτικές	$\Longrightarrow$	gf επίρριψη
(iii)	gf ένριψη	$\Longrightarrow$	f ένριψη
(iv)	gf επίρριψη	$\Longrightarrow$	g επίρριψη

▷ Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια συνάρτηση.

(i)	Η f είναι ενριπτική	$\Longleftrightarrow$	$\exists\, g : Y \longrightarrow X$, ούτως ώστε $gf = 1_X$.
(ii)	Η f είναι επιρριπτική	$\Longleftrightarrow$	$\exists\, h : Y \longrightarrow X$, ούτως ώστε $fh = 1_Y$.
(iii)	Η f είναι αμφιρριπτική	$\Longleftrightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \exists\, \theta : Y \longrightarrow X, \text{ούτως ώστε} \\ \theta f = 1_X \text{ και } f\theta = 1_Y. \end{array} \right.$

Στην προκειμένη περίπτωση, η συνάρτηση θ είναι μοναδική (ως προς αυτήν την ιδιότητα), συμβολίζεται ιδιαιτέρως ως f^{-1}, και ονομάζεται *αντίστροφος* τής f.

▷ Δυο σύνολα X και Y ονομάζονται *ισοπληθικά* όταν υπάρχει μια αμφιρριπτική συνάρτηση $\varphi : X \longrightarrow Y$. Ένα σύνολο X είναι *πεπερασμένο* όταν υπάρχει ένας θετικός ακέραιος αριθμός n, τέτοιος ώστε το X να είναι ισοπληθικό τού $\{1, 2, \ldots, n\}$. Εν προκειμένω, λέμε ότι ο n είναι ο *πληθικός αριθμός* τού X (σημειούμενος ως $|X|$) ή ότι το πλήθος των στοιχείων τού X ισούται με n. Κάθε (διάφορο τού κενού) σύνολο το οποίο δεν είναι πεπερασμένο ονομάζεται *άπειρο* ή *απέραντο* σύνολο[11]. Μια ειδική οικογένεια απεράντων συνόλων αποτελούν τα λεγόμενα *αριθμήσιμα* σύνολα. (Ένα απέραντο σύνολο X καλείται *αριθμήσιμο* όταν είναι ισοπληθικό τού συνόλου των φυσικών αριθμών). Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα των πεπερασμένων συνόλων είναι η εξής: Έστω ότι τα X και Y είναι δυο πεπερασμένα σύνολα. Υποθέτουμε ότι τα X και Y είναι ισοπληθικά και ότι η $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια τυχούσα συνάρτηση από το X στο Y. Τότε έχουμε:

$$(\text{η } f \text{ είναι ενριπτική}) \Longleftrightarrow (\text{η } f \text{ είναι επιρριπτική}).$$

(ε) ***Βασικές ιδιότητες των πραγματικών και των μιγαδικών***. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Πράξεις και ιδιότητες πραγματικών αριθμών. Πραγματικές συναρτήσεις. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Κύριες τριγωνομετρικές ταυτότητες[12].

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Πράξεις και ιδιότητες μιγαδικών αριθμών. Απόλυτη τιμή και γεωμετρική παράσταση ενός μιγαδικού αριθμού. Πολυωνυμικές εξισώσεις (στο $\mathbb{C}$)[13].

(στ) ***Από την Επιπεδομετρία και τη Στερεομετρία***[14]. Βασικά γεωμετρικά σχήματα, τρίγωνα, τετράπλευρα, παράλληλες ευθείες, παραλληλόγραμμα, αναλογίες, ομοιότητα, μετρικές σχέσεις. Κανονικά πολύγωνα. Σφαίρα. Τετράεδρο, κύβος, οκτάεδρο, δωδεκάεδρο και εικοσάεδρο. (Για την κατασκευή ορισμένων άλλων στερεών, όπως τού οκταγωνικού άστρου, τού κυβοκταέδρου, τού ρομβοδωδεκαέδρου κ.ά., δίνονται ικανοποιητικές εξηγήσεις εντός τού κυρίως κειμένου. Πρβλ. κεφ. 19.)

(ζ) ***Από τη Γραμμική Άλγεβρα***[15]. Πίνακες με εγγραφές[16] από τους πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς,

---

[11] Για μια εισαγωγή στη θεωρία των πληθικών αριθμών τόσο πεπερασμένων όσο και απείρων συνόλων βλ. P. R. Halmos [7], κεφ. 24 και 25.

[12] Βλ. κεφ. 1, 2 και 5 τού σχολικού βιβλίου:

Άλγεβρα (Α′ Τάξης Ενιαίου Λυκείου), Ο.Ε.Δ.Β, Εκδ. Ι′, 2001. (Ομάδα συγγραφής: Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος, Α. Σβέρκος). Επίσης, βλ. και το κεφ. 1 τού βιβλίου τής Άλγεβρας Β′ Τάξης Ενιαίου Λυκείου (των ιδίων συγγραφέων).

[13] Βλ. κεφ. 2 (σελ. 85-126) τού σχολικού βιβλίου:

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης (Γ′ Τάξης Ενιαίου Λυκείου), Ο.Ε.Δ.Β, Εκδ. Γ′, 2001. (Ομάδα συγγραφής: Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Μέτης, Κ. Μπρουχούτας, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος.)

[14] Βλ. ιδιαιτέρως τα κεφ. 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12 και 13 των σχολικών βιβλίων:

▷ *Ευκλείδεια Γεωμετρία* (Α′ και Β′ Ενιαίου Λυκείου), Ο.Ε.Δ.Β, 1999. (Ομάδα συγγραφής: Γ. Θωμαΐδης, Θ. Ξένος, Α. Πούλος. Επιστ. Επ.: Γ. Παντελίδης, Γ. Στάμου.)

▷ *Ευκλείδεια Γεωμετρία* (Α′ και Β′ Ενιαίου Λυκείου), Ο.Ε.Δ.Β, 2001. (Ομάδα συγγραφής: Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης, Π. Σιδέρης. Ιστ. σημ.: Ι. Βανδουλάκης.)

[15] Αρκετές από τις αναφερόμενες έννοιες μπορούν να εντοπισθούν στο κεφ. 1 (σελ. 11-84) τού σχολικού βιβλίου:

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης (Γ′ Τάξης Ενιαίου Λυκείου), Ο.Ε.Δ.Β, Εκδ. Γ′, 2001. (Ομάδα συγγραφής: Σ. Ανδρεαδάκης, Β. Κατσαργύρης, Σ. Μέτης, Κ. Μπρουχούτας, Σ. Παπασταυρίδης, Γ. Πολύζος). Για τον ορισμό τού διανυσματικού χώρου, τής γραμμικής εξάρτησης και ανεξαρτησίας, των βάσεων κ.ά. μπορεί κανείς να ανατρέξει στα πρώτα κεφάλαια οιουδήποτε συγγράμματος Γραμμικής Άλγεβρας.

[16] Εδώ προσδίδουμε στον όρο entry (γερμ. Eitrag) την ακριβή του σημασία, ήτοι *εγγραφή* (ενός πίνακα) [καθετί που εγγράφεται ή καταχωρίζεται στον θεωρούμενο πίνακα]. Η αποφυγή τής υιοθέτησης τής -συνεκδοχικής- απόδοσής του απλώς ως *στοιχείο* (ενός πίνακα), που συνηθίζεται στην ελληνική μαθηματική βιβλιογραφία, είναι ως επί το πλείστον επιβεβλημένη. (Σε πολλές περιπτώσεις οι ίδιοι οι πίνακες αποτελούν στοιχεία κάποιων ομάδων.)

άθροισμα πινάκων $A = [a_{i\,j}]_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}$, $B = [b_{i\,j}]_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}$:

$$A + B = [a_{i\,j} + b_{i\,j}]_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}\,,$$

πολλαπλασιασμός πινάκων $A = [a_{i\,k}]_{1\le i\le m,\,1\le k\le p}$, $B = [b_{k\,j}]_{1\le k\le p,\,1\le j\le n}$:

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{p} a_{i\,k}b_{k\,j}\right]_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}\,,$$

μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(συμβολιζόμενος ως I_n, ή απλώς ως I, όταν το n υπονοείται από τα συμφραζόμενα), ο οποίος ικανοποιεί τις

$$AI_n = I_nA = A,$$

για κάθε $n \times n$ πίνακα A.

Ανάστροφος $A^t = [a_{j\,i}]_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}$ ενός $m \times n$ πίνακα $A = [a_{i\,j}]_{1\le i\le m,\,1\le j\le n}$ (που έχει ως γραμμές του τις στήλες τού A και ως στήλες του τις γραμμές τού A).

Υπολογισμός οριζουσών των 2×2 πινάκων με τον χιαστί πολλαπλασιασμό

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb,$$

των 3×3 πινάκων

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} = aej + dhc + gbf - ahf - gec - dbj$$

μέσω τού «κανόνα τού Sarrus» και, γενικότερα, των $n \times n$ πινάκων A μέσω μαθηματικής επαγωγής ή -απευθείας- μέσω τού «κλειστού» τύπου

$$\det(A) = \sum_{\vartheta\in S_n} \mathrm{sign}(\vartheta)\cdot \alpha_{1\,\vartheta(1)}\cdot \alpha_{2\,\vartheta(2)}\cdot\cdots\cdot \alpha_{n\,\vartheta(n)},$$

όπου S_n είναι η συμμετρική ομάδα[17] βαθμού n και sign(ϑ) ο προσημασμένος άσος[18] τού κάθε στοιχείου $\vartheta \in S_n$. *Αντίστροφος* A^{-1} κάθε $n \times n$ πίνακα A με

[17] Για τον ορισμό τής S_n βλ. σελ. 36.

[18] Για τον ορισμό τού sign(ϑ) βλ. σελ. 40.

$\det(A) \neq 0$, καθοριζόμενος από τις ισότητες

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Γραμμικά συστήματα. Πράξεις γραμμών και στηλών. Μέθοδοι απαλοιφής. Διανυσματικοί χώροι. Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία. Υπόχωροι παραγόμενοι από υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου. Βάσεις διανυσματικών χώρων.

(η) ***Από την Αναλυτική Γεωμετρία.*** Διανυσματικός λογισμός. Συστήματα συντεταγμένων. Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\, A^t$$

αναπαριστώμενοι μέσω πινάκων $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Μετρικές σχέσεις και ορθογωνιότητα. Μεταφορές. Επιπροσθέτως, για $n = 2$: στροφές περί την αρχή των αξόνων[19], κατοπτρισμοί ως προς μία ευθεία, ολισθαίνοντες κατοπτρισμοί κ.λπ. Για $n = 3$: στροφές στερεών περί έναν άξονα, κατοπτρισμοί στερεών ως προς ένα επίπεδο κ.λπ. Ισομετρίες τού $\mathbb{R}^n$.

Ορισμένες εξ αυτών των εννοιών (όταν $n = 2$) είναι ήδη γνωστές από τις τελευταίες τάξεις τού σχολείου. Οι υπόλοιπες αναπτύσσονται, για παράδειγμα, στο αρκετά στοιχειώδες βιβλίο των

▷ BANCHOFF T., WERMER J.: *Linear Algebra Through Geometry*[20], UTM, 2nd ed., Springer-Verlag, 1992.

Επίσης, από την ελληνική βιβλιογραφία ξεχωρίζουν τα ακόλουθα συγγράμματα τού Ν.Κ. Στεφανίδη που πραγματεύονται με σαφήνεια τις θεωρητικές αρχές τής υψηλοδιάστατης Αναλυτικής Γεωμετρίας:

▷ ΣΤΕΦΑΝΙΔΗ Ν.Κ.: *Αναλυτική Γεωμετρία*[21] (Τόμος I), Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1979.

▷ ΣΤΕΦΑΝΙΔΗ Ν.Κ.: *Εισαγωγή στη Γεωμετρία*[22] (Γ′ εκδ.), Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1985.

• **Προτάσεις για παράλληλη και περαιτέρω μελέτη.** Βιβλία τα οποία προσφέρουν μια συστηματική και ολοκληρωμένη εισαγωγή στην Αφηρημένη Θεωρία Ομάδων, σε επίπεδο προπτυχιακών σπουδών, είναι τα εξής:

▷ LEDERMANN W.: *Introduction to Group Theory*, Oliver & Boyd, 1973.

▷ ROSE J. S.: *A Course on Group Theory*, Cambridge University Press, 1978.

[19] Η λέξη rotation αποδίδεται ως *στροφή*, όταν συνοδεύεται από το σημείο (για $n = 2$) ή τον άξονα (για $n = 3$) *περί* των οποίων εκτελείται, και ως *περιστροφή*, όταν τα δεδομένα αυτά υπονοούνται από τα συμφραζόμενα.

[20] Συνιστάται για μια εύκολη πρόσβαση στη θεωρία τής Αναλυτικής Γεωμετρίας στη διάσταση $n = 2$ και $n = 3$. [Βλ. κεφάλαια 1-3]. Επίκειται και η μετάφρασή του στα ελληνικά από τον εκδοτικό οίκο Leader Books.

[21] Βλ. ιδιαιτέρως: μέρος 2ο, κεφ. 1-3.

[22] Βλ. τα κεφ. I, II και V.

▷ SCOTT W. R.: *Group Theory*, 2nd ed., Dover Pub., 1987.
▷ HUMPHREYS J. F.: *A Course in Group Theory*, Oxford University Press, 1997.
▷ SMITH G., TABACHNIKOVA O.: *Topics in Group Theory*, SUMS, Springer-Verlag, 2000.

Σε μεταπτυχιακό επίπεδο, συνιστάται το όντως αναντικατάστατο σύγγραμμα τού J.J. Rotman [6].

► Για περαιτέρω μελέτη τού ρόλου που διαδραματίζουν οι ομάδες στη Γεωμετρία, μαζί με τα [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9] και [10], προτείνονται και τα ακόλουθα συγγράμματα, τα οποία είναι (ή -τουλάχιστον- τείνουν να γίνουν) κλασικά:

▷ HILBERT D., COHN VOSSEN S.: *Anschauliche Geometrie*, Springer, 1932.
▷ COXETER H.S.M.: *Introduction to Geometry*, Wiley, 1961.
▷ FEJER TÓTH L.: *Regular Figures*, Pergamon Press, 1964.
▷ COXETER H.S.M.: *Regular Polytopes*, Dover Pub., 1973.
▷ GROVE L., BENSON C.: *Finite Reflection Groups*, GTM, Vol. **99**, Springer-Verlag, 1971.
▷ BERGER M.: *Geometry* (2 Volumes), Universitext, Springer-Verlag, 1987.
▷ QUAISSER E.: *Diskrete Geometrie*, Spektrum Akad. Verlag, 1994.
▷ KNÖRRER H.: *Geometrie*, Vieweg, 1996.

(Επιπρόσθετες βιβλιογραφικές αναφορές για ειδικά γεωμετρικά θέματα στα οποία υπεισέχεται η Θεωρία των Ομάδων παρατίθενται στις υποσημειώσεις τού παρόντος βιβλίου.)

► Τέλος, σε εκείνους που επιθυμούν την εμβάθυνση τής μελέτης τους στους διαύλους τού συσχετισμού τής (ομαδοθεωρητικής) «Συμμετρίας» με διαφόρους κλάδους τής σύγχρονης Φυσικής (Κβαντομηχανική, Φυσική Στερεού, Μοριακή Φυσική, Πυρηνική Φυσική, Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων κ.ά.) η ελληνική βιβλιογραφία επιφυλάσσει ένα ογκώδες έργο συνοδευόμενο από εκτενή κατάλογο εξειδικευμένων αναφορών:

▷ ΒΕΡΓΑΔΟΥ Ι. Δ.: *Θεωρία Ομάδων* (Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής ΙΙΙ), 2 τόμοι, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1991.

• **Παρατηρήσεις επί τής ορολογίας**. Παρότι κατεβλήθη μεγάλη προσπάθεια για τη διατήρηση των περισσοτέρων εν χρήσει ευρισκομένων μαθηματικών όρων, σε ορισμένες περιπτώσεις συνέτρεχαν τόσο σοβαροί λόγοι επανεξέτασής τους, ώστε διορθωτικές παρεμβάσεις σε περιορισμένο αριθμό ετυμολογικών (και άλλων) προβλημάτων τής καθεστηκυίας ορολογίας να φαντάζουν αναπόφευκτες. Ακολουθούν σύντομοι σχολιασμοί των τελικώς εκτελεσθεισών παρεμβάσεων.

(α) Όταν η διαφορά $x - y$ δυο ακεραίων αριθμών x, y διαιρείται με τον ακέραιο αριθμό n, τότε γράφουμε $x = y(\mathrm{mod}\, n)$ (ή, επί το κλασικότερον, $x \equiv y(\mathrm{mod}\, n)$). Είθισται να λέγεται πως οι x και y είναι ισότιμοι (ή ισοϋπόλοιποι) *με μέτρο* n ή «*μόντουλο*» n. Μολαταύτα, το μεν *μέτρο* είναι λέξη πολύ γενική που, συν τοις άλλοις, χρησιμοποιείται αλλοτρόπως στα

Μαθηματικά (πρβλ. measure) και στη Φυσική (πρβλ. meter), το δε «*μόντουλο*» αποτελεί μια αναίτια διατήρηση τού αντιστοίχου λατινικού όρου. Ως εκ τούτου, ως πλέον ενδεδειγμένη κρίνεται η προσφυγή στη χρήση τού (ουδετέρου γένους) μεταπλασθέντος ουσιαστικού *μόδιο* (λαϊκ. *μόδι*) με τις αποδεδειγμένες αρχαιοελληνικές ρίζες (όπως: *μέδιμνος*, το -τουλάχιστον ομηρικό- ρήμα *μέδω*[23] κ.ά.). Έτσι λοιπόν, διαβάζουμε την ισοτιμία των x και y *κατά μόδιο* n.

(β) Το επίθετο commutative μεταφράζεται ως *μεταθετικός/ή/ό* (ήτοι[24] $ab = ba$), αφού η ύπαρξη τού χρηστικού επιθέτου anticommutative μας υπαγορεύει την απόδοση τού δευτέρου ως *αντιμεταθετικός/ή/ό* (ήτοι $ab = -ba$), οδηγώντας μας, εν ολίγοις, στο να προτάσσουμε τη μαθηματική ακρίβεια (με τη χρήση τής πρόθεσης *αντί* για την έκφραση τού αρνητικού, αντι-θέτου προσήμου) τής ενίοτε επιδιωκομένης γραμματικής επίτασης (ήτοι τής σημασιολογικής επίτασης -μέσω τού *αντί*- τής επερχομένης αμοιβαίας αλλαγής θέσης, τής αντι-κατάστασης τού ενός στοιχείου με το άλλο). [Είναι, άλλωστε, τόσο αναγκαία η επίταση αυτή, όταν ουσιαστικώς τα εκάστοτε (αλληλο)μετατιθέμενα στοιχεία είναι μόνον δύο;][25]

(γ) Χρησιμοποιείται το προσήκον ουσιαστικό *μετάταξη* αντί τού *μετάθεση* για τη μετάφραση τού όρου permutation, καθότι η επιλογή τού δευτέρου θα οδηγούσε σε ατυχή ομοειδή απόδοση των ρημάτων commute και permute. (Σημειωτέον ότι όλες οι permutation groups τάξης ≥ 3 είναι μη μεταθετικές ομάδες! Εξάλλου, το ουσιαστικό *αντιμετάθεση* δεσμεύεται για την απόδοση τού όρου transposition.)

(δ) Ο όρος lattice έχει προκαλέσει δικαιολογημένη σύγχυση εξαιτίας τού ότι (στην *αγγλική* μαθηματική βιβλιογραφία) χρησιμοποιείται κατά τρόπο αμφίσημο. Μέσω αυτού αποδίδεται τόσο ο (γερμανικός) όρος Gitter όσο και ο όρος Verband. Στην πρώτη περίπτωση, εννοούμε μια ελεύθερη αβελιανή υποομάδα τής προσθετικής ομάδας ενός πραγματικού διανυσματικού χώρου V που γράφεται υπό τη μορφή

$$\mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2 + \cdots + \mathbb{Z}v_n = \{\,\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{Z},\ \forall i,\ 1 \leq i \leq n\}\,,$$

όπου το $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ είναι ένα υποσύνολο τού V γραμμικώς ανεξάρτητο υπεράνω τού $\mathbb{R}$, ήτοι ένα *κιγκλίδωμα*[26]. Αντιθέτως, στη δεύτερη περίπτωση εννοούμε ένα διατεταγμένο σύνολο στο οποίο κάθε ζεύγος στοιχείων του x, y έχει μέγιστο κάτω φράγμα (infimum) $x \wedge y$ και ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) $x \vee y$, ήτοι έναν *σύνδεσμο*.

[23] Βλ. *Ιλιάς* (εδ. Β 79) και *Οδύσσεια* (εδ. Α 72).

[24] Όταν $ab = ba$, τότε λέμε πως τα a και b *(αλληλο)μετατίθενται* ή -απλούστερα- ότι *το ένα μετατίθεται με το άλλο*.

[25] Φυσικά, εκτρωματικοί νεολογισμοί τής μορφής *αντι-αντιμεταθετικός/ή/ό* δεν είναι δυνατόν να γίνουν δεκτοί.

[26] Στην ελληνική βιβλιογραφία, αντί τού *κιγκλιδώματος*, έχουν χρησιμοποιηθεί κατά καιρούς και οι όροι *δικτυωτό*, *πλέγμα* και *κυψελίδα*. Οι δύο πρώτοι πιθανώς να είναι αρκετά κατάλληλοι για να εκφράσουν το lattice στη διάσταση $n = 2$, αλλά μάλλον αποτυγχάνουν στην απόδοση τής εν λόγω εννοίας σε διαστάσεις $n \geq 3$. (Επιπροσθέτως, ο όρος *πλέγμα* παραείναι γενικός). Τέλος, η χρήση τής λέξης *κυψελίδα* θα οδηγούσε σε σύγχυση, καθότι θα συνέπιπτε με την απόδοση τού (εντελώς διαφορετικού) γεωμετρικού όρου honey comb. Το *κιγκλίδωμα*, στην κοινή γλώσσα, εκφράζει μια σειρά κιγκλίδων (ήτοι πανομοιότυπων ξύλινων ή μεταλλικών ράβδων), οι οποίες είναι τοποθετημένες κατά μικρά διαστήματα σχηματίζοντας ένα πετεύρωμα ή έναν φράκτη. Η αντίστοιχη διάταξη για $n = 3$ μπορεί όχι μόνον να γίνει αντιληπτή διαισθητικά, αλλά και να υλοποιηθεί πρακτικά. Ευφάνταστα «παιχνίδια» τού τύπου «zome-kits» (βλ. http://store.yahoo.com/zome-tool/index.html) ή ακόμη και διάφορες κατασκευές προτύπων («μοντέλων») των χημικών για την αναπαράσταση τής δομής ορισμένων μορίων θα έπειθαν για τού λόγου το αληθές. Ως εκ τούτου, η αφαιρετική μετάβαση τού όρου *κιγκλίδωμα* στη μαθηματική ορολογία κρίνεται, εν προκειμένω, ως η πλέον αρμόζουσα.

(ε) Γίνεται σαφής διάκριση μεταξύ των μαθηματικών όρων degree/order/rank, οι οποίοι μεταφράζονται ως: βαθμός/(τάξη, διάταξη)/βαθμίδα, αντιστοίχως.

(στ) Άλλη μία τριάδα όρων, η οποία πολύ συχνά προκαλεί μεταφραστικά προβλήματα, αποτελείται από τα επίθετα regular/canonical/normal, που όλα τους έχουν -κατά καιρούς- αποδοθεί ως *κανονικός*, πράγμα άκρως επιζήμιο, διότι η αποδοχή μιας τέτοιου είδους *πολυσημίας* δρα κατά τρόπο απαγορευτικό σε ό,τι αφορά στη ρυθμιστική εφαρμογή και διάκριση λίαν σημαντικών εννοιών. Η πλέον εύστοχη και, από γλωσσολογική άποψη, ακριβολογημένη διαφοροποίησή τους επέρχεται με τη χρήση των επιθέτων:

$$\left(\begin{array}{c}\text{κανονικός,}\\ \text{ομαλός}\end{array}\right) \text{ / κανονιστικός / } \left(\begin{array}{c}\text{ορθόθετος, διακανονισμένος,}\\ \text{διευθετών/ημένος, φυσιολογικός κ.ά.}\end{array}\right),$$

αντιστοίχως[27]. Π.χ. regular polyhedron είναι το *κανονικό πολύεδρο*, ενώ ο όρος normal subgroup οφείλει να αποδοθεί ως *ορθόθετη υποομάδα*. Οι normal υποομάδες μιας δεδομένης ομάδας G είναι πράγματι οι «ορθώς τιθέμενες» (εντός τής συλλογής *όλων* των υποομάδων τής G), και μάλιστα κατά πολλούς εμφανείς τρόπους. Αξίζει, δειγματοληπτικώς, να αναφερθεί ότι:
(i) κάθε ορθόθετη υποομάδα μιας ομάδας οικοδομείται από *πλήρεις* κλάσεις συζυγίας,
(ii) μόνον οι ορθόθετες υποομάδες H μιας ομάδας G είναι κατάλληλες για τη δημιουργία των «ομάδων πηλίκων» G/H (όπου $gH = Hg$ για όλα τα $g \in G$),
(iii) οι ορθόθετες υποομάδες μιας ομάδας G είναι ακριβώς εκείνες οι υποομάδες τής G, οι οποίες μένουν *αναλλοίωτες* μέσω όλων των εσωτερικών αυτομορφισμών τής G (πρβλ. ασκ. 23.6), και ότι
(iv) ο υποσύνδεσμος τού συνδέσμου[28] των υποομάδων μιας ομάδας G που απαρτίζεται από τις ορθόθετες υποομάδες τής G είναι πάντοτε ένας μοδιακός σύνδεσμος[29].

(ζ) Ενός άλλου είδους πρόβλημα δημιουργείται με τον όρο *coset*. Οι λέξεις «συ(σ)σύνολο» ή «ομοσύνολο» είναι αδόκιμες. Η αντ' αυτών χρήση τής λέξης *σύμπλοκο* είναι προβληματική, καθότι χρησιμοποιείται *και* για τη μετάφραση τής λέξης complex που έχει πλέον ατονήσει ως όρος τής Θεωρίας Ομάδων. Εδώ προτιμήθηκε η απόδοση τού *coset* ως *πλευρική κλάση* κατά τον αντίστοιχο γερμανικό όρο *Nebenklasse*.

(η) Επίσης, για τη σαφή διάκριση των μελών τριών επιπροσθέτων, σημαντικών ζευγών όρων, επελέγησαν οι εξής αποδόσεις:

unit matrix / unitary matrix	$\rightsquigarrow$	μοναδιαίος / μοναδιακός πίνακας
maximum / maximal element	$\rightsquigarrow$	μέγιστο / μεγιστοτικό στοιχείο
minimum / minimal element	$\rightsquigarrow$	ελάχιστο / ελαχιστοτικό στοιχείο

[27]Εξαίρεση: ο ιδιομερής όρος «orthonormal» που αποδίδεται ως *ορθότακτος* (αντί τού *ορθοκανονικός*).

[28]Η συλλογή των υποομάδων μιας ομάδας G αποτελεί έναν *σύνδεσμο* (υπό την έννοια τού (δ)). Εν προκειμένω, για δυο υποομάδες H_1, H_2 τής G, $H_1 \wedge H_2 = H_1 \cap H_2$ και $H_1 \vee H_2 =$ η υποομάδα τής G που παράγεται από την ένωση $H_1 \cup H_2$. Η υποσυλλογή τής εν λόγω συλλογής, η απαρτιζόμενη από όλες τις ορθόθετες υποομάδες τής G, αποτελεί υποσύνδεσμο τού ανωτέρω συνδέσμου, καθόσον καθίσταται αφ' εαυτής σύνδεσμος ως προς τις πράξεις $\vee$ και $\wedge$.

[29]Ένας σύνδεσμος ονομάζεται *μοδιακός* (modular lattice) όταν για κάθε τριάδα στοιχείων του x, y, z, όπου $x \leq z$, ισχύει η ισότητα: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. (Ο ως άνω ορισθείς σύνδεσμος όλων των υποομάδων μιας ομάδας G δεν είναι εν γένει μοδιακός.)

(θ) Τέλος, αξίζει να σημειωθεί, ότι το ουδέτερο στοιχείο μιας ομάδας G καλείται *μοναδιαίο* όταν η G θεωρείται ως πολλαπλασιαστική, περιορίζοντας -σε πολλές περιπτώσεις- τη χρήση τού όρου *ταυτοτικό στοιχείο* στον μέσω αυτού χαρακτηρισμό τού ουδετέρου στοιχείου ομάδων συναρτήσεων.

• **Γλώσσα και σύστημα τονισμού**. Σε ό,τι αφορά στη γραμματική, ορθογραφική και υφολογική δόμηση τού κειμένου τής ελληνικής μετάφρασης, ακολουθούνται ορισμένες (εν πολλοίς προσωπικές, αλλά πλήρως αιτιολογημένες) επιλογές και συμβάσεις, οι οποίες στοχεύουν στην εξασφάλιση τής τεχνικής λειτουργικότητας των χρησιμοποιούμενων εκφραστικών μέσων (χωρίς την αναγωγή των αντιστοίχων «σχολικών» εγχειριδίων σε πανάκεια), καθώς και στην αποφυγή «ακροτήτων» (όπως π.χ. θα ήταν η επανάκαμψή μας σε μια «ξύλινη» γλώσσα ή ο -εκ διαμέτρου αντίθετος- εξοβελισμός απολύτως απαραίτητων λογίων λέξεων και εκφράσεων στο όνομα μιας κακώς εννοουμένης νεολογικής, δήθεν μεταρρυθμιστικής πρακτικής). Ως προς το σύστημα τονισμού των λέξεων, αξίζει να αναφερθεί ότι, ύστερα από περίπου μία εικοσαετία εφαρμογής τού «επισήμου» μονοτονικού, έχουν καταδειχθεί τόσο τα προτερήματα όσο και τα μειονεκτήματά του. Η κατάργησή του θα είχε ως συνέπεια μια μάλλον άκριτη οπισθοδρόμηση, χωρίς αυτό να σημαίνει πως η εκμάθηση τού πολυτονικού θα ήταν κάτι το εντελώς περιττό· τουναντίον, θα διασφάλιζε τη δυνατότητα απρόσκοπτης ανάγνωσης παλαιοτέρων (μαθηματικών ή μη) κειμένων.

Στην παρούσα μετάφραση χρησιμοποιείται το μονοτονικό με κάποιες ελαφρές τροποποιήσεις[30]. Τα μονοσύλλαβα *του*/*της*/*του* τονίζονται *αυτομάτως* όταν επέχουν θέση γενικής τού οριστικού άρθρου για να διαχωρίζονται ευχερέστερα από τα αντίστοιχα κτητικά και να διευκολύνεται τόσο η εργασία τού εκάστοτε γράφοντος όσο και η ροή τής ανάγνωσης. (Η λέξη «*των*» θα επέχει πάντοτε θέση άρθρου και, ως εκ τούτου, δεν κρίνεται ως αναγκαία η τονοδότησή της). Στις λοιπές περιπτώσεις εμφάνισης διφορούμενων μονοσύλλαβων προσωπικών αντωνυμιών (εννοείται σε σχέση με τις όμορές τους λέξεις εντός τού κειμένου) ο τόνος σημειώνεται σύμφωνα με τον (από πολλούς σπανίως εφαρμοζόμενο) «κανόνα» 2 (γ) τού «επισήμου» μονοτονικού[31].

• **Ευχαριστίες**. Θεωρώ υποχρέωσή μου να απευθύνω θερμές ευχαριστίες στον καλό μου φίλο και συνεργάτη Α. Πολύμερο για την πολύτιμη τεχνική βοήθειά του κατά τη στοιχειοθέτηση τού βιβλίου και την επεξεργασία των σχημάτων, στη φιλόλογο Κ. Λαγού για την τόσο υπεύθυνη τελική γλωσσική επιμέλεια τού κειμένου, στον επίκουρο καθηγητή τού Τμήματος Μαθηματικών και Στατιστικής τού Πανεπιστημίου Κύπρου Γ.-Σ. Σμυρλή για τη συμμετοχή του στις διορθώσεις των αρχι-

[30]Πρόκειται για σύστημα τονισμού σχεδόν πανομοιότυπο εκείνου, το οποίο εφαρμόζεται τα τελευταία χρόνια από τον καθηγητή Γ. Μπαμπινιώτη και τους συνεργάτες του.

[31]Βλ. *Νεοελληνική Γραμματική*. (Αναπροσαρμογή τής Νεοελληνικής Γραμματικής τού Μ. Τριανταφυλλίδη), Ο.Ε.Δ.Β., Εκδ. Θ$'$, 1986, σελ. 24.

κών δοκιμίων, στον επίκουρο καθηγητή τού Τμήματος Μαθηματικών τού Πανεπιστημίου Ιωαννίνων Α. Θωμά για τις εύστοχες παρατηρήσεις του, καθώς και στον καθηγητή τού Μαθηματικού Τμήματος τού Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών Μ. Μαλιάκα, ο οποίος, έχοντας αναγνωρίσει τη μαθηματική και παιδαγωγική αξία τού «Groups and Symmetry», το έχει εντάξει (μέσω των διαδικτυακών του σελίδων[32]) στα συνιστώμενα βοηθήματα για την παρακολούθηση τού μαθήματος «Άλγεβρα A'» .

Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους καθηγητές τού Τμήματος Μαθηματικών τού Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Θ. Μπόλη και Ν. Μαρμαρίδη. Οι εκ μέρους τού Θ. Μπόλη εισηγηθείσες διορθώσεις και βιβλιογραφικές συμπληρώσεις συνέτειναν στην ουσιαστική βελτίωση τής τελικής μορφής τού όλου κειμένου. Εξάλλου, χωρίς τη συνεχή ενθάρρυνση τού επιμελητή τής σειράς των Π.Μ.Κ., Ν. Μαρμαρίδη, είναι αμφίβολο το κατά πόσον η μετάφραση αυτή θα είχε βρει τον δρόμο προς τη δημοσίευσή της. Το ενδιαφέρον του για την ανάδειξη τής Θεωρίας Ομάδων (μέσω διαφόρων τόμων των Π.Μ.Κ.) σε ένα από τα πλέον θεμελιώδη μέσα ανάπτυξης σύγχρονων μαθηματικών προγραμμάτων σπουδών ήταν έκδηλο καθ' όλη τη διάρκεια τής περιπετειώδους συνεργασίας μας. Πέραν τής λοιπής συνεισφοράς του, ενδεικτική τής βούλησής του για τη θέσπιση ενός ομαδικού εργασιακού πνεύματος είναι η εκ μέρους του ηλεκτρονική φιλοτέχνηση τού σχήματος τού εξωφύλλου, το οποίο παρουσιάζει ένα γεωμετρικό διαμόρφωμα με τις συμμετρίες του υλοποιούμενες μέσω τής ομάδας διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου που φέρει το όνομα[33] «p6» (πρβλ. κεφ. 26).

Τέλος, εξίσου θερμές ευχαριστίες οφείλονται και στους υπευθύνους των Leader Books (και ιδιαιτέρως στον Σ. Καρέγλη), οι οποίοι ανταποκρίθηκαν πλήρως στις απαιτήσεις αυτού τού εκδοτικού εγχειρήματος, μεριμνώντας για την άρτια εμφάνιση και προώθηση τού βιβλίου.

Δ. Ι. Νταής
Λευκωσία, Κύπρος, Ιούλιος τού 2002

[32]Βλ. http://www.math.uoa.gr/~mmaliak/algabibliografia.htm

[33]Το σχήμα αυτό περιέχει εμφανώς άστρα, με τις γωνίες καθεμιάς των 12 κορυφών τους ίσες με 60°. Σχήματα αυτού τού είδους έχουν εντοπισθεί σε διάφορα αραβουργήματα στη Σεβίλη τής Ανδαλουσίας (La Giralda) και στην Αλάμπρα (Lion Courtyard). Για περαιτέρω πληροφορίες βλ. O. Jones [S] και

FIELD R.: *Geometric Patterns from Islamic Art & Architecture*. Tarquin Publications, 1998.

Στον Ιερώνυμο και στην Αιμιλία

Η ομορφιά των χιονοκρυστάλλων εξαρτάται από τη μαθηματική τους κανονικότητα και συμμετρία· αλλά, κατά κάποιον τρόπο, ό,τι μας προκαλεί μια αλματωδώς αυξανόμενη ευχαρίστηση και έναν απέραντο θαυμασμό είναι η αλληλεξάρτηση πολλών παραλλαγών ενός και μόνου τύπου χιονοκρυστάλλου, οι οποίες είναι μεν ανά δύο σχετισμένες, όχι όμως και απολύτως ταυτόσημες.

D' Arcy Thompson
(*On Growth and Form*, Cambridge, 1917)

Σε γενικές γραμμές, οι μόνες κατ' εμέ μαθηματικώς ενδιαφέρουσες δομές είναι αυτές που επιδέχονται μια κάποια νομιμοποίηση, ήτοι αυτές οι οποίες διαθέτουν μια φυσική υλοποίηση εντός τού συνεχούς. Από τις υπολειπόμενες, εκείνες που θεωρώ ως τις καλύτερες μεταξύ των καθαρώς αλγεβρικών θεωριών, όπως π.χ. εντός τής θεωρίας των Αφηρημένων Ομάδων, είναι ορισμένα είδη ομάδων, πολλώ δε εκείνες που εμφανίζονται ως ομάδες αυτομορφισμών των συνεχών σχημάτων.

René Thom
(*Paraboles et Catastrophes*, Flammarion, 1983)

Πρόλογος τού συγγραφέα

Οι αριθμοί μετρούν μεγέθη, ενώ *οι ομάδες μετρούν τη συμμετρία*. Ο πρώτος ισχυρισμός δεν αποτελεί έκπληξη· σε τελική ανάλυση, αυτός είναι ο λόγος ύπαρξης των αριθμών. Ο δεύτερος ισχυρισμός πρόκειται να επαληθευθεί εδώ, ενόσω θα επιχειρούμε να εισαγάγουμε το βασικό γλωσσάριο και ορισμένους από τους πλέον σημαντικούς δομικούς λίθους τής Στοιχειώδους Θεωρίας των Ομάδων.

Εν πρώτοις, νομίζω πως προσήκοντα θα ήταν κάποια σχόλια γύρω από το περιεχόμενο και το συγγραφικό ύφος. Απ' αρχής μέχρι τέλους τού παρόντος βιβλίου ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην παράθεση πληθώρας *παραδειγμάτων*, με μια κάποια βαρύτητα σε ό,τι αφορά στις ομάδες συμμετριών στερεών και άλλων γεωμετρικών διαμορφωμάτων. Σχεδόν όλη η θεματολογία είναι κατά τέτοιον τρόπο επιλεγμένη, ώστε να παρουσιάζει τις ομάδες ενδεδυμένες με τον πλέον φυσικό τους ρόλο, ήτοι δρώσες επί των στοιχείων (ή μετατάσσουσες τα στοιχεία) ενός συνόλου, ανεξαρτήτως τού αν αυτό απαρτίζεται από τις διαγωνίους ενός κύβου, από τις ακμές ενός δέντρου ή ακόμη και από μια συλλογή υποομάδων μιας δεδομένης ομάδας. Η όλη ύλη υποδιαιρείται σε 28 σύντομα κεφάλαια, καθένα από τα οποία εισάγει μια νέα έννοια ή πραγματεύεται ένα νέο θεωρητικό αποτέλεσμα. Μια, έστω και γρήγορη, ανάγνωση τού καταλόγου των περιεχομένων θα καταδείκνυε ότι τα περισσότερα των κυριοτέρων ερεισμάτων για τη δόμηση μιας «πρώτης σειράς μαθημάτων» είναι παρόντα. Τα θεωρήματα των Langrange, Cauchy και Sylow δεσμεύουν, το καθένα για τον εαυτό του, ένα ολόκληρο κεφάλαιο· το ίδιο συμβαίνει με την ταξινόμηση των πεπερασμένως παραγομένων ομάδων, την απαρίθμηση των πεπερασμένων περιστροφικών και των επιπέδων κρυσταλλογραφικών ομάδων, καθώς και με το θεώρημα των Nielsen και Schreier.

Προσπάθησα να γράψω σε όσο το δυνατόν ολιγότερο επίσημο ύφος, παραθέτοντας μόνον πολύ σημαντικά αποτελέσματα ως «θεωρήματα» και αποφεύγοντας την κατάρτιση ενός ατέρμονα καταλόγου ορισμών. Σκοπός μου ήταν να γράψω ένα βιβλίο που να μπορεί να διαβάζεται με ή και χωρίς τη συνδρομή ειδικών πανεπιστημιακών παραδόσεων· αν και δεν σχεδιάσθηκε για να χρησιμοποιείται ως λεξικό ή οδηγός αναφοράς, κάθε νέα έννοια που εισάγεται στοιχειοθετείται με εντόνως τονισμένη γραμματοσειρά και μπορεί εύκολα να εντοπισθεί στο ευρετήριο όρων. Κάθε κεφάλαιο κλείνει με μια συλλογή ασκήσεων που στοχεύει στην εδραίωση και -σε ορισμένες περιπτώσεις- στη συμπλήρωση των γνώσεων που αποκτώνται εντός τού κυρίως κειμένου. Είναι απολύτως ουσιαστική η εκ μέρους σας επίλυση όσο το δυνατόν περισσοτέρων ασκήσεων, πριν από τη μετάβασή σας από το ένα κεφάλαιο στο άλλο. Τα Μαθηματικά δεν αποτείνονται σε θεατές· για να κατακτηθεί ένα υψηλό ποσοστό κατανόησης, αυτοπεποίθησης και ενθουσιασμού είναι αναγκαία η συμμετοχή σας.

Ως προαπαιτούμενες γνώσεις θεωρώ ό,τι μαθαίνει κανείς, ως συνήθως, σε μια πρώτη παράδοση Γραμμικής Άλγεβρας (συμπεριλαμβανομένου τού πολλαπλασιασμού πινάκων, τής μέσω πινάκων αναπαράστασης γραμμικών απεικονίσεων μεταξύ ευκλειδείων χώρων, αλλά όχι κατ' ανάγκην και τής Αφηρημένης Θεωρίας των Διανυσματικών Χώρων), καθώς και μια στοιχειώδη εξοικείωση με τις ιδιότητες των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών. Θα ήταν κρίμα να δίδασκε κανείς Θεωρία Ομάδων χωρίς να έχει στη διάθεσή του τις ομάδες πινάκων, καθότι αυτές αποτελούν μια πλούσια πηγή παραδειγμάτων, ιδιαιτέρως δε λόγω τής κατά κόρον χρησιμοποίησης των πινάκων στις εφαρμογές.

Μια στοιχειώδης ύλη αυτού τού είδους είναι, βεβαίως, κάτι το κοινότοπο· ωστόσο, δεν είναι ολωσδιόλου κάτι το στατικό, επιδεχόμενη από καιρού εις καιρόν βελτιώσεις και νέες προσεγγίσεις. Στο σημείο αυτό, θα όφειλα να κάνω μνεία τριών εξ αυτών· πρόκειται για την κατά H. Wielandt προσέγγιση των θεωρημάτων τού Sylow (βλ. κεφάλαιο 20), την κατά J. McKay απόδειξη τού θεωρήματος τού Cauchy (βλ. κεφάλαιο 13) και την εισαγωγή των δράσεων ομάδων επί δέντρων την οφειλόμενη στον J.-P. Serre (βλ. κεφάλαιο 28). Μια άλλη επιρροή κατά τη συγγραφή προήλθε από εμπειρίες προσωπικής φύσεως. Ως φοιτητής είχα την καλή τύχη να σπουδάσω υπό τον A.M. Macbeath, οι παραδόσεις τού οποίου με πρωτοεισήγαγαν στη Θεωρία των Ομάδων. Το χρέος το οποίο φέρει ο μαθητής, το συναρτώμενο με την ευγνωμοσύνη που οφείλει στον διδάσκαλο, εξοφλείται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο όταν η εξόφληση γίνεται σε είδος. Εάν λοιπόν τούτο το μικρό βιβλίο θα μπορούσε να συνεισφέρει κάτι στην εκτίμηση τής ομορφιάς των Μαθηματικών, σε βαθμό ανάλογο εκείνου στον οποίο αυτή μεταδόθηκε από τον εν λόγω καθηγητή σε εμένα, τότε θα ήμουν κάτι περισσότερο από ικανοποιημένος.

Ευχαριστίες. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Andrew Jobbings, ο οποίος διάβασε και σχολίασε μεγάλο τμήμα τού αρχικού χειρογράφου, τον Lyndon Woodward για τις πολλές χρήσιμες συζητήσεις μας των τελευταίων ετών, την κυρία S. Nesbitt για την εύθυμη διάθεσή της και την υπομονή της κατά τη διάρκεια τής στοιχειοθεσίας τού βιβλίου, καθώς και τους εξής εκδοτικούς οίκους για την ευγενική παραχώρηση των δικαιωμάτων για τη χρήση ήδη εκδοθέντος υλικού: τον εκδοτικό οίκο Cambridge University Press (για την αναπαραγωγή τού εδαφίου από το *Growth and Form*), τον Flammarion (για την αναπαραγωγή τού εδαφίου από το *Paraboles et Catastrophes*), τους Dover Publications (το σχήμα 2.1 ελήφθη από το *Snow Crystals*), το Office du Livre, Fribourg (το σχήμα 25.3 και τμήματα τού σχήματος 26.2 ελήφθησαν από το *Ornamental Design*), καθώς και την Plenum Publishing Corporation (καθότι τμήματα τού σχήματος 26.2 είναι ειλημμένα από το βιβλίο *Symmetry in Science and Art*).

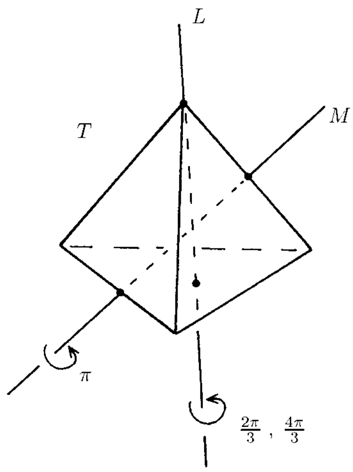
M. A. Armstrong
Durham, England, Σεπτέμβριος τού 1987

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Οι συμμετρίες τού τετραέδρου

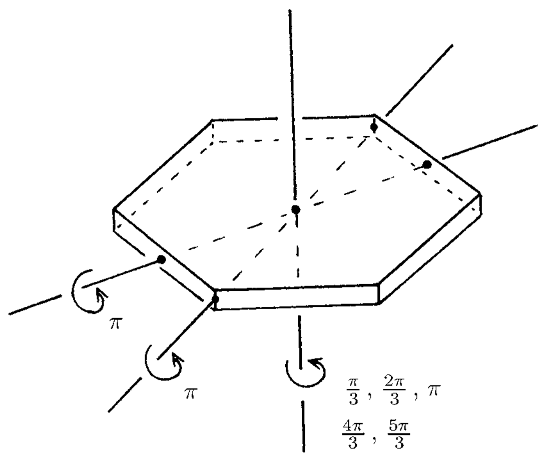
Πόση συμμετρία διαθέτει ένα τετράεδρο; Θεωρήστε ένα κανονικό τετράεδρο T και, χάριν ευκολίας, αναλογισθείτε μόνον την *περιστροφική συμμετρία*. Το σχήμα 1.1 δείχνει δύο άξονες. Ο ένας, ο οποίος επιγράφεται με το L, διέρχεται από μία κορυφή τού τετραέδρου και από το βαρύκεντρο τής αντικείμενης έδρας· ο άλλος, ο οποίος επιγράφεται με το M, καθορίζεται από τα μεσοσημεία δύο αντικειμένων ακμών.



Σχήμα 1.1

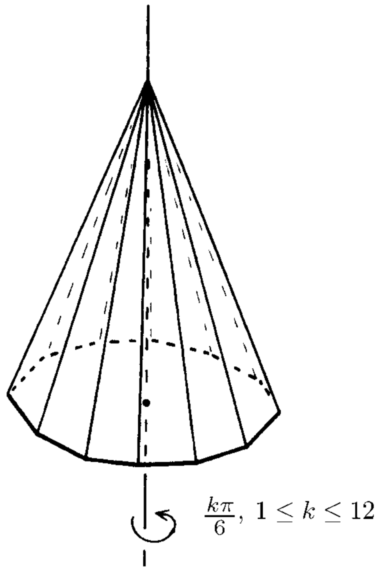
Υπάρχουν τέσσερεις άξονες ομοειδείς τού L και δύο στροφές γύρω από τον κάθε έναν εξ αυτών, κατά $\frac{2\pi}{3}$ και $\frac{4\pi}{3}$, αντιστοίχως, οι οποίες στέλνουν το εν λόγω τετράεδρο να απεικονισθεί στον εαυτό του. Οι στροφές εκτελούνται υπό την έννοια την υποδηλούμενη μέσω τού σχήματος· υποθέτοντας ότι το σημείο επόπτευσης τού τετραέδρου είναι τοποθετημένο επί τού άξονα τού διερχομένου από τη θεωρουμένη κορυφή, η αντικείμενη έδρα στρέφεται κατά τη φορά την αντίθετη τής κίνησης των δεικτών τού ρολογιού (αριστερόστροφη φορά). Εάν, βεβαίως, εκτελούσαμε στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$ (κι αντιστοίχως, κατά $\frac{4\pi}{3}$) σύμφωνα με την ωρολογιακή φορά (δεξιόστροφη φορά), τότε η στροφή αυτή θα επιδρούσε στο T όπως ακριβώς η ως άνω στροφή κατά $\frac{4\pi}{3}$ (κι αντιστοίχως, κατά $\frac{2\pi}{3}$). Τώρα, σε ό,τι αφορά στον άξονα M, το μόνο που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να τον στρέψουμε κατά π. (Σημειωτέον ότι υπάρχουν τρεις άξονες αυτού τού είδους). Μέχρι στιγμής έχουμε σχηματίσει $(4 \times 2) + 3 = 11$ συμμετρίες. Συμπεριλαμβάνοντας σε αυτές και την ταυτοτική, η οποία αφήνει το T σταθερό και είναι ισοδύναμη με μια πλήρη στροφή περί έναν εκ των διαθεσίμων αξόνων μας, λαμβάνουμε εν συνόλω δώδεκα περιστροφές.

Φαίνεται να έχουμε απαντήσει στο αρχικό μας ερώτημα. Υπάρχουν ακριβώς δώδεκα περιστροφές, συμπεριλαμβανομένης και τής ταυτοτικής, οι οποίες κινούν το τετράεδρο επαναφέροντάς το στον εαυτό του. Αλλά αυτό δεν αποτελεί το τέλος τής όλης ιστορίας· μια ισόπεδη εξαγωνική πλάκα με ισομήκεις πλευρές διαθέτει ωσαύτως δώδεκα περιστροφικές συμμετρίες (βλ. σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2

Το ίδιο μάλιστα συμβαίνει και με μια ορθή κανονική πυραμίδα βασιζόμενη σε ένα κανονικό δωδεκάγωνο (βλ. σχήμα 1.3).

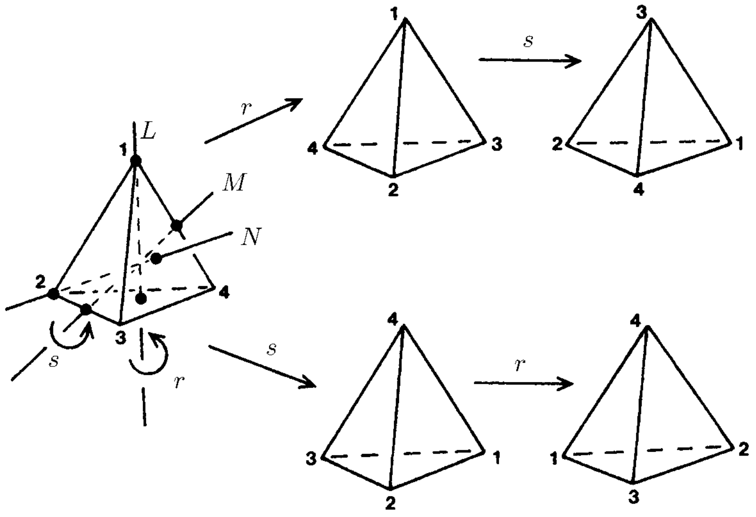


Σχήμα 1.3

Αναφερόμενοι στην πλάκα, διαπιστώνουμε ότι ορίζονται πέντε στροφές (κατά $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$ και $\frac{5\pi}{3}$) περί τον άξονα ο οποίος διέρχεται από το βαρύκεντρό της και είναι κάθετος προς αυτήν. Επιπροσθέτως, υπάρχουν τρεις άξονες συμμετρίας καθοριζόμενοι από ζεύγη αντικειμένων γωνιών, καθώς και άλλοι τρεις άξονες συμμετρίας καθοριζόμενοι από τα μεσοσημεία ζευγών αντικειμένων πλευρών, γύρω από τους οποίους μπορούμε να στρέψουμε την πλάκα κατά π. Εάν δεν ξεχάσουμε να συμπεριλάβουμε και την ταυτοτική συμμετρία, τότε αποκομίζουμε εκ νέου ακριβώς δώδεκα συμμετρίες. Από την άλλη μεριά, η πυραμίδα μας διαθέτει μόνον έναν άξονα περιστροφικής συμμετρίας, ο οποίος συνδέει την απαρχή τής πυραμίδας με το βαρύκεντρο τής βάσης της. Λόγω αυτών των γεωμετρικών δεδομένων σχηματίζονται δώδεκα διαφορετικές στροφές (κατά $\frac{k\pi}{6}$, $1 \le k \le 12$, υπό μία προεπιλεγμένη έννοια) περί τον προκείμενο άξονα. Παρά το γεγονός ότι έχουμε καταγράψει ακριβώς δώδεκα περιστροφές *και* στις τρεις περιπτώσεις, είναι τελείως προφανές ότι το τετράεδρο, η πλάκα και η πυραμίδα δεν επιδεικνύουν τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά συμμετρίας.

Η πλέον εντυπωσιακή διαφορά έγκειται στο ότι η πυραμίδα διαθέτει μόνον έναν άξονα συμμετρίας. Μια στροφή κατά $\frac{\pi}{6}$ περί αυτόν τον άξονα πρέπει να επαναληφθεί (ή, με άλλα λόγια, να συνδυασθεί με τον εαυτό της) δώδεκα φορές προτού η πυραμίδα επανέλθει στην αρχική της θέση. Πράγματι· ύστερα από κατάλληλη επανάληψη τής στροφής τής βάσης της έχουμε τη δυνατότητα παραγωγής όλων των υπολειπομένων έντεκα συμμετριών της. Ωστόσο, στην περίπτωση τού τετραέδρου και τής πλάκας, δεν υπάρχει κάποια «μοναδική» στροφή τους, η οποία, επαναλαμβανόμενη, θα μας παρείχε όλες τις άλλες συμμετρίες.

Μια πιο προσεκτική εξέταση των δεδομένων μας μπορεί να μας οδηγήσει στο να διακρίνουμε και άλλες διαφορές, οι οποίες σχετίζονται, με τον έναν ή τον άλλον τρόπο, με το πώς οι διαθέσιμες συμμετρίες «συνδυάζονται» μεταξύ τους. Για παράδειγμα, όλες οι συμμετρίες τής πυραμίδας *μετατίθενται* μεταξύ τους ανά ζεύγη. Αυτό σημαίνει ότι, θεωρώντας δύο τυχούσες (περι)στροφές και εκτελώντας τή μία κατόπιν τής άλλης, το αποτέλεσμα θα είναι ανεξάρτητο τού ποια εξ αυτών επιλέξαμε να είναι πρώτη ή δεύτερη. (Όλες οι εν λόγω στροφές έχουν τον ίδιο άξονα, οπότε, εάν, χάριν τής επιχειρηματολογίας μας, εκτελέσουμε μία στροφή κατά $\frac{\pi}{3}$ και κατόπιν μία στροφή κατά $\frac{5\pi}{6}$, αποκτούμε μια στροφή κατά $\frac{7\pi}{6}$, η οποία μπορεί να ιδωθεί και ως το αποτέλεσμα τής στροφής κατά $\frac{5\pi}{6}$ ακολουθούμενης από τη στροφή κατά $\frac{\pi}{3}$). Τούτο όμως δεν συμβαίνει στην περίπτωση τού τετραέδρου ή τής πλάκας. Συνιστούμε στον αναγνώστη να πειραματισθεί με το τετράεδρο. Η επιγραφή των κορυφών τού T, όπως στο σχήμα 1.4, μας επιτρέπει να αντιληφθούμε πλήρως το αποτέλεσμα μιας πράγματι ιδιομερούς συμμετρίας.



Σχήμα 1.4

Ως r ορίζουμε την κατά $\frac{2\pi}{3}$ στροφή περί τον άξονα L (έτσι όπως δείχνεται στο σχήμα) και ως s την κατά π στροφή περί τον άξονα M. Εκτελώντας πρώτα την r και κατόπιν την s, παίρνουμε τη στροφή περί τον άξονα N, η οποία επαναφέρει την κορυφή 2 στην πρωταρχική της θέση. Αντιθέτως, εκτελώντας πρώτα την s

και κατόπιν την r, η κορυφή 2 κινείται στη θέση που ήταν αρχικώς κατειλημμένη από την κορυφή 4, οπότε δεν προκύπτει η ίδια στροφή. Εδώ απαιτείται βεβαίως κάποια ιδιαίτερη προσοχή για να μην πέσει κανείς στην παγίδα να συμπαρασύρει τον άξονα τής s όταν εν πρώτοις εφαρμόζει την r. Τόσο η r όσο και η s θα πρέπει να εκλαμβάνονται ως «άκαμπτες» κινήσεις τού χώρου, υπό την έννοια τού ότι ο άξονας καθεμιάς εξ αυτών παραμένει *σταθερός* στον χώρο, ενόσω οι r και s (περι)στρέφουν το T επαναφέροντάς το στην αρχική του θέση.

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε μια τρίτη παρατήρηση. Υπάρχει μία και μόνη στροφή τής πυραμίδας η οποία, συνδυαζόμενη μία φορά με τον εαυτό της, μας δίνει την ταυτοτική συμμετρία· πρόκειται για τη μονοσημάντως ορισμένη στροφή κατά π. Αντιθέτως, η πλάκα διαθέτει επτά και το τετράεδρο τρεις συμμετρίες αυτού τού είδους. Οι τρεις στροφές τού τετραέδρου (κατά π) μετατίθενται μεταξύ τους ανά ζεύγη, ενώ μόνο μία από τις επτά ομοειδείς συμμετρίες τής πλάκας μετατίθεται με τις άλλες 6. (Ποια είναι αυτή; Πειραματισθείτε μέχρι να την αποκαλύψετε.)

Όπως ήδη διαπιστώσαμε, η απλή καταμέτρηση των κινήσεων συμμετρίας δεν είναι αρκετή για την απόκτηση ενός χρηστικού μέσου καταγραφής των ποιοτικών χαρακτηριστικών τής συμμετρίας γεωμετρικών διαμορφωμάτων· οφείλουμε, επιπροσθέτως, να λάβουμε υπ' όψιν τον τρόπο με τον οποίο αυτές οι κινήσεις συνδυάζονται μεταξύ τους. Εκείνο το μαθηματικό αντικείμενο, το οποίο ενσωματώνει όλες τις προς τούτο απαιτούμενες πληροφορίες, είναι η αποκαλούμενη **ομάδα συμμετριών**, την οποία και θα επιχειρήσουμε να περιγράψουμε εν συνεχεία για το T.

Το σύνολο των περιστροφικών συμμετριών τού T είναι εφοδιασμένο με ένα είδος «αλγεβρικής δομής». Μπορούμε να *συνδυάσουμε* δύο δοθείσες περιστροφές u και v, εκτελώντας πρώτα την v και κατόπιν την u, προκειμένου να κατασκευάσουμε μια νέα περιστροφή που, *και* αυτή με τη σειρά της, απεικονίζει το T στον εαυτό του, συμβολιζόμενη ως uv. (Η επιλογή τού συμβολισμού uv -αντί τού vu- υπαγορεύεται από τη συνήθη σύμβασή μας για την έκφραση τής σύνθεσης δύο συναρτήσεων, όπου μέσω τού fg ή τού $f \circ g$ εννοούμε ότι προηγείται η εφαρμογή τής g και ότι έπεται η εφαρμογή τής f). Η ταυτοτική περιστροφή, την οποία συμβολίζουμε ως e, συμπεριφέρεται κατά κάποιον ειδικό τρόπο. Εφαρμόζοντας πρώτα την e και κατόπιν μια οιαδήποτε άλλη περιστροφή u, ή πρώτα την u και κατόπιν την e, συνάγουμε ως αποτέλεσμα ακριβώς ό,τι θα παίρναμε εφαρμόζοντας μόνον την u. Με άλλα λόγια,

$$ue = u = eu,$$

για κάθε συμμετρία u τού T. Από την άλλη μεριά, κάθε u διαθέτει ένα *αντίστροφο*, συμβολιζόμενο ως u^{-1}, ήτοι μια συμμετρία για την οποία ισχύει

$$u^{-1}u = e = uu^{-1}.$$

Για την απόκτηση τού u^{-1} δεν έχετε παρά να εκτελέσετε τη στροφή περί τον άξονα τής u και κατά γωνία ίση με εκείνη τής στροφής u, αλλά προς την *αντίθετη* κατεύθυνση. (Για παράδειγμα, το αντίστροφο τής r είναι η rr, επειδή, εφαρμόζοντας την r τρεις φορές, παίρνουμε την ταυτοτική). Τέλος, θεωρώντας τρεις τυχούσες περιστροφές u, v και w, μας είναι αδιάφορο το κατά πόσον θα εφαρμόσουμε πρώτα την w και κατόπιν τη σύνθεση uv ή πρώτα την vw και κατόπιν την u. Σε συμβολική γραφή, η διαπίστωση αυτή εκφράζεται ως εξής:

$$(uv)w = u(vw)$$

(όπου u, v και w είναι οιεσδήποτε -όχι κατ' ανάγκην διακεκριμένες- συμμετρίες τού τετραέδρου T).

Οι δώδεκα συμμετρίες τού τετραέδρου T, εφοδιασμένες με την ως άνω αλγεβρική δομή, οικοδομούν την **ομάδα περιστροφικών συμμετριών** του.

Ασκήσεις

1.1 Συγκολλήστε δύο αντίτυπα ενός κανονικού τετραέδρου κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να έχουν μια κοινή τριγωνική έδρα, και μελετήστε όλες τις περιστροφικές συμμετρίες αυτού τού νέου στερεού.

1.2 Βρείτε όλες τις περιστροφικές συμμετρίες ενός κύβου.

1.3 Υιοθετώντας τον συμβολισμό τού σχήματος 1.4 δείξτε ότι ο άξονας τής συντιθέμενης περιστροφής srs διέρχεται από την κορυφή 4, καθώς και ότι ο άξονας τής συντιθέμενης περιστροφής $rsrr$ καθορίζεται από τα μεσοσημεία των ακμών $1\,2$ και $3\,4$.

1.4 Έχοντας ολοκληρώσει τη λύση τής προηγούμενης άσκησης εκφράστε καθεμιά των δώδεκα περιστροφικών συμμετριών τού τετραέδρου με τη βοήθεια των r και s.

1.5 Κάνοντας εκ νέου χρήση τού συμβολισμού τού εισαχθέντος στο σχήμα 1.4, βεβαιώστε την ισχύ των ισοτήτων $r^{-1} = rr$, $s^{-1} = s$, $(rs)^{-1} = srr$ και $(sr)^{-1} = rrs$.

1.6 Δείξτε ότι κάθε κανονικό τετράεδρο διαθέτει εν συνόλω είκοσι τέσσερεις συμμετρίες, υπό την προϋπόθεση ότι επιτρέπουμε και τη συμπερίληψη κατοπτρισμών και γινομένων κατοπτρισμών. Εντοπίστε μεταξύ αυτών μια συμμετρία, η οποία δεν είναι ούτε περιστροφή ούτε κατοπτρισμός. Κατόπιν, βεβαιωθείτε για το ότι η εν λόγω συμμετρία μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο τριών κατοπτρισμών.

1.7 Έστω q ένας κατοπτρισμός ενός κανονικού τετραέδρου ως προς το επίπεδο το οποίο καθορίζεται από το βαρύκεντρό του (ή «κέντρο συμμετρίας» του) και μία από τις ακμές του. Δείξτε ότι οι περιστροφικές συμμετρίες, μαζί με τις συμμετρίες τής μορφής uq, όπου η u είναι μια οιαδήποτε περιστροφή, μας παρέχουν *και* τις είκοσι τέσσερεις συμμετρίες τού τετραέδρου.

1.8 Προσδιορίστε όλες τις επίπεδες συμμετρίες (ήτοι περιστροφές και κατοπτρισμούς) ενός κανονικού πενταγώνου και ενός κανονικού εξαγώνου.

1.9 Δείξτε ότι η εξαγωνική πλάκα τού σχήματος 1.2 διαθέτει συνολικώς είκοσι τέσσερεις συμμετρίες. Εντοπίστε εκείνες που μετατίθενται με όλες τις άλλες.

1.10 Δομήστε πρότυπα («μοντέλα») τού οκταέδρου, τού δωδεκαέδρου και τού εικοσαέδρου (βλ. σχήμα 8.1). Για καθένα εξ αυτών των στερεών προσπαθήστε να εντοπίσετε όσο περισσότερες συμμετρίες μπορείτε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Τα αξιώματα τής ομάδας

Χωρίς άλλα εισαγωγικά σχόλια θα δώσουμε τον ορισμό τής εννοίας τής ομάδας έχοντας ως υπόδειγμά μας τις συμμετρίες τού κανονικού τετραέδρου. Το πρώτο συστατικό του είναι ένα σύνολο G· το δεύτερο, ένας κανόνας ο οποίος μας επιτρέπει να συνδυάζουμε μεταξύ τους τα μέλη κάθε διατεταγμένου ζεύγους $(x, y) \in G \times G$ και να λαμβάνουμε ένα μονοσημάντως ορισμένο «γινόμενο» xy, το οποίο *να ανήκει επίσης στο σύνολό μας*. Αυτός ο «κανόνας συνδυασμού» (ή η «πράξη» που εκτελούμε) αναφέρεται συνήθως ως «πολλαπλασιασμός» επί τού δοθέντος συνόλου G.

Μια ***ομάδα*** *είναι ένα σύνολο G, μαζί με έναν πολλαπλασιασμό επί τού G, ο οποίος ικανοποιεί τα εξής αξιώματα:*

(a) *Ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός, ήτοι ισχύει*

$$(xy)z = x(yz)$$

για οιαδήποτε (όχι κατ' ανάγκην διακεκριμένα) στοιχεία x, y, z τού G.

(b) *Υπάρχει ένα στοιχείο $e \in G$, το λεγόμενο* **μοναδιαίο** *(ή* **ταυτοτικό***) στοιχείο, για το οποίο ισχύει*

$$xe = x = ex, \quad \forall x,\ x \in G.$$

(c) *Κάθε στοιχείο x τής G διαθέτει ένα* **αντίστροφο** x^{-1}, *το οποίο ανήκει στο σύνολο G και ικανοποιεί τις ισότητες*

$$x^{-1}x = e = xx^{-1}.$$

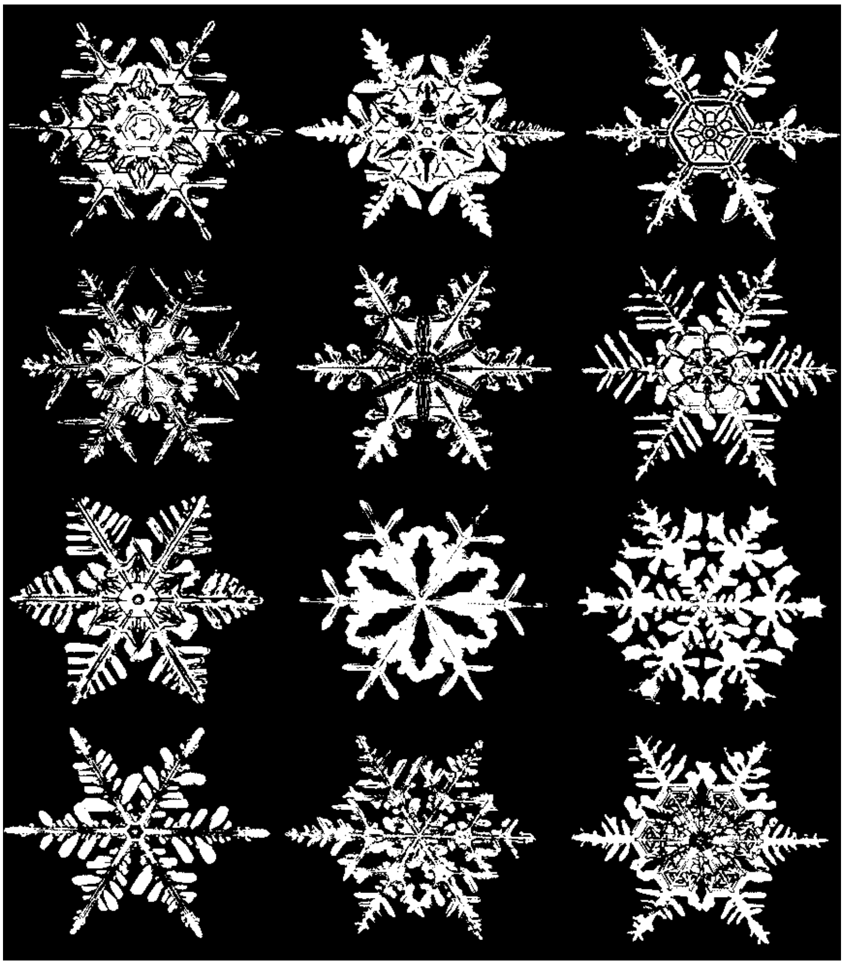
Πόσο μπορεί κανείς να βοηθηθεί από έναν επίτυπο ορισμό παρεχόμενον μέσω αξιωμάτων; Επί τού παρόντος, ελάχιστα· εάν η μόνη υφιστάμενη ομάδα ήταν η ομάδα περιστροφικών συμμετριών τού κανονικού τετραέδρου, τότε θα χάναμε τον χρόνο μας. Αλλ' αυτό ευτυχώς δεν συμβαίνει. Οι ομάδες «ξεπροβάλλουν» σε μια πληθώρα διαφορετικών περιστάσεων.

Όλοι μας, για παράδειγμα, θεωρούμε τη δομή τής προσθετικής ομάδας τού συνόλου των πραγματικών αριθμών ως «δεδομένη». Σε αυτήν την περίπτωση, ο κανόνας συνδυασμού των μελών κάθε διατεταγμένου ζεύγους (x, y) είναι ο σχηματισμός τού κοινότοπου αθροίσματός τους $x + y$. Φυσικά, αποδεχόμαστε ότι για οιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει η ισότητα

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

ότι το 0 παίζει τον ρόλο τού ταυτοτικού (ή «ουδετέρου») στοιχείου ως προς την πράξη τής πρόσθεσης και ότι το $-x$ είναι το αντίστροφο (ή, καλύτερα, το «αντίθετο») τού x. Αυτό το παράδειγμα δείχνει το γιατί προηγουμένως θέσαμε τις λέξεις γινόμενο και πολλαπλασιασμός εντός εισαγωγικών. Η «πράξη» ή ο «κανόνας» που μας επιτρέπει να συνδυάζουμε τα στοιχεία μας πρόκειται, ως επί το πλείστον, να σημειώνεται και να αναφέρεται εφεξής ως πολλαπλασιασμός, αλλά είναι δυνατόν να μη σχετίζεται καθόλου με τον πολλαπλασιασμό αριθμών υπό τη συνήθη του έννοια.

Ο *χημικός* ενίοτε εκφράζει το ενδιαφέρον του για το πόση συμμετρία θα μπορούσε να διαθέτει ένα συγκεκριμένο μόριο. Για παράδειγμα, **το μόριο τού μεθανίου** (CH_4) μπορεί να εκληφθεί ως ένας σχηματισμός πέντε ατόμων, με το άτομο τού άνθρακα τοποθετημένο στο βαρύκεντρο ενός κανονικού τετραέδρου και με τα τέσσερα πρωτόνιά του (άτομα υδρογόνου) τοποθετημένα στις τέσσερεις κορυφές τού τετραέδρου. Από την άλλη μεριά, το πρότυπο («μοντέλο») **τού μορίου τής βενζόλης** (C_6H_6) έχει μια εξαγωνική δόμηση, δηλαδή είναι ένας σχηματισμός δώδεκα ατόμων, με δύο άτομα (ένα άτομο άνθρακα και ένα άτομο υδρογόνου) τοποθετημένα σε καθεμία από τις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου. (Η εξαγωνική συμμετρία είναι μία από τις πλέον συνήθεις στη φύση· πιθανώς δε, από την άποψη τής αισθητικής, να μην είναι πουθενά αλλού τόσο ευάρεστη, όσο στην περίπτωση τής θεώρησης τής δομής των χιονοκρυστάλλων, βλ. σχήμα 2.1). Από την εμπειρία μας με το κανονικό τετράεδρο και το κανονικό εξάγωνο γνωρίζουμε ότι είναι σημαντική η διάταξη η οποία τηρείται όταν συνδυάζουμε δύο συμμετρίες. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο ομιλούμε συνεχώς για *διατεταγμένα* ζεύγη στοιχείων. Είναι καθοριστικής σημασίας το πότε θα θεωρήσουμε δύο στοιχεία μιας ομάδας διατεταγμένα ως x, y ή το πότε θα τους προσδώσουμε την αντίθετη διάταξη y, x. Στην πρώτη περίπτωση, ο κανόνας μας μάς δίνει το γινόμενο xy, στη δεύτερη το yx, χωρίς τα δύο αυτά γινόμενα να είναι κατ' ανάγκην ίσα.



Σχήμα 2.1

Ο *φυσικός*, κατά τη μελέτη τής Θεωρίας τής Σχετικότητας, συναντά τη λεγομένη **ομάδα τού Lorentz**, τα στοιχεία τής οποίας είναι πίνακες τής μορφής

$$\begin{bmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{bmatrix} \tag{*}$$

συνδυαζόμενα μεταξύ τους μέσω τού συνήθους πολλαπλασιασμού πινάκων. Θυμηθείτε ότι οι $\cosh u$ και $\sinh u$ είναι οι υπερβολικές συναρτήσεις συνημιτόνου και ημιτόνου, ονομαζόμενες έτσι εξαιτίας τού ότι οι εξισώσεις $x = \cosh u$, $y = \sinh u$ προσδιορίζουν την υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$. Γι' αυτές ισχύουν οι ταυτότητες

$$\begin{aligned} \cosh(u \pm v) &= \cosh u \, \cosh v \pm \sinh u \, \sinh v, \\ \sinh(u \pm v) &= \sinh u \, \cosh v \pm \cosh u \, \sinh v \end{aligned}$$

και, κατά συνέπειαν,

$$\begin{bmatrix} \cosh u & \sinh u \\ \sinh u & \cosh u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh v & \sinh v \\ \sinh v & \cosh v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(u+v) & \sinh(u+v) \\ \sinh(u+v) & \cosh(u+v) \end{bmatrix} .$$

Σημειωτέον ότι το γινόμενο αυτό μάς δίνει έναν *ομοειδή* πίνακα. Ο μοναδιαίος πίνακας πληροί τις απαιτήσεις τού μοναδιαίου (ή «ταυτοτικού») στοιχείου και ανήκει στο δοθέν σύνολο πινάκων, διότι ισούται με τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} \cosh 0 & \sinh 0 \\ \sinh 0 & \cosh 0 \end{bmatrix} .$$

Ως αντίστροφο τού (*) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} \cosh(-u) & \sinh(-u) \\ \sinh(-u) & \cosh(-u) \end{bmatrix}$$

ο οποίος έχει την απαιτουμένη μορφή. Επειδή, επιπροσθέτως, ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός, παίρνουμε πράγματι μια ομάδα.

Τέλος, ο *μαθηματικός* αντιλαμβάνεται ότι, ουσιαστικώς, αυτό που μελετά εν πρώτοις εντός τού πλαισίου τής (δισδιάστατης) Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι οι ιδιότητες εκείνες, οι οποίες μένουν αμετάβλητες μέσω των στοιχείων μιας ειδικής ομάδας, ήτοι τής **ομάδας ομοιοτήτων** τού επιπέδου. Μια **ομοιότητα** μεγεθύνει ή συρρικνώνει τα σχήματα, ενώ διαφυλάσσει το μόρφωμά τους. Πιο συγκεκριμένα, κάθε ομοιότητα στέλνει ευθύγραμμα τμήματα να απεικονισθούν σε ευθύγραμμα τμήματα, πολλαπλασιάζοντας τα μήκη τους με έναν παράγοντα, ο οποίος είναι ο ίδιος για κάθε ευθύγραμμο τμήμα. Επίσης, τρίγωνα στέλνονται να απεικονισθούν σε όμοια τρίγωνα και οι γωνίες διατηρούν το μέγεθός τους, αλλά όχι αναγκαίως και τη φορά τους. Η σύνθεση δύο ομοιοτήτων είναι και αυτή μια ομοιότητα, και η επαλήθευση των αξιωμάτων τής ομάδας μπορεί εύκολα να ελεγχθεί (βλ. άσκηση 2.4).

Η αφηρημένη προσέγγιση μιας θεωρίας έχει ιδιαίτερη αξία ακριβώς όταν διακρίνουμε την ύπαρξη τής εξεταζομένης δομής σε μια ευρεία κλάση ενδιαφερόντων παραδειγμάτων. Έχοντας ως αφετηρία μας τα αξιώματα (τού ορισμού) τής ομάδας θα αναπτύξουμε σταδιακά ένα ολόκληρο πλαίσιο για τη δρομολόγηση πληθώρας θεωρητικών αποτελεσμάτων, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάθε φορά που τα αξιώματα αυτά ικανοποιούνται, οδηγούμενοι κατ' αυτόν τον τρόπο σε μια κατάσταση σαφώς προτιμότερη από το να έπρεπε να επαληθεύουμε μια συγκεκριμένη ιδιότητα ξανά και ξανά, ήτοι χωριστά για διαφορετικές ομάδες.

Στο σημείο αυτό θα περιγράψουμε δύο ιδιότητες, οι οποίες είναι κοινές για *όλες* τις ομάδες.

(2.1) Πρόταση. *Το μοναδιαίο στοιχείο μιας ομάδας είναι μονοσημάντως ορισμένο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι αμφότερα τα στοιχεία e και e' είναι μοναδιαία. Τότε $ee' = e'$, επειδή το e είναι μοναδιαίο, και $ee' = e$, επειδή το e' είναι μοναδιαίο. Άρα τελικώς $e = e'$. □

(2.2) Πρόταση. *Το αντίστροφο καθενός στοιχείου μιας ομάδας είναι μονοσημάντως ορισμένο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι αμφότερα τα y και z είναι αντίστροφα ενός στοιχείου x. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} y &= ey && \text{(όπου το } e \text{ είναι το μοναδιαίο στοιχείο τής ομάδας)} \\ &= (zx)y && \text{(επειδή το } z \text{ είναι αντίστροφο τού } x\text{)} \\ &= z(xy) && \text{(διότι ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός)} \\ &= ze && \text{(επειδή το } y \text{ είναι και αυτό αντίστροφο τού } x\text{)} \\ &= z && \text{(διότι το } e \text{ είναι το μοναδιαίο στοιχείο τής ομάδας).} \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, το αντίστροφο τού x είναι μονοσημάντως ορισμένο. □

Σημειωτέον ότι και οι δύο αυτές προτάσεις χρησιμοποιούν μόνον εκείνες τις ιδιότητες μιας ομάδας, οι οποίες υπεισέρχονται στα αξιώματα τού ορισμού της. Γι' αυτόν τον λόγο, μπορούμε να είμαστε απολύτως βέβαιοι ότι τα ανωτέρω αποτελέσματα τίθενται σε ισχύ για *οιαδήποτε* ομάδα.

Στα αμέσως επόμενα κεφάλαια θα ξεκινήσουμε να παρουσιάζουμε κάποια πρώτα θεωρητικά αποτελέσματα παραπλεύρως συγκεκριμένων παραδειγμάτων ομάδων. Θυμηθείτε: *τα παραδείγματα είναι σημαντικά*· χωρίς αυτά, η θεωρία θα κατέληγε -στην καλύτερη των περιπτώσεων- να είναι μια ενδεής μορφή διανοητικής ψυχαγωγίας.

Ασκήσεις

2.1 Συγκρίνετε τη συμμετρία ενός χιονοκρυστάλλου με εκείνην τής εξαγωνικής πλάκας τού σχήματος 1.2.

2.2 Δείξτε ότι το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών σχηματίζει μια ομάδα ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού.

2.3 Ποιες από τις ακόλουθες συλλογές 2×2 πινάκων (με πραγματικούς αριθμούς ως εγγραφές τους) σχηματίζουν μια ομάδα ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού;

(i) Εκείνη με στοιχεία τής μορφής $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ για τα οποία $ac \neq b^2$.

(ii) Εκείνη με στοιχεία τής μορφής $\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$ για τα οποία $a^2 \neq bc$.

(iii) Εκείνη με στοιχεία τής μορφής $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ για τα οποία $ac \neq 0$.

(iv) Τέλος, εκείνη, τα στοιχεία τής οποίας διαθέτουν ορίζουσα διάφορη τού μηδενός και ακεραίους αριθμούς ως εγγραφές τους.

2.4 Έστω f μια ομοιότητα τού επιπέδου. Δείξτε ότι η f είναι μια αμφίρριψη και ότι η αντίστροφη συνάρτησή της f^{-1} είναι και αυτή μια ομοιότητα. Κατόπιν επαληθεύστε το ότι η συλλογή όλων των ομοιοτήτων τού επιπέδου σχηματίζει μια ομάδα ως προς την πράξη τής σύνθεσης συναρτήσεων.

2.5 Μια συνάρτηση από το επίπεδο στον εαυτό του, η οποία διατηρεί την απόσταση μεταξύ δύο οιωνδήποτε σημείων, καλείται **ισομετρία.** Αποδείξτε πως κάθε ισομετρία οφείλει να είναι αμφιρριπτική και επιβεβαιώστε το ότι η συλλογή όλων των ισομετριών τού επιπέδου σχηματίζει μια ομάδα ως προς την πράξη τής σύνθεσης συναρτήσεων.

2.6 Δείξτε πως η συλλογή όλων των στροφών τού επιπέδου γύρω από ένα παγιωμένο σημείο P συγκροτεί μια ομάδα ως προς την πράξη τής σύνθεσης συναρτήσεων. Ισχύει το ίδιο και για το σύνολο όλων των κατοπτρισμών ως προς ευθείες οι οποίες διέρχονται από το P; Τι συμβαίνει όταν θεωρήσουμε από κοινού όλες τις στροφές και όλους τους κατοπτρισμούς;

2.7 Έστω ότι τα x και y είναι στοιχεία μιας ομάδας G. Αποδείξτε ότι η G περιέχει κάποια στοιχεία w και z, τα οποία ικανοποιούν τις $wx = y$ και $xz = y$, και δείξτε ότι αυτά τα w και z είναι μονοσημάντως ορισμένα (ως προς την εν λόγω ιδιότητα).

2.8 Εάν τα x και y είναι στοιχεία μιας ομάδας, αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Αριθμοί

Πιθανώς ο πλέον πρόσφορος τρόπος για να έλθει κανείς σε μια πρώτη επαφή με τα «αξιώματα» τής ομάδας είναι να προσφύγει σε ομάδες αριθμών. Οι δύο κατάλογοι που ακολουθούν περιλαμβάνουν τέτοια παραδείγματα και εισάγουν χρήσιμους συμβολισμούς.

Η **συνήθης πρόσθεση** αριθμών (πραγματικών ή μιγαδικών) καθιστά καθένα των ακολούθων συνόλων μια ομάδα.

Σύνολο	**Συμβολισμός**
των ακεραίων αριθμών	$\mathbb{Z}$
των ρητών αριθμών	$\mathbb{Q}$
των πραγματικών αριθμών	$\mathbb{R}$
των μιγαδικών αριθμών	$\mathbb{C}$

Εδώ, το μηδέν είναι το ταυτοτικό (ή «ουδέτερο») στοιχείο, ενώ το $-x$ είναι το αντίστροφο (ή «αντίθετο») στοιχείο τού αριθμού x.

Επιπροσθέτως, **ο συνήθης πολλαπλασιασμός** αριθμών (πραγματικών ή μιγαδικών) καθιστά καθένα των ακολούθων συνόλων μία ομάδα.

Σύνολο	**Συμβολισμός**
των ρητών αριθμών πλην τού μηδενός	$\mathbb{Q}\smallsetminus\{0\}$
των πραγματικών αριθμών πλην τού μηδενός	$\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$
των θετικών ρητών αριθμών	$\mathbb{Q}_{>0}$
των θετικών πραγματικών αριθμών	$\mathbb{R}_{>0}$
$\{1,-1\}$	$\{\pm 1\}$
των μιγαδικών αριθμών πλην τού μηδενός	$\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$
των μιγαδικών αριθμών απολύτου τιμής 1	C
$\{1,-1,i,-i\}$, όπου i η φανταστική μονάδα	$\{\pm 1, \pm i\}$

Εδώ, το 1 είναι το ταυτοτικό (ή «μοναδιαίο») στοιχείο, ενώ το $\frac{1}{x}$ είναι το αντίστροφο τού αριθμού x.

Αξίζει να εξετάσουμε αυτούς τους καταλόγους κατά τι λεπτομερέστερα, τόσο σε σχέση με το τι περιέχουν όσο και σε σχέση με το τι τους λείπει. Η πρόσθεση δύο ακεραίων μάς δίνει έναν ακέραιο. Αυτό είναι το πρώτο πράγμα που πρέπει να παρατηρήσουμε για την επιβεβαίωση τού ότι οι ακέραιοι σχηματίζουν μια ομάδα ως προς την πρόσθεση. Εάν, για παράδειγμα, θεωρούσαμε -αντί των ακεραίων- μόνον τους περιττούς ακεραίους ως σύνολο αναφοράς μας (αλλά και πάλι εφοδιασμένους με την πράξη τής πρόσθεσης), τότε αυτό που θα προέκυπτε δεν θα μπορούσε να είναι μια ομάδα, καθότι το άθροισμα δύο περιττών ακεραίων είναι ένας άρτιος ακέραιος.

Ερχόμενοι τώρα στην εξέταση τού συνήθους πολλαπλασιασμού αριθμών ως πράξης, πρέπει να απομακρύνουμε το μηδέν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών εάν επιθυμούμε τον σχηματισμό μιας ομάδας. Φυσικά, δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x για τον οποίο να ισχύει $x \cdot 0 = 1$. Συνεπώς το μηδέν δεν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι οι -διάφοροι τού μηδενός- ρητοί, πραγματικοί και μιγαδικοί αριθμοί συγκροτούν ομάδες ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού. Τι συμβαίνει όμως με τους -διάφορους τού μηδενός- ακεραίους; Ο πολλαπλασιασμός δεν μπορεί να τους καταστήσει ομάδα, διότι π.χ. ο μόνος αριθμός x ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση $2 \cdot x = 1$ είναι ο $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Επομένως, το 2 δεν διαθέτει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο που να ανήκει στο $\mathbb{Z}$.

Χρησιμοποιούμε το C για να συμβολίζουμε τον μοναδιαίο κύκλο τού μιγαδικού επιπέδου, ήτοι

$$C = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}.$$

Εάν $z, w \in C$, τότε $|zw| = |z|\,|w| = 1$, οπότε $zw \in C$. Ο αριθμός 1 ανήκει στον C και αποτελεί το μοναδιαίο στοιχείο για την πράξη τού πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών. Τέλος, εάν $z \in C$, τότε $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1$, οπότε $\frac{1}{z} \in C$, κι επομένως κάθε στοιχείο τού C έχει ένα πολλαπλασιαστικό αντίστροφο που ανήκει στον C. Ως εκ τούτου, ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών καθιστά τον C μία ομάδα. Δεν κάναμε κανένα σχόλιο περί τής προσεταιριστικής ιδιότητας, αλλά, εάν (ευλόγως) αποδεχθούμε ότι αυτή ισχύει για τον πολλαπλασιασμό τριών τυχόντων μιγαδικών αριθμών, τότε κατ' ουσίαν θα ισχύει και για τρεις τυχόντες αριθμούς ειλημμένους από τον C.

Εάν επιθυμούσαμε να είμαστε απολύτως αυστηροί με τους συμβολισμούς μας, τότε θα έπρεπε να χρησιμοποιούμε π.χ. συμβολισμούς τής μορφής $(\mathbb{R}, +)$ για να εκφράσουμε την προσθετική ομάδα των πραγματικών αριθμών, προκειμένου να καθίσταται εντελώς σαφές ότι το υποκείμενο σύνολό μας είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών και ότι η πράξη τής ομάδας μας είναι η συνήθης πρόσθεση. Ωστόσο, από πρακτική άποψη, το να εργαζόμαστε με τόσο δυσκίνητους συμβολισμούς θα μας ήταν κάτι το πολύ φορτικό· έτσι, θα συμφωνήσουμε στο να συμβολίζουμε με το $\mathbb{R}$ τόσο το *σύνολο* των πραγματικών αριθμών όσο και την *ομάδα* των πραγματικών αριθμών με πράξη της τη συνήθη πρόσθεση. Τις περισσότερες φορές θα είναι απολύτως πρόδηλο από τα συμφραζόμενα το τι ακριβώς εννοούμε (κατά περίπτωση). Ανάλογες συμβάσεις θα συναφθούν και για τα λοιπά σύμβολα των δύο προηγηθέντων καταλόγων μας.

Το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι ένα υποσύνολο τού συνόλου των πραγματικών αριθμών, ενώ *και τα δύο* αυτά σύνολα αποτελούν ομάδες ως προς τη συνήθη πρόσθεση. Γι' αυτό λοιπόν λέμε, ιδιαιτέρως, πως η ομάδα $\mathbb{Z}$ είναι μια «υποομάδα» τής $\mathbb{R}$. Με την έννοια αυτή θα ασχοληθούμε περαιτέρω σε κατοπινά κεφάλαια, αρχής γενομένης από το κεφάλαιο 5.

Μια ομάδα λέγεται **μεταθετική** ή **αβελιανή ομάδα** (ή **ομάδα τού Abel**) όταν

$$xy = yx$$

για οιαδήποτε στοιχεία της x, y. Οι ομάδες σε όλα τα παραδείγματα των δύο προηγηθέντων καταλόγων μας είναι αβελιανές, διότι προφανώς ισχύει

$$x + y = y + x, \qquad x \cdot y = y \cdot x$$

για οιουσδήποτε πραγματικούς ή μιγαδικούς αριθμούς x, y.

Έστω n ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Το σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ μπορεί να καταστεί μία ομάδα μέσω τής πράξης τής **πρόσθεσης κατά μόδιο** n. Εάν τα x και y είναι δύο στοιχεία τού ως άνω συνόλου, τότε η πράξη αυτή «$+_n$» ορίζεται ως εξής:

$$x +_n y = \begin{cases} x+y, & \text{όταν } 0 \leq x+y < n, \\ x+y-n, & \text{όταν } \ x+y \geq n. \end{cases}$$

Για παράδειγμα, $5 +_6 3 = 8 - 6 = 2$. (Η μέτρηση κατά κάποιο προκαθορισμένο μόδιο είναι μια αρκετά οικεία έννοια. Θυμηθείτε π.χ. το πώς προσθέτει κανείς δύο γωνίες κατά μόδιο 2π). Η επαλήθευση των αξιωμάτων τής ομάδας είναι εύκολη. Το άθροισμα $x +_n y$ ανήκει προφανώς στο $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Εξάλλου, τόσο το $(x +_n y) +_n z$ όσο και το $x +_n (y +_n z)$ ισούται με

$$\begin{cases} x+y+z, & \text{όταν } 0 \leq x+y+z < n, \\ x+y+z-n, & \text{όταν } n \leq x+y+z < 2n, \\ x+y+z-2n, & \text{όταν } x+y+z \geq 2n, \end{cases}$$

απ' όπου έπεται η προσεταιριστική ιδιότητα. Το μηδέν αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο τής «$+_n$» και το $n - x$ το αντίστροφο (αντίθετο) τού x, όταν $x \neq 0$. Η εν λόγω ομάδα είναι πεπερασμένη και αβελιανή, καθότι

$$x +_n y = y +_n x,$$

και θα συμβολίζεται εφεξής ως $\mathbb{Z}_n$.

Λέμε πως δύο ακέραιοι αριθμοί είναι **ισότιμοι κατά μόδιο** n όταν η διαφορά τους ισούται με ένα πολλαπλάσιο τού n. Φυσικά, κάθε ακέραιος αριθμός x είναι ισότιμος κατά μόδιο n με έναν από τους ακεραίους $0, 1, 2, \ldots, n-1$, ήτοι με το υπόλοιπο που παίρνουμε όταν διαιρούμε τον x με τον n. Θα συμβολίζουμε από εδώ και στο εξής αυτό το υπόλοιπο ως $x \pmod{n}$. Προφανώς,

$$x +_n y = (x+y) \pmod{n}.$$

Εξάλλου, είναι δυνατόν *και* να πολλαπλασιάσουμε τους ακεραίους $0, 1, 2, \ldots,$ $n-1$ κατά μόδιο n, θέτοντας

$$x \cdot_n y = xy \pmod{n}.$$

Για παράδειγμα, $5 \cdot_6 3 = 3$, διότι η διαίρεση τού δεκαπέντε με το έξι μάς δίνει υπόλοιπο ίσο με τρία. Μπορούμε να σχηματίσουμε μια ομάδα χρησιμοποιώντας αυτό το είδος πολλαπλασιασμού; Κατ' αρχάς, ως είθισται, πρέπει να απομακρύνουμε από το σύνολό μας το μηδέν. Αλλά τούτο δεν είναι αρκετό. Εάν $n = 10$, τότε $2 \cdot_{10} 5 = 0$, οπότε ο πολλαπλασιασμός κατά μόδιο 10 δύο αριθμών που ανήκουν στο $\{1, 2, \ldots, 9\}$ δεν μας δίνει έναν άλλον ακέραιο μεταξύ τού 1 και τού 9. Ως εκ τούτου, δεν μπορούμε να σχηματίσουμε μια ομάδα. Στην πραγματικότητα, ο πολλαπλασιασμός κατά μόδιο n καθιστά το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ μια ομάδα *μόνον* *όταν* ο n είναι ένας *πρώτος* αριθμός. Επίσης, απλός πειραματισμός μάς δείχνει ότι το σύνολο $\{1, 3, 7, 9\}$ (το οποίο σχηματίζεται ύστερα από απομάκρυνση των $0, 2, 4, 5, 6, 8$ από το $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$) είναι εφοδιασμένο με τη δομή τής ομάδας ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού κατά μόδιο 10. Μήπως αυτό το γεγονός υποδεικνύει την ύπαρξη ενός γενικότερου θεωρητικού αποτελέσματος; (Η απάντηση βρίσκεται στο κεφάλαιο 11.)

Ασκήσεις

3.1 Δείξτε ότι καθεμιά των ακολούθων συλλογών αριθμών είναι εφοδιασμένη με τη δομή τής ομάδας ως προς την πράξη τής πρόσθεσης.

(i) Οι άρτιοι ακέραιοι αριθμοί.

(ii) Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί τής μορφής $a + b\sqrt{2}$, όπου $a, b \in \mathbb{Z}$.

(iii) Όλοι οι πραγματικοί αριθμοί τής μορφής $a + b\sqrt{2}$, όπου $a, b \in \mathbb{Q}$.

(iv) Όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί τής μορφής $a + bi$, όπου $a, b \in \mathbb{Z}$.

3.2 Συμβολίστε ως $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ το σύνολο που περιγράψαμε στην άσκηση 3.1 (iii). Δοθέντος ενός μη μηδενικού στοιχείου $a + b\sqrt{2}$ τού $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ εκφράστε τό κλάσμα $\frac{1}{a+b\sqrt{2}}$ υπό τη μορφή $c + d\sqrt{2}$, όπου $c, d \in \mathbb{Q}$. Κατόπιν, αποδείξτε ότι ο πολλαπλασιασμός καθιστά το σύνολο $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \smallsetminus \{0\}$ μια ομάδα.

3.3 Έστω n ένας θετικός ακέραιος αριθμός και έστω G το σύνολο όλων εκείνων των μιγαδικών αριθμών z, οι οποίοι ικανοποιούν την ισότητα $z^n = 1$. Δείξτε ότι το G σχηματίζει μια ομάδα ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών.

3.4 Μεταβάλλοντας τον n στην προηγούμενη άσκηση δείξτε ότι *και* η ένωση

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\, z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

όλων αυτών των ομάδων αποτελεί μια ομάδα ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών.

3.5 Έστω n ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Αποδείξτε ότι

$$(x \cdot_n y) \cdot_n z = x \cdot_n (y \cdot_n z)$$

για όλους τους $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

3.6 Επαληθεύστε ότι καθένα των συνόλων

$$\begin{array}{l}\{1,3,7,9,11,13,17,19\}\\ \{1,3,7,9\}\\ \{1,9,13,17\}\end{array}$$

σχηματίζει μια ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό κατά μόδιο 20.

3.7 Ποια από τα ακόλουθα σύνολα σχηματίζουν μια ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό κατά μόδιο 14;

$$\begin{array}{ll}\{1,3,5\}, & \{1,3,5,7\},\\ \{1,7,13\}, & \{1,9,11,13\}.\end{array}$$

3.8 Δείξτε ότι, όταν ένα υποσύνολο τού $\{1,2,\ldots,20,21\}$ περιέχει είτε έναν άρτιο αριθμό είτε τον αριθμό 11, τότε αυτό δεν μπορεί να σχηματίσει μια ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό κατά μόδιο 22.

3.9 Έστω p ένας πρώτος αριθμός και x ένας ακέραιος αριθμός, για τον οποίον ισχύει: $1 \leq x \leq p-1$. Δείξτε ότι κανείς εκ των $x, 2x, \ldots, (p-1)x$ δεν αποτελεί ένα πολλαπλάσιο τού p. Συναγάγετε την ύπαρξη ενός ακεραίου z, για τον οποίον ισχύει:

$$1 \leq x \leq p-1 \quad \text{και} \quad xz(\text{mod}\, p) = 1.$$

3.10 Χρησιμοποιήστε τα αποτελέσματα των ασκήσεων 3.5 και 3.9 προκειμένου να διαπιστώσετε ότι ο πολλαπλασιασμός κατά μόδιο n καθιστά το σύνολο $\{1,2,\ldots,n-1\}$ ομάδα όταν ο n είναι ένας πρώτος αριθμός. Ποια ιδιότητα τίθεται εκτός ισχύος όταν ο n δεν είναι ένας πρώτος αριθμός;

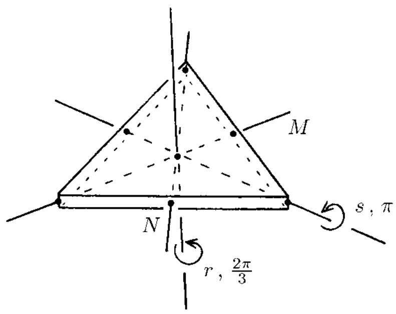
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Οι διεδρικές ομάδες

Ας επανέλθουμε στην ισόπεδη εξαγωνική πλάκα στην οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως (στο κεφάλαιο 1). Οι δώδεκα περιστροφικές της συμμετρίες συνδυάζονται κατά έναν φυσικό τρόπο, ούτως ώστε να προκύπτει ο σχηματισμός μιας ομάδας. Για κάθε ακέραιο αριθμό $n \geq 3$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μια πλάκα με n ισομήκεις πλευρές. Έτσι, δημιουργούμε μια οικογένεια μη μεταθετικών ομάδων συμμετρίας, οι οποίες καλούνται **διεδρικές ομάδες**.

Όταν $n = 3$, τότε έχουμε μια τριγωνική πλάκα. Αυτή διαθέτει έξι περιστροφικές συμμετρίες. Εάν οι r και s είναι οι περιστροφές που δείχνονται στο σχήμα 4.1, τότε οι εν λόγω έξι συμμετρίες είναι οι εξής:

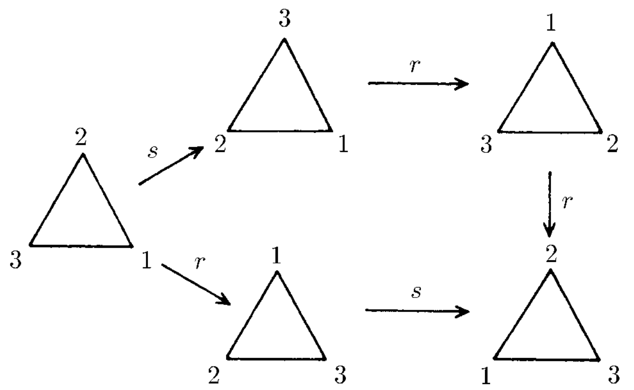
$$e, r, r^2, s, rs, r^2s. \qquad (*)$$



Σχήμα 4.1

Εν προκειμένω, το r^2 αποτελεί μια συμβολιστική συντόμευση για το γινόμενο rr, που σημαίνει ότι εφαρμόζουμε την r δύο φορές. Προφανώς, το r^3 είναι η ταυτοτική συμμετρία, επειδή η τριπλή εφαρμογή τής r μάς δίνει μια πλήρη στροφή κατά 2π, ενώ οι υψηλότερες δυνάμεις τής r δεν μας δίνουν κάτι το καινούργιο. Φυσικά, η s^2 ισούται και αυτή με την ταυτοτική συμμετρία. Θυμηθείτε ότι μέσω τού γινομένου rs εννοούμε τη συμμετρία που αποκτούμε όταν προηγείται η εφαρμογή τής s (στο τρίγωνο) και έπεται η εφαρμογή τής r. Το σχήμα 4.1 δείχνει ότι η rs είναι η κατά π στροφή περί τον άξονα συμμετρίας τον επιγραφόμενο ως M. Παρομοίως, η r^2s είναι η κατά π στροφή περί τον άξονα N.

Τα έξι στοιχεία $(*)$ σχηματίζουν μια ομάδα, την οποία συμβολίζουμε ως D_3. Εάν θεωρήσουμε δύο εξ αυτών και τα συνδυάσουμε (με τυχούσα διάταξη), θα πρέπει -σε κάθε περίπτωση- να αποκομίσουμε ένα στοιχείο τής ομάδας. Το στοιχείο rs βρίσκεται στον κατάλογό μας. Αλλά πού είναι το sr; Και πάλι το σχήμα 4.2 δείχνει ότι αυτό ισούται με το r^2s. Παρομοίως, $sr^2 = rs$.



Σχήμα 4.2

Η ανωτέρω ισότητα μπορεί να αποδειχθεί είτε γεωμετρικώς είτε αλγεβρικώς ως εξής:

$$\begin{aligned} sr^2 &= s(rr) = (sr)r = (r^2s)r = r^2(sr) \\ &= r^2(r^2s) = r^4s = r^3(rs) = e(rs) \\ &= rs. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε εδώ την κατ' επανάληψιν χρήση τής προσεταιριστικής ιδιότητας. Οι υπολογισμοί μας έγιναν σε αρκετά βήματα, αλλά, εάν κάποιος είναι κατά τι πιο εξοικειωμένος με τα δεδομένα, τότε μπορεί να τα περιορίσει. Σκοπός μας είναι να εξηγήσουμε ότι από μόνη της η γνώση τής ισχύος των ισοτήτων $r^3 = e$, $s^2 = e$ και $sr = r^2s$ μας επιτρέπει να χειριζόμαστε καταλλήλως κάθε γινόμενο συμμετριών, ούτως ώστε να καταλήγουμε γρήγορα σε ένα από τα έξι στοιχεία $(*)$. Ας δούμε άλλα δύο παραδείγματα:

$$\begin{aligned} r(r^2s) &= r^3s = es = s, \\ (r^2s)(rs) &= r^2(s(rs)) = r^2((sr)s = r^2((r^2s)s) \\ &= r^2(r^2s^2) = r^4s^2 = re = r. \end{aligned}$$

Το πρώτο βήμα τού προηγηθέντος υπολογισμού θα μπορούσε να ήταν το $(r^2s)(rs) = ((r^2s)r)s$. Αλλά για καλή μας τύχη, ακόμη και τότε, το τελικό αποτέλεσμα θα παρέμενε το ίδιο. Ουσιαστικώς, ένα γινόμενο όπως το r^2srs *δεν* εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο θέτουμε παρενθέσεις στους όρους του. Γενικότερα, *εάν τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι στοιχεία μιας ομάδας, τότε δύο οιοιδήποτε τρόποι σχηματισμού γινομένου αυτών των στοιχείων (που τηρούν τη διάταξη των δεικτών) καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα·* με άλλα λόγια, το γινόμενο των $x_1, x_2, \ldots, x_n$ έχει νόημα ακόμη και όταν δεν παρεμβάλλονται παρενθέσεις. Μια επαγωγική απόδειξη αυτής τής ιδιότητας σκιαγραφείται στην άσκηση 4.10. Το επαγωγικό βήμα κάνει χρήση τής συνήθους προσεταιριστικότητας.

Έτσι, οι εκάστοτε υπολογισμοί μας μπορούν να εκτελούνται χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία· για παράδειγμα,

$$xyy^{-1}x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e,$$

και -παρομοίως- $y^{-1}x^{-1}xy = e$. Επομένως, παίρνουμε την εξής:

(4.1) Πρόταση. *Εάν τα x και y είναι στοιχεία μιας ομάδας, τότε*

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

Γενικότερα, εάν τα x_1, x_2, …, x_n είναι στοιχεία μιας ομάδας, τότε έχουμε

$$(x_1\, x_2 \, \cdots \, x_n)^{-1} = x_n^{-1} \, \cdots \, x_2^{-1}\, x_1^{-1}.$$

Εάν ο m είναι ένας ακέραιος αριθμός και το x ένα στοιχείο μιας ομάδας, τότε ορίζουμε ως

$$x^m = \begin{cases} \underbrace{x\,x\,\cdots\,x}_{m \text{ φορές}}, & \text{όταν } m > 0 \\ e, & \text{όταν } m = 0 \\ \underbrace{x^{-1}\,x^{-1}\,\cdots\,x^{-1}}_{-m \text{ φορές}}, & \text{όταν } m < 0 \end{cases}$$

Σημειωτέον ότι

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}$$

για τυχόντες ακεραίους m και n.

Ο ακόλουθος κατάλογος, ο οποίος καλείται *πολλαπλασιαστικός κατάλογος*, μας παρέχει τα 36 δυνατά γινόμενα xy διατεταγμένων ζευγών (x, y) δυο στοιχείων x, y τής ομάδας D_3.

	e	r	r^2	s	rs	r^2s
e	e	r	r^2	s	rs	r^2s
r	r	r^2	e	rs	r^2s	s
r^2	r^2	e	r	r^2s	s	rs
s	s	r^2s	rs	e	$\boxed{r^2}$	r
rs	rs	s	r^2s	r	e	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^2	r	e

Το γινόμενο xy εντοπίζεται στην τομή τής γραμμής τού x και τής στήλης τού y. Για παράδειγμα, το στοιχείο που βάλαμε σε κουτάκι είναι το $s(rs)$. Παρατηρήστε ότι κάθε στοιχείο τής ομάδας εμφανίζεται μόνο μία φορά σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη τού καταλόγου. Αυτό ισχύει για τον πολλαπλασιαστικό κατάλογο οιασδήποτε ομάδας (βλ. άσκηση 4.4). Ιδιαιτέρως, το μοναδιαίο στοιχείο τής ομάδας εμφανίζεται μόνο μία φορά σε κάθε γραμμή, γεγονός το οποίο οφείλεται στο ότι κάθε στοιχείο τής ομάδας διαθέτει ένα μονοσημάντως ορισμένο αντίστροφο.

Η **διεδρική ομάδα** D_n είναι η ομάδα περιστροφικών συμμετριών μιας ισόπεδης πλάκας με n ισομήκεις πλευρές. Τα στοιχεία της είναι δυνατόν να περιγραφούν με τρόπο ανάλογο εκείνου, με τον οποίον περιγράψαμε τα στοιχεία τής D_3. Έστω r η κατά $\frac{2\pi}{n}$ στροφή τής πλάκας περί τον άξονα συμμετρίας, ο οποίος είναι κάθετος προς την πλάκα, και έστω s η κατά π στροφή περί τον άξονα συμμετρίας, ο οποίος κείται επί τού επιπέδου τής πλάκας. Τότε τα στοιχεία τής D_n είναι τα εξής:

$$e, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, rs, r^2s, \ldots, r^{n-1}s.$$

Προφανώς, $r^n = s^2 = e$, ενώ γεωμετρικώς διαπιστώνουμε ότι ισχύει $sr = r^{n-1}s$. Επειδή $r^{n-1} = r^{-1}$, η σχέση αυτή γράφεται συνήθως υπό τη μορφή $sr = r^{-1}s$. Όπως και προηγουμένως, τα υπολειπόμενα γινόμενα μπορούν να μελετηθούν λεπτομερώς κάνοντας χρήση μόνον αυτών των τριών σχέσεων. Για παράδειγμα,

$$sr^2 = srr = r^{-1}sr = r^{-2}s = r^{n-2}s.$$

Κάθε στοιχείο τής ομάδας είναι τής μορφής r^a ή $r^a s$, όπου ο a είναι ένας ακέραιος για τον οποίο ισχύει $0 \leq a \leq n-1$. Επιπλέον, βρίσκουμε τις σχέσεις

$$\left.\begin{aligned} r^a r^b &= r^k \\ r^a \left(r^b s\right) &= r^k s \end{aligned}\right\} \quad \text{όπου } k = a +_n b$$

$$\left.\begin{aligned} \left(r^a s\right) r^b &= r^l s \\ \left(r^a s\right)\left(r^b s\right) &= r^l \end{aligned}\right\} \quad \text{όπου } l = a +_n (n-b)$$

Εν προκειμένω, λέμε ότι τα στοιχεία r και s αποτελούν «γεννήτορες» τής ομάδας D_n. (Η έννοια των γεννητόρων μιας ομάδας αναπτύσσεται στο κεφάλαιο 5).

Η **τάξη** μιας πεπερασμένης ομάδας είναι το πλήθος των στοιχείων της. Ομάδες οι οποίες περιέχουν απείρου πλήθους στοιχεία ονομάζονται **ομάδες με άπειρη τάξη**. Συχνά θα συμβολίζουμε την τάξη μιας ομάδας G ως $|G|$. Εάν το x είναι ένα στοιχείο μιας ομάδας και $x^n = e$ για κάποιον θετικό ακέραιο αριθμό n, τότε θα λέμε πως **το x είναι πεπερασμένης τάξης**, ονομάζοντας **τάξη τού x** τον ελάχιστο θετικό ακέραιο αριθμό m, για τον οποίον ισχύει $x^m = e$. Ειδάλλως, θα λέμε πως **το x έχει άπειρη τάξη**.

(4.2) Παραδείγματα. (i) Η τάξη τής D_3 ισούται με έξι. Υπάρχουν δύο στοιχεία τάξης 3 (ήτοι τα r, r^2) και τρία στοιχεία τάξης 2 (ήτοι τα $s, rs, r^2 s$).

(ii) Η τάξη τής $\mathbb{Z}_6$ ισούται επίσης με έξι. Τα στοιχεία 1 και 5 έχουν τάξη 6, τα 2 και 4 έχουν τάξη 3, ενώ το 3 έχει τάξη 2.

(iii) Η $\mathbb{R}$ έχει άπειρη τάξη και κάθε στοιχείο της -πλην τού μηδενός- έχει άπειρη τάξη, διότι η επαναλαμβανόμενη πρόσθεση ενός πραγματικού αριθμού με τον εαυτό του δεν δίνει ποτέ το μηδέν, με μόνη εξαίρεση την περίπτωση κατά την οποία ο αριθμός αυτός ισούται με το μηδέν.

(iv) Όπως προαναφέραμε, ο μοναδιαίος κύκλος C στο μιγαδικό επίπεδο καθίσταται μια ομάδα ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών. Πρόκειται για μια άπειρη ομάδα, η οποία διαθέτει όχι μόνο στοιχεία άπειρης αλλά και στοιχεία πεπερασμένης τάξης. Ένα τυπικό στοιχείο της $e^{i\theta}$ έχει πεπερασμένη τάξη εάν και μόνον εάν το θ είναι ένα ρητό πολλαπλάσιο τού 2π, δηλαδή εάν και μόνον εάν $\theta = \frac{2\pi m}{n}$, για κάποιους αριθμούς $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$.

Ασκήσεις

4.1 Μελετήστε λεπτομερώς τον πολλαπλασιαστικό κατάλογο τής διεδρικής ομάδας D_4. Πόσα στοιχεία τάξης 2 υπάρχουν εντός τής D_4;

4.2 Βρείτε την τάξη καθενός των στοιχείων των ομάδων $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_9$ και $\mathbb{Z}_{12}$.

4.3 Βεβαιωθείτε για το ότι οι ακέραιοι αριθμοί $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13$ και 14 συγκροτούν μια ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό κατά μόδιο 15. Μελετήστε λεπτομερώς τον πολλαπλασιαστικό κατάλογο αυτής τής ομάδας και προσδιορίστε την τάξη καθενός των στοιχείων της.

4.4 Έστω g ένα στοιχείο μιας ομάδας G. Διατηρήστε αυτό το g παγιωμένο και αποδείξτε πως όλα τα γινόμενα $\{gx \mid x \in G\}$ είναι σαφώς διακεκριμένα, ενώ η ένωσή τους μας δίνει την ίδια την G. Κατόπιν αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και για τα γινόμενα $\{xg \mid x \in G\}$.

4.5 Ένα στοιχείο x μιας ομάδας ικανοποιεί την $x^2 = e$ εάν και μόνον εάν ισχύει $x = x^{-1}$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ιδιότητα αποδείξτε ότι κάθε ομάδα, η οποία έχει ως τάξη της έναν άρτιο αριθμό, οφείλει να περιέχει περιττού πλήθους στοιχεία τάξης 2.

4.6 Εάν τα x και y είναι στοιχεία μιας ομάδας G και εάν υποτεθεί ότι τα x, y, xy έχουν τάξη ίση με 2, να αποδείξετε ότι $xy = yx$.

4.7 Έστω G η συλλογή όλων εκείνων των ρητών αριθμών x, για τους οποίους ισχύει $0 \leq x < 1$. Δείξτε ότι μέσω τής πράξης

$$x + y = \begin{cases} x + y, & \text{όταν } 0 \leq x + y < 1 \\ x + y - 1, & \text{όταν } x + y \geq 1 \end{cases}$$

η G καθίσταται μια άπειρη αβελιανή ομάδα, κάθε στοιχείο της οποίας έχει πεπερασμένη τάξη.

4.8 Έστω ότι τα x και g είναι στοιχεία μιας ομάδας G. Δείξτε ότι τα x και gxg^{-1} έχουν την ίδια τάξη. Κατόπιν αποδείξτε ότι τα xy και yx έχουν την ίδια τάξη για οιαδήποτε στοιχεία x, y τής G.

4.9 Βεβαιωθείτε για το ότι οι 2×2 πίνακες

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

για τους οποίους $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ και $ad - bc = 1$, σχηματίζουν μια ομάδα ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού πινάκων. Εάν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

τότε να προσδιορίσετε τις τάξεις των A, B, AB, BA εντός αυτής τής ομάδας.

4.10 *Γενικός προσεταιριστικός νόμος*. Έστω G μια ομάδα. Ας υποθέσουμε επαγωγικώς ότι τα γινόμενα $x_1 x_2 \cdots x_k$ στοιχείων τής G έχουν νόημα χωρίς την παρέμβαση οιωνδήποτε παρενθέσεων όταν $1 \leq k \leq n-1$. Πρέπει να επαληθεύσουμε ότι *και* τυχόντα γινόμενα $x_1 x_2 \cdots x_n$ με πλήθος παραγόντων ίσο με n είναι *καλώς ορισμένα*, ανεξαρτήτως τού τρόπου με τον οποίο θα θέσουμε τις παρενθέσεις στους εκάστοτε όρους. Ας υποθέσουμε ότι συνδυάζουμε τα στοιχεία αυτού τού είδους κατά δύο διαφορετικούς τρόπους και ότι οι τελικοί πολλαπλασιασμοί στις δύο αυτές διαδικασίες χειρισμού τής πράξης είναι οι εξής:

$$(x_1 x_2 \cdots x_r)\,(x_{r+1} \cdots x_n)\,, \tag{1}$$

$$(x_1 x_2 \cdots x_s)\,(x_{s+1} \cdots x_n)\,, \tag{2}$$

όπου $1 \leq r < s \leq n-1$. Οι όροι οι ευρισκόμενοι εντός των παρενθέσεων έχουν προφανώς νόημα κατά την επαγωγική μας υπόθεση. Γράψτε τήν (1) ως

$$(x_1 x_2 \cdots x_r)\,[(x_{r+1} \cdots x_s)\,(x_{s+1} \cdots x_n)]\,,$$

εκφράστε τήν (2) παρομοίως και κάνετε χρήση τού συνήθους προσεταιριστικού νόμου, ο οποίος ισχύει για τρία στοιχεία, προκειμένου να ολοκληρώσετε την αποδεικτική επιχειρηματολογία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Υποομάδες και γεννήτορες

Τα έξι στοιχεία

$$e, r^2, r^4, s, r^2 s, r^4 s$$

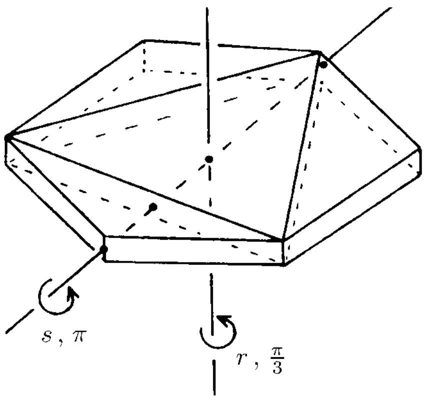
τής ομάδας D_6 σχηματίζουν αφ' εαυτών μια ομάδα ως προς την πράξη τής σύνθεσης συμμετριών. Τούτο μπορεί να επαληθευθεί εύκολα. Το γινόμενο δύο εξ αυτών δίνει ένα άλλο, το μοναδιαίο στοιχείο είναι παρόν, όπως και τα αντίστροφά τους, καθότι

$$e^{-1} = e,\ \left(r^2\right)^{-1} = r^4,\ \left(r^4\right)^{-1} = r^2,\ s^{-1} = s,\ \left(r^2 s\right)^{-1} = r^2 s,\ \left(r^4 s\right)^{-1} = r^4 s.$$

Ρίχνοντας μια ματιά στο σχήμα 5.1 διαπιστώνουμε ότι αυτά τα στοιχεία σχηματίζουν την ομάδα περιστροφικών συμμετριών ενός τριγώνου εγγεγραμμένου εντός τού εξαγώνου· ως εκ τούτου, οικοδομούν ένα «αντίτυπο» τής D_3 καθήμενο εντός τής D_6, ήτοι μια υποομάδα τής D_6 υπό την ακόλουθη έννοια:

Μια ***υποομάδα*** *μιας ομάδας G είναι ένα υποσύνολο τού υποκειμένου συνόλου τής G, το οποίο, εφοδιαζόμενο με την πράξη τού «πολλαπλασιασμού» τής G, σχηματίζει αφ' εαυτού μια ομάδα.*

(Ως είθισται, καθεμιά των θεωρουμένων ομάδων μας συνοδεύεται από μια παγιωμένη πολλαπλασιαστική πράξη). Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε ένα υποσύνολο H μιας ομάδας G και ότι πρόθεσή μας είναι να αποφανθούμε για το κατά πόσον το H είναι ή δεν είναι μια υποομάδα τής G. Τότε οφείλουμε να θέσουμε τρία διαφορετικά ερωτήματα: δοθέντων δύο στοιχείων x και y τού συνόλου H, σχηματίζουμε το γινόμενό τους εντός τής G. Ανήκει αυτό το γινόμενο πάντοτε στο H; Ανήκει το μοναδιαίο στοιχείο τής G στο H; Κάθε στοιχείο τού H σίγουρα διαθέτει ένα αντίστροφο εντός τής G. Ανήκει αυτό το αντίστροφο πάντοτε στο H; Εάν και τα τρία αυτά ερωτήματα επιδέχονται καταφατική απάντηση, τότε το σύνολο H είναι πράγματι μια υποομάδα τής G ως προς την πολλαπλασιαστική πράξη τής G. Σημειωτέον ότι δεν απαιτείται ο έλεγχος τής ισχύος τής προσεταιριστικής ιδιότητας. (Πράγματι· εάν $(xy)z = x(yz)$ για τρία τυχόντα στοιχεία τής G, τότε το ίδιο θα ισχύει και για τρία τυχόντα στοιχεία, τα οποία έχουν επιλεγεί από ένα υποσύνολο τής G). Όταν το H είναι μια υποομάδα τής G, τότε θα γράφουμε $H < G$.



Σχήμα 5.1

(5.1) Παραδείγματα. (i) $\mathbb{Z} < \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$ και $\mathbb{R} < \mathbb{C}$.

(ii) Οι άρτιοι ακέραιοι αριθμοί, τους οποίους θα συμβολίζουμε ως $2\mathbb{Z}$, σχηματίζουν μια υποομάδα τής προσθετικής ομάδας των ακεραίων αριθμών. Πιο γενικά, το σύνολο $n\mathbb{Z}$ όλων των πολλαπλασίων ενός θετικού ακεραίου αριθμού n αποτελεί μια υποομάδα τής $\mathbb{Z}$.

(iii) $\mathbb{Q}\setminus\{0\} < \mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $\mathbb{R}\setminus\{0\} < \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(iv) $\{\pm 1\} < C$ και $C < \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(v) Τα στοιχεία e, r^2, r^3, r^4, r^5 συγκροτούν μια υποομάδα τής D_6.

(vi) Το σύνολο $\{e, r, s, rs\}$ δεν αποτελεί υποομάδα τής D_6. Το στοιχείο r ανήκει σε αυτό το σύνολο, αλλά το γινόμενο $rr = r^2$ δεν ανήκει.

(vii) Το σύνολο $\{0, 2, 4\}$ αποτελεί μια υποομάδα τής $\mathbb{Z}_6$.

Το (v) γενικεύεται ως εξής: δοθέντος ενός στοιχείου x μιας ομάδας G, το σύνολο όλων των «δυνάμεων» τού x (ήτοι το σύνολο όλων των στοιχείων τής G τής μορφής x^n, όπου n ένας ακέραιος) αποτελεί μια υποομάδα τής G. (Το γινόμενο

$x^m x^n$ δύο δυνάμεων τού x ισούται με x^{m+n}, που είναι και αυτό μια δύναμη τού x, το μοναδιαίο στοιχείο τής G ισούται με x^0 και το αντίστροφο τού x^n είναι το x^{-n}, που επίσης είναι μια δύναμη τού x). Αυτή η υποομάδα καλείται *η υποομάδα η παραγόμενη από το* x και συμβολίζεται ως $\langle x \rangle$. Εάν το x έχει άπειρη τάξη, τότε

$$\langle x \rangle = \left\{ \dots , x^{-2}, x^{-1}, e, x, x^2, x^3, \dots \right\} .$$

Εάν το x έχει πεπερασμένη τάξη, ας πούμε ίση με m, τότε

$$\langle x \rangle = \left\{ e, x, x^2, \dots , x^{m-1} \right\} .$$

Επομένως, η τάξη τού x ισούται ακριβώς με την τάξη τής υποομάδας $\langle x \rangle$ τής παραγομένης από το x. Όταν υπάρχει κάποιο στοιχείο $x \in G$ το οποίο παράγει ολόκληρη την ομάδα G, τότε λέμε πως η G είναι μια **κυκλική ομάδα**.

(5.2) Παραδείγματα. (i) Τόσο το 1 όσο και το -1 παράγουν την $\mathbb{Z}$, δηλαδή η $\mathbb{Z}$ είναι μια άπειρη κυκλική ομάδα. (Επειδή η πράξη με την οποία είναι εφοδιασμένη η $\mathbb{Z}$ είναι η *πρόσθεση* ακεραίων αριθμών, η τετάρτη, ας πούμε, «δύναμη» τού 1 ισούται με $1 + 1 + 1 + 1 = 4$.)

(ii) Ο αριθμός 1 παράγει την $\mathbb{Z}_n$, οπότε η $\mathbb{Z}_n$ είναι μια κυκλική ομάδα τάξης n.

(iii) Εντός τής $\mathbb{Z}_6$ έχουμε

$$\begin{aligned} &\langle 0 \rangle = \{0\}, \\ &\langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle = \mathbb{Z}_6, \\ &\langle 2 \rangle = \langle 4 \rangle = \{0, 2, 4\}, \\ &\langle 3 \rangle = \{0, 3\}. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, τα στοιχεία τής $\langle 4 \rangle$ είναι το 4, το $4 +_6 4 = 2$ και το $4 +_6 4 +_6 4 = 0$.

(iv) Εντός τής D_3 έχουμε

$$\begin{aligned} &\langle e \rangle = \{e\}, \\ &\langle r \rangle = \left\langle r^2 \right\rangle = \{e, r, r^2\}, \\ &\langle s \rangle = \{e, s\}, \\ &\langle rs \rangle = \{e, rs\}, \\ &\left\langle r^2 s \right\rangle = \{e, r^2 s\}. \end{aligned}$$

Η διεδρική ομάδα D_n δεν είναι κυκλική, αλλά κάθε στοιχείο της μπορεί να γραφεί ως μία έκφραση εξαρτώμενη από τα r και s. Γι' αυτό λέμε πως τα r και s από κοινού παράγουν την D_n.

Γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι το X είναι ένα υποσύνολο μιας ομάδας G. Κάθε έκφραση τής μορφής

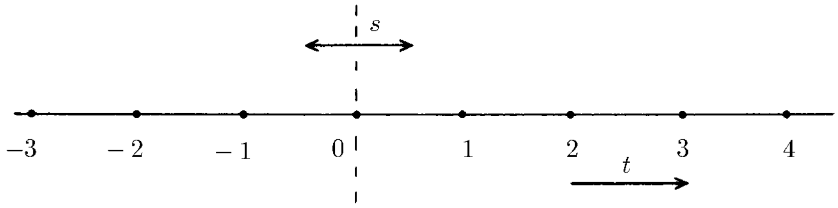
$$x_1^{m_1}\,x_2^{m_2}\,\cdots\,x_k^{m_k} \tag{$*$}$$

όπου τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ανήκουν στο X (χωρίς να είναι κατ' ανάγκην σαφώς διακεκριμένα) και οι $m_1, m_2, \ldots, m_k$ είναι ακέραιοι, καλείται **λέξη** (σχηματισμένη από στοιχεία) τού X. Η συλλογή όλων αυτών των λέξεων αποτελεί μια *υποομάδα* τής G. (Δοθέντων δύο τέτοιων λέξεων, η γραφή τής μίας μετά την άλλη μάς δείχνει ότι το γινόμενο δύο λέξεων τού X είναι και αυτό μια λέξη τού X. Το μοναδιαίο στοιχείο τής G μπορεί να εκληφθεί ως η λέξη x^0 για οιοδήποτε στοιχείο x τού X, ενώ το αντίστροφο τού στοιχείου $(*)$ είναι το $x_k^{-m_k}\,\cdots\,x_2^{-m_2}\,x_1^{-m_1}$, ήτοι και πάλι μία λέξη τού X). Η εν λόγω υποομάδα χαρακτηρίζεται ως **η υποομάδα η παραγόμενη από το** X. Εάν αυτή ισούται με ολόκληρη την G, τότε λέμε πως το X είναι ένα **σύνολο γεννητόρων τής** G ή ότι τα στοιχεία τού X **παράγουν (από κοινού) την** G. Ας υποθέσουμε ότι το X είναι ένα σύνολο γεννητόρων τής G και το Y ένα άλλο υποσύνολο τής G. Εάν $Y \supseteq X$, τότε το Y είναι και αυτό ένα σύνολο γεννητόρων τής G· και γενικότερα, εάν κάθε στοιχείο τού X μπορεί να γραφεί ως μια λέξη τού Y, τότε το Y είναι ένα σύνολο γεννητόρων τής G.

(5.3) Παραδείγματα. (i) Τα στοιχεία r και s παράγουν από κοινού την D_n. Αυτή η επιλογή δύο γεννητόρων δεν είναι μονοσημάντως ορισμένη. Για παράδειγμα, τα rs και s παράγουν και αυτά από κοινού την D_n, διότι $r = (rs)s$, κι επομένως κάθε λέξη σχηματιζόμενη από τα r και s μπορεί να μετατραπεί σε μια λέξη σχηματιζόμενη από τα rs και s.

(ii) Η πράξη με την οποία είναι εφοδιασμένη η $\mathbb{C}$ είναι η συνήθης πρόσθεση μιγαδικών αριθμών. Κατά συνέπειαν, οι λέξεις γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί $m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots + m_kz_k$ με ακεραίους συντελεστές. Η υποομάδα η παραγόμενη από το $\{1, i\}$ είναι **η ομάδα των ακεραίων τού Gauss**, τα στοιχεία τής οποίας είναι οι μιγαδικοί αριθμοί τής μορφής $a + ib$, όπου $a, b \in \mathbb{Z}$.

(iii) Θεωρήστε την πραγματική ευθεία και μαρκάρετε επ' αυτής το σύνολο των ακεραίων αριθμών όπως στο σχήμα 5.2. Έστω G το σύνολο των συναρτήσεων από την πραγματική ευθεία στον εαυτό της, οι οποίες διατηρούν τις αποστάσεις και στέλνουν το υποσύνολο των ακεραίων να απεικονισθεί στον εαυτό του. Τότε το G αποτελεί μια ομάδα με πράξη της τη σύνθεση συναρτήσεων.



Σχήμα 5.2

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστωθεί (βλ. άσκηση 5.9) ότι κάθε στοιχείο αυτής τής ομάδας G είναι ή μια (προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά) μεταφορά κατά μία ακεραία απόσταση ή ένας κατοπτρισμός ως προς ένα ακέραιο σημείο ή, τέλος, ένας κατοπτρισμός ως προς ένα σημείο, το οποίο βρίσκεται στο μέσον τού τμήματος τού καθοριζομένου από δύο ακέραια σημεία. Έστω t η προς τα δεξιά μεταφορά κατά μία μονάδα, ήτοι η $t(x) = x+1$, και έστω s ο κατοπτρισμός ως προς το μηδέν, ήτοι η $s(x) = -x$. Τότε τα στοιχεία τής G είναι τα εξής:

$$\begin{gathered} \dots\, t^{-2}, t^{-1}, e, t, t^2, \dots \\ \dots\, t^{-2}s, t^{-1}s, s, ts, t^2 s, \dots \end{gathered} \qquad (**)$$

όπου e είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Για παράδειγμα, $t^{-2}(x) = x - 2$, δείχνοντάς μας ότι το στοιχείο t^{-2} αποτελεί την προς τα αριστερά μεταφορά κατά δύο μονάδες, και $ts(x) = t(-x) = -x + 1$, δείχνοντάς μας ότι το ts αποτελεί τον κατοπτρισμό ως προς το σημείο $\frac{1}{2}$. Η μεταφορά t και ο κατοπτρισμός s παράγουν από κοινού την ομάδα G. Σημειώστε ότι, επιπροσθέτως, ισχύουν οι ισότητες

$$st(x) = s(x+1) = -x - 1,$$

$$t^{-1}s(x) = t^{-1}(-x) = -x - 1,$$

που σημαίνει ότι $st = t^{-1}s$. Το να γνωρίζουμε ότι $s^2 = e$ και $st = t^{-1}s$ μάς επιτρέπει να πολλαπλασιάζουμε δύο οιαδήποτε στοιχεία από τα $(**)$ και να χειριζόμαστε το γινόμενό τους κατά τέτοιον τρόπο, ώστε αυτό να προσλαμβάνει την ίδια μορφή. Τούτο μάς θυμίζει σε μεγάλο βαθμό την D_n. Πράγματι· η μόνη διαφορά έγκειται στο ότι η περιστροφή r τάξης n έχει αντικατασταθεί από μια μεταφορά t άπειρης τάξης. Γι' αυτόν τον λόγο ονομάζουμε την G **άπειρη διεδρική ομάδα** συμβολίζοντάς τη με το D_∞.

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο παραθέτοντας ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες των υποομάδων.

(5.4) Θεώρημα. *Ένα μη κενό υποσύνολο H μιας ομάδας G αποτελεί μια υποομάδα τής G εάν και μόνον εάν $xy^{-1} \in H$ οποτεδήποτε $x, y \in H$.*

Απόδειξη. Εάν η H είναι μια υποομάδα και $x, y \in H$, τότε γνωρίζουμε ότι $y^{-1} \in H$, και επομένως το γινόμενο xy^{-1} ανήκει στην H. Και αντιστρόφως· υποθέτοντας ότι $H \neq \varnothing$ και ότι $xy^{-1} \in H$ οποτεδήποτε $x, y \in H$, επιχειρηματολογούμε ως εξής: εάν $x \in H$, έχουμε $e = xx^{-1} \in H$ και $x^{-1} = ex^{-1} \in H$. Εξάλλου, εάν το y είναι ένα άλλο στοιχείο τού συνόλου H, τότε και πάλι $y^{-1} \in H$, οπότε τελικώς $xy = x(y^{-1})^{-1} \in H$. Άρα το σύνολο H είναι μια υποομάδα τής G. □

(5.5) Θεώρημα. *Η τομή δυο υποομάδων μιας ομάδας αποτελεί αφ' εαυτής μια υποομάδα.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πως οι H και K είναι δυο υποομάδες μιας ομάδας G. Τότε το μοναδιαίο στοιχείο ανήκει στην τομή τους, οπότε $H \cap K \neq \varnothing$. Εάν τα x και y είναι σημεία τής τομής $H \cap K$, τότε ανήκουν και τα δύο τόσο στην H όσο και στην K. Επειδή οι H και K είναι υποομάδες, $xy^{-1} \in H \cap K$. Ως εκ τούτου, η απόδειξή μας λήγει ύστερα από εφαρμογή τού θεωρήματος (5.4) για την τομή $H \cap K$. □

(5.6) Θεώρημα. (a) *Κάθε υποομάδα τής $\mathbb{Z}$ είναι κυκλική.*

(b) *Επιπροσθέτως, ισχύει κάτι το ακόμη πιο ισχυρό, ήτοι κάθε υποομάδα μιας κυκλικής ομάδας είναι κυκλική.*

Απόδειξη. (a) Έστω H μια υποομάδα τής $\mathbb{Z}$. Εάν η H είναι τετριμμένη, τότε είναι προφανώς κυκλική. Εάν η H δεν είναι τετριμμένη, τότε περιέχει έναν ακέραιο αριθμό x διάφορο τού μηδενός και, επειδή η H είναι μια υποομάδα, θα έχουμε και $-x \in H$. Άρα η H περιέχει υποχρεωτικώς έναν θετικό ακέραιο. Έστω d ο ελάχιστος θετικός ακέραιος εντός τής H. Ισχυριζόμαστε ότι ο d παράγει την H. Εάν $n \in H$, διαιρούμε το n με το d και παίρνουμε $n = qd + m$, όπου οι q και m είναι ακέραιοι και $0 \leq m < d$, ήτοι $m = n \,(\mathrm{mod}\, d)$. Γνωρίζουμε ότι $n \in H$ και $d \in H$. Επειδή η H είναι μια υποομάδα, έχουμε $qd \in H$, οπότε $-qd \in H$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$m = n - qd = n + (-qd) \in H.$$

Αυτό όμως αντιφάσκει προς την επιλογή τού d, εκτός και εάν το m ισούται με μηδέν. Κατά συνέπειαν έχουμε $n = qd$, πράγμα το οποίο μας δείχνει ότι κάθε στοιχείο τής H είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο τού d.

(b) Έστω G μια κυκλική ομάδα και έστω K μια μη τετριμμένη υποομάδα τής G. Εάν ο x είναι ένας γεννήτορας τής G, τότε κάθε στοιχείο τής G, κι επομένως και κάθε στοιχείο τής K, είναι μια δύναμη τού x. Έστω $H = \{n \in \mathbb{Z} \mid x^n \in K\}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι το σύνολο H είναι μια υποομάδα τής ομάδας $\mathbb{Z}$. Κατά το (a) η H είναι κυκλική. Εάν το d παράγει την H, τότε η δύναμη x^d παράγει την K. Τούτο ολοκληρώνει την απόδειξή μας. $\square$

Ασκήσεις

5.1 Βρείτε όλες τις υποομάδες καθεμιάς των ομάδων $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{12}$, D_4 και D_5.

5.2 Εάν οι m και n είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί και εάν ο m διαιρεί τον n, δείξτε ότι η ομάδα $\mathbb{Z}_n$ περιέχει μια ομάδα τάξης m. Ο αριθμός των υποομάδων τής $\mathbb{Z}_n$ που έχουν τάξη m είναι μεγαλύτερος τού 1;

5.3 Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό τον εισαχθέντα στο κεφάλαιο 4 αποδείξτε ότι τα στοιχεία rs και r^2s παράγουν από κοινού την ομάδα D_n.

5.4 Προσδιορίστε την υποομάδα τής D_n την παραγόμενη από τα στοιχεία r^2 και r^2s κάνοντας μια προσεκτική διάκριση μεταξύ τής περίπτωσης κατά την οποία ο n είναι περιττός και εκείνης κατά την οποία ο n είναι άρτιος.

5.5 Υποθέστε ότι το H είναι ένα μη κενό, *πεπερασμένο* υποσύνολο μιας ομάδας G. Αποδείξτε ότι το H αποτελεί μια υποομάδα τής G εάν και μόνον εάν ισχύει $xy \in H$ οποτεδήποτε τα x και y ανήκουν στο H.

5.6 Χαράξτε μια διαγώνιο ενός κανονικού εξαγώνου. Καταγράψτε εν είδει καταλόγου εκείνες τις επίπεδες συμμετρίες, οι οποίες αφήνουν την προκειμένη διαγώνιο σταθερή, καθώς και εκείνες που στέλνουν τη διαγώνιο να απεικονισθεί στον εαυτό της. Κατόπιν αποδείξτε ότι και οι δύο αυτές συλλογές συμμετριών αποτελούν υποομάδες τής ομάδας όλων των επιπέδων συμμετριών τού κανονικού σας εξαγώνου.

5.7 Έστω ότι η G είναι μια *αβελιανή* ομάδα και ότι το H είναι το υποσύνολο τής G το αποτελούμενο από όλα εκείνα τα στοιχεία τής G, τα οποία διαθέτουν πεπερασμένη τάξη. Να αποδείξετε ότι το εν λόγω σύνολο H είναι μια υποομάδα τής G.

5.8 Ποια στοιχεία τής άπειρης διεδρικής ομάδας έχουν πεπερασμένη τάξη; Σχηματίζουν αυτά τα στοιχεία μια υποομάδα τής D_∞;

5.9 Έστω f μια συνάρτηση από την πραγματική ευθεία στον εαυτό της, η οποία διατηρεί την απόσταση μεταξύ δυο οιωνδήποτε σημείων και στέλνει το σύνολο των ακεραίων αριθμών να απεικονισθεί στον εαυτό του.

(a) Υποθέτοντας ότι η f *δεν* διαθέτει σταθερά σημεία, δείξτε ότι η f αποτελεί μια **μεταφορά** κατά μία ακεραία απόσταση.

(b) Εάν η f αφήνει *ακριβώς ένα* σημείο σταθερό, δείξτε ότι αυτό το σημείο οφείλει είτε να είναι ένας ακέραιος αριθμός είτε να κείται στο μέσον τού διαστήματος μεταξύ δύο ακεραίων αριθμών. Ακολούθως, αποδείξτε ότι η f αποτελεί έναν **κατοπτρισμό** ως προς το εν λόγω σταθερό σημείο.

(c) Τέλος, αποδείξτε ότι η f είναι κατ' ανάγκην η ταυτοτική συνάρτηση στην περίπτωση κατά την οποία αφήνει περισσότερα τού ενός σημεία σταθερά.

5.10 Σχηματίστε έναν κατάλογο με όλα εκείνα τα στοιχεία τής $\mathbb{Z}_{12}$ τα οποία παράγουν την $\mathbb{Z}_{12}$. Κατόπιν κάνετε το ίδιο και για τις ομάδες $\mathbb{Z}_5$ και $\mathbb{Z}_9$. Μήπως τα αποτελέσματά σας υποδεικνύουν την εξαγωγή ενός γενικότερου συμπεράσματος;

5.11 Δείξτε ότι η ομάδα $\mathbb{Q}$ δεν είναι κυκλική. Κατόπιν αποδείξτε μια ακόμη πιο ισχυρή ιδιότητα, ήτοι ότι η $\mathbb{Q}$ δεν μπορεί να παραχθεί από τα στοιχεία κανενός πεπερασμένου υποσυνόλου της.

5.12 Εάν οι $a, b \in \mathbb{Z}$ δεν είναι ταυτοχρόνως ίσοι με το μηδέν και εάν ορίσουμε το $H = \{\lambda a + \mu b \mid \lambda, \mu \in \mathbb{Z}\}$, δείξτε ότι το σύνολο H αποτελεί μια υποομάδα τής $\mathbb{Z}$. Έστω d ο ελάχιστος θετικός ακέραιος ο οποίος ανήκει στην H. Αποδείξτε ότι ο d ισούται με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των a και b. (Τούτο έχει ως συνέπεια το ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ακεραίων a και b μπορεί πάντοτε να γραφεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός τής μορφής $\lambda a + \mu b$ με ακεραίους συντελεστές.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Μετατάξεις

Συνεχίζουμε με την αύξηση τού αποθέματός μας σε παραδείγματα μέσω τής εισαγωγής των ομάδων μετατάξεων. Η αναδιευθέτηση ή μετάταξη των στοιχείων ενός συνόλου είναι μια οικεία έννοια· για παράδειγμα, εναλλάσσοντας τα 1 και 3, και αφήνοντας το 2 σταθερό, παίρνουμε μια μετάταξη τού συνόλου $\{1, 2, 3\}$. Μια **μετάταξη** ενός τυχόντος συνόλου X είναι μια αμφιρριπτική συνάρτηση από το X επί τού εαυτού του. Η συλλογή *όλων* των μετατάξεων ενός συνόλου X συγκροτεί μια ομάδα S_X με πράξη της τη σύνθεση συναρτήσεων. Αυτό επιβεβαιώνεται εύκολα: εάν οι $\alpha : X \longrightarrow X$ και $\beta : X \longrightarrow X$ είναι δυο μετατάξεις, τότε η σύνθεσή τους $\alpha\beta : X \longrightarrow X$, η οριζόμενη από τον τύπο $\alpha\beta\,(x) = \alpha\,(\beta\,(x))$, είναι και αυτή μια μετάταξη. Η σύνθεση συναρτήσεων είναι προσεταιριστική, ενώ η ειδική μετάταξη ε, η οποία αφήνει όλα τα στοιχεία τού X σταθερά, παίζει τον ρόλο τού μοναδιαίου στοιχείου. Τέλος, κάθε μετάταξη $\alpha : X \longrightarrow X$ είναι μια αμφίρριψη, οπότε ορίζεται η αντίστροφός της $\alpha^{-1} : X \longrightarrow X$, η οποία αποτελεί μια μετάταξη τού X και ικανοποιεί τις ισότητες $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon = \alpha\alpha^{-1}$. Εάν το X είναι ένα άπειρο σύνολο, τότε η S_X είναι μια άπειρη ομάδα. Όταν $X = \{1, 2, \ldots , n\}$, τότε αντί τού S_X γράφουμε S_n. Η S_n καλείται **συμμετρική ομάδα** βαθμού n και τάξη της ισούται με $n!$.

Επί τού παρόντος θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στις συμμετρικές ομάδες. Τα έξι στοιχεία τής S_3 είναι τα ακόλουθα:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,2\,1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{bmatrix} .$$

Για να βρείτε την εικόνα ενός θετικού ακεραίου μέσω μιας εκ των ανωτέρω μετατάξεων, απλώς κοιτάξτε το τι βρίσκεται (κατακορύφως) κάτω από αυτόν. Για παράδειγμα, η

$$\begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{bmatrix}$$

στέλνει το 1 να απεικονισθεί στο 3, το 2 στο 1 και το 3 στο 2. Ενθυμούμενοι ότι $\alpha\beta$ σημαίνει ότι *πρώτα* εφαρμόζουμε την β και *μετά* την α, παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{bmatrix},$$

ενώ

$$\begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,3\,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,1\,3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Επομένως η S_3 δεν είναι αβελιανή. Εξ αυτού μπορούμε να συμπεράνουμε άμεσα ότι, γενικότερα, η ομάδα S_n δεν είναι αβελιανή για κάθε $n \geq 3$. (Γιατί;)

Όταν μεταβαίνουμε σε υψηλότερες τιμές τού n, αυτός ο συμβολισμός είναι κατά τι δυσκίνητος για την εκτέλεση υπολογιστικών εργασιών. Για παράδειγμα, το στοιχείο α τής S_6 που ορίζεται μέσω των

$$\alpha\,(1) = 5,\ \alpha\,(2) = 4,\ \alpha\,(3) = 3,\ \alpha\,(4) = 6,\ \alpha\,(5) = 1,\ \alpha\,(6) = 2,$$

γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,4\,3\,6\,1\,2 \end{bmatrix}.$$

Όμως η ίδια μορφή πληροφορίας μπορεί να αιχμαλωτισθεί ακόμη και μέσω τού συμβολισμού $\alpha = (1\,5)(2\,4\,6)$. Βάσει αυτού, εντός κάθε ζεύγους παρενθέσεων ένας θετικός ακέραιος στέλνεται να απεικονισθεί στον θετικό ακέραιο που τον ακολουθεί, ενώ ο τελευταίος θετικός ακέραιος στέλνεται να απεικονισθεί στον πρώτο. Εν προκειμένω, το 1 στέλνεται να απεικονισθεί στο 5 και το 5 στο 1, το 2 στο 4, το 4 στο 6 και το 6 στο 2. Δεν υπάρχει ανάγκη αναφοράς των θετικών ακεραίων αριθμών οι οποίοι μένουν σταθεροί μέσω τής μετάταξης. (Εδώ π.χ. δεν γίνεται μνεία τού 3). *Μπορούμε να περιγράψουμε οιαδήποτε μετάταξη κατ' αυτόν τον τρόπο μέσω τής ακόλουθης μεθόδου*: ανοίγουμε ένα ζεύγος παρενθέσεων και γράφουμε, κατ' αρχάς, τον ελάχιστο θετικό ακέραιο, ο οποίος κινείται μέσω τής μετάταξής μας. Κατόπιν καταγράφουμε την εικόνα αυτού τού θετικού ακεραίου μέσω τής μετάταξης, ακολουθούμενη από την εικόνα τής εικόνας κ.ο.κ., κλείνοντας τη δεξιά παρένθεση στην περίπτωση κατά την οποία επανερχόμαστε κυκλικά στο αφετηριακό μας σημείο. Εν συνεχεία, ανοίγουμε ένα νέο ζεύγος παρενθέσεων, καταγράφουμε τον ελάχιστο -μέχρι τούδε μη αναφερθέντα- θετικό ακέραιο αριθμό, ο οποίος κινείται μέσω τής μετάταξής μας, και ακολουθούμε το ίδιο σκεπτικό έως ότου αποπερατώσουμε την όλη διαδικασία.

(6.1) Παραδείγματα. (i) $\begin{bmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \\ 1\,8\,9\,3\,6\,2\,7\,5\,4 \end{bmatrix} = (2\,8\,5\,6)\,(3\,9\,4)\,.$

(ii) $\begin{bmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 8\,1\,6\,7\,3\,5\,4\,2 \end{bmatrix} = (1\,8\,2)\,(3\,6\,5)\,(4\,7)\,.$

(iii) Τα στοιχεία τής S_3 είναι τα

$$\varepsilon,\ (1\,2)\,,\ (1\,3),\ (2\,3),\ (1\,2\,3),\ (1\,3\,2).$$

Οι υπολογισμοί $(*)$ γράφονται ως εξής:

$$(1\,2)\,(2\,3) = (1\,2\,3), \qquad (2\,3)\,(1\,2) = (1\,3\,2).$$

Κάθε μετάταξη $(a_1\,a_2\,\ldots\,a_k)$, η οποία συναντάται (κατά την εφαρμογή αυτού τού νέου μας συμβολισμού) εντός ενός και μόνου ζεύγους παρενθέσεων, καλείται **κυκλική μετάταξη**. Η κυκλική μετάταξη $(a_1\,a_2\,\ldots\,a_k)$ στέλνει τον a_1 να απεικονισθεί στον a_2, τον a_2 στον a_3 κ.ο.κ, τον a_{k-1} στον a_k, και, τέλος, τον a_k στον a_1, αφήνοντας όλους τους άλλους διαθέσιμους θετικούς ακεραίους σταθερούς. Ο αριθμός k ονομάζεται το **μήκος** τής $(a_1\,a_2\,\ldots\,a_k)$. Εν συντομία, κάθε κυκλική μετάταξη μήκους k καλείται k-**κύκλος**. Επίσης, ένας 2-κύκλος συχνά ονομάζεται **αντιμετάθεση**.

Βάσει των όσων προαναφέραμε, *κάθε στοιχείο τής* S_n *μπορεί να γραφεί ως γινόμενο σαφώς διακεκριμένων κυκλικών μετατάξεων* («σαφώς διακεκριμένων», υπό την έννοια τού ότι δεν υπάρχει θετικός ακέραιος ο οποίος να κινείται από περισσότερες τής μιας εξ αυτών).

Ας ξανακοιτάξουμε το παράδειγμα (6.1) (i), στο οποίο είχαν προκύψει οι κυκλικές μετατάξεις $(2\,8\,5\,6)$ και $(3\,9\,4)$. Η πρώτη από αυτές επηρεάζει μόνον τους ακεραίους $2, 5, 6, 8$, ενώ η δεύτερη κινεί μόνον τους $3, 4$ και 9. Επειδή αυτές οι μετατάξεις είναι σαφώς διακεκριμένες, μετατίθενται η μία με την άλλη, ήτοι $(2\,8\,5\,6)\,(3\,9\,4) = (3\,9\,4)\,(2\,8\,5\,6)$. Βεβαίως εδώ κρύβεται μια γενική ιδιότητα. Εάν τα α και β είναι δυο στοιχεία τής ομάδας S_n τα οποία δεν κινούν *από κοινού* κανέναν θετικό ακέραιο, τότε ισχύει $\alpha\beta = \beta\alpha$. Η αποσύνθεση τού κάθε στοιχείου τής S_n σε γινόμενο σαφώς διακεκριμένων κυκλικών μετατάξεων είναι *μονοσημάντως ορισμένη*, με μόνη εξαίρεση ό,τι αφορά στη διάταξη με την οποία παραθέτουμε τις εν λόγω κυκλικές μετατάξεις.

(6.2) Θεώρημα. *Οι αντιμεταθέσεις τής* S_n *παράγουν από κοινού την* S_n.

Απόδειξη. Κάθε στοιχείο τής S_n μπορεί να γραφεί ως ένα γινόμενο κυκλικών μετατάξεων και κάθε κυκλική μετάταξη μπορεί να γραφεί ως ένα γινόμενο αντιμεταθέσεων, καθότι

$$(a_1\, a_2\, \ldots\, a_k) = (a_1\, a_k)\, \cdots\, (a_1\, a_3)(a_1\, a_2).$$

Κατά συνέπειαν, κάθε στοιχείο τής S_n μπορεί να γραφεί ως ένα γινόμενο αντιμεταθέσεων. Σημειώστε ότι αυτές οι αντιμεταθέσεις δεν είναι κατ' ανάγκην σαφώς διακεκριμένες και ότι αυτού τού είδους η αποσύνθεση δεν είναι κατ' ανάγκην μονοσημάντως ορισμένη. $\square$

(6.3) Παράδειγμα. Προφανώς,

$$\begin{bmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,4\,3\,6\,1\,2 \end{bmatrix} = (1\,5)\,(2\,4\,6) = (1\,5)\,(2\,6)\,(2\,4)\,.$$

Επειδή δε $(2\,4\,6) = (6\,2\,4)$, μπορούμε ισοδυνάμως να γράψουμε αυτό το στοιχείο τής S_6 και ως

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 5\,4\,3\,6\,1\,2 \end{bmatrix} = (1\,5)\,(6\,2\,4) &= (1\,5)\,(6\,4)\,(6\,2) \\ &= (1\,5)\,(4\,6)\,(2\,6)\,. \end{aligned}$$

(6.4) Θεώρημα. (a) *Οι αντιμεταθέσεις* $(1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n)$ *παράγουν από κοινού την* S_n.

(b) *Επίσης, οι αντιμεταθέσεις* $(1\,2), (2\,3), \ldots, (n-1\,n)$ *παράγουν από κοινού την* S_n.

Απόδειξη. (a) Παρατηρήστε ότι $(a\,b) = (1\,a)(1\,b)(1\,a)$ και κάνετε χρήση τού θεωρήματος (6.2).

(b) Παρατηρήστε ότι

$$(1\,k) = (k-1\,k)\,\cdots\,(3\,4)\,(2\,3)\,(1\,2)\,(2\,3)\,(3\,4)\,\cdots\,(k-1\,k)$$

και χρησιμοποιήστε τό (a). $\square$

(6.5) Θεώρημα. *Η αντιμετάθεση* $(1\,2)$, *μαζί με τον* n*-κύκλο* $(1\,2\,\ldots\,n)$, *παράγουν την* S_n.

Απόδειξη. Κατά το (6.4) (b) το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να γράψουμε κάθε αντιμετάθεση τής μορφής $(k\;k+1)$ ως μια λέξη σχηματιζόμενη από την αντιμετάθεση $(1\,2)$ και τον n-κύκλο $(1\,2\,\ldots\,n)$. Τούτο μπορεί να επιτευχθεί ως εξής:

$$(2\,3) = (1\,2\,\ldots\,n)(1\,2)(1\,2\,\ldots\,n)^{-1},$$

και, πιο γενικά για όλους τους k, όπου $2 \leq k < n$, βάσει τής

$$(k\;k+1) = (1\,2\,\ldots\,n)^{k-1}(1\,2)(1\,2\,\ldots\,n)^{1-k}.$$

□

Ένα δοθέν στοιχείο τής S_n ενδέχεται να μπορεί να γράφεται ως γινόμενο αντιμεταθέσεων κατά πολλούς διαφορετικούς τρόπους. *Ωστόσο, το πλήθος των εμφανιζομένων αντιμεταθέσεων είναι ή πάντοτε ένας άρτιος ή πάντοτε ένας περιττός θετικός ακέραιος αριθμός.* Για να το αποδείξουμε εισάγουμε το πολυώνυμο

$$\begin{aligned} P &= P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n)\,(x_2 - x_3) \cdots (x_{n-1} - x_n), \end{aligned}$$

ήτοι το γινόμενο με όρους του τους $(x_i - x_j)$, όπου $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ και $i < j$. Εάν $\alpha \in S_n$, τότε ορίζουμε το πολυώνυμο αP ως το γινόμενο όλων των $(x_{\alpha(i)} - x_{\alpha(j)})$, όπου και πάλι $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ και $i < j$. Ουσιαστικώς, αυτό που επιφέρει η εφαρμογή τής α στους (υπο)δείκτες τού αρχικού μας πολυωνύμου είναι η μετάταξη των όρων τού P, ενίοτε συνοδευόμενη από την αλλαγή προσήμου για ορισμένους εξ αυτών. Επομένως, το αP ισούται είτε με το P είτε με το $-P$. Στην πρώτη περίπτωση λέμε πως το **πρόσημο** τής α είναι το «$+$» (το «συν»), ενώ στη δεύτερη το «$-$» (το «μείον»). Επίσης, για τεχνικούς λόγους, λέμε ότι στην πρώτη περίπτωση η α έχει τον $+1$, ενώ στη δεύτερη τον -1, ως **προσημασμένο άσο** της (ήτοι το σύμβολο τής μονάδας με αναγεγραμμένο πρόσημο). [(Σ.τ.Μ): Ο διαχωρισμός αυτός γίνεται στην ελληνική μετάφραση προκειμένου να καταστεί εφικτή η ακριβολογία κατά την απόδοση τού όρου «sign».]

(6.6) Παράδειγμα. Για καλύτερη εμπέδωση τού πώς υπολογίζεται το αP, δίνουμε εδώ ένα απλό παράδειγμα. Εάν $n = 3$ και $\alpha = (1\,3\,2)$, τότε

$$P = (x_1 - x_2)\,(x_1 - x_3)\,(x_2 - x_3)$$

και

$$\alpha P = (x_3 - x_1)\,(x_3 - x_2)\,(x_1 - x_2) = P.$$

Άρα ο προσημασμένος άσος τής $(1\,3\,2)$ είναι ο $+1$ (με πρόσημό του το «συν»).

Εν γένει, εάν $\alpha, \beta \in S_n$, τότε ο προσημασμένος άσος τής σύνθεσης $\alpha\beta$ ισούται με το γινόμενο των προσημασμένων άσων των α και β (όπου, ως συνήθως, $(+1)(+1) = +1$, $(+1)(-1) = -1$, $(-1)(+1) = -1$ και $(-1)(-1) = +1$). Η αντιμετάθεση $(1\,2)$ έχει προφανώς τον -1 ως προσημασμένο άσο της. Επειδή, όταν $a > 2$, ισχύει η ισότητα

$$(1\,a) = (2\,a)\,(1\,2)\,(2\,a)\,,$$

ο -1 αποτελεί τον προσημασμένο άσο και για την $(1\,a)$. Εξάλλου, επειδή

$$(a\,b) = (1\,a)\,(1\,b)\,(1\,a)\,,$$

κάθε αντιμετάθεση οφείλει να έχει τον -1 ως προσημασμένο της άσο. Κατά συνέπειαν, κάθε στοιχείο τής S_n, το οποίο μπορεί να γραφεί ως γινόμενο αρτίου πλήθους αντιμεταθέσεων, οφείλει να έχει τον $+1$ ως προσημασμένο της άσο, ενώ ο προσημασμένος άσος ενός γινομένου περιττού πλήθους αντιμεταθέσεων είναι πάντοτε ο -1.

Κάθε στοιχείο τής S_n το οποίο μπορεί να εκφρασθεί ως γινόμενο αρτίου πλήθους αντιμεταθέσεων καλείται **άρτια μετάταξη**· οι λοιπές μετατάξεις εντός τής S_n ονομάζονται **περιττές μετατάξεις.** Επειδή

$$(a_1\,a_2\,\ldots\,a_k) = (a_1\,a_k)\,\cdots\,(a_1\,a_3)(a_1\,a_2),$$

μια κυκλική μετάταξη είναι άρτια εάν και μόνον εάν το μήκος της είναι ένας περιττός αριθμός.

(6.7) Θεώρημα. *Οι άρτιες μετατάξεις τής S_n συγκροτούν μια ομάδα τάξης $\frac{n!}{2}$, την αποκαλούμενη **εναλλάσσουσα ομάδα** A_n βαθμού n.*

Απόδειξη. Εάν οι α και β είναι δυο άρτιες μετατάξεις, γράφουμε καθεμιά εξ αυτών ως ένα γινόμενο αρτίου πλήθους αντιμεταθέσεων. Η παράθεση τού ενός γινομένου κατόπιν τού άλλου μάς δείχνει ότι η $\alpha\beta$ είναι άρτια. Γράφοντας το γινόμενο για την α με αντίστροφη διάταξη, διαπιστώνουμε ότι και η α^{-1} είναι άρτια. Τέλος, και η ταυτοτική μετάταξη ε είναι άρτια, διότι $\varepsilon = (1\,2)(1\,2)$. Επομένως οι άρτιες μετατάξεις συγκροτούν μια υποομάδα τής S_n. Εάν η α είναι άρτια, τότε η $(1\,2)\alpha$ είναι περιττή. Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία τής S_n επιδέχονται μια ζευγαρωτή κατάταξη, οπότε ακριβώς τα μισά των στοιχείων τής S_n είναι άρτιες μετατάξεις. (Γιατί μπορεί κάθε περιττή μετάταξη να εκφρασθεί ως μια άρτια μετάταξη ακολουθούμενη από την αντιμετάθεση $(1\,2)$;) □

(6.8) Θεώρημα. *Όταν $n \geq 3$, τότε οι 3-κύκλοι παράγουν την A_n.*

Απόδειξη. Κάθε 3-κύκλος είναι, ασφαλώς, μια άρτια μετάταξη. Δοθέντος ενός στοιχείου τής A_n, χρησιμοποιούμε το (6.4) (a) για να το γράψουμε ως γινόμενο αρτίου πλήθους αντιμεταθέσεων τής μορφής $(1\,a)$. Κατόπιν συμμαζεύουμε αυτές τις αντιμεταθέσεις σε παρακείμενα ζεύγη και εκτελούμε τον πολλαπλασιασμό για κάθε ζεύγος δυνάμει τής $(1\,a)(1\,b) = (1\,b\,a)$. Τώρα πλέον το στοιχείο μας είναι εκφρασμένο ως ένα γινόμενο 3-κύκλων. □

(6.9) Παράδειγμα. Τα *δώδεκα στοιχεία* τής A_4 είναι τα

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon, & (1\,2)\,(3\,4)\,, & (1\,3)\,(2\,4)\,, & (1\,4)\,(2\,3)\,, \\ (1\,2\,3)\,, & (1\,2\,4)\,, & (1\,3\,4)\,, & (2\,3\,4)\,, \\ (1\,3\,2)\,, & (1\,4\,2)\,, & (1\,4\,3)\,, & (2\,4\,3)\,. \end{array}$$

Τα υπολειπόμενα στοιχεία τής S_4, ήτοι οι περιττές μετατάξεις της, είναι τα

$$\begin{array}{cccc} (1\,2)\,, & (1\,3)\,, & (1\,4)\,, & (2\,3)\,, \\ (2\,4)\,, & (3\,4)\,, & (1\,2\,3\,4)\,, & (1\,2\,4\,3)\,, \\ (1\,3\,2\,4)\,, & (1\,4\,3\,2)\,, & (1\,3\,4\,2)\,, & (1\,4\,2\,3)\,. \end{array}$$

Εάν επιθυμούμε να γράψουμε π.χ. το $(1\,3)\,(2\,4)$ ως γινόμενο 3-κύκλων, η μέθοδος που περιγράψαμε στην απόδειξη τού θεωρήματος (6.8) μας δίνει

$$(1\,3)\,(2\,4) = (1\,3)\,(1\,2)\,(1\,4)\,(1\,2) = (1\,2\,3)\,(1\,2\,4)\,.$$

Ασκήσεις

6.1 Μελετήστε λεπτομερώς τον πολλαπλασιαστικό κατάλογο τής ομάδας S_3.

6.2 Εκφράστε καθένα από τα ακόλουθα στοιχεία τής ομάδας S_8 ως ένα γινόμενο σαφώς διακεκριμένων κυκλικών μετατάξεων, καθώς επίσης και ως ένα γινόμενο αντιμεταθέσεων.

(a) $\begin{bmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8 \\ 7\,6\,4\,1\,8\,2\,3\,5 \end{bmatrix}$, (b) $(4\,5\,6\,8)\,(1\,2\,4\,5)$, (c) $(6\,2\,4)\,(2\,5\,3)\,(8\,6\,7)\,(4\,5)$.

Ποιες εξ αυτών των μετατάξεων ανήκουν στην A_8;

6.3 Δείξτε ότι τα στοιχεία τής S_9 τα οποία στέλνουν τα 2, 5 και 7 να απεικονισθούν σε (ακριβώς) ένα εκ των 2, 5 ή 7 σχηματίζουν μια υποομάδα τής S_9. Ποια είναι η τάξη αυτής τής υποομάδας;

6.4 Βρείτε μια υποομάδα τής S_4 η οποία περιέχει ακριβώς έξι στοιχεία. Πόσες υποομάδες τάξης έξι υπάρχουν εντός τής S_4;

6.5 Υπολογίστε το $\alpha P\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$, όταν $\alpha = (1\,4\,3)$ και όταν $\alpha = (2\,3)\,(4\,1\,2)$.

6.6 Εάν η H είναι μια υποομάδα τής S_n η οποία δεν περιέχεται στην A_n, αποδείξτε ότι ακριβώς τα μισά από τα στοιχεία τής H είναι άρτιες μετατάξεις.

6.7 Δείξτε ότι, εάν $n \geq 4$, τότε κάθε στοιχείο τής S_n μπορεί να γραφεί ως ένα γινόμενο δύο μετατάξεων, καθεμιά εκ των οποίων έχει τάξη ίση με 2. (Πειραματισθείτε κατ' αρχάς με κυκλικές μετατάξεις.)

6.8 Εάν τα α και β είναι δυο στοιχεία τής S_n, αποδείξτε ότι το $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ ανήκει πάντοτε στην A_n, ενώ το $\alpha\beta\alpha^{-1}$ ανήκει στην A_n οποτεδήποτε το β είναι μια άρτια μετάταξη. Μελετήστε λεπτομερώς αυτά τα στοιχεία όταν $n = 4$ και $\alpha = (2\,1\,4\,3), \beta = (4\,2\,3)$.

6.9 Όταν ο n είναι περιττός (κι αντιστοίχως, άρτιος), δείξτε ότι τα στοιχεία $(1\,2\,3)$ και $(1\,2\,\ldots\,n)$ (κι αντιστοίχως, τα στοιχεία $(1\,2\,3)$ και $(2\,3\,\ldots\,n)$) παράγουν από κοινού την A_n.

6.10 Εάν $\alpha, \beta \in S_n$ και εάν $\alpha\beta = \beta\alpha$, αποδείξτε ότι το β μετατάσσει εκείνους τους ακεραίους αριθμούς, οι οποίοι μένουν σταθεροί μέσω τού α. Κατόπιν δείξτε ότι, όταν το α είναι ένας n-κύκλος, τότε το β οφείλει να είναι μια δύναμη τού α.

6.11 Βρείτε την τάξη καθεμιάς των μετατάξεων τής άσκησης 6.2.

6.12 Αποδείξτε ότι η τάξη ενός στοιχείου $\alpha \in S_n$ ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των μηκών των κύκλων, τα οποία αποκτώνται όταν το α γράφεται ως ένα γινόμενο σαφώς διακεκριμένων κυκλικών μετατάξεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ισομορφισμοί

Μια σκακιέρα (βλ. σχ. 7.1) διαθέτει τέσσερεις επίπεδες συμμετρίες: την ταυτοτική e, τη στροφή r περί το κέντρο της κατά π και τους κατοπτρισμούς q_1 και q_2 ως προς τις δύο διαγωνίους της. Αυτές οι συμμετρίες συγκροτούν μια ομάδα ως προς την πράξη τής σύνθεσης, ο «πολλαπλασιαστικός» κατάλογος τής οποίας είναι ο πρώτος από τους δύο καταλόγους που ακολουθούν. Επίσης, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ο πολλαπλασιασμός κατά μόδιο 8 καθιστά το σύνολο $\{1, 3, 5, 7\}$ μια ομάδα, με πολλαπλασιαστικό της κατάλογο τον δεύτερο.

	e	r	q_1	q_2
e	e	r	q_1	q_2
r	r	e	q_2	q_1
q_1	q_1	q_2	e	r
q_2	q_2	q_1	r	e

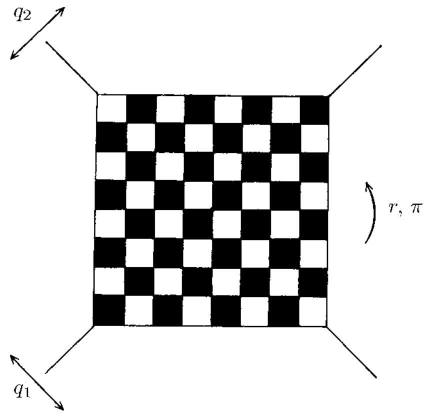
	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Παραβλέποντας τη διαφορετική προέλευση αυτών των καταλόγων, διαπιστώνουμε ότι μεταξύ τους υφίσταται μια πασιφανής «ομοιότητα». Και οι δύο ομάδες έχουν τέσσερα στοιχεία, ενώ -ταυτοχρόνως- τα στοιχεία τους φαίνεται να «συνδυάζονται» με πανομοιότυπο τρόπο. Ουσιαστικώς, μόνον ο τρόπος με τον οποίο συμβολίζονται τα εν λόγω στοιχεία είναι αυτό που διαφοροποιεί τους δύο καταλόγους.

Ονομάζοντας την πρώτη μας ομάδα G και τη δεύτερη G', ας υποθέσουμε ότι η $\varphi : G \longrightarrow G'$ είναι η συνάρτηση, η οποία ορίζεται ως εξής:

$$e \longmapsto 1, \quad r \longmapsto 3, \quad q_1 \longmapsto 5, \quad q_2 \longmapsto 7,$$

συμβολίζοντας, χάριν συντομίας, την εικόνα ενός στοιχείου x τής G μέσω τής φ ως x'. Όταν λέμε ότι τα στοιχεία *συνδυάζονται με πανομοιότυπο τρόπο* εννοούμε ότι, εάν $x \longmapsto x'$ και $y \longmapsto y'$, τότε, μέσω τής φ, $xy \longmapsto x'y'$.



Σχήμα 7.1

Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται *ισομορφισμός* μεταξύ των G και G'. Πρόκειται για μια αμφίρριψη, η οποία μεταφέρει τον «πολλαπλασιασμό» τής G σε εκείνον τής G'. Κατ' ουσίαν, οι G και G' μπορούν να εκληφθούν σαν να είναι η «ίδια» ομάδα· από τεχνική δε σκοπιά, είναι ισόμορφες υπό την ακόλουθη έννοια:

Λέμε πως δυο ομάδες G και G' είναι (μεταξύ τους) ***ισόμορφες*** *(ή ότι η G είναι* ***ισόμορφη με την*** *G' ή, απλούστερα, ότι η G είναι* ***ισόμορφη τής*** *G') όταν υπάρχει μια αμφίρριψη $\varphi : G \longrightarrow G'$, για την οποία ισχύει η ισότητα:*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)\,,\ \text{για όλα τα } x, y \in G.$$

(Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται, ιδιαιτέρως, ***ισομορφισμός****.)*

Με το να αξιώνει κανείς από την $\varphi : G \longrightarrow G'$ να είναι μια αμφίρριψη, διασφαλίζει την ισότητα των πληθικών αριθμών των υποκειμένων σύνολων των G και G'. Εάν, επιπροσθέτως, ισχύει $\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)$ για όλα τα $x, y \in G$, τότε μας είναι αδιάφορο το αν θα πολλαπλασιάσουμε πρώτα δύο στοιχεία εντός τής G και κατόπιν θα στείλουμε το γινόμενό τους να απεικονισθεί μέσω τής φ στην G' ή αν θα στείλουμε πρώτα καθένα από τα στοιχεία αυτά να απεικονισθεί στην G' και μετά θα πολλαπλασιάσουμε τις εικόνες τους μέσω τής φ εντός τής G'. Επομένως η G, στην πραγματικότητα, δεν είναι τίποτε άλλο παρά η G' μεταμφιεσμένη. Ας σημειωθεί ότι και η αντίστροφος $\varphi^{-1} : G' \longrightarrow G$ τής φ είναι ένας ισομορφισμός, οπότε ο ορισμός μας είναι συμμετρικός ως προς τις G και G'. Για να υποδηλώνουμε ότι οι ομάδες G και G' είναι ισόμορφες, συχνά θα γράφουμε $G \cong G'$.

(7.1) Παραδείγματα. (i) Ορίζουμε ως $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ την $\varphi(x) = e^x$. Τότε η φ είναι μια αμφίρριψη και ισχύει

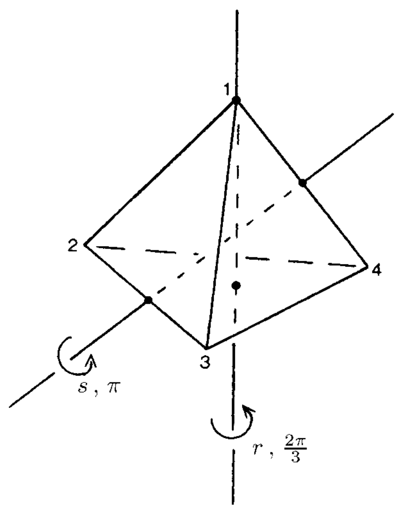
$$\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \varphi(x)\,\varphi(y)\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Επομένως οι ομάδες $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}_{>0}$ είναι ισόμορφες. (Θυμηθείτε ότι η $\mathbb{R}$ είναι προσθετική, ενώ η $\mathbb{R}_{>0}$ πολλαπλασιαστική ομάδα.)

(ii) Μέχρι τούδε έχουμε αποκτήσει αρκετές γνώσεις περί τού κανονικού τετραέδρου, όπως π.χ. ότι διαθέτει δώδεκα περιστροφικές συμμετρίες, οι οποίες σχηματίζουν μια μη αβελιανή ομάδα G. Μπορούμε όμως να τις επαυξήσουμε αισθητά ως εξής: αριθμούμε τις κορυφές του ως $1, 2, 3, 4$ όπως στο σχήμα 7.2. Κάθε περιστροφική συμμετρία επάγει μια μετάταξη κορυφών, κι επομένως μια μετάταξη τού συνόλου $\{1, 2, 3, 4\}$. Για παράδειγμα, η εικονιζόμενη περιστροφή r επάγει την κυκλική μετάταξη $(2\,3\,4)$, ενώ η s επάγει την $(1\,4)(2\,3)$. Διερευνώντας κατά συστηματικό τρόπο όλες τις άλλες δυνατότητες καταλήγουμε στη δημιουργία των δώδεκα στοιχείων τής A_4. Εάν δυο περιστροφές u, v επάγουν τις μετατάξεις α και β, αντιστοίχως, τότε η uv επάγει προφανώς την $\alpha\beta$. Κατά συνέπειαν, στέλνοντας κάθε

$$\text{(περιστροφική συμμετρία)} \longmapsto \text{(στην (μέσω αυτής) επαγομένη μετάταξη)}$$

προσλαμβάνουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ τής G και τής A_4.



Σχήμα 7.2

(iii) Κάθε άπειρη κυκλική ομάδα είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}$. Πράγματι· εάν η G είναι μια άπειρη κυκλική ομάδα με γεννήτορά της το στοιχείο x, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \varphi\left(x^m\right) = m.$$

Η φ είναι αμφιρριπτική και ισχύουν οι ισότητες:

$$\varphi\left(x^m x^n\right) = \varphi\left(x^{m+n}\right) = m + n = \varphi\left(x^m\right) + \varphi\left(x^n\right).$$

Τούτο σημαίνει ότι η φ είναι ένας ισομορφισμός.

(iv) Κάθε πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξης n είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_n$. Πράγματι· εάν η G είναι μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα με γεννήτορά της το στοιχείο x, τότε η συνάρτηση

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad \varphi\left(x^m\right) = m (\operatorname{mod} n)$$

είναι ένας ισομορφισμός.

(v) Το σύνολο $\{1, -1, i, -i\}$ σχηματίζει μια ομάδα ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών· πρόκειται για μια κυκλική ομάδα με γεννήτορά της είτε το i είτε το $-i$. Έτσι, σύμφωνα με όσα προαναφέραμε στο (iv), υπάρχουν δύο ισομορφισμοί

$$\begin{cases} 1 \longmapsto 0,\ i \longmapsto 1,\ -1 \longmapsto 2,\ -i \longmapsto 3, & \text{και} \\ \\ 1 \longmapsto 0,\ -i \longmapsto 1,\ -1 \longmapsto 2,\ i \longmapsto 3 \end{cases}$$

μεταξύ αυτής τής ομάδας και τής $\mathbb{Z}_4$.

(vi) Η D_3 είναι ισόμορφη τής S_3. Αποδείξτε αυτόν τον ισχυρισμό χρησιμοποιώντας έναν συλλογισμό ανάλογο εκείνου που αναπτύξαμε στο (ii), αριθμώντας, εν προκειμένω, τις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου με τους $1, 2, 3$.

(vii) Δεν υπάρχει κανένας ισομορφισμός μεταξύ των ομάδων $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}_{>0}$. Πράγματι· εάν υπήρχε ένας ισομορφισμός $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ και επιλέγαμε ένα x, ούτως ώστε να ισχύει $\varphi(x) = 2$, τότε θα έπρεπε να έχουμε

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = 2,$$

οπότε $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, πράγμα το οποίο θα μας οδηγούσε σε αντίφαση.

(7.2) Πρόταση. *Έστω $\varphi : G \longrightarrow G'$ ένας ισομορφισμός ομάδων. Τότε $|G| = |G'|$ και η φ στέλνει το μοναδιαίο στοιχείο τής G να απεικονισθεί στο μοναδιαίο στοιχείο τής G'.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $x' \in G'$ και ότι $\varphi(x) = x'$. Τότε έχουμε

$$x'\varphi(e) = \varphi(x)\varphi(e) = \varphi(xe) = \varphi(x) = x'$$

και, παρομοίως, $\varphi(e)x' = x'$. Τούτο αποδεικνύει ότι το $\varphi(e)$ πρόκειται για το μοναδιαίο στοιχείο τής G'. Μια διαφορετική απόδειξη είναι η εξής: παρατηρούμε ότι

$$\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)$$

και εν συνεχεία πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη αυτής τής ισότητας με το αντίστροφο στοιχείο τού $\varphi(e) \in G'$. Η δεύτερη αυτή απόδειξη είναι κατά τι πιο προτιμητέα, καθόσον δεν χρησιμοποιεί το γεγονός ότι η φ είναι μια αμφίρριψη, παρά μόνον την ιδιότητα τής (μέσω τής φ) μεταφοράς τού πολλαπλασιασμού τής G στον πολλαπλασιασμό τής G'. □

(7.3) Πρόταση. *Έστω $\varphi : G \longrightarrow G'$ ένας ισομορφισμός ομάδων. Τότε η φ στέλνει αντίστροφα στοιχεία να απεικονισθούν σε αντίστροφα στοιχεία, ήτοι*

$$\varphi(x)^{-1} = \varphi\left(x^{-1}\right), \ \forall x, \ x \in G.$$

Απόδειξη. Προφανώς, για κάθε $x \in G$, ισχύουν οι ισότητες

$$\varphi\left(x^{-1}\right)\varphi(x) = \varphi\left(x^{-1}x\right) = \varphi(e) = \varphi\left(xx^{-1}\right) = \varphi(x)\varphi\left(x^{-1}\right),$$

οπότε $\varphi(x)^{-1} = \varphi\left(x^{-1}\right)$. □

(7.4) Πρόταση. *Εάν η $\varphi : G \longrightarrow G'$ είναι ένας ισομορφισμός και η G μια αβελιανή ομάδα, τότε και η G' θα είναι κατ' ανάγκην αβελιανή.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $x', y' \in G'$ και ότι $\varphi(x) = x'$, $\varphi(y) = y'$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} x'y' &= \varphi(x)\varphi(y) \\ &= \varphi(xy) \\ &= \varphi(yx) \\ &= \varphi(y)\varphi(x) = y'x', \end{aligned}$$

οπότε η G' είναι όντως αβελιανή. □

(7.5) Πρόταση. *Εάν η $\varphi : G \longrightarrow G'$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων και η H μια υποομάδα τής G, τότε η εικόνα της $\varphi(H)$ μέσω τής φ είναι μια υποομάδα τής G'.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι τα x', y' είναι δυο στοιχεία τής $\varphi(H)$. Τότε, επειδή η $\varphi|_H$ είναι επιρριπτική, μπορούμε να βρούμε $x, y \in H$, τέτοια ώστε $\varphi(x) = x'$ και $\varphi(y) = y'$. Το στοιχείο xy^{-1} ανήκει στην H, διότι η H είναι μια υποομάδα τής G. Επομένως, από τις ισότητες

$$\varphi\left(xy^{-1}\right) = \varphi(x)\,\varphi\left(y^{-1}\right) = \varphi(x)\varphi(y)^{-1} = x'y'^{\,-1}$$

βλέπουμε ότι το $x'y'^{\,-1}$ ανήκει στην $\varphi(H)$. Τέλος, αρκεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα (5.4). □

(7.6) Πρόταση. *Κάθε ισομορφισμός ομάδων $\varphi : G \longrightarrow G'$ διατηρεί την τάξη καθενός των στοιχείων τής G.*

Απόδειξη. Έστω g ένα τυχόν στοιχείο τής G. Ας εφαρμόσουμε την πρόταση (7.5) για την ειδική περίπτωση κατά την οποία η H είναι η κυκλική υποομάδα τής G η οποία παράγεται από το g. Εάν $x' \in \varphi(H)$, τότε έχουμε

$$x' = \varphi(g^m) = \varphi(g)^m$$

για κάποιον θετικό ακέραιο αριθμό m. Επομένως, η $\varphi(H)$ είναι κυκλική με το $\varphi(g)$ ως γεννήτορά της. Καθώς οι H και $\varphi(H)$ έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό, η τάξη τού $\varphi(g)$ οφείλει να ισούται με την τάξη τού g. □

Τέλος, αναφέρουμε και μια τελευταία πρόταση, η απόδειξη τής οποίας αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

(7.7) Πρόταση. *Εάν οι $\varphi : G \longrightarrow G'$ και $\psi : G' \longrightarrow G''$ είναι ισομορφισμοί ομάδων, τότε και η σύνθεσή τους*

$$\psi\varphi : G \longrightarrow G''$$

είναι ένας ισομορφισμός ομάδων.

Στο κεφάλαιο 1 έχουμε εισαγάγει τρία στερεά: ένα κανονικό τετράεδρο, μια ισόπεδη εξαγωνική πλάκα με ισομήκεις πλευρές και μια ορθή κανονική πυραμίδα βασιζόμενη σε ένα κανονικό δωδεκάγωνο. Η *γεωμετρική παρατήρηση*, σύμφωνα με την οποία τα στερεά αυτά δεν επιδεικνύουν τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά συμμετρίας, μετατρέπεται σε έναν *αλγεβρικό ισχυρισμό*, ο οποίος διατυπώνεται ως εξής: δεν υπάρχουν δύο εξ αυτών, τα οποία να έχουν ισόμορφες ομάδες συμμετρίας. Όμως αυτός ο ισχυρισμός είναι εύκολα επαληθεύσιμος. Μόλις προηγουμένως δείξαμε ότι η ομάδα περιστροφικών συμμετριών τού τετραέδρου είναι ισόμορφη τής A_4. Η αντίστοιχη ομάδα συμμετριών τής πλάκας είναι εξ ορισμού η D_6, ενώ η ομάδα συμμετριών τής πυραμίδας είναι κυκλική (παραγόμενη από τη στροφή κατά $\frac{\pi}{6}$ περί τον μοναδικό άξονα συμμετρίας της), οπότε οφείλει να είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_{12}$ (κατά το (7.1) (iv)). Η $\mathbb{Z}_{12}$ είναι η μόνη από αυτές τις τρεις ομάδες, η οποία είναι αβελιανή· έτσι, είναι αδύνατον να είναι ισόμορφη με μία από τις άλλες δύο (βλ. πρόταση (7.4)). Από την άλλη μεριά, η D_6, σε αντίθεση με την A_4, περιέχει ένα στοιχείο τάξης έξι. Άρα ούτε οι D_6 και A_4 μπορούν να είναι ισόμορφες (βλ. πρόταση (7.6)).

Ασκήσεις

7.1 Βεβαιωθείτε για το ότι οι αριθμοί $1, 2, 4, 5, 7$ και 8 σχηματίζουν μια ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό κατά μόδιο 9 και δείξτε ότι αυτή η ομάδα είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_6$.

7.2 Επαληθεύστε το ότι οι ακέραιοι αριθμοί $1, 3, 7, 9, 11, 13, 17$ και 19 σχηματίζουν μια ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό κατά μόδιο 20. Εξηγήστε γιατί αυτή η ομάδα δεν είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_8$.

7.3 Δείξτε ότι η υποομάδα $\{\varepsilon, (1\,2)\,(3\,4)\,, (1\,3)\,(2\,4)\,, (1\,4)\,(2\,3)\}$ τής A_4 είναι ισόμορφη με την ομάδα των επιπέδων συμμετριών μιας σκακιέρας.

7.4 Κατασκευάστε έναν συγκεκριμένο ισομορφισμό μεταξύ τής S_3 και τής D_3. Πόσοι διαφορετικοί ισομορφισμοί υφίστανται μεταξύ τής S_3 και τής D_3;

7.5 Έστω G μια ομάδα. Δείξτε ότι η αντιστοίχιση $x \longleftrightarrow x^{-1}$ μας παρέχει έναν ισομορφισμό από την G επί τής G εάν και μόνον εάν η G είναι *αβελιανή*.

7.6 Δείξτε ότι η $\mathbb{Q}_{>0}$ δεν είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}$.

7.7 Εάν η G είναι μια ομάδα και $g \in G$, δείξτε ότι η συνάρτηση

$$\varphi : G \longrightarrow G, \quad \varphi\,(x) = gxg^{-1},$$

αποτελεί έναν ισομορφισμό. Μελετήστε λεπτομερώς αυτόν τον ισομορφισμό όταν $G = A_4$ και το g είναι η μετάταξη $(1\,2\,3)$.

7.8 Μια υποομάδα H μιας ομάδας G καλείται **γνήσια υποομάδα** τής G όταν ισχύει $\{e\} \subsetneqq H \subsetneqq G$. Βρείτε μια ομάδα, η οποία να είναι ισόμορφη με μια από τις γνήσιες υποομάδες της.

7.9 Υποθέστε ότι η G είναι μια κυκλική ομάδα. Εάν το x παράγει την G και εάν η $\varphi : G \longrightarrow G$ είναι ένας ισομορφισμός, αποδείξτε ότι η φ είναι πλήρως καθορισμένη μέσω τής εικόνας $\varphi(x)$ και ότι και το $\varphi(x)$ είναι ένας γεννήτορας τής G. Χρησιμοποιήστε αυτές τις ιδιότητες προκειμένου να προσδιορίσετε όλους τους ισομορφισμούς από την $\mathbb{Z}$ επί τής $\mathbb{Z}$, καθώς και όλους τους ισομορφισμούς από την $\mathbb{Z}_{12}$ επί τής $\mathbb{Z}_{12}$.

7.10 Δείξτε ότι η $\mathbb{R}$ δεν είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Q}$ και ότι η $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ δεν είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Είναι η $\mathbb{R}$ ισόμορφη τής $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

7.11 Αποδείξτε ότι η υποομάδα τής S_6 η οποία παράγεται από τα $(1\,2\,3\,4)$ και $(5\,6)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα εκείνη, η οποία περιεγράφη στην άσκηση 7.2.

7.12 Δείξτε ότι η υποομάδα τής S_4 η οποία παράγεται από τα $(1\,2\,3\,4)$ και $(2\,4)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα D_4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Τα πλατωνικά στερεά και το θεώρημα τού Cayley

Υπάρχουν πέντε (κυρτά) κανονικά στερεά: **το τετράεδρο** (με τέσσερεις τριγωνικές έδρες), **ο κύβος** (με έξι τετράγωνες έδρες), **το οκτάεδρο** (με οκτώ τριγωνικές έδρες), **το δωδεκάεδρο** (με δώδεκα πενταγωνικές έδρες) και **το εικοσάεδρο** (με είκοσι τριγωνικές έδρες), τα οποία εικονογραφούνται στο σχ. 8.1. [(Σ.τ.Μ.): Τα στερεά αυτά ήταν γνωστά από αρχαιοτάτων χρόνων. Όπως αναφέρει ο H. Weyl στο [1] (p. 74): «Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ύπαρξη των τριών πρώτων αποτελεί ένα σχετικώς επουσιώδες γεωμετρικό δεδομένο. Αλλά η ανακάλυψη των δύο τελευταίων συγκαταλέγεται με απόλυτη βεβαιότητα στις ωραιότερες και στις πλέον ιδιάζουσες ανακαλύψεις ολόκληρης τής Ιστορίας των Μαθηματικών. Μπορεί μάλιστα να αποδοθεί, με αρκετή σιγουριά, στους Έλληνες αποίκους τής Κάτω Ιταλίας, οι οποίοι ενδέχεται να συνέλαβαν την αφηρημένη μορφή τού κανονικού δωδεκαέδρου μέσω των κρυστάλλων τού πυριτίου, ενός θειούχου ορυκτού που αφθονεί στη Σικελία. ...

Η πρώτη ακριβής κατασκευή κανονικού δωδεκαέδρου πιθανώς να οφείλεται στον Θεαίτητο[1]. Υπάρχουν μαρτυρίες, σύμφωνα με τις οποίες γινόταν χρήση δωδεκαεδρικών ζαριών στην Ιταλία ήδη από τους πολύ πρώιμους χρόνους, ενώ το

[1]Μεγάλος μαθηματικός που έζησε και έδρασε στην Αθήνα (περ. 415-369 π.Χ.). Υπήρξε φίλος τού Πλάτωνος, ο οποίος έδωσε το όνομά του σε έναν από τους σημαντικότερους διαλόγους του. (Βλ. Πλάτωνος *Θεαίτητος*. Εισαγωγή και μετάφραση Ι.Ν. Θεοδωρακόπουλου. Εκδόσεις Ακαδημίας Αθηνών, 1980). Διδάχθηκε Μαθηματικά από τον σπουδαίο μαθηματικό Θεόδωρο τον Κυρηναίο. Κατά τον Πρόκλο, ο Θεαίτητος φέρεται ως σύγχρονος τού Αρχύτα τού Ταραντίνου, με τον οποίο ενδέχεται να συνεργάσθηκε για τη δημιουργία νέων γεωμετρικών θεωρημάτων και

δωδεκάεδρο φαίνεται πως είχε και κάποια ιδιαίτερη θρησκευτική σημασία στον πολιτισμό των Ετρούσκων[2]».

Τα πέντε κανονικά στερεά[3] ονομάσθηκαν και **πλατωνικά στερεά**, διότι διαδραματίζουν έναν πρωτεύοντα ρόλο στην κοσμογονία τού Πλάτωνος, η οποία εκτίθεται στον διάλογό του *Τίμαιος*[4]. Ο Πλάτων, συμπληρώνοντας, μεταξύ άλλων, και ορισμένα κενά των θεωριών των Πυθαγορείων και τού Εμπεδοκλέους, υποστηρίζει με νέα φιλοσοφικά επιχειρήματα ότι τα οντολογικά, δομικά στοιχεία είναι τέσσερα: η φωτιά, η γη, ο αέρας και το νερό, αναπαριστώντας τα, ύστερα από ειδική αιτιολόγηση, με το τετράεδρο, τον κύβο, το οκτάεδρο και το εικοσάεδρο, αντιστοίχως. Το δωδεκάεδρο, ως «εξέχον στερεό», αναπαριστά το σύμπαν[5].

Στο βιβλίο XIII των *Στοιχείων* τού Ευκλείδου[6] αποδεικνύεται ότι τα πέντε αυτά στερεά είναι *τα μόνα κανονικά*[7] (κυρτά, τρισδιάστατα) πολύεδρα και ότι οι κορυφές τους τοποθετούνται επί σφαίρας[8].]

Έχουμε ήδη δείξει ότι η ομάδα των περιστροφικών συμμετριών τού τετραέδρου είναι ισόμορφη με την εναλλάσσουσα ομάδα A_4. Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε ανάλογα αποτελέσματα και για τα άλλα τέσσερα στερεά.

την αυστηρή διατύπωση και απόδειξη πολλών άλλων. Εικάζεται ότι το 9ο θεώρημα τού X βιβλίου των *Στοιχείων* τού Ευκλείδου, καθώς και η εγγραφή τού οκταέδρου και εικοσαέδρου σε σφαίρα, οφείλονται στον Θεαίτητο.

[2]Ο γερμανός μαθηματικός F. Lindemann (12/4/1852-6/3/1939), ο οποίος είναι περισσότερο γνωστός λόγω τής εκ μέρους του παρασχεθείσας πρώτης αυστηρής απόδειξης τής υπερβατικότητας τού αριθμού π (το 1881), είχε ασχοληθεί επισταμένως και με την εξέταση διαφόρων αρχαιολογικών ευρημάτων από μια μαθηματική οπτική γωνία. Μεταξύ άλλων, υπήρξε ο συγγραφέας τής ιστορικής πραγματείας *Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen* (Sitzungsb. Bayr. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl., Bd. **26**, 1896, 625-768), στην οποία κανείς ανακαλύπτει έναν πραγματικό θησαυρό γνώσεων σχετιζομένων με τον τρόπο τής βαθμιαίας εξοικείωσης πολλών αρχαίων φυλών και λαών με τα κανονικά και ημικανονικά στερεά (συμπεριλαμβανομένων των αρχαίων Κελτών, των Ετρούσκων, των Ελλήνων αποίκων τής Κάτω Ιταλίας κ.ά.) ήδη από την εποχή τού σιδήρου έως και τους Πυθαγορείους.

[3]Για περισσότερες πληροφορίες γύρω από την ιστορία τής ανακάλυψης των κανονικών στερεών βλ. το άρθρο τού W.C. Waterhouse: *The Discovery of the Regular Solids*, Arch. Hist. of Exact Sciences **9**, (1972), 212-221.

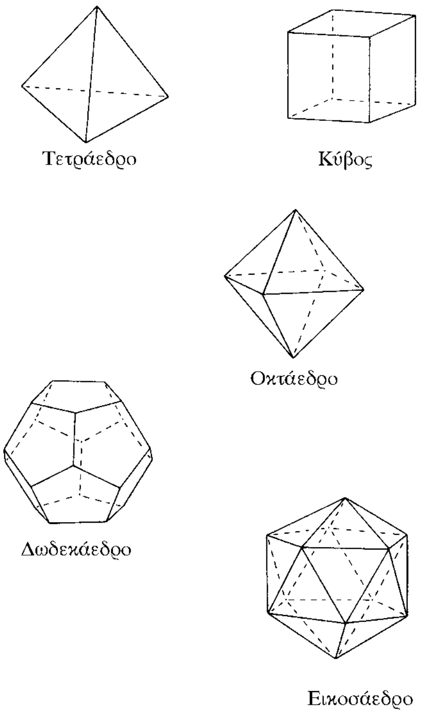
[4]Για μια ενδιαφέρουσα απόδοση τού αρχαίου κειμένου στα νέα ελληνικά, συνοδευόμενη από πληθώρα χρησίμων σχολίων, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο: Πλάτων. *Τίμαιος*, Εισαγωγή-μετάφραση-σχόλια: Β. Κάλφα, Εκδόσεις Πόλις, Αθήνα, 1998. (Βλ. ιδ. σελ. 249-255.)

[5](Βλ. Τίμαιος, εδ. 55c). Μπορεί, μετά την παρέλευση σχεδόν 2400 ετών από τη συγγραφή τού Τιμαίου και 400 ετών από την αναθεώρηση τού Mysterium Cosmographicum τού J. Kepler, η εν λόγω κοσμολογική θεώρηση να φαντάζει παρωχημένη. Ωστόσο, είναι αμφίβολο το κατά πόσον η μέθοδος, η οποία ακολουθείται για τη μαθηματικοποίηση τής δομής των μορίων (εντός τού πλαισίου τής *σύγχρονης* Φυσικής, Χημείας και Μοριακής Βιολογίας), θα είχε τη γνωστή της (εν πολλοίς «γεωμετρική» και «αλγεβρική») μορφή, αν αυτά τα έργα (και η ατομική θεωρία τού Δημοκρίτου) εξέλιπαν από το ιστορικό γίγνεσθαι.

[6]Βλ. Ε. Σταμάτη: *Ευκλείδου Στερεομετρία* (*Στοιχείων βιβλία* XI, XII, XIII). Αρχαίο Κείμενο, Μετάφραση, Επεξηγήσεις, ΟΕΔΒ, Αθήνα, (1957) [σελ. 167-187].

[7]Ένα κυρτό (τρισδιάστατο, συμπαγές) πολύεδρο καλείται **κανονικό** όταν για δυο οιεσδήποτε τριάδες (P_1, E_1, F_1) και (P_2, E_2, F_2) αποτελούμενες από κορυφές P_1, P_2, ακμές E_1, E_2 και πλευρές (έδρες) F_1, F_2, με $P_i \in E_i \subset F_i$ για $i = 1, 2$, υπάρχει πάντοτε μια ισομετρία $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ για την οποία ισχύει: $\varphi(P_1) = P_2, \varphi(E_1) = E_2$ και $\varphi(F_1) = F_2$.

[8]Σε κάθε κανονικό στερεό υπάρχει ένα εσωτερικό του σημείο, το οποίο: (α) ισαπέχει από όλες τις κορυφές του, (β) ισαπέχει από όλες τις έδρες του και (γ) ισαπέχει από όλες τις ακμές του. Κατά συνέπειαν, υπάρχουν τρεις *σφαίρες*: (α) η *περιγεγραμμένη* (που διέρχεται από τις κορυφές του), (β) η *εγγεγραμμένη* (που εφάπτεται στα ορίζοντα επίπεδα των εδρών του) και (γ) η *εφαπτομένη στα μέσα των ακμών του*. Το εν λόγω σημείο αποτελεί το **κέντρο συμμετρίας** τού εκάστοτε θεωρουμένου κανονικού στερεού.

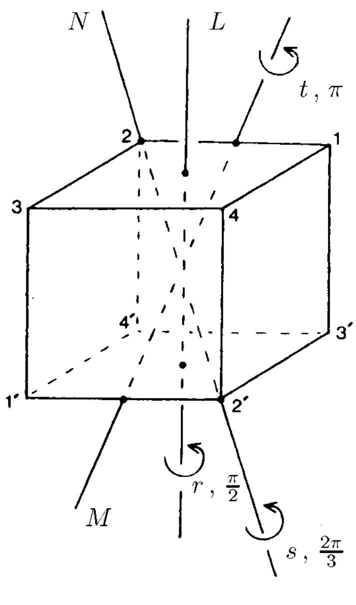


Σχήμα 8.1

Ο *κύβος* διαθέτει είκοσι τέσσερεις περιστροφικές συμμετρίες. Αυτές μπορούν να καταμετρηθούν όπως οι περιστροφικές συμμετρίες τού τετραέδρου, προσδιορίζοντας όλους τους άξονες συμμετρίας μαζί με το πλήθος των διαφορετικών στροφών περί αυτούς τους άξονες. Οι διαφορετικοί τύποι αξόνων παριστώνται μέσω των L, M και N τού σχήματος 8.2. Υπάρχουν τρεις άξονες ομοειδείς τού L, οι οποίοι μας χορηγούν εννέα εν συνόλω περιστροφές, έξι άξονες ομοειδείς τού M, καθένας των οποίων μάς δίνει μια περιστροφή, καθώς και τέσσερεις κύριες διαγώνιοι όπως η N, περί τις οποίες ο κύβος είναι δυνατόν να στραφεί κατά $\frac{2\pi}{3}$ και $\frac{4\pi}{3}$. Άρα, τελικώς, υπάρχουν ακριβώς $(3 \times 3)+(6 \times 1)+(4 \times 2)+1 = 24$ περιστροφικές συμμετρίες τού κύβου (συμπεριλαμβανομένης και τής ταυτοτικής).

Με αρίθμηση των κορυφών τού κύβου θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό τής ομάδας περιστροφικών συμμετριών του με μια υποομάδα τής S_8. Όμως, για λόγους συντομίας, είναι προτιμότερο να παρατηρήσουμε ότι κάθε περιστροφική συμμετρία μετατάσσει τις τέσσερεις κύριες διαγωνίους τού κύβου. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το γεγονός προκειμένου να αποδείξουμε ότι η ομάδα των περιστροφικών συμμετριών τού κύβου είναι ισόμορφη με την S_4.

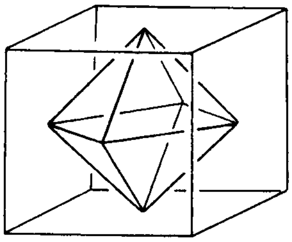
Επιγράφουμε τις κορυφές τού κύβου όπως στο σχ. 8.2 και συμβολίζουμε ως N_k τη διαγώνιο που συνδέει την κορυφή k με την κορυφή k', όπου $1 \leq k \leq 4$. Κάθε περιστροφική συμμετρία μετατάσσει τις N_1, N_2, N_3, N_4, κι επομένως μας δίνει μια μετάταξη των αριθμών $1, 2, 3, 4$. Για παράδειγμα, αναφερόμενοι στο σχ. 8.2, βλέπουμε ότι η r στέλνει την N_1 να απεικονισθεί στην N_2, την N_2 στην N_3, την N_3 στην N_4 και την N_4 στην N_1, δίνοντάς μας τον κύκλο $(1\,2\,3\,4)$, ενώ η s επάγει τον κύκλο $(1\,4\,3)$. Μέσω τής t εναλλάσσονται οι διαγώνιοι N_1 και N_2, ενώ οι N_3 και N_4 στέλνονται να απεικονισθούν στους εαυτούς τους. (Παρότι οι N_3 και N_4 δεν παραμένουν σταθερές, καθεμιά τους έχει τα άκρα της ανταλλαγμένα). Έτσι, η t μάς παρέχει την αντιμετάθεση $(1\,2)$. Έστω G η ομάδα περιστροφικών συμμετριών τού κύβου και έστω $\varphi : G \longrightarrow S_4$ η ως άνω κατασκευασθείσα συνάρτηση. Επειδή προφανώς το γινόμενο δύο περιστροφών απεικονίζεται μέσω τής φ στο γινόμενο των εικόνων τους (ήτοι στη σύνθεση των αντιστοιχιζομένων μετατάξεων), το μόνο που υπολείπεται είναι ο έλεγχος τού ότι η φ είναι μια αμφίρριψη.



Σχήμα 8.2

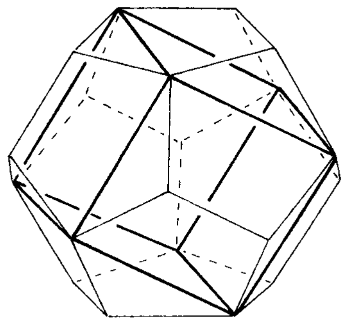
Αυτό μπορεί, βεβαίως, να γίνει μέσω απαλοιφής· με άλλα λόγια, μέσω λεπτομερούς μελέτης τής επίδρασης καθεμιάς των περιστροφών τού κύβου ως προς τις 4 κύριες διαγωνίους του, πράγμα το οποίο οδηγεί σε μια κοπιώδη διαδικασία. Αντ' αυτής, προτιμότερο θα ήταν να θυμηθούμε ότι μια επίρριψη μεταξύ δύο πεπερασμένων συνόλων, τα οποία διαθέτουν τον ίδιο πληθικό αριθμό, οφείλει να είναι μια αμφίρριψη και να αποδείξουμε ότι η φ είναι επιρριπτική. Αλλά αυτό είναι πράγματι πολύ εύκολο. Τόσο ο κύκλος $(1\,2\,3\,4)$ όσο και ο κύκλος $(1\,2)$ ανήκουν στην εικόνα $\varphi(G)$, η οποία είναι μια υποομάδα τής S_4, διότι η φ μεταφέρει τον πολλαπλασιασμό τής G στον πολλαπλασιασμό τής S_4. Επομένως, κάθε λέξη σχηματιζόμενη από τους $(1\,2\,3\,4)$ και $(1\,2)$ οφείλει να ανήκει στην $\varphi(G)$. Επειδή όμως οι $(1\,2\,3\,4)$ και $(1\,2)$ παράγουν από κοινού *ολόκληρη* την ομάδα S_4, έχουμε $\varphi(G) = S_4$, πράγμα που ολοκληρώνει τη συλλογιστική μας.

Συνδέοντας τα βαρύκεντρα όλων των ανά ζεύγη παρακειμένων εδρών τού κύβου είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε ένα κανονικό *οκτάεδρο*, το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύβο (βλ. σχ. 8.3). Η ίδια διαδικασία, εφαρμοζόμενη για το οκτάεδρο, μας παρέχει έναν κύβο εγγεγραμμένο στο οκτάεδρο. Γι' αυτό λέμε πως ο κύβος και το οκτάεδρο είναι **δυϊκά στερεά**. Προφανώς, αυτά τα στερεά διαθέτουν ομοειδείς (ή «δυϊκές») συμμετρίες· δηλαδή, κάθε συμμετρία τού κύβου αποτελεί και συμμετρία τού εντός αυτού εγγεγραμμένου οκταέδρου και αντιστρόφως. Έτσι, δίχως άλλα σχόλια, μπορούμε να πούμε ότι οι ομάδες περιστροφικών συμμετριών τού κύβου και τού οκταέδρου είναι μεταξύ τους ισόμορφες.



Σχήμα 8.3

Υπάρχουν δύο ακόμη δυϊκά κανονικά στερεά, ήτοι το *δωδεκάεδρο* και το *εικοσάεδρο*. Αφήνουμε τον έλεγχο τού μεταξύ τους υφισταμένου δυϊσμού για τον αναγνώστη. Σε ό,τι λοιπόν αφορά στην περιστροφική συμμετρία, αρκεί να εξετάσουμε μόνον ένα εξ αυτών, ας πούμε το δωδεκάεδρο. Το σχήμα 8.4 δείχνει έναν κύβο εντός τού κανονικού δωδεκαέδρου. Κάθε κορυφή τού εν λόγω κύβου είναι μια κορυφή τού δωδεκαέδρου και κάθε ακμή του αποτελεί μια διαγώνιο για ακριβώς μία πενταγωνική έδρα τού δωδεκαέδρου. Μόνο μία από τις πέντε διαγωνίους καθενός πενταγώνου είναι και ακμή τού κύβου μας. Δεν υπάρχει βεβαίως κανένας ειδικός λόγος διάκρισης αυτής τής συγκεκριμένης διαγωνίου· εξάλλου, όπως είναι φυσικό, υπάρχουν επιπλέον τέσσερεις εγγεγραμμένοι κύβοι αντιστοιχούντες στις άλλες τέσσερεις διαγωνίους τού πενταγώνου. Οι εν συνόλω πέντε εγγεγραμμένοι κύβοι μετατάσσονται μέσω καθεμιάς των περιστροφικών συμμετριών τού δωδεκαέδρου.



Σχήμα 8.4

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους κύβους, όπως ακριβώς χρησιμοποιήσαμε τις κύριες διαγωνίους όταν εξετάζαμε τις περιστροφικές συμμετρίες τού κύβου, δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι η ομάδα περιστροφικών συμμετριών ενός κανονικού δωδεκαέδρου είναι ισόμορφη τής A_5. Προτείνουμε τα ακόλουθα βήματα προς μία απόδειξη, αφήνοντας την ανάλυση των λεπτομερειών της για τον αναγνώστη.

(i) Καταμετρήστε τις περιστροφικές συμμετρίες τού κανονικού δωδεκαέδρου και αποδείξτε ότι το πλήθος τους ισούται με εξήντα.

(ii) Παρατηρήστε ότι η τάξη τής ομάδας A_5 είναι ίση με 60.

(iii) Αριθμήστε τους προαναφερθέντες εγγεγραμμένους κύβους με αριθμούς από το 1 έως το 5, ούτως ώστε κάθε περιστροφή τού δωδεκαέδρου σας να δίνει ένα στοιχείο τής ομάδας S_5.

(iv) Δείξτε ότι κάθε 3-κύκλος τής προκειμένης S_5 προέρχεται από μία στροφή περί έναν εκ των αξόνων, οι οποίοι συνδέουν τις -ανά ζεύγη- αντικείμενες κορυφές τού δωδεκαέδρου.

(v) Θυμηθείτε ότι οι 3-κύκλοι τής S_5 παράγουν από κοινού την υποομάδα A_5.

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματά μας στο ακόλουθο:

(8.1) Θεώρημα. *Η ομάδα περιστροφικών συμμετριών τού κανονικού τετραέδρου είναι ισόμορφη τής A_4. Οι ομάδες περιστροφικών συμμετριών τού κύβου και τού κανονικού οκταέδρου είναι ισόμορφες τής S_4. Τέλος, τόσο το κανονικό δωδεκάεδρο όσο και το κανονικό εικοσάεδρο έχουν ομάδες περιστροφικών συμμετριών ισόμορφες τής A_5.*

Τονίζουμε και πάλι ότι αυτές οι ομάδες περιέχουν μόνον περιστροφές. Η *πλήρης* ομάδα συμμετριών τού κανονικού τετραέδρου μελετάται στις ασκήσεις που ακολουθούν. Για τις πλήρεις ομάδες συμμετριών των άλλων στερεών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο κεφάλαιο 10.

Μέχρι τούδε ερμηνεύσαμε τις ομάδες περιστροφικών συμμετριών των κανονικών στερεών ως ομάδες μετατάξεων. Τώρα θα δείξουμε ότι, στην πραγματικότητα, *κάθε* ομάδα είναι ισόμορφη με μια υποομάδα μιας ομάδας μετατάξεων.

(8.2) Θεώρημα τού Cayley. *Κάθε ομάδα G είναι ισόμορφη με μια υποομάδα τής ομάδας S_G.*

Απόδειξη. Κάθε στοιχείο g τής G μάς δίνει μια μετάταξη L_g οριζόμενη ως εξής:

$$L_g : G \longrightarrow G, \quad L_g(x) = gx.$$

(Η συνάρτηση L_g είναι ενριπτική, διότι

$$L_g(x) = L_g(y) \Longrightarrow gx = gy \Longrightarrow g^{-1}gx = g^{-1}gy \Longrightarrow ex = ey \Longrightarrow x = y,$$

αλλά *και* επιρριπτική, διότι εάν $z \in G$, τότε $L_g\left(g^{-1}z\right) = gg^{-1}z = ez = z$). Η L_g ονομάζεται *εξ αριστερών μεταφορά μέσω τού* g. (Σημειωτέον ότι, όταν $G = \mathbb{R}$, η L_g αποτελεί τη φυσική μεταφορά κατά απόσταση g). Έστω τώρα G' το υποσύνολο $\{L_g \mid g \in G\}$ τής S_G. Η πράξη με την οποία είναι εφοδιασμένη η S_G είναι η σύνθεση συναρτήσεων. Ως εκ τούτου, έχουμε

$$L_g(L_h(x)) = L_g(hx) = ghx = L_{gh}(x), \quad \forall x, \ x \in G.$$

Κατά συνέπειαν, το «γινόμενο» δυο τυχόντων στοιχείων τού G' ανήκει στο G'. Το ταυτοτικό στοιχείο ε τής S_G ανήκει στο G' διότι ισούται με την L_e, ενώ το αντίστροφο τής L_g εντός τής S_G ισούται με την $L_{g^{-1}}$ και ανήκει και αυτό στο G'. Τούτο σημαίνει πως το σύνολο G' αποτελεί μια *υποομάδα* τής S_G. Η συνάρτηση

$$G \longrightarrow G', \quad g \longmapsto L_g,$$

είναι προφανώς επιρριπτική και μεταφέρει τον πολλαπλασιασμό τής G στη σύνθεση απεικονίσεων τής G' ($gh \longmapsto L_{gh} = L_gL_h$). Εξάλλου, η εν λόγω συνάρτηση είναι και ενριπτική, αφού από την $L_g = L_h$ έπεται ότι $g = L_g(e) = L_h(e) = h$. Έτσι, κατασκευάσαμε έναν ισομορφισμό μεταξύ τής G και τής υποομάδας G' τής S_G. □

(8.3) Θεώρημα. *Εάν η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα τάξης n, τότε η G είναι ισόμορφη με μια υποομάδα τής S_n.*

Απόδειξη. Εάν, κατά κάποιον τρόπο, αριθμήσουμε τα στοιχεία τής G ως $1, 2, \dots, n$, τότε κάθε μετάταξη τής G επάγει μια μετάταξη των $1, 2, \dots, n$. Έτσι, δημιουργείται ένας ισομορφισμός μεταξύ τής S_G και τής S_n, και επομένως η υποομάδα G' τής S_G είναι ισόμορφη με μια υποομάδα G'' τής S_n. Επειδή η G είναι ισόμορφη τής G' και επειδή η σύνθεση δύο ισομορφισμών είναι ένας ισομορφισμός, η G είναι ισόμορφη τής G''. □

(8.4) Παράδειγμα. Ως παράδειγμα μελετούμε την G'' όταν η G είναι η ομάδα των επιπέδων συμμετριών μιας σκακιέρας, η οποία εισήχθη στην αρχή τού προηγουμένου κεφαλαίου. Από τον πολλαπλασιαστικό κατάλογο παίρνουμε

$$L_r(e) = r, \qquad L_r(r) = r^2 = e,$$

$$L_r(q_1) = rq_1 = q_2, \qquad L_r(q_2) = rq_2 = q_1.$$

Επομένως, η L_r εναλλάσσει τα e και r, καθώς και τα q_1 και q_2. Υπολογίζοντας τις L_{q_1} και L_{q_2} κατά τον ίδιο τρόπο και αντιστοιχίζοντας στα e, r, q_1, q_2 -κατά σειράν- τους αριθμούς $1, 2, 3$ και 4, διαπιστώνουμε ότι η G είναι ισόμορφη με την υποομάδα $\{\varepsilon, (1\,2), (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ τής συμμετρικής ομάδας S_4.

Ασκήσεις

8.1 Επιγράψτε τις ακμές ενός κανονικού τετραέδρου με τους αριθμούς $1, 2, \dots, 6$, ούτως ώστε κάθε περιστροφική συμμετρία τού τετραέδρου να σας παρέχει ένα στοιχείο τής S_6. Μελετήστε λεπτομερώς τα δώδεκα στοιχεία τής S_6, τα οποία εμφαίνονται κατ' αυτόν τον τρόπο, και αποδείξτε ότι απαρτίζουν μια υποομάδα τής S_6.

8.2 Συνδέστε τα βαρύκεντρα όλων των ανά ζεύγη παρακειμένων εδρών ενός κανονικού τετραέδρου και παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα είναι ο σχηματισμός ενός δευτέρου κανονικού, «ανεστραμμένου» τετραέδρου, το οποίο είναι εγγεγραμμένο εντός τού αρχικού.

8.3 Αριθμήστε τις έδρες ενός κύβου μέσω των $1, 2, \dots, 6$. Προσδιορίστε εκείνα τα στοιχεία τής S_6, τα οποία αντιστοιχούν στις στροφές r, s και t τού σχήματος 8.2.

8.4 Τώρα θα παραπέμψουμε στον κύβο με μια λωρίδα μαρκαρισμένη σε καθεμιά των εδρών του, όπως αυτός δείχνεται στο σχήμα 18.1. Ποιες περιστροφικές συμμετρίες τού κύβου στέλνουν τις λωρίδες να απεικονισθούν επί των λωρίδων; Σε ποια υποομάδα τής S_4 αντιστοιχούν αυτές οι (περι)στροφές;

8.5 Σχεδιάστε πέντε δωδεκάεδρα, ούτως ώστε καθένα εξ αυτών να εμπεριέχει έναν διαφορετικό εγγεγραμένο κύβο. Χρησιμοποιήστε τά σχέδιά σας για να εξετάσετε το πώς οι προκείμενοι κύβοι μετατάσσονται δυνάμει των ακολούθων στροφών.

(a) Μια στροφή τού δωδεκαέδρου κατά $\frac{2\pi}{5}$ περί τον άξονα, ο οποίος συνδέει τα βαρύκεντρα δύο αντικειμένων εδρών του.

(b) Μια στροφή κατά π περί τον άξονα, ο οποίος προσδιορίζεται από τα μεσοσημεία δύο αντικειμένων εδρών του.

(c) Μια στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$ περί τον άξονα, ο οποίος συνδέει δύο αντικείμενες κορυφές του.

8.6 Εκτελέστε τη διαδικασία που υπαγορεύεται από το θεώρημα τού Cayley προκειμένου να λάβετε μια υποομάδα τής S_6 ισόμορφη με την D_3.

8.7 Δείξτε πως εφαρμόζοντας το θεώρημα τού Cayley για την ομάδα $\mathbb{R}$ λαμβάνουμε την υποομάδα τής $S_{\mathbb{R}}$, η οποία περιέχει όλες τις μεταφορές τής πραγματικής ευθείας.

8.8 Μετατρέψτε κάθε στοιχείο α τής S_n σε ένα στοιχείο α_* τής S_{n+2} ως εξής: η νέα μετάταξη α_* συμπεριφέρεται ακριβώς όπως και η α επί των ακεραίων $1, 2, \ldots, n$. Εάν η α είναι μια άρτια μετάταξη, τότε η α_* αφήνει τους $n+1$ και $n+2$ σταθερούς, ενώ, εάν η α είναι μια περιττή μετάταξη, η α_* εναλλάσσει τους $n+1$ και $n+2$. Επαληθεύστε το ότι η α_* είναι πάντοτε μια *άρτια* μετάταξη και το ότι η αντιστοίχιση $\alpha \longmapsto \alpha_*$ ορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ τής S_n και μιας υποομάδας τής A_{n+2}. Κατόπιν, μελετήστε λεπτομερώς την εν λόγω υποομάδα όταν $n = 3$.

8.9 Εάν η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα τάξης n, αποδείξτε ότι η G είναι ισόμορφη με μια υποομάδα τής *εναλλάσσουσας ομάδας* A_{n+2}.

8.10 Για κάθε στοιχείο α τής ομάδας S_n ορίστε τή μετάταξη $\alpha_\#$ εντός τής S_{2n} μέσω τού τύπου

$$\alpha_\#(k) = \begin{cases} \alpha(k), & \text{όταν } 1 \leq k \leq n, \\ \alpha(k-n)+n, & \text{όταν } n+1 \leq k \leq 2n. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η $\alpha_\#$ είναι πάντοτε μια άρτια μετάταξη και ότι μέσω τής αντιστοίχισης $\alpha \longmapsto \alpha_\#$ αποκτούμε έναν ισομορφισμό μεταξύ τής S_n και μιας υποομάδας τής A_{2n}. Μελετήστε διεξοδικώς την εν λόγω υποομάδα όταν $n = 3$.

8.11 Ας υποθέσουμε ότι η G συμβολίζει την *πλήρη* ομάδα συμμετριών ενός κανονικού τετραέδρου T και ότι έχουμε υιοθετήσει τον συμβολισμό τον εισαχθέντα στο σχήμα 7.2. Βρείτε μια συμμετρία q τού T, η οποία να επάγει την αντιμετάθεση $(1\,2)$ των κορυφών, και δείξτε ότι η qr επάγει τον 4-κύκλο $(1\,2\,3\,4)$. Κατόπιν, βεβαιωθείτε για το ότι η qr *δεν* είναι ούτε περιστροφή ούτε κατοπτρισμός, αλλά *είναι* εντούτοις το γινόμενο τριών κατοπτρισμών. Τέλος, καταμετρήστε τις συμμετρίες τού T και αποδείξτε ότι η G είναι ισόμορφη τής S_4.

8.12 Εργαζόμενοι με την πλήρη ομάδα συμμετριών τού κύβου δείξτε ότι κάθε μετάταξη των κύριων διαγωνίων του μπορεί να υλοποιηθεί μέσω ακριβώς δύο συμμετριών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Ομάδες πινάκων

Το σύνολο όλων των αντιστρεψίμων $n \times n$ πινάκων, οι οποίοι διαθέτουν πραγματικούς αριθμούς ως εγγραφές τους, σχηματίζει μια ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Υπενθυμίζουμε ότι, εάν οι $A = [a_{i\,j}]$ και $B = [b_{i\,j}]$ είναι δυο πίνακες αυτού τού είδους, τότε η στην i-οστή γραμμή και j-οστή στήλη τού *γινομένου* τους ευρισκομένη εγγραφή ισούται με το άθροισμα

$$a_{i\,1}b_{1\,j} + a_{i\,2}b_{2\,j} + \cdots + a_{i\,n}b_{n\,j}.$$

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός, ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n παίζει τον ρόλο τού μοναδιαίου στοιχείου, ενώ το ανωτέρω γινόμενο AB είναι αντιστρέψιμο με αντίστροφό του το $B^{-1}A^{-1}$.

Κάθε πίνακας A αυτής τής ομάδας καθορίζει έναν αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό

$$\boxed{\quad f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\,A^t \quad}$$

για όλα τα διανύσματα $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, όπου ο A^t συμβολίζει τον ανάστροφο τού A. Επειδή

$$f_{AB}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\,(AB)^t = \mathbf{x}\,B^t A^t = f_A\left(f_B\left(\mathbf{x}\right)\right),$$

βλέπουμε ότι το γινόμενο πινάκων AB καθορίζει τη σύνθεση $f_A f_B$ των γραμμικών μετασχηματισμών f_A και f_B. Κι αντιστρόφως· εάν η $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός και εάν ο A είναι ένας πίνακας ο οποίος τον αναπαριστά ως προς τη συνήθη βάση και των δύο αντιτύπων τού $\mathbb{R}^n$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $f = f_A$. Γι' αυτούς τους λόγους, η εν λόγω ομάδα καλείται **γενική γραμμική ομάδα**, συμβολιζόμενη ως GL_n. Εάν επιθυμούμε να δώσουμε έμφαση στο ότι οι εγγραφές των πινάκων μας είναι ειλημμένες από τους πραγματικούς αριθμούς, τότε γράφουμε ιδιαιτέρως $GL_n(\mathbb{R})$. Αντικαθιστώντας τό $\mathbb{R}$ με το $\mathbb{C}$ παίρνουμε την αντίστοιχη ομάδα $GL_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ αντιστρεψίμων μιγαδικών πινάκων.

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι μεταθετικός όταν $n \geq 2$, οπότε η $GL_2, GL_3, \ldots$ είναι μια οικογένεια απείρων μη αβελιανών ομάδων. Όταν $n = 1$, κάθε πίνακας έχει μία και μόνη εγγραφή, η οποία είναι ένας πραγματικός αριθμός διάφορος τού μηδενός (καθότι ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος), ενώ ο πολλαπλασιασμός πινάκων μετατρέπεται στον συνήθη πολλαπλασιασμό αριθμών. Επομένως έχουμε έναν ισομορφισμό $GL_1 \cong \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Εάν $A \in GL_n$, ο $(n+1) \times (n+1)$ πίνακας

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ανήκει στην GL_{n+1}. Για την κατασκευή τού πίνακα $\widetilde{A}$ επισυνάπτουμε κατ' αρχάς στον A μια πρόσθετη στήλη αποτελούμενη από μηδενικά (οπότε παίρνουμε έναν $n \times (n+1)$ πίνακα), και κατόπιν προσθέτουμε σε αυτόν μία νέα γραμμή, όλες οι εγγραφές τής οποίας είναι ίσες με το μηδέν, με μόνη εξαίρεση την τελευταία, η οποία ισούται με 1. Η συλλογή όλων των κατ' αυτόν τον τρόπο κατασκευαζομένων πινάκων αποτελεί μια *υποομάδα* τής GL_{n+1}, ενώ η συνάρτηση

$$GL_n \longrightarrow GL_{n+1}, \;\; A \longmapsto \widetilde{A},$$

μας δείχνει ότι η GL_n είναι ισόμορφη με αυτήν. Εάν ταυτίσουμε τον $\mathbb{R}^n$ με τον υπόχωρο τού $\mathbb{R}^{n+1}$ τον αποτελούμενο από εκείνα τα διανύσματα, τα οποία έχουν την τελευταία τους συντεταγμένη ίση με το μηδέν, τότε η εφαρμογή τού γραμμικού μετασχηματισμού $f_{\widetilde{A}}$ είναι όπως εκείνη τού f_A στον $\mathbb{R}^n$, καθότι αφήνει την τελευταία συντεταγμένη τού κάθε σημείου αμετάβλητη. Αυτό σημαίνει ότι, γράφοντας $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$f_{\widetilde{A}} : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \text{ όπου } f_{\widetilde{A}}(\mathbf{x}, z) = (f_A(\mathbf{x}), z).$$

Ένας $n \times n$ πίνακας $A = (a_{i\,j})$ λέγεται **ορθογώνιος** όταν $A^t A = I_n$, ήτοι όταν

$$a_{1\,i}a_{1\,j} + a_{2\,i}a_{2\,j} + \cdots + a_{n\,i}a_{n\,j} = \begin{cases} 1, & \text{εάν } i = j \\ 0, & \text{εάν } i \neq j \end{cases}$$

Επομένως, τα διανύσματα στηλών ενός ορθογωνίου πίνακα A έχουν μοναδιαίο μήκος και είναι κάθετα (το ένα προς το άλλο). Σε τεχνική γλώσσα λέμε πως αυτά σχηματίζουν μια **ορθότακτη βάση** τού $\mathbb{R}^n$. Φυσικά, *και* τα διανύσματα γραμμών τού A σχηματίζουν μια ορθότακτη βάση τού $\mathbb{R}^n$ και, επειδή

$$\det\left(A^t A\right) = (\det(A))^2 ,$$

η ορίζουσα τού A ανήκει στο δισύνολο $\{-1, 1\}$. Εάν οι πίνακες A και B είναι ορθογώνιοι, τότε

$$\left(AB^{-1}\right)^t AB^{-1} = \left(B^{-1}\right)^t A^t AB^{-1} = \left(B^t\right)^t A^t AB^{-1} = BA^t AB^{-1} = I_n.$$

Κατά συνέπειαν, και ο AB^{-1} είναι ορθογώνιος, οπότε (κατά το θεώρημα (5.4)) η συλλογή όλων των ορθογωνίων $n \times n$ πινάκων αποτελεί μια υποομάδα τής GL_n. Αυτή η υποομάδα καλείται **ορθογώνια ομάδα** και συμβολίζεται ως O_n. Τα στοιχεία τής O_n τα οποία έχουν ορίζουσα ίση με 1 συγκροτούν μια υποομάδα τής O_n, τη λεγομένη **ειδική ορθογώνια ομάδα** SO_n.

(9.1) Πρόταση. *Εάν $A \in O_n$, τότε ο αντίστοιχος γραμμικός μετασχηματισμός f_A διατηρεί τόσο τις αποστάσεις όσο και την ορθογωνιότητα.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ είναι δυο σημεία τού $\mathbb{R}^n$ κι ας θεωρήσουμε το *εσωτερικό γινόμενο* $f_A(\mathbf{x}) \cdot f_A(\mathbf{y})$ των $f_A(\mathbf{x})$ και $f_A(\mathbf{y})$. Έχουμε

$$\begin{aligned} f_A(\mathbf{x}) \cdot f_A(\mathbf{y}) &= \left(\mathbf{x}A^t\right)\left(\mathbf{y}A^t\right)^t \\ &= \mathbf{x}A^t A\mathbf{y}^t \\ &= \mathbf{x}\mathbf{y}^t = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Επειδή $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$, εξισώνοντας τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ παίρνουμε $\|f_A(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, οπότε ο γραμμικός μετασχηματισμός f_A διατηρεί τα μήκη. Επίσης,

$$\|f_A(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|f_A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| ,$$

πράγμα που σημαίνει ότι ο f_A διατηρεί την απόσταση μεταξύ των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$. Τέλος,

$$f_A(\mathbf{x}) \cdot f_A(\mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0,$$

οπότε, εάν το $\mathbf{x}$ είναι κάθετο προς το $\mathbf{y}$, τότε και το $f_A(\mathbf{x})$ θα είναι κάθετο προς το $f_A(\mathbf{y})$. □

Η επόμενη πρόταση κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση.

(9.2) Πρόταση. *Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ο οποίος διατηρεί τα μήκη είναι τής μορφής $f = f_A$ για κάποιον $A \in O_n$.*

Απόδειξη. Ένας τέτοιος γραμμικός μετασχηματισμός διατηρεί την απόσταση μεταξύ δυο σημείων, διότι

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

καθώς και τις ορθές γωνίες, διότι

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) &= \tfrac{1}{2}\left[\|f(\mathbf{x})\|^2 - \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 + \|f(\mathbf{y})\|^2\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\right] \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Επομένως, ο γραμμικός μετασχηματισμός f απεικονίζει τη συνήθη βάση τού $\mathbb{R}^n$ σε μια ορθότακτη βάση του. Ο πίνακας A, ο οποίος αναπαριστά τον f, έχει ως στήλες του τα στοιχεία τής εν λόγω βάσης, οπότε ο A είναι ορθογώνιος. Εξ αυτού συμπεραίνουμε ότι $f = f_A$ για κάποιον $A \in O_n$. □

Όταν $n \in \{2, 3\}$, τότε είμαστε σε θέση να δώσουμε μια πιο διεξοδική περιγραφή των ορθογωνίων πινάκων (και των αντιστοίχων γραμμικών μετασχηματισμών τους) προερχόμενη από τη Στοιχειώδη Αναλυτική Γεωμετρία. Ας δούμε, κατ' αρχάς, τι συμβαίνει όταν $n = 2$.

(9.3) Πρόταση. *Κάθε ορθογώνιος 2×2 πίνακας αναπαριστά ή μια στροφή τού επιπέδου περί την αρχή των αξόνων ή έναν κατοπτρισμό ως προς μία ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Ένας ορθογώνιος 2×2 πίνακας έχει ορίζουσα ίση με 1 εάν και μόνον εάν αυτός αναπαριστά μια (περι)στροφή.*

Απόδειξη. Εάν $A \in O_2$, τότε τα διανύσματα στηλών τού A είναι δυο διανύσματα που έχουν μοναδιαίο μήκος και είναι κάθετα μεταξύ τους. Εάν υποθέσουμε ότι

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix},$$

τότε το σημείο (a, b) κείται επί τού μοναδιαίου κύκλου, οπότε έχουμε $a = \cos\theta$ και $b = \sin\theta$, για κάποιο θ για το οποίο ισχύει $0 \leq \theta < 2\pi$. Καθώς το (c, d) κείται και αυτό επί τού μοναδιαίου κύκλου και το διάνυσμα, το οποίο ορίζεται μέσω αυτού είναι κάθετο προς το διάνυσμα το οριζόμενο μέσω τού (a, b), έχουμε $c = \cos\phi$ και $d = \sin\phi$, όπου $\phi \in \{\theta + \frac{\pi}{2}, \theta - \frac{\pi}{2}\}$. Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

ήτοι έναν πίνακα που ανήκει στην SO_2 και αναπαριστά μια *στροφή* κατά θ με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού (αριστερόστροφη φορά), ενώ στη δεύτερη περίπτωση παίρνουμε

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

ήτοι έναν πίνακα με ορίζουσα ίση με -1, ο οποίος αναπαριστά έναν *κατοπτρισμό ως προς μία ευθεία*, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία $\frac{\theta}{2}$ με το θετικό μέρος τού άξονα των x. $\square$

(9.4) Σημείωση. Έχουμε ήδη παρουσιάσει την ομάδα SO_2, έστω και μεταμφιεσμένη, ως τον μοναδιαίο κύκλο C εντός τού μιγαδικού επιπέδου. Πράγματι· επειδή κάθε σημείο τού C είναι τής μορφής $e^{i\theta}$, όπου $0 \leq \theta < 2\pi$, η συνάρτηση

$$C \longrightarrow SO_2, \quad e^{i\theta} \longmapsto \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

μας παρέχει έναν ισομορφισμό, οπότε $C \cong SO_2$. $\square$

Εν συνεχεία, θα μεταβούμε στην περιγραφή των ορθογωνίων πινάκων όταν έχουμε $n = 3$.

(9.5) Πρόταση. *Κάθε πίνακας που ανήκει στην SO_3 αναπαριστά μια στροφή τού $\mathbb{R}^3$ περί έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων των συντεταγμένων.* (*Και αντιστρόφως· κάθε (περι)στροφή τού $\mathbb{R}^3$, η οποία διατηρεί την αρχή των αξόνων των συντεταγμένων σταθερή, αναπαριστάται μέσω ενός πίνακα τής SO_3.*)

Απόδειξη. Έστω $A \in SO_3$. Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο $\det(A - \lambda I)$ έχει βαθμό ίσο με τρία, οπότε οφείλει να έχει μία τουλάχιστον πραγματική θέση μηδενισμού. Αυτό σημαίνει ότι ο A διαθέτει μία τουλάχιστον πραγματική ιδιοτιμή. Επειδή το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός πίνακα ισούται με την ορίζουσά του, το 1 θα αποτελεί κατ' ανάγκην μια ιδιοτιμή του. Εάν το $\mathbf{v}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα, το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1, τότε η ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ορίζεται μέσω τού $\mathbf{v}$, παραμένει σταθερή κατόπιν εφαρμογής τού γραμμικού μετασχηματισμού f_A. Εξάλλου, επειδή ο f_A διατηρεί και τις ορθές γωνίες, οφείλει να απεικονίζει το επίπεδο, το οποίο είναι κάθετο προς το $\mathbf{v}$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων, στον εαυτό του. Ως εκ τούτου, εάν κατασκευάσουμε μια ορθότακτη βάση τού $\mathbb{R}^3$, ούτως ώστε το πρώτο της στοιχείο να είναι το μοναδιαίου μήκους διάνυσμα $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, τότε ο πίνακας f_A *ως προς αυτήν* θα είναι ένα στοιχείο τής SO_3 υπό τη μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix}$$

Προφανώς, $B \in SO_2$, οπότε ο γραμμικός μετασχηματισμός f_A μας δίνει μια στροφή ως προς τον άξονα τον καθοριζόμενο μέσω τού $\mathbf{v}$.

Και αντιστρόφως· λύνοντας την άσκηση 9.11 θα διαπιστώσετε ότι κάθε (περι)στροφή τού $\mathbb{R}^3$, η οποία διατηρεί την αρχή των αξόνων των συντεταγμένων σταθερή, αναπαριστάται μέσω ενός πίνακα τής SO_3. □

(9.6) Πρόταση. *Κάθε πίνακας $A \in O_3 \smallsetminus SO_3$ αναπαριστά έναν κατοπτρισμό ως προς ένα επίπεδο, ακολουθούμενον από μια περιστροφή.*

Απόδειξη. Για κάθε $A \in O_3 \smallsetminus SO_3$ έχουμε

$$AU \in SO_3,$$

όπου

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Σημειώστε ότι ο πίνακας U αναπαριστά έναν κατοπτρισμό ως προς το (x, y)-επίπεδο. Επειδή $A = (AU)\,U$, παίρνουμε τελικώς

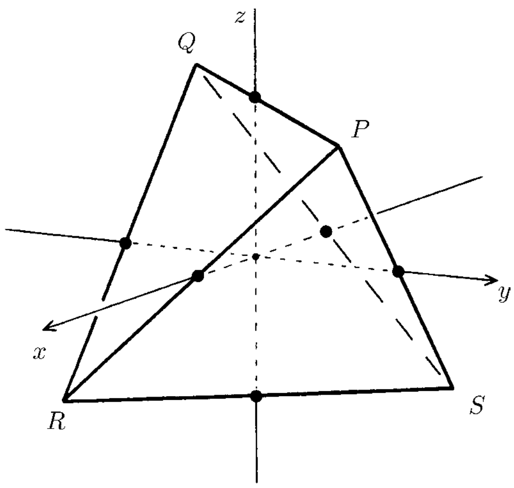
$$f_A = f_{AU} f_U,$$

όπου ο γραμμικός μετασχηματισμός f_{AU} αναπαριστά μια περιστροφή (κατά την πρόταση (9.5)). □

Λόγω τής (9.5), συχνά λέμε ότι η ομάδα SO_3 είναι **η ομάδα των περιστροφών** στη διάσταση τρία. Εάν ένα κανονικό στερεό είναι κατά τέτοιον τρόπο τοποθετημένο εντός τού $\mathbb{R}^3$, ώστε το βαρύκεντρό του να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, τότε όλες οι συμμετρίες του αναπαριστώνται μέσω πινάκων τής O_3. Επομένως, η ομάδα των περιστροφικών συμμετριών του είναι ισόμορφη με μια υποομάδα τής SO_3, ενώ η πλήρης ομάδα των συμμετριών του είναι ισόμορφη με μια υποομάδα τής O_3.

(9.7) Παράδειγμα. Τα σημεία $P = (1, 1, 1)$, $Q = (-1, -1, 1)$, $R = (1, -1, -1)$ και $S = (-1, 1, -1)$ αποτελούν τις κορυφές ενός κανονικού τετραέδρου, το οποίο έχει την αρχή των αξόνων ως βαρύκεντρό του (βλ. σχήμα 9.1). Οι δύο στροφές περί τον άξονα, ο οποίος διέρχεται από το σημείο P, μετατάσσουν κυκλικώς τους άξονες των συντεταγμένων και αναπαριστώνται μέσω των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 9.1

Ο άξονας συμμετρίας ο οποίος συνδέει τα μεσοσημεία των ακμών PQ και RS είναι ο άξονας των z, ενώ η στροφή κατά π περί αυτόν τον άξονα αναπαριστάται μέσω τού πίνακα

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Από την άλλη μεριά, ο κατοπτρισμός ως προς το επίπεδο το καθοριζόμενο από τα P, Q και το $(0, 0, 0)$ διατηρεί τα P και Q σταθερά, ενώ εναλλάσσει τα R και S. Ο αντίστοιχος πίνακας είναι ο

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Τέλος, η συμμετρία η οποία μετατάσσει κυκλικώς τα P, Q, R, S δεν είναι ούτε (περι)στροφή ούτε κατοπτρισμός, αλλά γράφεται ως γινόμενο τριών κατοπτρισμών. Ποιος είναι ο πίνακάς της;

Θα ταξινομήσουμε τις πεπερασμένες υποομάδες τής SO_3 στο κεφάλαιο 19. *Καθεμιά εξ αυτών είναι ισόμορφη είτε με μια κυκλική ομάδα είτε με μια διεδρική ομάδα είτε με την περιστροφική ομάδα συμμετριών ενός κανονικού στερεού.*

Οι πίνακες τής $GL_n(\mathbb{C})$ αντιστοιχούν σε γραμμικούς μετασχηματισμούς τού συνήθους n-διαστάτου μιγαδικού διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}^n$. Εάν $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, τότε το

μήκος τού $\mathbf{z}$ ισούται με την τετραγωνική ρίζα τού $\mathbf{z}\mathbf{z}^*$, όπου το * τίθεται για να υποδηλώνει τη μιγαδική συζυγία. Ένας μιγαδικός πίνακας U καλείται **μοναδιακός πίνακας** όταν ο $U^{*\,t}U$ ισούται με τον μοναδιαίο πίνακα. Οι μοναδιακοί πίνακες είναι ακριβώς εκείνοι οι πίνακες, οι αντίστοιχοι γραμμικοί μετασχηματισμοί των οποίων διατηρούν το μήκος εντός τού $\mathbb{C}^n$. Η συλλογή όλων των $n \times n$ μοναδιακών πινάκων αποτελεί μια υποομάδα τής $GL_n\left(\mathbb{C}\right)$, η οποία καλείται **μοναδιακή ομάδα** και συμβολίζεται ως U_n. Τα στοιχεία τής U_n, τα οποία έχουν ορίζουσα ίση με 1, συγκροτούν τη λεγομένη **ειδική μοναδιακή ομάδα** SU_n.

Ασκήσεις

9.1 Ποιες από τις κατωτέρω συλλογές $n \times n$ πραγματικών πινάκων σχηματίζουν ομάδες ως προς τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

(a) Οι διαγώνιοι πίνακες με μη μηδενικές διαγώνιες εγγραφές.

(b) Οι συμμετρικοί πίνακες.

(c) Εκείνοι οι αντιστρέψιμοι πίνακες, οι οποίοι έχουν ως εγγραφές μόνον ακεραίους αριθμούς.

(d) Εκείνοι οι αντιστρέψιμοι πίνακες, οι οποίοι έχουν ως εγγραφές μόνον ρητούς αριθμούς.

9.2 Αποδείξτε ότι το σύνολο όλων των πινάκων τής μορφής

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ και } ac \neq 0,$$

αποτελεί μια υποομάδα τής $GL_2(\mathbb{R})$.

9.3 Αποδείξτε ότι τα στοιχεία τής $GL_n(\mathbb{R})$, τα οποία έχουν ως εγγραφές τους μόνον ακεραίους αριθμούς και ορίζουσα ίση με $+1$ ή με -1, σχηματίζουν μια υποομάδα τής $GL_n(\mathbb{R})$. Αυτή η υποομάδα συμβολίζεται ως $GL_n(\mathbb{Z})$.

9.4 Τα σημεία $(1, -\sqrt{3}), (1, \sqrt{3})$ και $(-2, 0)$ προσδιορίζουν ένα ισοσκελές τρίγωνο. Μελετήστε διεξοδικώς εκείνους τους πίνακες εντός τής O_2, οι οποίοι αναπαριστούν επίπεδες συμμετρίες τού εν λόγω τριγώνου. Κατόπιν εκτελέστε τούς ίδιους υπολογισμούς και για το κανονικό εξάγωνο, οι κορυφές τού οποίου έχουν ως συντεταγμένες τους τις $(2, 0), (1, \sqrt{3}), (-1, \sqrt{3}), (-2, 0), (-1, -\sqrt{3})$ και $(1, -\sqrt{3})$.

9.5 Έστω ότι

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Αποδείξτε την ισχύ των ισοτήτων

$$A_\theta A_\varphi = A_{\theta+\varphi},\ \ A_\theta B_\varphi = B_{\theta+\varphi},\ \ B_\theta A_\varphi = B_{\theta-\varphi} \ \text{και}\ B_\theta B_\varphi = A_{\theta-\varphi},$$

όπου οι γωνίες εντός των πινάκων διαβάζονται $\bmod 2\pi$. Δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία αυτών των ισοτήτων.

9.6 Υιοθετήστε τους συμβολισμούς τής προηγούμενης άσκησης και μελετήστε λεπτομερώς τα γινόμενα $A_\theta B_\varphi A_\theta^{-1}$, $B_\varphi A_\theta B_\varphi$ και $A_\theta B_\varphi A_\theta^{-1} B_\varphi$. Κατόπιν αποτιμήστε καθένα εξ αυτών όταν $\theta = \frac{\pi}{3}$ και $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

9.7 Συμπληρώστε καταλλήλως τις εγγραφές τού

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & . \\ 0 & 1 & . \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & . \end{bmatrix}$$

ούτως ώστε να λάβετε ένα στοιχείο τής SO_3, και αντιστοίχως, ένα στοιχείο τής $O_3 \setminus SO_3$. Περιγράψτε τούς γραμμικούς μετασχηματισμούς, οι οποίοι αναπαριστώνται μέσω αυτών των πινάκων.

9.8 Δείξτε ότι αμφότεροι οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

αναπαριστούν περιστροφές και βρείτε τούς άξονες αυτών των περιστροφών.

9.9 Έστω ότι τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ είναι τρία αμοιβαίως ορθογώνια διανύσματα εντός τού $\mathbb{R}^3$ και ότι ο A είναι ο πίνακας, ο οποίος έχει το $\mathbf{v}_1$ ως πρώτη του στήλη, το $\mathbf{v}_2$ ως δεύτερή του στήλη και το $\mathbf{v}_3$ ως τρίτη του στήλη. Εάν

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

δείξτε ότι ο πίνακας ABA^{-1} αναπαριστά έναν κατοπτρισμό ως προς το επίπεδο, το οποίο περιέχει τα $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$, και ότι ο $-\ ABA^{-1}$ αναπαριστά μια στροφή κατά π περί τον άξονα τον καθοριζόμενο από το $\mathbf{v}_3$. Προσδιορίστε τόν πίνακα που αναπαριστά έναν κατοπτρισμό ως προς το επίπεδο $x + \sqrt{3y} = z$.

9.10 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση η οριζόμενη από τον τύπο

$$A \longmapsto \begin{cases} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \text{όταν } A \in SO_2, \\ \\ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & \text{όταν } A \in O_2 \smallsetminus SO_2, \end{cases}$$

αποτελεί έναν ισομορφισμό μεταξύ τής O_2 και μιας υποομάδας τής SO_3. Παχύνετε τα κανονικά πολύγωνα τής άσκησης 9.4 προκειμένου να κατασκευάσετε οριζόντιες τριγωνικές και εξαγωνικές πλάκες και κατόπιν καταγράψτε όλα εκείνα τα στοιχεία τής SO_3, τα οποία αναπαριστούν τις περιστροφικές συμμετρίες αυτών των πλακών.

9.11 Δείξτε πως κάθε περιστροφή τού $\mathbb{R}^3$, η οποία αφήνει την αρχή των αξόνων σταθερή, αναπαριστάται μέσω ενός πίνακα που ανήκει στην SO_3. Υποθέστε αρχικώς ότι ο άξονας τής περιστροφής είναι ο z-άξονας και κατόπιν πραγματευθείτε τη γενική περίπτωση.

9.12 Αποδείξτε ότι οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

σχηματίζουν μια υποομάδα τής SO_3 και προσδιορίστε τις αντίστοιχες περιστροφές. Σχεδιάστε τό γράφημα τού

$$\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \bigm| x^2 + (y-3)^2 \leq 25,\ x^2 + (y+3)^2 \leq 25,\ -1 \leq z \leq 1\}$$

και δείξτε ότι πρόκειται για ένα «*κανονικό δίπλευρο μόρφωμα*», οι περιστροφικές συμμετρίες τού οποίου είναι ακριβώς οι ως άνω αναπαριστώμενες. Συχνά ονομάζουμε την ομάδα των περιστροφικών συμμετριών αυτού τού στερεού **διεδρική ομάδα** D_2.

9.13 Δείξτε ότι οι $n \times n$ μοναδιακοί πίνακες συγκροτούν μια ομάδα ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού και ότι η ορίζουσα καθενός εξ αυτών είναι ένας μιγαδικός αριθμός με απόλυτη τιμή ίση με το 1.

9.14 Δείξτε ότι τα στοιχεία τής U_2 τίθενται υπό τη μορφή

$$\begin{bmatrix} z & w \\ -e^{i\theta}w^* & e^{i\theta}z^* \end{bmatrix}$$

όπου $z, w \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}$ και $zz^* + ww^* = 1$. Ποιοι εξ αυτών των πινάκων ανήκουν στην SU_2;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Γινόμενα ομάδων

Το **(ευθύ) γινόμενο** $G \times H$ δυο ομάδων G και H κατασκευάζεται ως ακολούθως: τα στοιχεία τού $G \times H$ είναι διατεταγμένα ζεύγη (g,h), όπου $g \in G$ και $h \in H$, ενώ ο πολλαπλασιασμός επ' αυτού ορίζεται μέσω τής

$$(g,h)(g',h') = (gg',hh').$$

Αμφότερα τα g, g' είναι στοιχεία τής G και, πολλαπλασιαζόμενα εντός τής G, μας δίνουν την πρώτη «συντεταγμένη» αυτού τού γινομένου. Η δεύτερη «συντεταγμένη» προέρχεται από τον πολλαπλασιασμό τού h με το h' εντός τής H. Επομένως, το (gg',hh') είναι ένα στοιχείο τού καρτεσιανού γινομένου $G \times H$. Η προσεταιριστικότητα έπεται άμεσα από την προσεταιριστικότητα των πολλαπλασιαστικών πράξεων των G και H. Επίσης, το (e,e) είναι το μοναδιαίο στοιχείο, ενώ το (g^{-1},h^{-1}) είναι το αντίστροφο τού στοιχείου (g,h). (Ελπίζουμε να μην προξενείται σύγχυση από τη χρήση τού ιδίου συμβόλου για τα μοναδιαία στοιχεία των G και H.)

Δυνάμει τής συνάρτησης

$$G \times H \longrightarrow H \times G, \;\; (g,h) \longmapsto (h,g),$$

είναι προφανές ότι $G \times H \cong H \times G$. Εάν κάποια από τις G και H τύχει να είναι άπειρη ομάδα, τότε η $G \times H$ είναι και αυτή άπειρη ομάδα· ειδάλλως, η τάξη τής $G \times H$ ισούται με το γινόμενο των τάξεων των G και H. Εάν αμφότερες οι G και H είναι αβελιανές, τότε και η $G \times H$ είναι αβελιανή. Και αντιστρόφως· η G είναι ισόμορφη με την υποομάδα $\{\,(g,e) |\, g \in G\}$ τής $G \times H$ (μέσω τού ισομορφισμού $g \longmapsto (g,e)$), ενώ η H είναι ισόμορφη με την υποομάδα $\{\,(e,h) |\, h \in H\}$ τής $G \times H$

(μέσω τού ισομορφισμού $h \longmapsto (e, h)$), οπότε, εάν η $G \times H$ είναι αβελιανή, τότε αμφότερες οι G και H είναι αβελιανές. Το ευθύ γινόμενο $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ μιας πεπερασμένης συλλογής ομάδων έχει, κατ' αναλογίαν προς την $G \times H$, ως στοιχεία του n-άδες $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, όπου $x_i \in G_i$, $\forall i$, $1 \leq i \leq n$, και ως πολλαπλασιασμό του τον

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_1', x_2', \ldots, x_n') = (x_1 x_1', x_2 x_2', \ldots, x_n x_n').$$

Και εδώ, η εναλλαγή τής διάταξης των συντεταγμένων μάς δίνει ισόμορφες ομάδες.

(10.1) Παραδείγματα. (i) Τα έξι στοιχεία τής ομάδας $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ είναι τα εξής:

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (0,2),\ (1,2).$$

Αυτά «συνδυάζονται» μεταξύ τους μέσω τής πράξης

$$(x, y) + (x', y') = (x +_2 x', y +_3 y')\,.$$

Ίσως να μας φαίνεται κάπως αξιοπερίεργο το ότι χρησιμοποιούμε την πρόσθεση ως πράξη μας, αλλά εντούτοις θα τηρούμε την προκειμένη σύμβαση οποτεδήποτε συναντούμε (ευθέα) γινόμενα κυκλικών ομάδων. Σημειωτέον ότι, επαναλαμβανόμενη η πρόσθεση τού στοιχείου $(1,1)$ με τον εαυτό του μπορεί να μας δώσει όλα τα στοιχεία τής $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Κατά συνέπειαν, η $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ είναι *κυκλική* και οφείλει, γι' αυτόν τον λόγο, να είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_6$. Ένας απτός ισομορφισμός μεταξύ των $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ και $\mathbb{Z}_6$ προκύπτει μέσω τής ακόλουθης απεικόνισης στοιχείων:

$$\begin{array}{lll} (0,0) \longmapsto 0, & (1,1) \longmapsto 1, & (0,2) \longmapsto 2, \\ (1,0) \longmapsto 3, & (0,1) \longmapsto 4, & (1,2) \longmapsto 5. \end{array}$$

(ii) Κατ' αναλογίαν, μπορούμε να καταγράψουμε τα τέσσερα στοιχεία τής ομάδας $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ως $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, χρησιμοποιώντας, εν προκειμένω, πρόσθεση κατά μόδιο 2 και στις δύο συντεταγμένες. Κάθε στοιχείο διάφορο τού $(0,0)$ έχει τάξη ίση με 2, οπότε η $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ δεν είναι κυκλική. Η $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ είναι ισόμορφη με την ομάδα των επιπέδων συμμετριών μιας σκακιέρας (βλ. κεφάλαιο 7), μέσω τής ακόλουθης απεικόνισης στοιχείων:

$$\begin{array}{ll} (0,0) \longmapsto e, & (1,0) \longmapsto q_1, \\ (0,1) \longmapsto q_2, & (1,1) \longmapsto r, \end{array}$$

και συχνά καλείται **ομάδα τού Klein**.

(iii) Συμβολίζοντας με το $\mathbb{R}^n$ το ευθύ γινόμενο n αντιτύπων τής ομάδας $\mathbb{R}$ μπορούμε, ως συνήθως, να εκλαμβάνουμε τα στοιχεία τού $\mathbb{R}^n$ ως διανύσματα υπό τη μορφή $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ και τη συνήθη πρόσθεση

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ ως πράξη τής ομάδας $\mathbb{R}^n$.

(10.2) Θεώρημα. *Η ομάδα $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ είναι κυκλική εάν και μόνον εάν έχουμε* μκδ$(m, n) = 1$.

Απόδειξη. Έστω k η τάξη τού στοιχείου $(1, 1)$ εντός τής $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. Αθροίζοντας το $(1, 1)$ με τον εαυτό του k φορές παίρνουμε το $(0, 0)$, οπότε έχουμε

$$(k(\text{mod } m), k(\text{mod } n)) = (0, 0).$$

Αυτό σημαίνει ότι αμφότεροι οι m και n αποτελούν διαιρέτες τού k. Εάν μκδ$(m, n) = 1$, τότε το mn οφείλει να διαιρεί τον k, οπότε κατ' ανάγκην $k = mn$. Ως εκ τούτου, σε αυτήν την περίπτωση, η $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ είναι κυκλική με το $(1, 1)$ ως γεννήτορά της.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο d είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και n και ότι $d > 1$. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, εν προκειμένω, δεν είναι κυκλική. Προς τούτο ορίζουμε τους $m' = \frac{m}{d}$ και $n' = \frac{n}{d}$. Για κάθε στοιχείο (x, y) τής $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ έχουμε

$$\begin{aligned} m'dn'(x, y) &= (m'dn'x(\text{mod } m), m'dn'y(\text{mod } n)) \\ &= (mn'x(\text{mod } m), m'ny(\text{mod } n)) \\ &= (0, 0), \end{aligned}$$

οπότε η τάξη τού (x, y) είναι $\leq m'dn'$. Επομένως η ομάδα $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ δεν είναι κυκλική, διότι δεν περιέχει κανένα στοιχείο τάξης mn. □

(10.3) Παράδειγμα. Έστω I ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας και έστω $J = -I$. Τόσο ο I όσο και ο J μετατίθενται με κάθε άλλον πίνακα τής O_3, ενώ από κοινού σχηματίζουν μια υποομάδα τής O_3 τάξης 2. Θα δείξουμε ότι η O_3 είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο τής SO_3 και τής εν λόγω υποομάδας. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi : SO_3 \times \{I, J\} \longrightarrow O_3, \quad (A, U) \longmapsto AU.$$

Η φ διατηρεί την αλγεβρική δομή των μετεχουσών ομάδων, καθότι ισχύει

$$\varphi((A, U)(B, V)) = \varphi(AB, UV) = ABUV = \varphi(A, U)\varphi(B, V)$$

για τυχόντες $A, B \in SO_3$ και τυχόντες $U, V \in \{I, J\}$. Εάν $\varphi(A, U) = \varphi(B, V)$, τότε $AU = BV$, δίνοντάς μας την ισότητα $\det(AU) = \det(BV)$. Όμως

$$\det(AU) = \det(A)\det(U) = \det(U)$$

λόγω τού ότι $A \in SO_3$ και -παρομοίως- $\det(BV) = \det(V)$. Επομένως, $U = V$ και $A = B$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι η φ είναι ενριπτική. Υπολείπεται ο έλεγχος τού ότι η φ είναι και επιρριπτική. Δοθέντος ενός $A \in O_3$, είτε $A \in SO_3$, οπότε έχουμε $A = \varphi(A, I)$, είτε $AJ \in SO_3$, οπότε έχουμε $A = \varphi(AJ, J)$. Τούτο ολοκληρώνει την επιχειρηματολογία μας.

Σημειώστε ότι (δυνάμει τής $I \longmapsto 0$, $J \longmapsto 1$) η $\{I, J\}$ είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_2$. Άρα

$$SO_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong O_3.$$

Αναλόγως δείχνει κανείς ότι

$$SO_n \times \mathbb{Z}_2 \cong O_n$$

για κάθε *περιττό* n. Αντιθέτως, όταν ο n είναι *άρτιος*, τότε *δεν* υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των $SO_n \times \mathbb{Z}_2$ και O_n (βλ. άσκηση 10.9).

Το ανωτέρω παράδειγμα γενικεύεται ως εξής: εάν τα H και K είναι δυο υποσύνολα μιας ομάδας G, τότε συμβολίζουμε ως HK τη συλλογή όλων των γινομένων xy, όπου $x \in H$ και $y \in K$.

(10.4) Θεώρημα. *Εάν οι H και K είναι δυο υποομάδες τής ομάδας G, για τις οποίες ισχύει $HK = G$ και $H \cap K = \{e\}$, και εάν -ταυτοχρόνως- κάθε στοιχείο τής H μετατίθεται με κάθε στοιχείο τής K, τότε*

$$G \cong H \times K.$$

Απόδειξη. Θα μιμηθούμε ό,τι κάναμε στο παράδειγμα (10.3). Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\varphi : H \times K \longrightarrow G, \quad (x, y) \longmapsto xy.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \varphi((x,y)(x',y')) &= \varphi(xx', yy') \\ &= xx'yy' \\ &= xyx'y' \left(\begin{array}{c} \text{επειδή κάθε στοιχείο τής } H \\ \text{μετατίθεται με κάθε στοιχείο τής } K \end{array} \right) \\ &= \varphi(x,y)\,\varphi(x',y'). \end{aligned}$$

Επομένως, η φ μεταφέρει τον πολλαπλασιασμό τής $H \times K$ σε εκείνον τής G. Εξάλλου, εάν $\varphi(x, y) = \varphi(x', y')$, τότε

$$xy = x'y' \Longrightarrow (x')^{-1} x = y'y^{-1}.$$

Επειδή το αριστερό μέλος αυτής τής τελευταίας εξίσωσης ανήκει στην H και το δεξιό στην K, *και* τα δύο μέλη θα ανήκουν στην τομή $H \cap K = \{e\}$. Άρα

$$(x')^{-1} x = e = y'y^{-1} \Longrightarrow x = x', y = y',$$

οπότε η φ είναι αμφιρριπτική. Η φ είναι όμως και επιρριπτική, καθότι η ισότητα $HK = G$ σημαίνει ότι κάθε στοιχείο τής G γράφεται ως ένα γινόμενο xy, όπου $x \in H$ και $y \in K$. Άρα η φ είναι όντως ένας ισομορφισμός ομάδων. $\square$

(10.5) Σημείωση. Ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$f_J : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \longmapsto -\mathbf{x},$$

καλείται **κεντρική αντιστροφή**. Τοποθετώντας εντός τού $\mathbb{R}^3$ ένα κανονικό στερεό, το οποίο είναι διάφορο τού κανονικού τετραέδρου, κατά τέτοιον τρόπο, ώστε το βαρύκεντρό του να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, διαπιστώνουμε ότι η κεντρική αντιστροφή συγκαταλέγεται πάντοτε στις συμμετρίες του. Εάν η G είναι η πλήρης ομάδα συμμετριών τού θεωρουμένου στερεού και εάν η H είναι η υποομάδα της η αποτελούμενη από τις περιστροφικές συμμετρίες του (οπότε τα στοιχεία της αντιστοιχούν σε πίνακες ανήκοντες στην SO_3), τότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα (10.4), παίρνουμε τους ισομορφισμούς

$$G \cong H \times \langle f_J \rangle \cong H \times \mathbb{Z}_2.$$

Από αυτούς συνάγεται η ακόλουθη:

(10.6) Πρόταση. *Οι πλήρεις ομάδες συμμετριών τού κύβου και τού οκταέδρου είναι ισόμορφες τής $S_4 \times \mathbb{Z}_2$, ενώ οι πλήρεις ομάδες συμμετριών τού δωδεκαέδρου και τού εικοσαέδρου είναι ισόμορφες τής $A_4 \times \mathbb{Z}_2$.*

Ασκήσεις

10.1 Έστω ότι οι G και H είναι δυο ομάδες. Εάν το ευθύ γινόμενό τους $G \times H$ είναι μια κυκλική ομάδα, δείξτε ότι αμφότερες οι G και H είναι κυκλικές.

10.2 Δείξτε ότι η $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ δεν είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}$.

10.3 Αποδείξτε ότι η $\mathbb{C}$ είναι ισόμορφη τής $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και ότι η $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι ισόμορφη τής $\mathbb{R}_{>0} \times C$.

10.4 Πολύ συχνά στη βιβλιογραφία, ως συνώνυμο τής *ομάδας τού Klein*, χρησιμοιείται **η ομάδα των τεσσάρων στοιχείων** (Vierergruppe) που συμβολίζεται με το γράμμα V. Δείξτε ότι η $\mathbb{Z}_3 \times V$ είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$.

10.5 Δείξτε ότι η «διαγώνιος» $\{(x,x) \mid x \in G\}$ μιας ομάδας G είναι μια υποομάδα τής $G \times G$, η οποία είναι ισόμορφη με την ίδια την G.

10.6 Έστω ότι οι G και H είναι δυο ομάδες. Εάν η A είναι μια υποομάδα τής G και η B μια υποομάδα τής H, βεβαιωθείτε για το ότι η $A \times B$ είναι μια υποομάδα τής $G \times H$. Βρείτε μια υποομάδα τής $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, η οποία δεν είναι κατασκευασμένη κατ' αυτόν τον τρόπο (ήτοι δεν μπορεί να γραφεί ως το ευθύ γινόμενο δύο υποομάδων τής $\mathbb{Z}$).

10.7 Ποιες από τις ακόλουθες ομάδες είναι μεταξύ τους ισόμορφες;

$$\mathbb{Z}_{24}, \qquad D_4 \times \mathbb{Z}_3, \qquad D_{12}, \qquad A_4 \times \mathbb{Z}_2,$$

$$\mathbb{Z}_2 \times D_6, \qquad S_4, \qquad \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_2.$$

10.8 Το στοιχείο $(\varepsilon, 1)$ τής $A_n \times \mathbb{Z}_2$ μετατίθεται με κάθε στοιχείο τής $A_n \times \mathbb{Z}_2$. Χρησιμοποιήστε αυτήν την ιδιότητα για να αποδείξετε ότι η $A_n \times \mathbb{Z}_2$ δεν είναι ισόμορφη με την S_n όταν $n \geq 3$.

10.9 Για ποιον λόγο η κατασκευή τού παραδείγματος (10.3) δεν οδηγεί στη θέσπιση ενός ισομορφισμού μεταξύ των ομάδων $SO_n \times \mathbb{Z}_2$ και O_n όταν ο n είναι άρτιος; Ποια στοιχεία τής O_n μετατίθενται με κάθε στοιχείο τής O_n; Δείξτε ότι όντως (όταν ο n είναι άρτιος) οι $SO_n \times \mathbb{Z}_2$ και O_n δεν είναι μεταξύ τους ισόμορφες.

10.10 Έστω G το σύνολο, τα στοιχεία τού οποίου είναι άπειρες ακολουθίες $(a_1, a_2, \dots)$ ακεραίων αριθμών. Αυτό καθίσταται (όπως διαπιστώνεται εύκολα) μια ομάδα μέσω τής πράξης

$$(a_1, a_2, \dots)(b_1, b_2, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots).$$

Αποδείξτε ότι $G \times \mathbb{Z} \cong G \times G \cong G$.

10.11 Δείξτε ότι, όταν ο n είναι περιττός, η D_{2n} είναι ισόμορφη τής $D_n \times \mathbb{Z}_2$.

10.12 Εάν η G είναι μια μη κυκλική ομάδα τάξης 4, δείξτε ότι η G οφείλει να είναι ισόμορφη με την ομάδα τού Klein.

10.13 Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα στην οποία κάθε στοιχείο, που είναι διάφορο τού μοναδιαίου, έχει τάξη ίση με 2. Αποδείξτε ότι η G είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αντιτύπων τής $\mathbb{Z}_2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Το θεώρημα τού Lagrange

Ας θεωρήσουμε μια πεπερασμένη ομάδα G *μαζί* με μια υποομάδα της H. *Σχετίζονται οι τάξεις των G και H κατά κάποιον συγκεκριμένο τρόπο*; Υποθέτοντας ότι $H \subsetneqq G$, επιλέγουμε ένα στοιχείο $g_1 \in G \smallsetminus H$ και πολλαπλασιάζουμε κάθε στοιχείο τής H εξ αριστερών με το g_1 προκειμένου να σχηματίσουμε το σύνολο

$$g_1 H = \{\, g_1 h \mid h \in H \}.$$

Ισχυριζόμαστε (α) ότι ο πληθικός αριθμός τού $g_1 H$ ισούται με την τάξη τής H και (β) ότι $H \cap g_1 H = \varnothing$. Το (α) έπεται από το γεγονός ότι η συνάρτηση

$$H \longrightarrow g_1 H, \quad h \longmapsto g_1 h,$$

είναι αμφιρριπτική. (Η αντίστροφός της κατασκευάζεται κατόπιν πολλαπλασιασμού καθενός στοιχείου τού $g_1 H$ -εξ αριστερών- με το g_1^{-1}). Για την απόδειξη τού (β) ας υποθέσουμε ότι $x \in H \cap g_1 H$. Τότε υπάρχει ένα $h_1 \in H$, τέτοιο ώστε να ισχύει $x = g_1 h_1$. Τούτο όμως σημαίνει ότι $g_1 = x h_1^{-1}$, πράγμα το οποίο αντιφάσκει προς την αρχική επιλογή τού g_1 ($g_1 \in G \smallsetminus H$). Άρα $H \cap g_1 H = \varnothing$.

Εάν η ένωση των H και $g_1 H$ καλύπτει ολόκληρη την G (ή, για να ακριβολογήσουμε, το υποκείμενο σύνολό της), τότε προφανώς $|G| = 2\,|H|$. Ειδάλλως, μπορούμε να επιλέξουμε ένα στοιχείο $g_2 \in G \smallsetminus (H \cup g_1 H)$ και να σχηματίσουμε (κατ' αναλογίαν) το σύνολο $g_2 H$. Σημειωτέον ότι *και* αυτό το σύνολο θα έχει πληθικό αριθμό ίσο με την τάξη τής H, ενώ η τομή του με την H θα είναι κενή. Επιπροσθέτως θα ισχύει $g_1 H \cap g_2 H = \varnothing$. Πράγματι· εάν υπήρχε κάποιο $x \in g_1 H \cap g_2 H$, τότε θα υπήρχαν στοιχεία h_1 και h_2 τής H, ούτως ώστε

$$x = g_1 h_1 = g_2 h_2 \Longrightarrow g_2 = g_1 \left(h_1 h_2^{-1} \right).$$

Η τελευταία όμως ισότητα είναι αναληθής, διότι $g_2 \notin g_1H$. Εάν τα g_1H, g_2H και H καλύπτουν ολόκληρη την G, τότε $|G| = 3\,|H|$. Ειδάλλως, μπορούμε και πάλι να επιλέξουμε ένα στοιχείο $g_3 \in G\smallsetminus(H \cup g_1H \cup g_2H)$ και να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία. Επειδή η G είναι πεπερασμένη, η διαδικασία αυτή λήγει αναγκαστικώς ύστερα από πεπερασμένου πλήθους βήματα. Έστω k το πλήθος των απαιτουμένων βημάτων. Τότε η G θα έχει διασπασθεί γραφόμενη ως αποσυνδετή ένωση $k+1$ συνόλων (ήτοι ως ένωση $k+1$ -ανά δύο ξένων μεταξύ τους- συνόλων)

$$H, g_1H, g_2H, \ldots, g_kH$$

καθένα των οποίων έχει πληθικό αριθμό ίσο με την τάξη τής H. Κατά συνέπειαν, $|G| = (k+1)\,|H|$. Εξ αυτού έπεται το ακόλουθο:

(11.1) Θεώρημα τού Lagrange. *Η τάξη μιας υποομάδας μιας πεπερασμένης ομάδας διαιρεί πάντοτε την τάξη τής ομάδας.*

Στο σημείο αυτό προσήκει το να επιστήσουμε την προσοχή τού αναγνώστη στο εξής: εάν η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα και ο m ένας διαιρέτης τής τάξης τής G, κανείς δεν μας εγγυάται ότι η G θα περιέχει μια υποομάδα τάξης m. Για παράδειγμα, όπως θα διαπιστώσουμε αργότερα, η A_4 δεν διαθέτει καμία υποομάδα τάξης 6. Αυτό είναι αρκετά απογοητευτικό, αλλά εντούτοις κάτι μπορεί να περισωθεί. Στο κεφάλαιο 13 θα αποδείξουμε ότι, εάν ένας *πρώτος* αριθμός p διαιρεί την τάξη τής G, τότε η G οφείλει πράγματι να περιέχει μία τουλάχιστον υποομάδα τάξης p. Άλλο ένα υπαρξιακό θεώρημα υποομάδων βρίσκεται στο κεφάλαιο 20, το οποίο πραγματεύεται τα θεωρήματα τού Sylow.

Θα ήταν λίαν διδακτικό το να εκτελέσουμε την ανωτέρω περιγραφείσα διαδικασία για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η G είναι η S_3 και η υποομάδα της H η $\{\varepsilon, (1\,3)\}$. Επιλέγουμε ένα g_1 εκτός τής H, ας πούμε το $g_1 = (1\,2\,3)$. Τότε

$$g_1H = \{(1\,2\,3)\varepsilon, (1\,2\,3)(1\,3)\} = \{(1\,2\,3), (1\,3)\}.$$

Κατόπιν επιλέγουμε ένα στοιχείο $g_2 \in G\smallsetminus(H \cup g_1H)$, ας πούμε το $g_2 = (1\,2)$. Τότε

$$g_2H = \{(1\,2)\varepsilon, (1\,2)(1\,3)\} = \{(1\,2), (1\,3\,2)\}.$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο η ομάδα μας διασπάσθηκε σε τρία σαφώς διακεκριμένα υποσύνολα H, g_1H και g_2H, καθένα των οποίων περιέχει δύο στοιχεία.

Ακολουθούν ορισμένα χρήσιμα πορίσματα τού θεωρήματος τού Lagrange.

(11.2) Πόρισμα. *Η τάξη κάθε στοιχείου μιας πεπερασμένης ομάδας G διαιρεί την τάξη τής G.*

Απόδειξη. Αρκεί να λάβετε υπ' όψιν ότι η τάξη ενός στοιχείου ισούται με την τάξη τής υποομάδας, η οποία παράγεται από αυτό, και να εφαρμόσετε το θεώρημα τού Lagrange. □

(11.3) Πόρισμα. *Εάν μια ομάδα G έχει τάξη ίση με έναν πρώτο αριθμό, τότε η G είναι κυκλική.*

Απόδειξη. Εάν $x \in G \setminus \{e\}$, τότε η τάξη τού x πρέπει να ισούται με την τάξη τής G (κατά το πόρισμα (11.2)). Επομένως, $\langle x \rangle = G$. □

(11.4) Πόρισμα. *Για κάθε στοιχείο x μιας πεπερασμένης ομάδας G έχουμε*

$$x^{|G|} = e.$$

Απόδειξη. Έστω m η τάξη τού x. Από το πόρισμα (11.2) γνωρίζουμε ότι $|G| = km$ για κάποιον ακέραιο k. Επομένως, $x^{|G|} = x^{km} = (x^m)^k = e$. □

Έστω n ένας θετικός ακέραιος και έστω R_n το σύνολο

$$R_n = \{\, m \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq m \leq n-1 \;\text{ και }\; \text{μκδ}\,(m,n) = 1 \,\}\,.$$

Ισχυριζόμαστε ότι ο *πολλαπλασιασμός κατά μόδιο* n καθιστά το R_n μια ομάδα. (Αποδεικνύοντας αυτόν τον ισχυρισμό, απαντούμε και σε ένα ερώτημα το οποίο ετέθη στο τέλος τού κεφαλαίου 3). Ας υποθέσουμε ότι οι m_1 και m_2 ανήκουν στο R_n. Τότε μκδ$(m_1 m_2, n) = 1$, οπότε μκδ$(m_1 m_2 (\text{mod } n), n) = 1$, γεγονός, μέσω τού οποίου επαληθεύουμε το ότι το σύνολο R_n είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό κατά μόδιο n. Η ισχύς τής προσεταιριστικότητας μπορεί να ελεγχθεί εξίσου εύκολα (πρβλ. άσκηση 3.5), ενώ το 1 παίζει τον ρόλο τού μοναδιαίου στοιχείου. Τέλος, εάν $m \in R_n$, τότε υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί x και y, ούτως ώστε να ισχύει η $xm + yn = 1$. Διαβάζοντας αυτήν την εξίσωση κατά μόδιο n, λαμβάνουμε ένα πολλαπλασιαστικό αντίστροφο τού m, ήτοι το $x (\text{mod } m)$. Προφανώς, η ομάδα R_n είναι αβελιανή και η τάξη της ισούται με $\varphi(n)$, όπου εδώ η φ είναι η λεγομένη *φι-συνάρτηση τού Euler*. [(Σ.τ.Μ.): Το $\varphi(n)$ ισούται εξ *ορισμού* με τον πληθικό αριθμό τού συνόλου R_n.]

(11.5) Παραδείγματα. (i) Τα στοιχεία τής R_9 είναι τα $1, 2, 4, 5, 7, 8$, ενώ $\varphi(9) = 6$. Επειδή έχουμε $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16 (\text{mod } 9) = 7$ και $2^5 = 32 (\text{mod } 9) = 5$, βλέπουμε ότι η R_9 είναι μια κυκλική ομάδα παραγόμενη από το 2.

(ii) Τα στοιχεία τής R_{16} είναι τα $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$, ενώ $\varphi(16) = 8$. Υποθέτοντας ότι $H = \langle 3 \rangle$ και ότι $K = \langle 15 \rangle$, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι $H = \{1, 3, 9, 11\}$ και ότι $K = \{1, 15\}$, $HK = R_{16}$ και $H \cap K = \{1\}$. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με το θεώρημα (10.4), έχουμε

$$R_{16} \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2.$$

(11.6) Θεώρημα τού Euler. *Εάν* $\mu\kappa\delta(x,n) = 1$, *τότε ο* $x^{\varphi(n)}$ *είναι ισότιμος με το* 1 *κατά μόδιο* n.

Απόδειξη. Διαιρώντας τόν x με τον n παίρνουμε υπόλοιπο m, όπου $m \in R_n$. Από το πόρισμα (11.4) γνωρίζουμε ότι ο $m^{\varphi(n)}$ είναι ισότιμος με το 1 κατά μόδιο n. Επειδή ο $x^{\varphi(n)}$ είναι ισότιμος με τον $m^{\varphi(n)}$ κατά μόδιο n, έπεται το ζητούμενο. □

(11.7) Μικρό θεώρημα τού Fermat. *Εάν ο* p *είναι ένας πρώτος αριθμός και εάν ο* x *δεν είναι ένα πολλαπλάσιο τού* p, *τότε ο* x^{p-1} *είναι ισότιμος με το* 1 *κατά μόδιο* p.

Απόδειξη. Εφαρμόστε το θεώρημα τού Euler λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ισχύει η ισότητα $\varphi(p) = p - 1$. □

Σύμφωνα με το θεώρημα τού Lagrange, η τάξη μιας τυχούσας υποομάδας H τής A_4 πρέπει να διαιρεί το $12 = |A_4|$. Οι «ακραίες» περιπτώσεις, όπου $|H| = 1$ ή $|H| = 12$, καλύπτονται από τις υποομάδες $H = \{\varepsilon\}$ και $H = A_4$, αντιστοίχως. Όταν $|H| = 2$, τότε η H περιέχει το μοναδιαίο στοιχείο, καθώς και ένα στοιχείο τάξης 2, οπότε υπάρχουν ακριβώς τρεις δυνατότητες:

$$\{\varepsilon, (1\,2)(3\,4)\}\,,\ \ \{\varepsilon, (1\,3)(2\,4)\}\,,\ \ \{\varepsilon, (1\,4)(2\,3)\}\,.$$

Κατ' αναλογίαν υπάρχουν τέσσερεις υποομάδες H τής A_4 τάξης 3, ήτοι οι

$$\begin{array}{ll} \{\varepsilon, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}\,, & \{\varepsilon, (1\,2\,4), (1\,4\,2)\}\,, \\ \{\varepsilon, (1\,3\,4), (1\,4\,3)\}\,, & \{\varepsilon, (2\,3\,4), (2\,4\,3)\}\,. \end{array}$$

Επίσης, υπάρχει μία και μόνη υποομάδα τής A_4 τάξης 4, ήτοι η

$$H = \{\varepsilon, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}\,.$$

Η μοναδικότητά της έγκειται στο ότι τα λοιπά στοιχεία τής A_4 είναι 3-κύκλοι και στο ότι, κατά το πόρισμα (11.2), κάθε 3-κύκλος δεν μπορεί να ανήκει σε μια ομάδα τάξης 4.

Όπως προαναφέραμε, η A_4 δεν διαθέτει καμία υποομάδα τάξης 6. Πράγματι· υποθέτοντας ότι $|H| = 6$, θα καταλήξουμε σε άτοπο. Εάν ένας 3-κύκλος ανήκει στην H, τότε το ίδιο ισχύει και για το αντίστροφό του, οπότε το πλήθος των 3-κύκλων εντός τής H είναι ένας *άρτιος* θετικός ακέραιος. Αυτός δεν μπορεί να ισούται με το 6, διότι χρειαζόμαστε «χώρο» για τη συμπερίληψη τού μοναδιαίου στοιχείου· εάν ισούται με 4 και οι τέσσερεις 3-κύκλοι είναι οι $\alpha, \alpha^{-1}, \beta$ και β^{-1}, τότε τα στοιχεία

$$\varepsilon, \alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}, \alpha\beta, \alpha\beta^{-1}$$

είναι ανά δύο διαφορετικά και ανήκουν στην H, πράγμα αδύνατον όταν $|H| = 6$. Έτσι, η μοναδική περίπτωση που πρέπει να εξετασθεί είναι εκείνη κατά την οποία εντός τής H υπάρχουν ακριβώς δύο 3-κύκλοι. Σε αυτή λοιπόν την περίπτωση, η H θα πρέπει να περιέχει την υποομάδα

$$\{\varepsilon, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}.$$

Όμως επειδή το 4 δεν διαιρεί το 6, το θεώρημα τού Lagrange αποκλείει και αυτήν την περίπτωση. Ως εκ τούτου, συνάγουμε ότι όντως *δεν* υπάρχει *καμία* υποομάδα H τής A_4 τάξης 6.

Ασκήσεις

11.1 Εκτελέστε τη διαδικασία, η οποία υπαγορεύεται από την απόδειξη τού θεωρήματος τού Lagrange, για τις $G = D_6$, $H = \langle r \rangle$, κατόπιν για τις $G = D_6$, $H = \langle r^3 \rangle$ και, τέλος, για τις $G = A_4$, $H = \langle (2\,3\,4) \rangle$.

11.2 Έστω H μια υποομάδα μιας ομάδας G. Αποδείξτε ότι

$$g_1 H = g_2 H \iff g_1^{-1} g_2 \in H.$$

11.3 Εάν οι H και K είναι πεπερασμένες υποομάδες μιας ομάδας G και εάν οι τάξεις τους είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί, δείξτε ότι η τομή $H \cap K$ είναι ένα μονοσύνολο (ήτοι το μοναδιαίο στοιχείο).

11.4 Υποθέστε ότι η τάξη μιας ομάδας G ισούται με το γινόμενο δύο διακεκριμένων πρώτων αριθμών. Δείξτε ότι κάθε γνήσια υποομάδα τής G οφείλει να είναι κυκλική.

11.5 Δοθέντων δυο υποσυνόλων X και Y μιας ομάδας G, ορίστε ως XY το σύνολο όλων των γινομένων xy, όπου $x \in X$ και $y \in Y$. Εάν αμφότερα τα X και Y είναι πεπερασμένα, το Y είναι μια υποομάδα τής G και, επιπροσθέτως, το XY περιέχεται στο X, αποδείξτε ότι ο πληθικός αριθμός τού X είναι ένα πολλαπλάσιο τού πληθικού αριθμού τού Y.

11.6 Εάν οι m και n έχουν το 1 ως μέγιστο κοινό διαιρέτη, δείξτε ότι η R_{mn} είναι ισόμορφη τής ομάδας γινομένου $R_m \times R_n$. Χρησιμοποιήστε αυτήν την ιδιότητα για να επιβεβαιώσετε το ότι οι ομάδες R_{20} και $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ είναι μεταξύ τους ισόμορφες.

11.7 Έστω ότι ο n είναι ένας θετικός ακέραιος και ότι ο m είναι ένας διαιρέτης τού $2n$. Δείξτε ότι η D_n περιέχει μια υποομάδα τάξης m.

11.8 Περιέχει η A_5 μια υποομάδα τάξης m για κάθε διαιρέτη m τού 60;

11.9 Έστω ότι η G είναι μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα και ότι ο m είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των τάξεων των στοιχείων της. Αποδείξτε ότι η G περιέχει ένα στοιχείο τάξης m.

11.10 Παραθέστε ένα παράδειγμα μιας πεπερασμένης μη αβελιανής ομάδας για την οποία το συμπέρασμα τής προηγούμενης άσκησης είναι εσφαλμένο.

11.11 Εάν η H είναι μια υποομάδα μιας πεπερασμένης ομάδας G και εάν $|G| = m\,|H|$, διασκευάστε καταλλήλως την απόδειξη τού θεωρήματος τού Lagrange, ούτως ώστε να δείξετε ότι $g^m \in H$ για όλα τα $g \in G$.

11.12 Αποδείξτε ότι η R_p είναι μια κυκλική ομάδα όταν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

Διαμερίσεις

Μια **διαμέριση** (ή **διαμέλιση** ή **διαμελισμός**) ενός συνόλου X είναι μια αποσύνθεση τού X σε μη κενά, ανά δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, η ένωση των οποίων δίνει ολόκληρο το X. Στην απόδειξη τού θεωρήματος τού Lagrange υπεισήλθε η διαμέριση μιας ομάδας σε υποσύνολα, καθένα από τα οποία έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με εκείνο μιας δεδομένης υποομάδας. Στο παρόν κεφάλαιο θα εξηγήσουμε το πώς κανείς μπορεί να *αναγνωρίζει* τις διαμερίσεις.

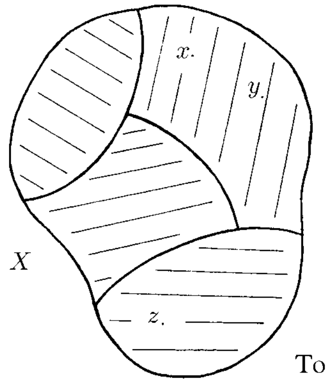
Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε μια διαμέριση ενός συνόλου X και ότι τα x και y είναι δυο στοιχεία τού X. Θα λέμε ότι το x **σχετίζεται με το** y (ή ότι τα x και y είναι (μεταξύ τους) **σχετισμένα**) όταν το x ανήκει σε εκείνο το υποσύνολο, στο οποίο ανήκει και το y. Η επαλήθευση των ακολούθων ιδιοτήτων είναι άμεση:

(a) Κάθε $x \in X$ σχετίζεται με τον εαυτό του.

(b) Εάν το x σχετίζεται με το y, τότε και το y σχετίζεται με το x, για οιαδήποτε στοιχεία x, y τού συνόλου X.

(c) Εάν το x σχετίζεται με το y και το y σχετίζεται με το z, τότε και το x σχετίζεται με το z, για οιαδήποτε στοιχεία x, y, z τού συνόλου X.

Οι ιδιότητες (a), (b), (c) ενδέχεται να φαίνονται κάπως αφηρημένες, αλλά το σχήμα 12.1 μας βοηθά στην καλύτερη διαισθητική κατανόησή τους. Οι γραμμοσκιασμένες περιοχές αναπαριστούν τα διαφορετικά υποσύνολα τής εικονογραφημένης διαμέρισης.



Το x σχετίζεται με το y.

Το x δεν σχετίζεται με το z.

Σχήμα 12.1

Τώρα θα αλλάξουμε την οπτική μας γωνία. Έστω X ένα σύνολο και έστω $\mathcal{R}$ ένα υποσύνολο τού καρτεσιανού γινομένου $X \times X$. Με άλλα λόγια, το $\mathcal{R}$ είναι μια συλλογή διατεταγμένων ζευγών (x, y), οι «συντεταγμένες» των οποίων ανήκουν στο σύνολο X. *Δοθέντων δυο στοιχείων x και y τού X, θα λέμε ότι* **το** x **σχετίζεται με το** y *όταν το διατεταγμένο ζεύγος συμβαίνει να ανήκει στο $\mathcal{R}$.* Όταν -ταυτοχρόνως- οι ανωτέρω ιδιότητες (a), (b), (c) τίθενται σε ισχύ, τότε ονομάζουμε το $\mathcal{R}$ **σχέση ισοδυναμίας** επί τού συνόλου X. Για κάθε $x \in X$ η συλλογή

$$\mathcal{R}(x) = \{ y \in X \mid \text{το } y \text{ σχετίζεται με το } x \}$$

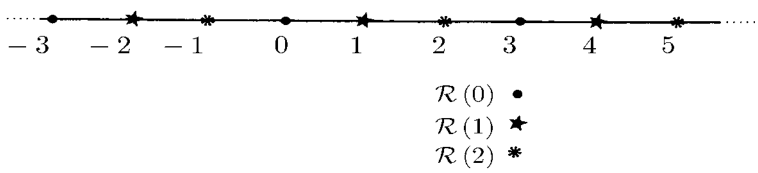
όλων των στοιχείων τού X τα οποία σχετίζονται με το x καλείται **κλάση ισοδυναμίας** τού x.

(12.1) Θεώρημα. $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$ *οποτεδήποτε έχουμε* $(x, y) \in \mathcal{R}$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $(x, y) \in \mathcal{R}$ και ότι $z \in \mathcal{R}(x)$. Τότε το z σχετίζεται με το x· αλλά το x σχετίζεται και με το y, οπότε, κατά την ιδιότητα (c), το z σχετίζεται με το y. Επομένως, $z \in \mathcal{R}(y)$, απ' όπου έπεται ότι $\mathcal{R}(x) \subseteq \mathcal{R}(y)$. Εξάλλου, σύμφωνα με την ιδιότητα (b), είναι γνωστό ότι $(y, x) \in \mathcal{R}$, οπότε η εναλλαγή των ρόλων των x και y μάς δίνει και τον αντίστροφο εγκλεισμό $\mathcal{R}(y) \subseteq \mathcal{R}(x)$. □

(12.2) Παράδειγμα. Έστω $X = \mathbb{Z}$ και έστω ότι το $\mathcal{R}$ αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ για τα οποία η διαφορά $x - y$ διαιρείται με το 3. Προφανώς, το $x - x = 0$ διαιρείται με το 3, εάν $x - y$ διαιρείται με το 3, τότε και το

$y-x$ διαιρείται με το 3, και, τέλος εάν τα $x-y, y-z$ διαιρούνται με το 3, τότε και η διαφορά $x-z=(x-y)+(y-z)$ διαιρείται με το 3. Κάθε ακέραιος αριθμός σχετίζεται είτε με το 0 είτε με το 1 είτε με το 2. Κατά συνέπειαν, υπάρχουν τρεις σαφώς διακεκριμένες κλάσεις ισοδυναμίας. Η κλάση ισοδυναμίας τού 0 αποτελείται από όλα τα πολλαπλάσια τού 3, εκείνη τού 1 από όλους τους ακεραίους οι οποίοι είναι ισότιμοι με το 1 κατά μόδιο 3, και τέλος, εκείνη τού 2 από όλους τους ακεραίους οι οποίοι είναι ισότιμοι με το 2 κατά μόδιο 3. Ας σημειωθεί ότι οι $\mathcal{R}(0)$, $\mathcal{R}(1)$ και $\mathcal{R}(2)$ συγκροτούν μια διαμέριση τού $\mathbb{Z}$ (βλ. σχ. 12.2). Αυτό το παράδειγμα μας παρέχει μια ένδειξη για το πώς οφείλει να διατυπωθεί το επόμενό μας θεώρημα.



Σχήμα 12.2

(12.3) Θεώρημα. *Οι σαφώς διακεκριμένες κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσης ισοδυναμίας επί ενός συνόλου X συγκροτούν μια διαμέριση τού X.*

Απόδειξη. Κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι μη κενή, διότι η $\mathcal{R}(x)$ περιέχει πάντοτε το x (σύμφωνα με την ιδιότητα (a)). Εάν $\mathcal{R}(x) \cap \mathcal{R}(y) \neq \varnothing$, τότε θα υπάρχει κάποιο στοιχείο $z \in \mathcal{R}(x) \cap \mathcal{R}(y)$, οπότε το z θα σχετίζεται με αμφότερα τα x και y. Κατά την ιδιότητα (b), το x σχετίζεται με το z, κι επομένως θα σχετίζεται και με το y (βάσει τής ιδιότητας (c)). Εξ αυτού συνάγουμε ότι $\mathcal{R}(x)=\mathcal{R}(y)$, που σημαίνει ότι δυο οιεσδήποτε κλάσεις ισοδυναμίας, οι οποίες διαθέτουν μη κενή τομή, οφείλουν να ταυτίζονται. Τέλος, επειδή κάθε x ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας του $\mathcal{R}(x)$, η ένωση όλων των κλάσεων ισοδυναμίας μάς δίνει ολόκληρο το σύνολο X. $\square$

(12.4) Παράδειγμα. Αντικαθιστώντας το 3 τού προηγουμένου παραδείγματος με τον θετικό ακέραιο αριθμό n παίρνουμε μια κλάση ισοδυναμίας επί τού $\mathbb{Z}$, η οποία διαμερίζει το $\mathbb{Z}$ σε n κλάσεις ισοδυναμίας

$$\mathcal{R}(0), \mathcal{R}(1), \ldots, \mathcal{R}(n-1).$$

Αυτές οι κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζονται ιδιαιτέρως **κλάσεις ισοτιμίας**. Ένας ακέραιος αριθμός x ανήκει στην $\mathcal{R}(m)$ εάν και μόνον εάν ο x είναι ισότιμος με τον m κατά μόδιο n.

(12.5) Παράδειγμα. Έστω H μια υποομάδα μιας ομάδας G και έστω $\mathcal{R}$ η συλλογή όλων των διατεταγμένων ζευγών $(x, y) \in G \times G$ για τα οποία ισχύει $y^{-1}x \in H$. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί τής G. (Πράγματι· για κάθε $x \in G$ έχουμε $x^{-1}x = e \in H$, εάν $y^{-1}x \in H$, τότε

$$x^{-1}y = (y^{-1}x)^{-1} \in H,$$

ενώ, εάν $y^{-1}x$ και $z^{-1}y$ ανήκουν στην H, τότε $z^{-1}x = \left(z^{-1}y\right)\left(y^{-1}x\right) \in H$). Η κλάση ισοδυναμίας ενός συγκεκριμένου στοιχείου $g \in G$ αποτελείται από όλα εκείνα τα $x \in G$, τα οποία έχουν την ιδιότητα: $g^{-1}x \in H$. Το $g^{-1}x$ ανήκει στην H ακριβώς όταν ισχύει $x = gh$ για κάποιο στοιχείο h τής H. Επομένως,

$$\mathcal{R}(g) = gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

Το σύνολο gH καλείται η **αριστερή πλευρική κλάση** τής H η προσδιοριζόμενη μέσω τού g. Κατά το θεώρημα (12.3), μας είναι γνωστό ότι οι σαφώς διακεκριμένες αριστερές πλευρικές κλάσεις τής H εντός τής G συγκροτούν μια διαμέριση τής G, πράγμα το οποίο εκφράζει ό,τι ακριβώς χρειαστήκαμε για την απόδειξη τού θεωρήματος τού Lagrange. Εάν αλλάξουμε την $\mathcal{R}$ μετατρέποντάς τη στη συλλογή όλων των διατεταγμένων ζευγών $(x, y) \in G \times G$ για τα οποία ισχύει $xy^{-1} \in H$, τότε θα αποκτήσουμε και πάλι μια σχέση ισοδυναμίας επί τής G. Αυτή τη φορά η κλάση ισοδυναμίας τού $g \in G$ είναι η **δεξιά πλευρική κλάση** $Hg = \{h\, g \mid h \in H\}$.

Μέχρις εδώ δεν εμφανίσθηκε κάτι το νέο στο προσκήνιο. Απλώς διεκπεραιώσαμε μια απολύτως ικανοποιητική απόδειξη τού θεωρήματος τού Lagrange (χωρίς το (12.3)) κάνοντας χρήση τής κοινής λογικής. Η δυναμικότητα τού θεωρήματος (12.3) έγκειται στη *γενικότητά του*. Αυτή μάς επιτρέπει τον γρήγορο και εύκολο έλεγχο για το ότι ορισμένες αποσυνθέσεις συνόλων αποτελούν διαμερίσεις. Δύο εφαρμογές τού (12.3) παρεμφαίνονται σε ό,τι ακολουθεί· και οι δύο θα παίξουν σημαντικό ρόλο σε κατοπινά κεφάλαια.

(12.6) Παράδειγμα. Έστω ότι τα x και y είναι δυο στοιχεία μιας ομάδας G. Λέμε πως το x είναι **συζυγές** τού y όταν ισχύει η ισότητα

$$gxg^{-1} = y$$

για κάποιο $g \in G$. Η συλλογή όλων των στοιχείων, τα οποία είναι συζυγή ενός δεδομένου στοιχείου, καλείται **κλάση συζυγίας**. Ισχυριζόμαστε ότι οι σαφώς διακεκριμένες κλάσεις συζυγίας συγκροτούν μια διαμέριση τής G. Έστω $\mathcal{R}$ το υποσύνολο τού $G \times G$ που αποτελείται από τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y), για τα οποία το x είναι συζυγές τού y. Κάθε $x \in G$ είναι συζυγές τού εαυτού του, επειδή $exe^{-1} = x$. Εάν το x είναι συζυγές τού y, ήτοι εάν $gxg^{-1} = y$, τότε και το y είναι συζυγές τού

x, καθότι $g^{-1}yg = x$. Τέλος, εάν το x είναι συζυγές τού y και το y συζυγές τού z, ήτοι εάν $g_1 x g_1^{-1} = y$ και $g_2 y g_2^{-1} = z$, τότε το x είναι συζυγές και τού z, διότι

$$(g_2 g_1)\, x \,(g_2 g_1)^{-1} = g_2 \left(g_1 x g_1^{-1}\right) g_2^{-1} = g_2 y g_2^{-1} = z.$$

Κατά συνέπειαν, το $\mathcal{R}$ αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τής G και οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας, ήτοι οι κλάσεις συζυγίας που προαναφέραμε, διαμερίζουν την G. Οι κλάσεις συζυγίας πρόκειται να μελετηθούν λεπτομερώς για διάφορες ομάδες στο κεφάλαιο 14.

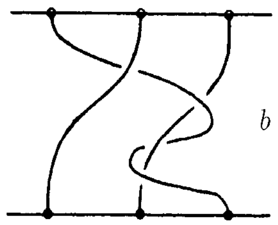
(12.7) Παράδειγμα. Έστω X ένα σύνολο και έστω G μια υποομάδα τής S_X, τέτοια ώστε κάθε στοιχείο τής G να μετατάσσει τα στοιχεία τού X. Έστω $\mathcal{R}$ το υποσύνολο τού $X \times X$ το οριζόμενο ως εξής:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow [\exists g,\ g \in G : g\,(x) = y]\,.$$

Αυτό αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας, οι κλάσεις ισοδυναμίας τής οποίας ονομάζονται **τροχιές** τής G. (Ως συνήθως, η επαλήθευση είναι εύκολη. Για κάθε $x \in X$ έχουμε $\varepsilon(x) = x$, οπότε το x σχετίζεται με τον εαυτό του. Εάν το x σχετίζεται με το y, δηλαδή εάν $g\,(x) = y$, τότε και το y σχετίζεται με το x, καθότι $g^{-1}(y) = x$. Τέλος, εάν το x σχετίζεται με το y και το y σχετίζεται με το z, δηλαδή εάν $g(x) = y$ και $g'(y) = z$, τότε το x σχετίζεται και με το z, διότι $g'g(x) = g'(y) = z$). Το ότι οι σαφώς διακεκριμένες τροχιές σχηματίζουν πάντοτε μια διαμέριση τού X, καθώς και το ότι θα μπορούμε να είμαστε βέβαιοι γι' αυτό μέσω εφαρμογής τού θεωρήματος (12.3), θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο στο μέλλον. Για να το καταστήσουμε περισσότερο σαφές, ας θεωρήσουμε π.χ. ως X το $\mathbb{R}^3$ και ως G την ομάδα των γραμμικών μετασχηματισμών f_A για τους οποίους $A \in SO_3$. Η αρχή των αξόνων παραμένει σταθερή μέσω όλων αυτών των γραμμικών μετασχηματισμών, οπότε η τροχιά τού $\mathbf{0}$ είναι το μονοσύνολο $\{\mathbf{0}\}$. Ενθυμούμενοι ότι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί διατηρούν τα μήκη, δεν είναι πολύ δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι η τροχιά ενός μη μηδενικού διανύσματος $\mathbf{x}$ είναι η σφαίρα εκείνη, η οποία έχει την αρχή των αξόνων ως κέντρο της και το $\|\mathbf{x}\|$ ως ακτίνα της. Οι σφαίρες διαφορετικών ακτίνων, μαζί με την αρχή των αξόνων, σχηματίζουν πράγματι μια διαμέριση τού $\mathbb{R}^3$.

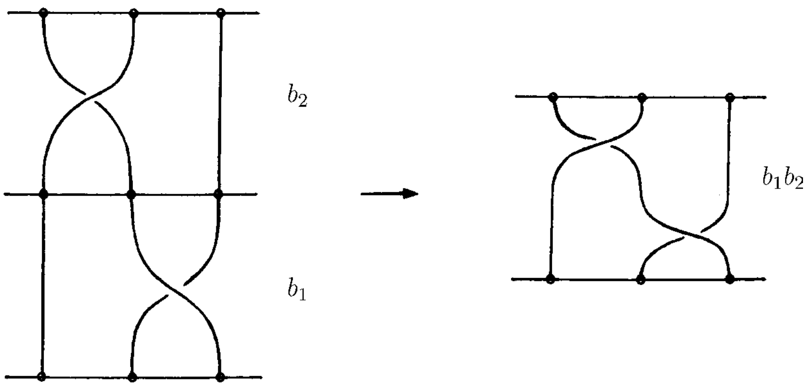
Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό εισάγοντας μια ομάδα, τα στοιχεία τής οποίας είναι κατά τον πλέον φυσικό τρόπο ορισμένα ως κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσης ισοδυναμίας.

(12.8) Παράδειγμα. Θεωρούμε ως αφετηρία μας ένα ζεύγος οριζοντίων επιπέδων, τρία σημεία τού άνω επιπέδου και τα αντίστοιχα τρία σημεία τού κάτω επιπέδου, τα οποία βρίσκονται -κατακορύφως- ακριβώς (απο)κάτω από τα τρία πρώτα. Εν συνεχεία, προσθέτουμε σπάγκους, οι οποίοι συνδέουν τα άνω σημεία με τα κάτω σημεία (βλ. σχ. 12.3). Υποθέτουμε ότι αυτοί οι σπάγκοι δεν τέμνονται μεταξύ τους και ότι κάθε σπάγκος, ατομικευμένα ιδωμένος, συναντά κάθε οριζόντιο επίπεδο ευρισκόμενο μεταξύ των δύο αρχικών (οριζοντίων) επιπέδων αναφοράς ακριβώς μία φορά.



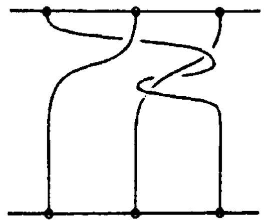
Σχήμα 12.3

Ένας τέτοιου είδους σχηματισμός καλείται **πλεξίδιο**. Εάν μας δοθούν δυο πλεξίδια b_1 και b_2, τότε μπορούμε να τα «πολλαπλασιάσουμε» κατασκευάζοντας ένα νέο πλεξίδιο b_1b_2, απλώς με το να στοιβάξουμε το b_2 στην «οροφή» τού b_1, όπως στο σχ. 12.4.



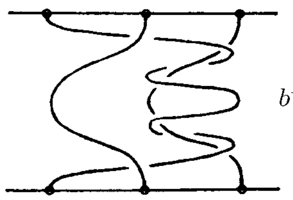
Σχήμα 12.4

Εν συνεχεία, θα συμβολίσουμε με το e το *τετριμμένο πλεξίδιο*, ήτοι το πλεξίδιο εκείνο, οι σπάγκοι τού οποίου είναι απολύτως κατακόρυφοι. Το ουσιαστικό ποιοτικό γνώρισμα ενός πλεξιδίου έγκειται στον τρόπο με τον οποίο οι σπάγκοι του (δια)πλέκονται (ο ένας με τον άλλον) ή (περι)ελίσσονται (ο ένας στον άλλον), οπότε το τετριμμένο πλεξίδιο φαίνεται πως θα μπορούσε να παίξει τον ρόλο τού μοναδιαίου (ή ταυτοτικού) στοιχείου για τον ως άνω εισαχθέντα «πολλαπλασιασμό» μας (βλ. σχ. 12.5).



Σχήμα 12.5

Κατόπιν κατοπτρισμού ενός πλεξιδίου b ως προς το κάτω επίπεδο, προσλαμβάνουμε ένα πλεξίδιο συμβολιζόμενο ως b^{-1}. Σημειώστε ότι το πλεξίδιο $b^{-1}b$ είναι κατ' ουσίαν τετριμμένο (βλ. σχ. 12.6).



Σχήμα 12.6

Είμαστε πολύ κοντά στη θέσπιση τής δομής τής ομάδας και η έννοια τής σχέσης ισοδυναμίας είναι ιδεωδώς κατάλληλη για τον χειρισμό τής υπολειπομένης έλλειψης ακριβείας.

Εάν τα b_1 και b_2 είναι δυο πλεξίδια, θα λέμε πως το b_1 *σχετίζεται με το* b_2, εφόσον οι σπάγκοι τού b_1 μπορούν να παραμορφωθούν κατά κάποιον συνεχή τρόπο[1], έως ότου επικαθήσουν στους σπάγκους τού b_2. Κατά τη διαδικασία τής εν λόγω παραμόρφωσης οι σπάγκοι οφείλουν να μένουν μεταξύ των δύο οριζοντίων επιπέδων, να μην τέμνονται μεταξύ τους, ενώ τα ληκτικά τους σημεία θα πρέπει να μένουν σταθερά. Η προκύπτουσα σχέση $\mathcal{R}$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί τής

[1](Σ.τ.Μ.): Αυτή η «συνεχής παραμόρφωση» μπορεί να εκφρασθεί κατά έναν αυστηρότερο τρόπο μέσω τής τοπολογικής εννοίας τής «ισοτοπίας».

συλλογής όλων των πλεξιδίων και οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας της συγκροτούν μια ομάδα ως προς τον ακόλουθο «πολλαπλασιασμό»:

$$\mathcal{R}(b_1)\,\mathcal{R}(b_2) = \mathcal{R}(b_1 b_2)\,,$$

όπως εύκολα μπορεί να επαληθεύσει ο αναγνώστης. Δεν θα έπρεπε να μας εκπλήσσει το ότι η $\mathcal{R}(e)$ είναι το μοναδιαίο στοιχείο και η $\mathcal{R}\left(b^{-1}\right)$ το αντίστροφο στοιχείο τής $\mathcal{R}(b)$.

Η προκειμένη ομάδα καλείται **ομάδα των πλεξιδίων** B_3 **με τρεις σπάγκους**. Βεβαίως, κατ' αναλογίαν, κατασκευάζεται και η αντίστοιχη **ομάδα των πλεξιδίων** B_n **με** n **σπάγκους**, όπου n είναι οιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός.

[(Σ.τ.Μ.): Οι ομάδες πλεξιδίων (αγγλ. braid groups, γαλλ. groupes de tresses, γερμ. Zopfgruppen) πρωτοεισήχθησαν το 1925 από τον μαθηματικό E. Artin[2](1898-1962) μέσω μιας τοπολογικής κατασκευής. Αργότερα, οι W. Magnus[3], A. Markoff[4] και F. Bohnenblust[5] εξήγησαν το πώς οι γεννήτορες και οι ορίζουσες σχέσεις[6] τής ομάδας B_n μπορούν να εξαχθούν από έναν καθαρώς αλγεβρικό ορισμό τής B_n, θεωρουμένης ως μιας υποομάδας τής ομάδας αυτομορφισμών τής ελεύθερης ομάδας F_n με n γεννήτορες. Για περαιτέρω μελέτη παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία των F. Klein[7], W. Magnus, A. Karrass & D. Solitar[8], J.S. Birman[9] και S. Moran[10].]

Ασκήσεις

12.1 Ποια από τα κατωτέρω υποσύνολα τού $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ αποτελούν σχέσεις ισοδυναμίας επί τού $\mathbb{R}$;

(a) $\{(x,y)\mid$ ο $x-y$ είναι ένας άρτιος ακέραιος αριθμός$\}$,

[2]E. Artin: *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4**, (1925), 47-72, και *Theory of braids*, Ann. of Math. **48**, (1947), 101-126.

[3]W. Magnus: *Über Automorphismen von Fundamentalgruppen berandeter Flächen*, Math. Ann. **109**, (1934), 617-646.

[4]A. Markoff: *Foundations of the Algebraic Theory of Tresses*, (Russian), Trav. Inst. Math. Stekloff, Vol. **16**, (1945).

[5]F. Bohnenblust: *The algebraic braid groups*, Ann. of Math. **48**, (1947), 127-136.

[6]Για τις παραστάσεις και τις ορίζουσες σχέσεις μιας ομάδας, καθώς και για την έννοια τής «ελεύθερης» ομάδας βλ. κεφάλαιο 27.

[7]F. Klein: *Vorlesungen über höhere Geometrie*, 3. Auflage, Springer, (1926). (Βλ. εν. 89.)

[8]W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar: *Combinatorial Group Theory*. (*Representations of Groups in Terms of Generators and Relations*), 2nd rev. ed., Dover Pub., (1976). (Βλ. εν. 3.7)

[9]J.S. Birman: *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Ann. Math. Studies, Vol. **82**, Princeton University Press, (1974).

[10]S. Moran: *The Mathematical Theory of Knots and Braids: An Introduction*. North-Holland, (1983).

(b) $\{(x,y) \mid$ ο $x-y$ είναι ένας ρητός αριθμός$\}$,

(c) $\{(x,y) \mid$ ο $x+y$ είναι ένας ρητός αριθμός$\}$,

(d) $\{(x,y) \mid x-y \geq 0\}$.

12.2 Ποια από τα υποσύνολα $\mathcal{R}$ τού καρτεσιανού γινομένου τού συνόλου όλων των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών με τον εαυτό του, τα οποία ορίζονται ως ακολούθως, αποτελούν σχέσεις ισοδυναμίας;

(a) $(z,w) \in \mathcal{R} \iff zw \in \mathbb{R}$,

(b) $(z,w) \in \mathcal{R} \iff z/w \in \mathbb{R}$,

(c) $(z,w) \in \mathcal{R} \iff z/w \in \mathbb{Z}$.

12.3 Βρείτε μια ομάδα G και μια υποομάδα της H, για την οποία το $\{(x,y) \,|xy \in H\}$ να μην αποτελεί σχέση ισοδυναμίας επί τής G.

12.4 Παραθέστε μια ομάδα G και μια υποομάδα της H, ούτως ώστε το $\big\{(x,y) \,\big|xyx^{-1}y^{-1} \in H\big\}$ να μην αποτελεί σχέση ισοδυναμίας επί τής G.

12.5 Έστω $\mathcal{R}$ μια σχέση ισοδυναμίας επί ενός συνόλου X. Δοθέντος ενός $x \in X$, επιλέξτε ένα $y \in X$, ούτως ώστε να ισχύει $(x,y) \in \mathcal{R}$. Η ιδιότητα (b) τού ορισμού τής σχέσης ισοδυναμίας μάς δίνει $(y,x) \in \mathcal{R}$. Ως εκ τούτου, από την ιδιότητα (c) έπεται ότι $(x,x) \in \mathcal{R}$. Επομένως, η ιδιότητα (a) τού ορισμού τής σχέσης ισοδυναμίας φαίνεται πως πλεονάζει. Σε ποιο σημείο είναι το ως άνω επιχείρημα εσφαλμένο;

12.6 Υποθέστε ότι ο n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός και θεωρήστε τη σχέση ισοδυναμίας επί τού $\mathbb{Z}$ την οριζόμενη μέσω τής ισοτιμίας κατά μόδιο n. Σημειώστε ως $[x]$ την κλάση ισοτιμίας τού x και ορίστε το άθροισμα δύο τέτοιων κλάσεων ως εξής:

$$[x] + [y] = [x+y]\,.$$

Πιθανώς, εκ πρώτης όψεως, αυτός ο τρόπος πρόσθεσης να φαίνεται πως εξαρτάται από τους εκάστοτε ειδικούς εκπροσώπους των δύο κλάσεων ισοδυναμίας. Ωστόσο, τούτο δεν συμβαίνει. Καλείσθε λοιπόν εν πρώτοις να αποδείξετε πως η ως άνω πράξη είναι *καλώς ορισμένη*, υπό την έννοια ότι εάν έχουμε $[x] = [x']$ και $[y] = [y']$, τότε ισχύει

$$[x+y] = [x'+y']\,.$$

Εν συνεχεία, αποδείξτε ότι η συλλογή των κλάσεων ισοτιμίας κατά μόδιο n σχηματίζει μια αβελιανή ομάδα ως προς αυτήν την πράξη και ότι η εν λόγω ομάδα είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_n$. (Στην πραγματικότητα, πολλοί συγγραφείς προτιμούν να εισάγουν τον ορισμό τής $\mathbb{Z}_n$ κατ' αυτόν τον τρόπο.)

12.7 Προσδιορίστε διεξοδικά τις αριστερές και τις δεξιές πλευρικές κλάσεις τής H εντός τής G όταν

$$G = A_4, \qquad H = \{\varepsilon, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$$

και όταν

$$G = A_4, \qquad H = \{\varepsilon, (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}\,.$$

12.8 Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και έστω H μια υποομάδα τής G με τάξη $|H| = \frac{1}{2}\,|G|$. Δείξτε ότι $gH = Hg$ για κάθε στοιχείο g τής G.

12.9 Εδώ παραθέτουμε μια μέθοδο για την κατασκευή των *ρητών αριθμών* από τους ακεραίους. Θεωρήστε ως αφετηρία σας το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (m, n), όπου ο m είναι ακέραιος και ο n ακέραιος διάφορος τού μηδενός. Εκλάβετε κάθε τέτοιο ζεύγος (m, n) ως εκπρόσωπο τού κλάσματος m/n. Όπως θα αναμενόταν, πολλά σαφώς διακεκριμένα διατεταγμένα ζεύγη εκπροσωπούν τον ίδιο ρητό αριθμό. Για παράδειγμα, *και* τα τρία εκ των $(2, 3)$, $(4, 6)$, $(-6, -9)$ εκπροσωπούν τον $\frac{2}{3}$. Επομένως, είμαστε -κατά κάποιον τρόπο- υποχρεωμένοι να ταυτίζουμε όλα αυτά τα ζεύγη. Η έννοια τής κλάσης ισοδυναμίας μάς παρέχει το κατάλληλο εργαλείο για την επίτευξη αυτής τής ταύτισης. Ας συμφωνήσουμε στο να θεωρούμε το (m, n) ως σχετιζόμενο με το (m', n') όταν $mn' = m'n$. Δείξτε πως τούτη η σχέση είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί τού X. Σημειώστε ως $[(m, n)]$ την κλάση ισοδυναμίας τού διατεταγμένου ζεύγους (m, n) και -παρακινούμενοι από τους νόμους πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού κλασμάτων- ορίστε τις πράξεις

$$[(m_1, n_1)] + [(m_2, n_2)] = [(m_1 n_2 + m_2 n_1, n_1 n_2)]\,,$$
$$[(m_1, n_1)] \cdot [(m_2, n_2)] = [(m_1 m_2, n_1 n_2)]\,.$$

Βεβαιωθείτε για το ότι και οι δύο αυτές πράξεις είναι καλώς ορισμένες, για το ότι το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας σχηματίζει μια αβελιανή ομάδα ως προς την πρόσθεση, καθώς και για το ότι, μετά την απομάκρυνση τής «μηδενικής κλάσης» $[(0, n)]$, ό,τι απομένει συγκροτεί μια αβελιανή ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό. Κάθε ρητός αριθμός εκπροσωπείται από ακριβώς μία κλάση ισοδυναμίας, πράγμα το οποίο μας οδηγεί στην «προτυποποίηση» τής αλγεβρικής δομής τού συνόλου των ρητών αριθμών.

12.10 Θεωρήστε τη σχέση (ισοδυναμίας) τής συζυγίας που ορίσθηκε στο παράδειγμα (12.6) και μελετήστε λεπτομερώς (ως προς αυτήν) τις κλάσεις συζυγίας τής ομάδας $G = D_4$. Κατόπιν προσπαθήστε να κάνετε το ίδιο και για την άπειρη διεδρική ομάδα D_∞.

12.11 Πεισθείτε για το ότι η ομάδα πλεξιδίων B_3 είναι άπειρη, μη αβελιανή και παραγόμενη από τα δύο πλεξίδια b_1, b_2 τού σχήματος 12.4.

12.12 Στην κατασκευή τής ομάδας B_3 μετέχουν: ένα ζεύγος οριζοντίων επιπέδων, τρία σημεία τού άνω επιπέδου και τα αντίστοιχα τρία σημεία τού κάτω επιπέδου, τα οποία βρίσκονται -κατακορύφως- ακριβώς (απο)κάτω από τα τρία πρώτα. Επιγράψτε τα άνω σημεία, καθώς και τα αντίστοιχά τους κάτω σημεία, με τους αριθμούς $1, 2, 3$, κατά τέτοιον τρόπο, ώστε σημεία κατακορύφως στοιχιζόμενα να δέχονται την ίδια επιγραφή. Η ολίσθηση κατά μήκος των σπάγκων ενός πλεξιδίου μάς παρέχει ένα στοιχείο τής ομάδας S_3. Δείξτε ότι η συνάρτηση από την B_3 στην S_3, η οποία κατασκευάζεται κατ' αυτόν τον τρόπο, είναι επιρριπτική και ότι μεταφέρει τον πολλαπλασιασμό τής B_3 στον πολλαπλασιασμό τής S_3. Κατόπιν, προσδιορίστε δύο διαφορετικά πλεξίδια, καθένα από τα οποία απεικονίζεται στη μετάταξη $(1\,2\,3)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Το θεώρημα τού Cauchy

Όπως προμηνύσαμε στο κεφάλαιο 11, υπάρχει ένα μερικό αντίστροφο τού θεωρήματος τού Lagrange, το οποίο έχει ως εξής:

(13.1) Θεώρημα τού Cauchy. *Εάν η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα, η τάξη τής οποίας διαθέτει έναν πρώτο αριθμό p ως διαιρέτη της, τότε η G περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο τάξης p.*

Απόδειξη. Απαιτείται η εύρεση ενός στοιχείου $x \in G \setminus \{e\}$ για το οποίο ισχύει $x^p = e$. Θεωρούμε το σύνολο

$$X = \{\, \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G \times G \times \cdots \times G \mid x_1 x_2 \cdots x_p = e \} \,.$$

Το πρόβλημά μας είναι ο προσδιορισμός μιας p-άδας αυτού τού είδους, αλλά διάφορης τής $(e, e, \ldots, e)$, η οποία έχει όλες τις συντεταγμένες της ίσες. Η επίλυση αυτού τού προβλήματος θα καταστεί εφικτή ύστερα από προσεκτική εξέταση τού πληθικού αριθμού τού συνόλου X.

Πόσο μεγάλο είναι το X; Εάν η p-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ανήκει στο X, τότε μπορούμε να επιλέξουμε τα $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ αυθαιρέτως από την G, θεωρώντας τό x_p πλήρως καθορισμένο μέσω τής

$$x_p = (x_1 x_2 \cdots x_{p-1})^{-1} \,.$$

Επομένως το πλήθος των p-άδων τού X ισούται με $|G|^{p-1}$, δηλαδή με ένα *πολλαπλάσιο* τού p.

Έστω $\mathcal{R}$ το υποσύνολο τού $X \times X$ το οριζόμενο ως εξής: ένα διατεταγμένο ζεύγος $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ανήκει στο $\mathcal{R}$ όταν το $\mathbf{y}$ μπορεί να αποκτηθεί μέσω κυκλικής μετάταξης των συντεταγμένων τού $\mathbf{x}$, ήτοι όταν το $\mathbf{y}$ είναι μία από τις ακόλουθες p-άδες:

$$\left.\begin{array}{c} (x_1, x_2, \ldots, x_p) \\ (x_p, x_1, \ldots, x_{p-1}) \\ \vdots \\ (x_2, \ldots, x_p, x_1) \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Σημειωτέον ότι όλες αυτές οι p-άδες ανήκουν στο X. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} x_p x_1 \cdots x_{p-1} &= x_p \left(x_1 x_2 \cdots x_{p-1} x_p\right) x_p^{-1} \\ &= x_p e x_p^{-1} \\ &= e, \end{aligned}$$

δείχνοντάς μας ότι $(x_p, x_1, \ldots, x_{p-1}) \in X$, οπότε η επανάληψη αυτής τής διαδικασίας καλύπτει και τις υπόλοιπες. Είναι εύκολος ο έλεγχος τού ότι το εν λόγω $\mathcal{R}$ αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τού X, καθώς και τού ότι η κλάση ισοδυναμίας $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ τής p-άδας $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ είναι ακριβώς η ως άνω συλλογή $(*)$.

Δημιουργεί η κυκλική μετάταξη των συντεταγμένων μιας p-άδας πάντοτε p *διαφορετικές* p-άδες; Σίγουρα όχι στην περίπτωση κατά την οποία η θεωρούμενη p-άδα είναι η $\mathbf{e} = (e, e, \ldots, e)$, όπου η κυκλική μετάταξη των συντεταγμένων δεν μας δίνει τίποτα το καινούργιο· επομένως η $\mathcal{R}(\mathbf{e})$ είναι ένα *μονοσύνολο*. Οι σαφώς διακεκριμένες κλάσεις ισοδυναμίας τής $\mathcal{R}$ *διαμερίζουν* το X, οπότε με την πρόσθεση των πληθικών αριθμών αυτών των κλάσεων λαμβάνουμε τον πληθικό αριθμό τού X. Εάν κάθε τάξη ισοδυναμίας -διάφορη τής $\mathcal{R}(\mathbf{e})$- περιείχε p στοιχεία, τότε ο πληθικός αριθμός τού X θα ήταν ισότιμος με το 1 κατά μόδιο p, πράγμα το οποίο θα αντέφασκε προς τον προηγηθέντα υπολογισμό μας. Άρα πρέπει να υπάρχει μια p-άδα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, διάφορη τής $\mathbf{e}$, τέτοια ώστε ο πληθικός αριθμός τής $\mathcal{R}(\mathbf{x})$ να είναι $< p$. Κατ' ανάγκην, λοιπόν, θα υπάρχουν δύο τουλάχιστον κυκλικές μετατάξεις από τις $(*)$, οι οποίες θα είναι ίσες· ας πούμε ότι

$$(x_{r+1}, \ldots, x_p, x_1, \ldots, x_r) = (x_{s+1}, \ldots, x_p, x_1, \ldots, x_s).$$

Υποθέτοντας ότι $r > s$, εκτελούμε κυκλική εναλλαγή (υπο)δεικτών εν συνόλω $p-r$ φορές και παίρνουμε

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (x_{k+1}, \ldots, x_p, x_1, \ldots, x_k),$$

όπου $k = p - r + s$. Εξισώνοντας τις αντίστοιχες συντεταγμένες παρατηρούμε ότι

$$x_i = x_{k+i (\text{mod } p)}, \quad \forall i, \quad 1 \leq i \leq p,$$

και επομένως

$$x_1 = x_{k+1} = x_{2k+1} = \cdots = x_{(p-1)k+1},$$

όπου οι (υπο)δείκτες διαβάζονται κατά μόδιο p. Ας υποθέσουμε ότι

$$bk + 1 = ak + 1 \,(\mathrm{mod}\ p)$$

όπου $0 \leq a < b \leq p-1$. Τότε το p θα διαιρεί το $(b-a)k$, πράγμα αδύνατον, καθότι ο p είναι πρώτος και $b - a < k$, $k < p$. Άρα, οι αριθμοί

$$1, k+1, 2k+1, \ldots, (p-1)\,k+1$$

είναι όλοι διαφορετικοί όταν διαβάζονται κατά μόδιο p. Καθώς υπάρχουν p εξ αυτών όταν τους διαβάζουμε κατά μόδιο p, παίρνουμε μόνον τους $1, 2, \ldots, p$, ενδεχομένως παρατεταγμένους σε μια διαφορετική, ανάκατη διάταξη. Εξ αυτού συνάγουμε ότι

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{p-1} = x_p,$$

οπότε $x_1^p = e$, όπως ακριβώς απαιτείται. (Άπαξ και θα έχουμε κάποια πιο αποδοτικά τεχνικά μέσα στη διαθεσή μας, θα είναι δυνατόν να εξωραΐσουμε αυτό το είδος τής επιχειρηματολογίας, πρβλ. κεφάλαιο 17.) □

Ως μία εφαρμογή τού θεωρήματος τού Cauchy θα δείξουμε ότι κάθε ομάδα τάξης 6 οφείλει να είναι είτε κυκλική είτε διεδρική. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε το εξής:

(13.2) Θεώρημα. *Κάθε ομάδα τάξης* 6 *είναι ισόμορφη είτε με την* $\mathbb{Z}_6$ *είτε με την* D_3.

Απόδειξη. Έστω G μια ομάδα που έχει ακριβώς έξι στοιχεία. Χρησιμοποιώντας τό θεώρημα τού Cauchy επιλέγουμε ένα στοιχείο x τάξης 3 και ένα στοιχείο y τάξης 2. Οι δεξιές πλευρικές κλάσεις $\langle x \rangle$ και $\langle x \rangle\, y$ μας παρέχουν τα έξι στοιχεία e, x, x^2, y, xy, x^2y, τα οποία, φυσικά, είναι *όλα* τα στοιχεία τής G. Το yx οφείλει να συγκαταλέγεται σε αυτά τα έξι. Βεβαίως, $yx \notin \langle x \rangle$ και $yx \neq y$. Επομένως έχουμε είτε $yx = xy$ είτε $yx = x^2y$. Στην πρώτη περίπτωση, $G \cong \langle x \rangle \times \langle y \rangle \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$, οπότε $G \cong \mathbb{Z}_6$ δυνάμει τού θεωρήματος (10.2). Στη δεύτερη περίπτωση, εάν κάνουμε χρήση τού συμβολισμού τού εισαχθέντος στο κεφάλαιο 4 και αντικαταστήσουμε το x με το r και το y με το s, παίρνουμε έναν ισομορφισμό μεταξύ των ομάδων G και D_3. □

Δεν είναι πολύ δυσκολότερο να δείξουμε ότι, εάν ο p είναι ένας περιττός πρώτος αριθμός, τότε κάθε ομάδα τάξης $2p$ είναι είτε κυκλική είτε διεδρική (βλ. κεφάλαιο 15).

Επί τού παρόντος διαθέτουμε αρκετές πληροφορίες σχετικές με τις ομάδες «μικρής» τάξης. Κάθε ομάδα τάξης $2, 3, 5$ ή 7 είναι κυκλική κατά το πόρισμα (11.3). Κάθε ομάδα τάξης 4 είναι ισόμορφη είτε με την $\mathbb{Z}_4$ είτε με την ομάδα τού Klein (βλ. άσκηση 10.2), ενώ κάθε ομάδα τάξης 6 είναι ισόμορφη είτε με την $\mathbb{Z}_6$ είτε με την D_3 κατά το (13.2). Η -ως προς ισομορφισμό- ταξινόμηση των ομάδων τάξης 8 είναι πιο περίπλοκη. Έχουμε ήδη συναντήσει τέσσερεις ομάδες τάξης 8, ήτοι τις $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ και D_4. Εδώ παραθέτουμε και μία πέμπτη. Ένα **τετράνιο** (ή ένας **υπερμιγαδικός αριθμός**) είναι ένας γραμμικός συνδυασμός τής μορφής $a + bi + cj + dk$, όπου οι a, b, c, d είναι πραγματικοί αριθμοί και τα i, j, k ικανοποιούν τις

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \qquad ij = -ji = k. \tag{$**$}$$

Το σύνολο όλων των τετρανίων συμβολίζεται με το γράμμα $\mathbb{H}$. Τα οκτώ σύμβολα $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$, πολλαπλασιαζόμενα σύμφωνα προς τις $(**)$, σχηματίζουν μια ομάδα Q, τη λεγομένη **ομάδα των τετρανίων**. Ο πολλαπλασιαστικός της κατάλογος είναι ο ακόλουθος:

	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Η Q δεν είναι αβελιανή (και επομένως είναι αδύνατον να είναι ισόμορφη με κάποια από τις ομάδες $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$). Επίσης, επειδή τα ± 1 είναι τα μόνα στοιχεία της τάξης ≤ 2, είναι αδύνατον να είναι ισόμορφη με την D_4, καθότι η D_4 έχει πέντε στοιχεία τάξης 2.

(13.3) Θεώρημα. *Κάθε ομάδα τάξης 8 είναι ισόμορφη με μία από τις ακόλουθες ομάδες: $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, D_4, Q.*

Απόδειξη. Έστω G μια ομάδα που έχει ακριβώς οκτώ στοιχεία. Εάν υπάρχει ένα στοιχείο τής G τάξης 8, τότε $G \cong \mathbb{Z}_8$. Έτσι, από εδώ και στο εξής, μπορούμε να υποθέτουμε ότι οι τάξεις όλων των στοιχείων τής G είναι ≤ 4. Εάν υπάρχει ένα στοιχείο, έστω x, τής G τάξης 4, τότε επιλέγουμε ένα στοιχείο $y \in G \smallsetminus \{x\}$. Οι δεξιές πλευρικές κλάσεις $\langle x \rangle$ και $\langle x \rangle\, y$ μας παρέχουν τα οκτώ στοιχεία τής G υπό τη μορφή

$$e, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y.$$

Γνωρίζουμε ότι $yx \notin \langle x \rangle$ (προφανώς), $yx \neq y$ (ειδάλλως θα είχαμε $yx = y \Rightarrow x = e$) και $yx \neq x^2y$ (διότι η ισότητα $yx = x^2y$ θα οδηγούσε στην $x = y^{-1}x^2y$, η οποία, με τη σειρά της, θα έδινε $x^2 = y^{-1}x^2yy^{-1}x^2y = e$). Άρα $yx \in \{xy, x^3y\}$. Επιπροσθέτως, η τάξη τού y είναι είτε 2 είτε 4. Παρατηρούμε ότι $y^2 \notin \langle x \rangle y$ (διότι $y \notin \langle x \rangle$) και ότι $y^2 \notin \{x, x^3\}$ (διότι η τάξη τού y είναι διάφορη τού 8). Επομένως, εάν το y έχει τάξη 4, τότε $y^2 = x^2$. Υπάρχουν τέσσερα εν συνόλω ενδεχόμενα:

(i) Εάν $yx = xy$ και $y^2 = e$, τότε η G είναι αβελιανή και μέσω τής αντιστοίχισης

$$x \longmapsto (1, 0), \quad y \longmapsto (0, 1)$$

βλέπουμε ότι $G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

(ii) Εάν $yx = x^3y$ και $y^2 = e$, τότε (κάνοντας χρήση τού συνήθους συμβολισμού) η αντιστοίχιση $x \longmapsto r$, $y \longmapsto s$ προσδιορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ τής G και τής D_4.

(iii) Εάν $yx = xy$ και $y^2 = x^2$, τότε η G είναι αβελιανή, το xy^{-1} έχει τάξη 2 και η αντιστοίχιση $x \longmapsto (1, 0)$, $xy^{-1} \longmapsto (0, 1)$ μας οδηγεί στον καθορισμό ενός ισομορφισμού μεταξύ τής G και τής $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.

(iv) Τέλος, εάν $yx = x^3y$ και $y^2 = x^2$, τότε η αντιστοίχιση $x \longmapsto i$, $y \longmapsto j$ προσδιορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ τής G και τής Q.

Αλλά τι συμβαίνει όταν κάθε στοιχείο που ανήκει στη διαφορά $G \smallsetminus \{e\}$ έχει τάξη 2; Σε αυτήν την περίπτωση η G είναι μια αβελιανή ομάδα. Επιλέγουμε τρία στοιχεία $x, y, z \in G \smallsetminus \{e\}$, ούτως ώστε να ισχύει $xy \neq z$. Η υποομάδα $H = \{e, x, y, xy\}$ είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ και, εάν $K = \langle z \rangle$, τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι $HK = G$ και $H \cap K = \{e\}$. Επομένως,

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

βάσει τού θεωρήματος (10.4). □

Ασκήσεις

13.1 Επαληθεύστε το ότι η σχέση $\mathcal{R}$, η οποία χρησιμοποιήθηκε κατά την απόδειξη τού θεωρήματος τού Cauchy, είναι όντως μια σχέση ισοδυναμίας.

13.2 Εάν οι $p_1, p_2, \ldots, p_s$ είναι σαφώς διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί, δείξτε πως κάθε αβελιανή ομάδα τάξης $p_1 p_2 \cdots p_s$ οφείλει να είναι κυκλική.

13.3 Στο θεώρημα (13.2) δείξαμε πως κάθε ομάδα τάξης 6 οφείλει να είναι είτε κυκλική είτε διεδρική. Ακολουθήστε εκ νέου την πορεία τής απόδειξης έως το σημείο εκείνο στο οποίο γράφουμε τα έξι στοιχεία υπό τη μορφή e, x, x^2, y, xy, x^2y. Υπάρχουν τρεις δυνατότητες για την αποτίμηση τής τάξης τού xy. Δείξτε ότι η πρώτη οδηγεί στην $\mathbb{Z}_6$, η δεύτερη στην D_3 και η τρίτη σε αντίφαση.

13.4 Αποδείξτε ότι κάθε ομάδα τάξης 10 είναι ισόμορφη είτε τής $\mathbb{Z}_{10}$ είτε τής D_5.

13.5 Έστω G μια ομάδα τάξης $4n+2$. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα τού Cauchy, το θεώρημα τού Cayley και την άσκηση 6.6 προκειμένου να δείξετε ότι η G περιέχει μια υποομάδα τάξης $2n+1$.

13.6 Αποδείξτε ότι κάθε γνήσια υποομάδα τής ομάδας Q (των τετρανίων) είναι κυκλική.

13.7 Δοθέντων δυο οιωνδήποτε τετρανίων

$$q = a + bi + cj + dk, \;\; q' = a' + b'i + c'j + d'k,$$

ορίστε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό ως εξής:

$$q + q' = (a + a') + (b + b')\, i + (c + c')\, j + (d + d')\, k,$$

$$q \cdot q' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')\, i$$

$$+ \,(ac' - bd' + ca' + db')\, j + (ad' + bc' - cb' + da')\, k.$$

Αποδείξτε ότι το $\mathbb{H}$ σχηματίζει μια αβελιανή ομάδα ως προς την ως άνω πρόσθεση και ότι το $\mathbb{H} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ είναι μια (μη αβελιανή) ομάδα ως προς τον ως άνω πολλαπλασιασμό. Επίσης, δείξτε ότι μέσω τής αμφίπλευρης αντιστοίχισης

$$a + bi + cj + dk \longleftrightarrow (a, b, c, d)$$

ορίζεται ένας ισομορφισμός μεταξύ τής προσθετικής ομάδας $\mathbb{H}$ και τής $\mathbb{R}^4$.

13.8 Ως *συζυγές* ενός τετρανίου $q = a + bi + cj + dk$ ορίζεται το τετράνιο

$$q^* = a - bi - cj - dk.$$

Επιπροσθέτως, ως *μήκος* τού q ορίζεται η ποσότητα

$$\sqrt{q \cdot q^*} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Δείξτε ότι τα τετράνια μήκους 1 συγκροτούν μια υποομάδα τής $\mathbb{H}\smallsetminus\{\mathbf{0}\}$. Εφεξής θα συμβολίζουμε αυτήν την (υπο)ομάδα ως $\mathbb{S}^3$, επειδή αντιστοιχεί στη μοναδιαία σφαίρα όταν κανείς ταυτίζει την $\mathbb{H}$ με την $\mathbb{R}^4$.

13.9 Αποδείξτε ότι μέσω τής αμφίπλευρης αντιστοίχισης

$$a+bi+cj+dk \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}$$

ορίζεται ένας ισομορφισμός μεταξύ των ομάδων $\mathbb{S}^3$ και SU_2.

13.10 Μελετήστε λεπτομερώς τα στοιχεία τής SU_2 τα οποία αντιστοιχούν στην υποομάδα Q τής $\mathbb{S}^3$. Προσδιορίστε μια υποομάδα τής $\mathbb{S}^3$ που να είναι ισόμορφη τής C.

13.11 Κάθε στοιχείο τού $\mathbb{H}$, το οποίο είναι τής μορφής $bi+cj+dk$, καλείται **καθαρό τετράνιο**. Δείξτε ότι το

$$q\,(bi+cj+dk)\,q^{-1}$$

είναι ένα καθαρό τετράνιο για όλα τα $q \in \mathbb{H}$.

13.12 Δοθέντος ενός $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, ας συμβολίσουμε ως $q(\mathbf{x})$ το τετράνιο $x_1 i + x_2 j + x_3 k$. Εάν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, δείξτε ότι

$$q(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + q\,(\mathbf{x}) \cdot q\,(\mathbf{y})\,.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

Συζυγία

Στο κεφάλαιο 12 έχουμε εισαγάγει τη σχέση τής συζυγίας, όπου και αποδείξαμε ότι πρόκειται για μια σχέση ισοδυναμίας. Επαναλαμβάνουμε τον ορισμό. Δοθέντων δυο στοιχείων x και y μιας ομάδας G, λέμε ότι το x είναι **συζυγές** τού y όταν $gxg^{-1} = y$ για κάποιο $g \in G$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζονται **κλάσεις συζυγίας**. Θα ξεκινήσουμε το παρόν κεφάλαιο εργαζόμενοι με αυτές τις κλάσεις για κάποιες συγκεκριμένες ομάδες.

Για ένα παγιωμένο στοιχείο g τής G, η συνάρτηση

$$G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto gxg^{-1},$$

είναι ένας ισομορφισμός, ο οποίος καλείται **συζυγία** δημιουργούμενη **μέσω τού** g. (Η συνάρτηση αυτή είναι αμφιρριπτική, διότι είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφό της τη συζυγία τη δημιουργούμενη μέσω τού g^{-1}. Επιπροσθέτως, αυτή διατηρεί την αλγεβρική δομή τής G, καθότι

$$g(xy)g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1})$$

για οιαδήποτε στοιχεία $x, y \in G$). Επειδή ένας ισομορφισμός ομάδων διατηρεί την τάξη καθενός στοιχείου, βλέπουμε ότι τα στοιχεία τα ανήκοντα στην ίδια κλάση συζυγίας *έχουν την ίδια τάξη*.

(14.1) Παράδειγμα. Εάν η G είναι μια αβελιανή ομάδα και το x ένα στοιχείο τής G, τότε έχουμε

$$gxg^{-1} = x, \ \forall g, \ g \in G.$$

Ως εκ τούτου, το x είναι συζυγές τού εαυτού του και οι κλάσεις συζυγίας τής G είναι όλα τα μονοσύνολα $\{x\}$, όπου $x \in G$.

(14.2) Παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε τώρα ως G την ομάδα D_6, υιοθετώντας τόν συμβολισμό τον εισαχθέντα στο κεφάλαιο 4. Τα στοιχεία τής D_6 είναι τα

$$e, r, r^2, r^3, r^4, r^5,$$

$$s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s,$$

ενώ ο «πολλαπλασιασμός» είναι πλήρως καθορισμένος άπαξ και γνωρίζουμε την ισχύ των ισοτήτων

$$r^6 = e, \quad s^2 = e, \quad sr = r^5 s.$$

Για να βρούμε την κλάση συζυγίας μιας δύναμης τού r, ας πούμε τής δύναμης r^a, όπου $1 \leq a \leq 5$, πρέπει να υπολογίσουμε όλα τα γινόμενα gr^ag^{-1} για όλα τα $g \in D_6$. Εάν $g = e$ ή το g είναι μια δύναμη τού r, τότε ξαναπαίρνουμε το r^a. Εάν $g = s$ (και ενθυμούμενοι ότι $s = s^{-1}$), έχουμε

$$sr^as = r^{6-a}s^2 = r^{6-a}.$$

Τέλος, εάν $g = r^b s$, όπου $1 \leq b \leq 5$, τότε

$$\begin{aligned} \left(r^b s\right) r^a \left(r^b s\right)^{-1} &= r^b \left(sr^as\right) r^{6-b} \\ &= r^b \left(r^{6-a}\right) r^{6-b} \\ &= r^{6-a}. \end{aligned}$$

Επομένως, η κλάση συζυγίας τού r^a είναι η $\{r^a, r^{6-a}\}$. Ας σημειωθεί ότι για τα λοιπά στοιχεία έχουμε

$$r^b s r^{-b} = r^b r^b s = r^{2b-1} s$$

και

$$r^b \left(rs\right) r^{-b} = r^{b+1} r^b s = r^{2b+1} s.$$

Επίσης, η συζυγία η δημιουργούμενη μέσω τού $r^b s$ στέλνει το s να απεικονισθεί στο $r^{2b}s$ και το rs στο $r^{2b-1}s$. Ως εκ τούτου, τα στοιχεία s, r^2s, r^4s σχηματίζουν μια κλάση συζυγίας. Το ίδιο ισχύει και για τα rs, r^3s και r^5s. Εν περιλήψει, οι κλάσεις συζυγίας τής D_6 είναι οι

$$\{e\},\ \{r, r^5\},\ \{r^2, r^4\},\ \{r^3\},$$

$$\{s, r^2s, r^4s\},\ \{rs, r^3s, r^5s\}.$$

Στο σημείο αυτό συνιστούμε στον αναγνώστη να ασχοληθεί με τις ασκήσεις 14.1 και 14.2.

(14.3) Παράδειγμα. Λέμε πως δυο στοιχεία τής S_n έχουν την ίδια **δομή κύκλων** όταν, αποσυντιθέμενα ως γινόμενα σαφώς διακεκριμένων κυκλικών μετατάξεων, διαθέτουν το ίδιο πλήθος 2-κύκλων, το ίδιο πλήθος 3-κύκλων κ.ο.κ. Εάν οι μετατάξεις $\theta, \varphi \in S_n$ έχουν την ίδια δομή κύκλων, τότε γράφουμε ολόκληρη την αποσύνθεση τού φ σε κύκλους (απο)κάτω από εκείνην τού θ και εν συνεχεία τοποθετούμε τους κύκλους κατά τέτοιον τρόπο, ώστε οι συστατικοί κύκλοι να ακολουθούν διάταξη φθίνοντος μήκους. Και στα δύο αυτά βήματα συμπεριλαμβάνουμε τους θετικούς ακεραίους αριθμούς που μένουν σταθεροί μέσω τής μετάταξης ως κύκλους μήκους 1. Έστω g ένα στοιχείο τής S_n, το οποίο στέλνει κάθε θετικό ακέραιο αριθμό συναντώμενο στην θ να απεικονισθεί στον θετικό ακέραιο αριθμό που βρίσκεται -κατακορύφως- ακριβώς αποκάτω του εντός τής φ. Τότε $g\theta g^{-1} = \varphi$, διότι, μετακινώντας έναν θετικό ακέραιο αριθμό από κάτω προς τα πάνω, ήτοι από την φ στην θ, ωθώντας τον κατά μία θέση εντός τής θ, και κατόπιν ξανακατεβάζοντάς τον στην φ, παίρνουμε ό,τι θα παίρναμε αν τον κινούσαμε (απευθείας) κατά μία θέση εντός τής φ. Επομένως, *μετατάξεις, οι οποίες έχουν την ίδια δομή κύκλων, είναι συζυγείς εντός τής* S_n.

Εδώ παραθέτουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Οι μετατάξεις

$$\theta = (6\,7)\,(2\,5\,3\,9)\,(1\,4)\,, \qquad \varphi = (1\,2)\,(3\,8)\,(5\,4\,6\,7)$$

είναι στοιχεία τής S_9 και έχουν την ίδια δομή κύκλων αποτελούμενη από δύο αντιμεταθέσεις και έναν και μόνον 4-κύκλο. Η ως άνω περιγραφείσα διαδικασία μάς δίνει

$$\begin{array}{c} (2\,5\,3\,9)\,(6\,7)\,(1\,4)\,(8) \\ \downarrow g \\ (5\,4\,6\,7)\,(1\,2)\,(3\,8)\,(9) \end{array}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $g = (1\,3\,6)\,(2\,5\,4\,8\,9\,7)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} g\theta g^{-1}(1) &= g\theta(6) \\ &= g(7) \\ &= 2 = \varphi(1) \quad \text{κ.λπ.} \end{aligned}$$

Το στοιχείο g δεν είναι μονοσημάντως ορισμένο. Γράφοντας π.χ. το θ ως $(2\,5\,3\,9)\,(1\,4)\,(6\,7)\,(8)$ και διατηρώντας το ίδιο φ, παίρνουμε $g = (2\,5\,4)\,(3\,6)\,(7\,8\,9)$.

Κι αντιστρόφως· *συζυγείς μετατάξεις έχουν την ίδια δομή κύκλων*. Για να δούμε το γιατί συμβαίνει αυτό, έστω

$$\theta = \theta_1\theta_2 \cdots \theta_t$$

ένα στοιχείο τής S_n γραμμένο ως ένα γινόμενο σαφώς διακεκριμένων κυκλικών μετατάξεων. Για κάθε $g \in S_n$ έχουμε

$$\begin{aligned} g\theta g^{-1} &= g\left(\theta_1\theta_2 \cdots \theta_t\right) g^{-1} \\ &= \left(g\theta_1 g^{-1}\right)\left(g\theta_2 g^{-1}\right) \cdots \left(g\theta_t g^{-1}\right). \end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι η κυκλική μετάταξη θ_i έχει μήκος k, ας πούμε $\theta_i = (a_1\, a_2\, \ldots\, a_k)$, παίρνουμε

$$\begin{gathered} g\theta_i g^{-1}(g\,(a_1)) = g\theta_i\,(a_1) = g\,(a_2) \\ g\theta_i g^{-1}(g\,(a_2)) = g\theta_i\,(a_2) = g\,(a_3) \\ \vdots \\ g\theta_i g^{-1}(g\,(a_k)) = g\theta_i\,(a_k) = g\,(a_1). \end{gathered}$$

Επίσης, εάν $m \notin \{g\,(a_1), g\,(a_2), \ldots, g\,(a_k)\}$, τότε η θ_i σταθεροποιεί το $g^{-1}(m)$ και ισχύει

$$g\theta_i g^{-1}(m) = gg^{-1}(m) = m.$$

Κατά συνέπειαν, $g\theta_i g^{-1} = (g\,(a_1)\; g\,(a_2)\; \ldots\; g\,(a_k))$, ήτοι μια κυκλική μετάταξη μήκους ίσου με εκείνο τής θ_i. Επειδή προφανώς οι $g\theta_1 g^{-1}$, $g\theta_1 g^{-1}$,..., $g\theta_k g^{-1}$ είναι κυκλικές μετατάξεις σαφώς διακεκριμένες, συνάγουμε ότι η $g\theta g^{-1}$ έχει την ίδια δομή κύκλων με την θ.

(14.4) Παράδειγμα. Από το προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι οι κλάσεις συζυγίας τής ομάδας S_4 είναι οι

$\{\varepsilon\}$,

$\{(1\,2), (1\,3), (1\,4), (2\,3), (2\,4), (3\,4)\}$,

$\{(1\,2\,3), (1\,3\,2), (1\,4\,2), (1\,2\,4), (1\,3\,4), (1\,4\,3), (2\,4\,3), (2\,3\,4)\}$,

$\{(1\,2\,3\,4), (1\,4\,3\,2), (1\,2\,4\,3), (1\,3\,4\,2), (1\,3\,2\,4), (1\,4\,2\,3)\}$,

$\{(1\,2)\,(3\,4), (1\,3)\,(2\,4), (1\,4)\,(2\,3)\}$.

Ποιες είναι, από την άλλη μεριά, οι κλάσεις συζυγίας τής A_4; Εδώ οφείλουμε να είμαστε αρκετά προσεκτικοί. Εάν οι $\theta, \varphi \in A_4$ έχουν την ίδια δομή κύκλων, τότε βεβαίως θα υπάρχει ένα στοιχείο $g \in S_4$, τέτοιο ώστε να ισχύει $g\theta g^{-1} = \varphi$, αλλά ενδέχεται να μην είναι δυνατόν να βρούμε μια *άρτια* μετάταξη g με αυτήν την ιδιότητα. Για παράδειγμα, εάν $g\,(1\,2\,3)\,g^{-1} = (1\,3\,2)$, τότε $(g\,(1)\ g\,(2)\ g\,(3)) = (1\,3\,2)$, οπότε η g πρέπει να είναι μία από τις αντιμεταθέσεις $(2\,3)\,,(1\,3)$ ή $(1\,2)$. Άρα η g δεν μπορεί να ανήκει στην A_4. Εν σπουδή διαπιστώνουμε ότι οι κλάσεις συζυγίας τής εναλλάσσουσας ομάδας A_4 είναι οι

$$\{\varepsilon\},$$

$$\{(1\,2\,3)\,,(1\,4\,2)\,,(1\,3\,4)\,,(2\,4\,3)\},$$

$$\{(1\,3\,2)\,,(1\,2\,4)\,,(1\,4\,3)\,,(2\,3\,4)\},$$

$$\{(1\,2)\,(3\,4)\,,(1\,3)\,(2\,4)\,,(1\,4)\,(2\,3)\}.$$

Αυτές οι κλάσεις διαθέτουν μια απλή *γεωμετρική* ερμηνεία. Πράγματι· ας ταυτίσουμε την A_4 με την ομάδα περιστροφικών συμμετριών ενός κανονικού τετραέδρου. Δοθέντος ενός άξονα συμμετρίας διερχομένου διά μιας των κορυφών του, μπορούμε να εκτελέσουμε στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$ και μάλιστα κατά τέτοιον τρόπο, ώστε, ιδωμένη από τη θεωρηθείσα κορυφή, η αντικειμένη έδρα να στρέφεται με φορά σύμφωνη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού (δεξιόστροφη φορά). Οι τέσσερεις (περι)στροφές αυτού τού τύπου είναι συζυγείς, όπως επίσης είναι συζυγείς και οι άλλες τέσσερεις, δυνάμει των οποίων η έδρα στρέφεται με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού (αριστερόστροφη φορά). Οι εν λόγω κλάσεις συζυγίας αντιστοιχούν στις δύο σαφώς διακεκριμένες κλάσεις συζυγίας τις αποτελούμενες από τέσσερεις 3-κύκλους. Η ταυτοτική περιστροφή σχηματίζει μια κλάση συζυγίας αφ' εαυτής, ενώ η τετάρτη (και τελευταία) κλάση συζυγίας απαρτίζεται από τις τρεις στροφές κατά π περί τους άξονες, οι οποίοι καθορίζονται από τα μεσοσημεία των (ανά ζεύγη) αντικειμένων ακμών τού τετραέδρου.

(14.5) Παράδειγμα. Θεωρήστε ως G την ομάδα O_2 και ορίστε τούς πίνακες

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad B_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Θυμηθείτε ότι ο A_θ αναπαριστά μια στροφή κατά θ με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού (αριστερόστροφη φορά), ενώ ο B_φ αναπαριστά έναν κατοπτρισμό ως προς μια ευθεία, η οποία σχηματίζει γωνία $\frac{\varphi}{2}$ με το θετικό μέρος τού άξονα των x. Επειδή οι ορίζουσες δυο συζυγών πινάκων είναι ίσες, κάθε κλάση συζυγίας θα αποτελείται είτε εξ ολοκλήρου από περιστροφές είτε εξ ολοκλήρου από κατοπτρισμούς. Καθώς έχουμε

$$A_\theta B_\varphi A_\theta^{-1} = A_\theta B_\varphi A_{-\theta} = B_{\varphi+2\theta},$$

βλέπουμε ότι δυο οιοιδήποτε πίνακες τύπου $B_{\ldots}$ είναι συζυγείς. Επίσης,

$$A_\varphi A_\theta A_\varphi^{-1} = A_\theta$$

και

$$B_\varphi A_\theta B_\varphi^{-1} = B_\varphi A_\theta B_\varphi = A_{-\theta},$$

πράγμα που σημαίνει ότι οι πίνακες περιστροφών διαιρούνται σε κλάσεις συζυγίας τής μορφής $\{A_\theta, A_{-\theta}\}$. Κατά συνέπειαν, οι κλάσεις συζυγίας τής ομάδας O_2 είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
&\{I\},\\
&\{A_\theta, A_{-\theta}\},\ \ 0 < \theta < \pi,\\
&\{A_\pi\},\\
&\{\,B_\varphi \mid 0 \le \varphi < 2\pi\}.
\end{aligned}$$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε υποομάδες οι οποίες οικοδομούνται από πλήρεις κλάσεις συζυγίας. Μια τέτοιου είδους υποομάδα είναι το λεγόμενο κέντρο μιας ομάδας. Το **κέντρο**

$$Z(G) = \{\, x \in G \mid xg = gx,\ \ \forall g,\ g \in G\}$$

μιας ομάδας G αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία της, τα οποία μετατίθενται με *κάθε* στοιχείο τής G.

(14.6) Θεώρημα. *Το κέντρο μιας ομάδας G είναι μια υποομάδα τής G αποτελούμενη από όλες εκείνες τις κλάσεις συζυγίας, οι οποίες περιέχουν μόνον ένα στοιχείο.*

Απόδειξη. Εάν $x, y \in Z\,(G)$ και $g \in G$, τότε

$$\begin{aligned}
gxy^{-1} &= xgy^{-1} && (\text{επειδή } x \in Z\,(G)\,)\\
&= x(yg^{-1})^{-1}\\
&= x(g^{-1}y)^{-1} && (\text{επειδή } y \in Z\,(G)\,)\\
&= xy^{-1}g.
\end{aligned}$$

Επομένως το xy^{-1} ανήκει στο $Z\,(G)$. Κι επειδή προφανώς $e \in Z\,(G)$, το κέντρο $Z\,(G)$ τής G αποτελεί μια υποομάδα τής G κατά το θεώρημα (5.4). Εξάλλου, επειδή

$$xg = gx \Longleftrightarrow gxg^{-1} = x,$$

βλέπουμε ότι το x ανήκει στο $Z(G)$ ακριβώς όταν η κλάση συζυγίας τού x είναι το μονοσύνολο $\{x\}$. □

(14.7) Παράδειγμα. Το κέντρο μιας οιασδήποτε αβελιανής ομάδας ισούται με την ίδια την ομάδα.

(14.8) Παράδειγμα. Όταν $n \geq 3$, τότε το κέντρο τής S_n είναι η τετριμμένη ομάδα $\{\varepsilon\}$. Αυτό έπεται από το παράδειγμα (14.3).

(14.9) Παράδειγμα. Όπως διαπιστώνουμε από το παράδειγμα (14.2), το κέντρο τής ομάδας D_6 είναι το $\{e, r^3\}$. Στην άσκηση 14.10 ζητούμε από τον αναγνώστη να μελετήσει λεπτομερώς το κέντρο τής D_n, κάνοντας προσεκτική διάκριση μεταξύ τής περίπτωσης κατά την οποία ο n είναι άρτιος και εκείνης κατά την οποία ο n είναι περιττός.

(14.10) Παράδειγμα. Το κέντρο τής GL_n αποτελείται από όλα τα (μη μηδενικά) βαθμωτά πολλαπλάσια τού μοναδιαίου πίνακα (βλ. άσκηση 14.11).

Ασκήσεις

14.1 Μελετήστε λεπτομερώς τις κλάσεις συζυγίας τής D_5.

14.2 Εξηγήστε το πώς δομούνται οι κλάσεις συζυγίας τής D_n κάνοντας προσεκτική διάκριση μεταξύ τής περίπτωσης κατά την οποία ο n είναι άρτιος και εκείνης κατά την οποία ο n είναι περιττός.

14.3 Έστω $\varphi : G \longrightarrow G'$ ένας ισομορφισμός ομάδων. Αποδείξτε πως ο φ στέλνει κάθε κλάση συζυγίας τής G να απεικονισθεί σε μια κλάση συζυγίας τής G'.

14.4 Υπολογίστε το πλήθος των διαφορετικών κλάσεων συζυγίας τής S_6 και καταγράψτε μια αντιπροσωπευτική μετάταξη για καθεμιά εξ αυτών των κλάσεων. Κατόπιν, προσδιορίστε ένα στοιχείο g τής S_6, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$g\,(1\,2\,3)\,(4\,5\,6)\,g^{-1} = (5\,3\,1)\,(2\,6\,4)\,.$$

Τέλος, δείξτε ότι τα $(1\,2\,3)\,(4\,5\,6)$ και $(5\,3\,1)\,(2\,6\,4)$ είναι συζυγή εντός τής A_6, ενώ τα $(1\,2\,3\,4\,5)(6\,7\,8)$ και $(4\,3\,7\,8\,6)(2\,1\,5)$ *δεν* είναι συζυγή εντός τής A_8.

14.5 Αποδείξτε ότι οι 3-κύκλοι σχηματίζουν μία και μόνη κλάση συζυγίας εντός τής A_5. Επίσης, βρείτε δύο 5-κύκλους τής A_5, οι οποίοι δεν είναι συζυγείς εντός τής A_5.

14.6 Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων τής S_8 τα οποία διαθέτουν την ίδια δομή κύκλων με το $(1\,2)(3\,4\,5)(6\,7\,8)$;

14.7 Μελετήστε λεπτομερώς τις κλάσεις συζυγίας και το κέντρο τής ομάδας Q των τετρανίων. Ποιο είναι το κέντρο τής $\mathbb{S}^3$;

14.8 Χρησιμοποιήστε την άσκηση 6.10 για να δείξετε ότι το κέντρο τής S_n είναι η τετριμμένη ομάδα $\{\varepsilon\}$ όταν $n \geq 3$.

14.9 Η ομάδα A_3 είναι αβελιανή, κι επομένως $Z(A_3) = A_3$. Αποδείξτε ότι $Z(A_n) = \{\varepsilon\}$ όταν $n > 3$.

14.10 Προσδιορίστε το κέντρο τής D_n μέσω των υπολογισμών που εκτελέσατε στην άσκηση 14.2. Το τελικό αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι το εξής:

$$Z(D_n) = \begin{cases} \{e\}, & \text{όταν ο } n \text{ είναι περιττός,} \\ \{e, r^{\frac{n}{2}}\}, & \text{όταν ο } n \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$$

14.11 Θεωρήστε τους πίνακες που μπορούν να αποκτηθούν από τον μοναδιαίο $n \times n$ πίνακα ύστερα από αντικατάσταση μιας των διαγωνίων εγγραφών του με το -1 ή ύστερα από εναλλαγή δύο γραμμών του. Δείξτε πως όλοι αυτοί οι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και χρησιμοποιήστε τους προκειμένου να υπολογίσετε το κέντρο τής $GL_n(\mathbb{R})$.

14.12 Προσδιορίστε τα κέντρα των O_n και SO_n. Αποδείξτε ότι το κέντρο τής U_n απαρτίζεται από όλους τους πίνακες τής μορφής $e^{i\theta} I_n$, όπου $\theta \in \mathbb{R}$ και ο I_n είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15

Ομάδες πηλίκων

Το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στη μελέτη υποομάδων οι οποίες οικοδομούνται από *πλήρεις* κλάσεις συζυγίας.

Μια υποομάδα H μιας ομάδας G καλείται ***ορθόθετη υποομάδα*** *τής G όταν η H είναι η ένωση κάποιων κλάσεων συζυγίας τής G.*

Οι ορθόθετες υποομάδες είναι σημαντικές, διότι οι αριστερές πλευρικές τους κλάσεις συγκροτούν μια ομάδα κατά έναν φυσικό τρόπο. Εάν τα X και Y είναι δυο υποσύνολα τής G, τότε είναι δυνατόν να τα «πολλαπλασιάσουμε» σχηματίζοντας το σύνολο $XY = \{xy \mid x \in X,\ \ y \in Y\}$.

(15.1) Θεώρημα. *Εάν η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα μιας ομάδας G, τότε το σύνολο όλων των αριστερών πλευρικών κλάσεων τής H εντός τής G σχηματίζει μια ομάδα ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού.*

Απόδειξη. Το «γινόμενο» δυο αριστερών πλευρικών κλάσεων τής H εντός τής G είναι και αυτό μια αριστερή πλευρική κλάση, διότι

$$(xH)\,(yH) = xyH \tag{*}$$

για οιαδήποτε στοιχεία $x, y \in G$. Δεχόμενοι προς στιγμήν αυτό ως κάτι το αληθές, η προσεταιριστικότητα έπεται από την προσεταιριστικότητα εντός τής G, η αριστερή πλευρική κλάση $eH = H$ παίζει τον ρόλο τού μοναδιαίου στοιχείου, ενώ η $x^{-1}H$ είναι το αντίστροφο τής xH για κάθε $x \in G$. Άρα πράγματι παίρνουμε μια ομάδα.

Όμως γιατί ισχύει η ισότητα $(*)$ και πώς συνδέεται αυτή με την υπόθεσή μας, ήτοι με το ότι η H είναι μια *ορθόθετη* υποομάδα τής G; Κάθε στοιχείο τού $(xH)\,(yH)$ είναι τής μορφής $xhyh'$ για κάποια $h, h' \in H$. Επαναγράφοντάς το ως $xy(y^{-1}hy)h'$, παρατηρούμε ότι το $y^{-1}hy$ είναι *συζυγές* τού h. Κατά την υπόθεσή μας, η υποομάδα H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G, οπότε περιέχει ολόκληρη την κλάση συζυγίας τού h. Επομένως, $y^{-1}hy = h''$ για κάποιο $h'' \in H$, δίνοντάς μας

$$xhyh' = xy(y^{-1}hy)h' = xy(h''h').$$

Τώρα μπορούμε να δούμε ότι $xhyh' \in xyH$. Μέχρις εδώ έχουμε

$$(xH)\,(yH) \subseteq xyH.$$

Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι ευκολότερα επαληθεύσιμος και ισχύει για τυχούσες υποομάδες H. Κάθε στοιχείο τής αριστερής πλευρικής κλάσης xyH είναι τής μορφής xyh για κάποιο $h \in H$. Επαναγράφοντάς το ως $(xe)\,(yh)$, βλέπουμε ότι ανήκει στο $(xH)\,(yH)$. □

Όταν η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G, τότε γράφουμε $H \lhd G$. Η ως άνω εισαχθείσα ομάδα των αριστερών πλευρικών κλάσεων τής H εντός τής G καλείται **ομάδα πηλίκων** (ή **πηλικοομάδα**) τής G ως προς την H και συμβολίζεται ως G/H. Υπενθυμίζουμε ότι οι αριστερές πλευρικές κλάσεις τής H εντός τής G συγκροτούν μια *διαμέριση* τής G. Καθεμιά εξ αυτών αναπαριστά *ένα και μόνο στοιχείο* τής G/H. [(Σ.τ.Μ.): Η υπονοούμενη σχέση ισοδυναμίας $\mathcal{R} \subseteq G \times G$ ορίζεται ως εξής: $(x, y) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow x^{-1}y \in H$. Προφανώς, $\mathcal{R}\,(x) = xH$.] Γι' αυτό είναι εύλογο, υπ' αυτήν την έννοια, να ομιλούμε [-συνεκδοχικά- για *πηλίκα* στοιχείων τής G ανήκοντα στην H ή -εκφραζόμενοι αφαιρετικά-] για *διαίρεση* «τής G με την H».

(15.2) Παράδειγμα. Έστω H η υποομάδα τής D_6 η παραγόμενη από το στοιχείο r^3. Τότε η H είναι ορθόθετη και συντίθεται από τις κλάσεις συζυγίας $\{e\}$ και $\{r^3\}$. Υπάρχουν εν συνόλω έξι διαφορετικές αριστερές πλευρικές κλάσεις, ήτοι οι

$$eH = \{e, r^3\}, \qquad rH = \{r, r^4\}, \qquad r^2H = \{r^2, r^5\},$$

$$sH = \{s, sr^3\} = \{s, r^3s\}, \qquad rsH = \{rs, r^4s\}, \qquad r^2sH = \{r^2s, r^5s\}.$$

Αυτές αποτελούν τα στοιχεία τής ομάδας πηλίκων D_6/H. Ο ορισμός μας περί πολλαπλασιασμού μάς δίνει

$$\begin{aligned}(rH)\,(sH) &= \{\,xy \mid x \in rH, \quad y \in sH\} \\ &= \{rs, rr^3 s, r^4 s, r^4 r^3 s\} \\ &= \{rs, r^4 s\} \\ &= rsH,\end{aligned}$$

όπως ακριβώς είχε ήδη προβλέψει η (*). Γράφοντας τις πλευρικές μας κλάσεις ως

$$eH,\, rH,\, (rH)^2,\, sH,\, (rH)(sH),\, (rH)^2\,(sH)$$

και ελέγχοντας, επιπροσθέτως, την ισχύ των ισοτήτων

$$(rH)^3 = r^3 H = eH,$$

$$(sH)^2 = s^2 H = eH,$$

$$(sH)(rH) = srH = r^2 sH = \,(rH)^2\,(sH)\,,$$

συμπεραίνουμε ότι η ομάδα πηλίκων D_6/H είναι ισόμορφη τής D_3.

(15.3) Παράδειγμα. Οι κλάσεις συζυγίας

$$\{\varepsilon\},\ \{(1\,2)\,(3\,4)\,,(1\,3)\,(2\,4)\,,(1\,4)\,(2\,3)\}$$

συγκροτούν μια ορθόθετη υποομάδα J τής A_4. Επειδή υπάρχουν τρεις αριστερές πλευρικές κλάσεις, ήτοι οι $\varepsilon J, (1\,2\,3)J$ και $(1\,3\,2)J$, έχουμε $A_4/J \cong \mathbb{Z}_3$.

(15.4) Παράδειγμα. *Κάθε* υποομάδα μιας αβελιανής ομάδας είναι ορθόθετη, επειδή, εν προκειμένω, οι κλάσεις συζυγίας είναι ακριβώς τα στοιχεία τής ομάδας. Έστω n ένας θετικός ακέραιος αριθμός και έστω $n\mathbb{Z}$ η υποομάδα τής $\mathbb{Z}$ η αποτελούμενη από όλα τα ακέραια πολλαπλάσια τού n. Υπάρχουν n διαφορετικές πλευρικές κλάσεις, ήτοι οι

$$0 + n\mathbb{Z},\ 1 + n\mathbb{Z},\ \ldots\,,\ (n-1) + n\mathbb{Z},$$

οι οποίες, συνδεόμενες με την πράξη

$$(x + n\mathbb{Z}) + (y + n\mathbb{Z}) = (x + y) + n\mathbb{Z},$$

συγκροτούν την ομάδα πηλίκων $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Το στοιχείο $1 + n\mathbb{Z}$ παράγει ολόκληρη την $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Επομένως, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

(15.5) Σημείωση. Εάν επιθυμούμε να βεβαιωθούμε για το ότι μια υποομάδα H μιας ομάδας G είναι ορθόθετη, χωρίς όμως να μελετήσουμε λεπτομερώς όλες τις κλάσεις συζυγίας τής G, τότε μπορούμε να αρκεσθούμε στον έλεγχο τής ισχύος τής συνθήκης

$$ghg^{-1} \in H, \text{ για όλα τα } h \in H, \ g \in G.$$

Για παράδειγμα, η SO_n είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής O_n, διότι κάθε πίνακας, ο οποίος είναι συζυγής ενός πίνακα με ορίζουσα ίση με το 1, έχει κι αυτός ορίζουσα ίση με το 1. Ορισμένες μάλιστα φορές, οι υπολογισμοί μας είναι δυνατόν να καταστούν ακόμη πιο αποδοτικοί χρησιμοποιώντας το ακόλουθο:

(15.6) Θεώρημα. *Έστω H μια υποομάδα μιας ομάδας G και έστω X ένα σύνολο γεννητόρων τής G. Εάν $xhx^{-1} \in H$ για όλα τα $h \in H$ και όλα τα $x \in X$, τότε η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G.*

Απόδειξη. Εάν $h \in H$, πρέπει να δείξουμε ότι και κάθε συζυγές του στοιχείο ghg^{-1} ανήκει στην H. Προς τούτο εκφράζουμε το g ως ένα γινόμενο $x_1x_2 \cdots x_t$, όπου κάθε x_i $(1 \leq i \leq t)$ ανήκει στο X. Τότε

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= (x_1x_2 \cdots x_t)\, h\, (x_1x_2 \cdots x_t)^{-1} \\ &= x_1x_2 \cdots x_t h x_t^{-1} \cdots x_2^{-1}x_1^{-1}, \end{aligned}$$

οπότε η συζυγία η δημιουργούμενη μέσω τού g ισοδυναμεί με επαναλαμβανόμενη συζυγία, δημιουργούμενη μέσω στοιχείων τού X. Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, κάθε φορά που εφαρμόζουμε συζυγία δημιουργούμενη μέσω ενός στοιχείου τού X παίρνουμε ένα στοιχείο τής H. Άρα το ghg^{-1} ανήκει πράγματι στην H. □

(15.7) Παράδειγμα. Η υποομάδα H τής D_n η παραγόμενη από το r^2 είναι μια ορθόθετη υποομάδα. Θέτοντας $X = \{r, s\}$ διαπιστώνουμε εύκολα ότι η συζυγία μιας δύναμης τού r^2 η δημιουργούμενη είτε μέσω τού r είτε μέσω τού s μάς ξαναδίνει μια δύναμη τού r^2. Εάν ο n είναι *περιττός*, τότε $H = \langle r^2 \rangle = \langle r \rangle$, οπότε η ομάδα πηλίκων D_n/H, ως έχουσα μόνον τα δύο στοιχεία H και sH, είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_2$. Εάν ο n είναι *άρτιος*, τότε υπάρχουν τέσσερεις σαφώς διακεκριμένες αριστερές πλευρικές κλάσεις, ήτοι οι H, rH, sH και rsH. Σημειωτέον ότι ισχύει

$$(rH)^2 = r^2H = H, \qquad (\text{διότι } r^2 \in H)$$

$$(sH)^2 = s^2H = H, \qquad (rsH)^2 = (rs)^2\, H = H.$$

Επομένως έχουμε στη διάθεσή μας μια ομάδα τάξης 4, στην οποία το τετράγωνο κάθε στοιχείου ισούται με το μοναδιαίο. Αυτό σημαίνει ότι $D_n/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Επιλέξαμε, μέχρι τούδε, να εργαζόμαστε με αριστερές πλευρικές κλάσεις. Ωστόσο, το ακόλουθο θεώρημα μάς δείχνει ότι μια υποομάδα H μιας ομάδας G είναι ορθόθετη ακριβώς όταν οι αριστερές και δεξιές πλευρικές κλάσεις συμπίπτουν.

(15.8) Θεώρημα. *Μια υποομάδα H μιας ομάδας G είναι ορθόθετη εάν και μόνον εάν $xH = Hx$ για όλα τα $x \in G$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, κατ' αρχάς, ότι η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G. Δοθέντος ενός στοιχείου $g \in G$ και ενός στοιχείου $h \in H$, γνωρίζουμε ότι τα συζυγή στοιχεία xhx^{-1} και $x^{-1}hx$ οφείλουν να ανήκουν στην H. Επομένως,

$$xh = \left(xhx^{-1}\right)x \in Hx \Longrightarrow xH \subseteq Hx.$$

Παρομοίως,

$$hx = x\left(x^{-1}hx\right) \in xH \Longrightarrow Hx \subseteq xH.$$

Ας υποθέσουμε τώρα, αντιστρόφως, ότι ισχύει η ισότητα $xH = Hx$ για όλα τα $x \in G$. Εάν $h \in H$ και $x \in G$, τότε το συζυγές στοιχείο xhx^{-1} τού h ανήκει στην

$$(xH)x^{-1} = (Hx)x^{-1} = H,$$

κι επομένως η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G (βάσει τής (15.5)). $\square$

Σύμφωνα με το θεώρημα (15.8), έχουμε τη δυνατότητα να εκλαμβάνουμε τα στοιχεία τής ομάδας πηλίκων G/H εξίσου άνετα *και ως δεξιές* πλευρικές κλάσεις πολλαπλασιάζοντάς τες ως εξής: $(Hx)(Hy) = Hxy$. Ως **δείκτη**[1] μιας υποομάδας H μιας ομάδας G ορίζουμε τον πληθικό αριθμό των σαφώς διακεκριμένων αριστερών (ή, ισοδυνάμως, δεξιών[2]) πλευρικών κλάσεων τής H εντός τής G.

(15.9) Θεώρημα. *Έστω H μια υποομάδα μιας ομάδας G. Εάν ο δείκτης τής H εντός τής G ισούται με 2, τότε η H είναι ορθόθετη και $G/H \cong \mathbb{Z}_2$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $xH = Hx$ για κάθε $x \in G$. Αυτό είναι προφανές όταν το x ανήκει στην H. Όταν το x ανήκει στη διαφορά $G \smallsetminus H$, οι αριστερές πλευρικές κλάσεις H, xH σχηματίζουν μια διαμέριση τής G. Όμως *και* οι H και Hx διαμερίζουν την G, οπότε οι Hx και xH οφείλουν να συμπίπτουν, όπως δηλαδή εξαρχής απαιτήθηκε. Καθώς λοιπόν υπάρχουν μόνον δύο σαφώς διακεκριμένες πλευρικές κλάσεις, η ομάδα πηλίκων G/H (τής G ως προς την H) έχει τάξη 2 και επομένως $G/H \cong \mathbb{Z}_2$. $\square$

[1](Σ.τ.Μ): Σε πολλά βιβλία τής Θεωρίας Ομάδων ο δείκτης μιας υποομάδας H μιας ομάδας G συμβολίζεται ως $|G : H|$ ή ως $[G : H]$ ή ως $(G : H)$.

[2](Σ.τ.Μ): Προσοχή! Ο δείκτης ορίζεται ακόμη και για *μη ορθόθετες* υποομάδες H μιας ομάδας G, διότι ναι μεν μπορεί οι αριστερές και οι δεξιές πλευρικές κλάσεις τους να *μη* συμπίπτουν, αλλά εντούτοις οι πληθικοί τους αριθμοί είναι ίσοι, διότι η συνάρτηση $xH \longmapsto Hx^{-1}$ είναι σε κάθε περίπτωση αμφιρριπτική.

(15.10) Παράδειγμα. Η A_n αποτελεί μια ορθόθετη υποομάδα τής S_n.

(15.11) Παράδειγμα. Η υποομάδα η οποία παράγεται από το r είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής D_n.

(15.12) Παράδειγμα. Το θεώρημα (15.9) μας παρέχει έναν δεύτερο τρόπο απόδειξης τού ότι η SO_n αποτελεί μια ορθόθετη υποομάδα τής O_n. Πράγματι· ο δείκτης τής SO_n εντός τής O_n ισούται με 2, επειδή οι πλευρικές κλάσεις ISO_n και USO_n καλύπτουν ολόκληρη την O_n, όπου με I συμβολίζουμε τον μοναδιαίο πίνακα και με U τον πίνακα που αποκτούμε από τον I ύστερα από την αντικατάσταση τού τελευταίου 1 τής διαγωνίου του με το -1.

(15.13) Θεώρημα. *Εάν ο p είναι ένας περιττός πρώτος αριθμός, κάθε ομάδα τάξης $2p$ είναι ή κυκλική ή διεδρική.*

Απόδειξη. Κάνοντας χρήση τού θεωρήματος τού Cauchy, επιλέγουμε ένα στοιχείο x τάξης p και ένα στοιχείο y τάξης 2. Οι δεξιές πλευρικές κλάσεις $\langle x \rangle$ και $\langle x \rangle y$ μας χορηγούν τα $2p$ στοιχεία

$$e, x, x^2, \ldots, x^{p-1}, y, xy, x^2y, \ldots, x^{p-1}y,$$

τα οποία προφανώς καλύπτουν όλα τα στοιχεία τής ομάδας μας. Εξάλλου, η $\langle x \rangle$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα, διότι ο δείκτης της ισούται με 2. Κατά το θεώρημα τού Lagrange, η τάξη τού xy είναι ίση με $2p$, p ή 2. Εάν το xy έχει τάξη $2p$, τότε η ομάδα μας είναι κυκλική. Εάν το xy έχει τάξη 2, τότε

$$xyxy = e \Longrightarrow yx = x^{-1}y^{-1} = x^{-1}y,$$

οπότε η ομάδα μας θα είναι ισόμορφη με τη διεδρική ομάδα D_p. Ισχυριζόμαστε ότι το xy αδυνατεί να έχει τάξη ίση με p. Πράγματι· υποθέτοντας ότι $(xy)^p = e$, θα είχαμε

$$\langle x \rangle = \langle x \rangle (xy)^p = (\langle x \rangle xy)^p = (\langle x \rangle y)^p = \langle x \rangle y^p = \langle x \rangle y,$$

πράγμα το οποίο θα οδηγούσε στην αντίφαση $y \in \langle x \rangle$. □

Τώρα θα αλλάξουμε πορεία και θα περιγράψουμε μια διαδικασία που μας επιτρέπει να «αβελιανοποιούμε» μια τυχούσα ομάδα. Ένα στοιχείο μιας ομάδας G το οποίο έχει τη μορφή $xyx^{-1}y^{-1}$ (για κάποια $x, y \in G$) καλείται **μεταθέτης**, ενώ η ομάδα η παραγόμενη από όλους τους μεταθέτες τής G καλείται **μεταθέτρια υποομάδα** $[G, G]$ τής G. Επειδή τα x και y αλληλομετατίθενται ακριβώς όταν ο μεταθέτης $xyx^{-1}y^{-1}$ ισούται με το μοναδιαίο στοιχείο τής G, το «μέγεθος» τής $[G, G]$ μπορεί να εκληφθεί *ως ένα μέτρο ένδειξης τού πόσον απέχει η G από το να είναι αβελιανή*. (Όταν η G είναι αβελιανή, τότε η $[G, G]$ είναι τετριμμένη.)

(15.14) Παράδειγμα. Κάθε μεταθέτης εντός τής S_n είναι προφανώς μια άρτια μετάταξη, κι επομένως $[S_n, S_n] \subseteq A_n$. Από την άλλη μεριά, κάθε 3-κύκλος αποτελεί έναν μεταθέτη, διότι

$$(a\,b\,c) = (a\,b)(a\,c)(a\,b)(a\,c),$$

και, επιπροσθέτως, οι 3-κύκλοι παράγουν την A_n όταν $n \geq 3$. Εξ αυτού συνάγουμε ότι

$$[S_n, S_n] = A_n.$$

(15.15) Θεώρημα. *Η μεταθέτρια υποομάδα $[G, G]$ μιας ομάδας G είναι ορθόθετη, η ομάδα πηλίκων $G/[G, G]$ είναι αβελιανή και, εάν η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G, για την οποία η G/H είναι αβελιανή, τότε η $[G, G]$ περιέχεται στην H.*

Απόδειξη. Κάθε στοιχείο, το οποίο είναι συζυγές ενός μεταθέτη, είναι και αυτό ένας μεταθέτης, καθότι

$$g\left(xyx^{-1}y^{-1}\right)g^{-1} = \left(gxg^{-1}\right)\left(gyg^{-1}\right)\left(gxg^{-1}\right)^{-1}\left(gyg^{-1}\right)^{-1}.$$

Ένα τυχόν στοιχείο τής $[G, G]$ ενδέχεται να *μην* είναι μεταθέτης· ωστόσο, γράφεται ως ένα γινόμενο μεταθετών, ας πούμε υπό τη μορφή $c_1c_2 \cdots c_k$. Θεωρώντας τή συζυγία τη δημιουργούμενη μέσω ενός στοιχείου $g \in G$, παίρνουμε

$$g\left(c_1c_2 \cdots c_k\right)g^{-1} = \left(gc_1g^{-1}\right)\left(gc_2g^{-1}\right) \cdots \left(gc_kg^{-1}\right)^{-1},$$

οπότε $g\left(c_1c_2 \cdots c_k\right)g^{-1} \in [G, G]$. Άρα η μεταθέτρια υποομάδα $[G, G]$ τής G είναι όντως ορθόθετη.

Εάν τα x και y είναι στοιχεία τής G, τότε $xyx^{-1}y^{-1} \in [G, G]$. Επομένως,

$$[G, G]xyx^{-1}y^{-1} = [G, G] \Longrightarrow [G, G]xy = [G, G]yx,$$

πράγμα που σημαίνει ότι η $G/[G, G]$ είναι αβελιανή.

Τέλος, εάν η G/H είναι αβελιανή και τα x και y στοιχεία τής G, τότε

$$Hxy = Hyx \Longrightarrow Hxyx^{-1}y^{-1} = H \Longrightarrow xyx^{-1}y^{-1} \in H,$$

οπότε η $[G, G]$ περιέχεται στην H. □

Η μεταθέτρια υποομάδα είναι η *ελάχιστη* ορθόθετη υποομάδα τής G, για την οποία η αντίστοιχη ομάδα πηλίκων είναι αβελιανή. Η αβελιανή ομάδα $G/[G, G]$ συμβολίζεται συνήθως ως G^{ab}, ενώ η μετάβαση από την G στην G^{ab} καλείται **αβελιανοποίηση** τής G.

(15.16) Παράδειγμα. Η $\langle r^2 \rangle$, κατά τον συνήθη μας συμβολισμό, είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής D_n. Εάν ο n είναι περιττός, τότε η $\langle r^2 \rangle = \langle r \rangle$ έχει δείκτη 2 εντός τής D_n, ενώ αντιθέτως, εάν ο n είναι άρτιος, ο δείκτης τής $\langle r^2 \rangle$ εντός τής D_n ισούται με 4. Και στις δύο περιπτώσεις η ομάδα πηλίκων $D_n/\langle r^2 \rangle$ οφείλει να είναι κυκλική. Κατά συνέπειαν, η μεταθέτρια υποομάδα τής D_n περιέχεται στην $\langle r^2 \rangle$. Εξάλλου,

$$rsr^{-1}s^{-1} = rrss = r^2,$$

πράγμα που σημαίνει ότι το r^2 είναι ένας μεταθέτης. Άρα $[D_n, D_n] = \langle r^2 \rangle$. Έτσι, παίρνουμε τους ισομορφισμούς

$$D_n^{\mathrm{ab}} = D_n/[D_n, D_n] \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{όταν ο } n \text{ είναι περιττός,} \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, & \text{όταν ο } n \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$$

(15.17) Παράδειγμα. Η υποομάδα $\{\pm 1\}$ τής ομάδας Q των τετρανίων είναι ορθόθετη και η ομάδα πηλίκων $Q/\{\pm 1\}$ είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Επομένως, η μεταθέτρια υποομάδα τής Q περιέχεται στην $\{\pm 1\}$ και μάλιστα οφείλει να ταυτίζεται με την $\{\pm 1\}$, καθότι η Q δεν είναι αβελιανή.

Ασκήσεις

15.1 Εάν οι H και J είναι δυο υποομάδες μιας ομάδας G, αποδείξτε ότι το HJ είναι μια υποομάδα τής G εάν και μόνον εάν $HJ = JH$.

15.2 Προσδιορίστε όλες τις ορθόθετες υποομάδες τής D_4 και τής D_5. Κατόπιν γενικεύστε τούς υπολογισμούς σας ασχολούμενοι με την D_n για τυχόντα (υπο)δείκτη n.

15.3 Δείξτε ότι κάθε υποομάδα τής ομάδας Q των τετρανίων είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής Q.

15.4 Είναι η O_n μια ορθόθετη υποομάδα τής $GL_n(\mathbb{R})$;

15.5 Έστω H μια ορθόθετη υποομάδα μιας ομάδας G και έστω J μια ορθόθετη υποομάδα τής H. Φυσικά, η J αποτελεί μια υποομάδα τής G. Παραθέστε ένα παράδειγμα προκειμένου να δείξετε πως η J δεν είναι κατ' ανάγκην ορθόθετη εντός τής G.

15.6 Εάν οι H και J είναι δυο ορθόθετες υποομάδες μιας ομάδας και εάν ισχύει $H \cap J = \{e\}$, δείξτε ότι $xy = yx$ για όλα τα $x \in H$ και $y \in J$.

15.7 Έστω K μια ορθόθετη υποομάδα τού ευθέος γινομένου $G \times H$ δυο ομάδων G και H, τέτοια ώστε οι τομές $K \cap (G \times \{e\})$ και $K \cap (\{e\} \times H)$ να είναι μονοσύνολα αποτελούμενα από το μοναδιαίο στοιχείο τής $G \times H$. Δείξτε ότι η K είναι αβελιανή.

15.8 Βρείτε τη μεταθέτρια υποομάδα τής A_4. Εάν $n \geq 5$, δείξτε ότι η μεταθέτρια υποομάδα τής A_n είναι ολόκληρη η A_n.

15.9 Έστω $\varphi : G \longrightarrow G'$ ένας ισομορφισμός ομάδων. Αποδείξτε πως ο φ στέλνει τη μεταθέτρια υποομάδα τής G να απεικονισθεί στη μεταθέτρια υποομάδα τής G'.

15.10 Βελτιώστε το θεώρημα (15.6) ως εξής: έστω ότι η H είναι μια υποομάδα μιας ομάδας G, το X ένα σύνολο γεννητόρων τής G και το Y ένα σύνολο γεννητόρων τής H. Δείξτε ότι η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G όταν $xyx^{-1} \in H$ για όλα τα $x \in X$ και $y \in Y$.

15.11 Έστω H μια υποομάδα μιας πεπερασμένης ομάδας G, ο δείκτης τής οποίας είναι πεπερασμένος. Αποδείξτε ότι η G διαθέτει μια ορθόθετη υποομάδα πεπερασμένου δείκτη, η οποία περιέχεται στην H.

15.12 Μια ομάδα ονομάζεται **απλή ομάδα** όταν οι μόνες ορθόθετες υποομάδες της είναι η τετριμμένη και ο εαυτός της. Βρείτε μια γνήσια ορθόθετη υποομάδα τής A_4. Εν συνεχεία, θεωρήστε τήν εναλλάσσουσα ομάδα A_5 και μελετήστε λεπτομερώς τους μεταθέτες

$$(1\,2\,3\,4\,5)^{-1}\,(3\,4\,5)^{-1}\,(1\,2\,3\,4\,5)\,(3\,4\,5)\,, \quad (1\,2)\,(3\,4)\,(3\,4\,5)^{-1}\,(1\,2)\,(3\,4)\,(3\,4\,5)\,.$$

Δείξτε πως κάθε μη τετριμμένη ορθόθετη υποομάδα τής A_5 οφείλει να περιέχει έναν τουλάχιστον 3-κύκλο. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε το πρώτο μέρος τής άσκησης 14.5 προκειμένου να συμπεράνετε ότι μια τέτοιου είδους υποομάδα τής A_5 υποχρεωτικά ισούται με ολόκληρη την A_5. Συνεπώς, η A_5 είναι μια απλή ομάδα. (Δεν είναι μάλιστα πολύ δυσκολότερη και η γενικότερη διαπίστωση τού ότι *όλες* οι εναλλάσσουσες ομάδες $A_n, n \geq 5$, είναι απλές[3].)

[(Σ.τ.Μ.): Μια πεπερασμένη ακολουθία υποομάδων $H_0, H_1, \ldots, H_n$ μιας ομάδας G, η οποία είναι τής μορφής

$$\{e\} = H_n \lhd H_{n-1} \lhd \cdots \lhd H_1 \lhd H_0 = G,$$

ονομάζεται **συνθετική σειρά** τής G όταν η H_i είναι η μεγίστη ορθόθετη υποομάδα τής H_{i-1} για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (ή, ισοδυνάμως, όταν η ομάδα πηλίκων

[3](Σ.τ.Μ): Για μια στοιχειώδη απόδειξη βλ. στο βιβλίο [6] τού J.J. Rotman (στην ενότητα με τον τίτλο: *The simplicity of A_n*, κεφ. 3).

H_{i-1}/H_i, η οποία ονομάζεται και *συνθετικός παράγοντας*, είναι *απλή* για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$). Κάθε πεπερασμένη ομάδα διαθέτει τουλάχιστον μία συνθετική σειρά. Εξάλλου, σύμφωνα με το λεγόμενο *θεώρημα των Jordan και Hölder*, δύο οιεσδήποτε συνθετικές σειρές μιας ομάδας G έχουν το ίδιο μήκος και διαθέτουν ανά δύο ισομόρφους συνθετικούς παράγοντες (εν ανάγκη ύστερα από μια αναδιάταξη των όρων των σειρών). Ως εκ τούτου, η συνθετική σειρά μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος ανάλυσης τής G σε *απλές* ομάδες πηλίκων. Κατά συνέπειαν, υπ' αυτήν την έννοια, οι απλές ομάδες αποτελούν τους *δομικούς λίθους* των πεπερασμένων ομάδων. Η **ταξινόμηση των απλών πεπερασμένων ομάδων** υπήρξε ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα των Σύγχρονων Μαθηματικών. Για την ολοκλήρωσή της (κατά τις αρχές τής δεκαετίας τού 1980) απαιτήθηκαν σκληρές (και, εν πολλοίς, συντονισμένες) προσπάθειες εκατοντάδων μαθηματικών επί περίπου μία τεσσαρακονταετία. Στην τελική «απόδειξη» υπεισέρχεται ένα μεγάλο τμήμα των αποτελεσμάτων, τα οποία συναντούμε σε περισσότερα από 500 άρθρα δημοσιευθέντα σε μαθηματικά περιοδικά, και τα οποία καλύπτουν το εύρος 10-15 χιλιάδων τυπωμένων σελίδων. Για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στα συγγράμματα των D. Gorenstein[4] και M. Ashbacher[5], καθώς και στον «ΑΤΛΑΝΤΑ των πεπερασμένων ομάδων» (βλ. J.H. Conway[6] et.al.). Ο πλήρης κατάλογος των πεπερασμένων απλών ομάδων υποδιαιρείται, σε αδρές γραμμές, σε τέσσερεις κλάσεις ομάδων. Αυτές οι κλάσεις είναι οι εξής:

(i) Οι *αβελιανές απλές ομάδες*, ήτοι οι κυκλικές ομάδες με τάξη τους έναν πρώτο αριθμό.

(ii) Οι *εναλλάσσουσες ομάδες* A_n, $n \geq 5$.

(iii) Διάφορες οικογένειες ομάδων *τύπου Lie*[7].

(iv) Οι *σποραδικές ομάδες*[8] (ήτοι 26 ειδικές απλές ομάδες, οι οποίες δεν εντάσσονται στις (i)-(iii)).]

15.13 Εάν η H είναι μια *κυκλική* ορθόθετη υποομάδα μιας ομάδας G, αποδείξτε ότι και *κάθε* υποομάδα τής H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G.

15.14 Δείξτε ότι κάθε στοιχείο τής ομάδας πηλίκων $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ έχει πεπερασμένη τάξη και ότι, αντιθέτως, όλα τα στοιχεία τής $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ -πλην τού ουδετέρου- είναι άπειρης τάξης.

[4] D. Gorenstein: *Finite Simple Groups: An Introduction to their Classification*, Plenum Press, (1982), και *The Classification of Finite Simple Groups* I, Plenum Press, (1983).

[5] M. Ashbacher: *Finite Group Theory*, Cambridge Studies in Adv. Math., Vol. **10**, Cambridge University Press, (1994). [Βλ. κεφ. 16.]

[6] J.H. Conway, R. T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson: ATLAS *of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, (1985).

[7] Βλ. R.W. Carter: *Finite Groups of Lie Type*, Wiley, (1985).

[8] Βλ. M. Ashbacher: *Sporadic Groups*, Cambridge Tracts in Math., Vol. **104**, Cambridge University Press, (1994).

15.15 Εάν μια ομάδα G περιέχει μια ορθόθετη υποομάδα, η οποία είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_2$, και εάν η αντίστοιχη ομάδα πηλίκων είναι άπειρη κυκλική, αποδείξτε πως η G είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

15.16 Ας υποθέσουμε ότι μια ομάδα G περιέχει μια άπειρη, κυκλική, ορθόθετη υποομάδα, ούτως ώστε η αντίστοιχη ομάδα πηλίκων να είναι κυκλική και να έχει τάξη ίση με 2. Δείξτε ότι η G οφείλει να είναι ισόμορφη με μία από τις ομάδες: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2, D_\infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16

Ομομορφισμοί

Έστω ότι οι G και G' είναι δυο ομάδες. Μια συνάρτηση $\varphi : G \longrightarrow G'$ καλείται **ομομορφισμός** όταν μεταφέρει τον «πολλαπλασιασμό» τής G στον «πολλαπλασιασμό» τής G', ήτοι όταν

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y)\,, \quad \text{για όλα τα } x, y \in G.$$

Ως **πυρήνας** K ενός ομομορφισμού φ ορίζεται το σύνολο εκείνων των στοιχείων τής G, τα οποία απεικονίζονται μέσω τής φ στο μοναδιαίο στοιχείο τής G', δηλαδή $K = \{\, x \in G \mid \varphi(x) = e \}$. Εάν η φ τύχει να είναι -ταυτοχρόνως- και αμφιρριπτική, τότε η φ είναι ένας ισομορφισμός και ο πυρήνας της είναι η τετριμμένη υποομάδα τής G. Έχουμε ήδη μελετήσει διάφορες ιδιότητες των ισομορφισμών φ στο κεφάλαιο 7. Φυσικά, όσες εξ αυτών δεν εξαρτώνται από το γεγονός ότι η φ είναι αμφιρριπτική παραμένουν ισχύουσες και για τους ομομορφισμούς. Για παράδειγμα, κάθε ομομορφισμός $\varphi : G \longrightarrow G'$ στέλνει το μοναδιαίο στοιχείο τής G να απεικονισθεί στο μοναδιαίο στοιχείο τής G', στέλνει το αντίστροφο κάθε στοιχείου τής G να απεικονισθεί στο αντίστροφο τής εικόνας του εντός τής G', απεικονίζει υποομάδες τής G σε υποομάδες τής G' κλπ. Θα πρέπει, ιδιαιτέρως, να αναφερθεί ότι η *εικόνα* $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(G)$ ενός ομομορφισμού $\varphi : G \longrightarrow G'$ αποτελεί πάντοτε μια υποομάδα τής G'.

Ας σημειωθεί ότι, εάν η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G, τότε η συνάρτηση

$$\varphi : G \longrightarrow G/H, \qquad \varphi(x) = xH,$$

είναι ένας ομομορφισμός, διότι

$$\varphi(xy) = xyH = (xH)(yH) = \varphi(x)\varphi(y),$$

για οιαδήποτε $x, y \in G$. Ο ομομορφισμός αυτός έχει την ομάδα πηλίκων G/H ως εικόνα του και την υποομάδα H ως πυρήνα του.

(16.1) Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών. *Έστω ότι οι G και G' είναι δυο ομάδες και ότι η $\varphi : G \longrightarrow G'$ είναι ένας ομομορφισμός με πυρήνα του τον K. Τότε ο K αποτελεί μια ορθόθετη υποομάδα τής G και η*

$$xK \longmapsto \varphi(x)$$

ορίζει έναν ισομορφισμό

$$\boxed{G/K \cong \mathrm{Im}(\varphi)}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $x, y \in K$. Τότε $\varphi\left(xy^{-1}\right) = \varphi(x)\varphi(y)^{-1} = e$, δείχνοντάς μας ότι $xy^{-1} \in K$. Και επειδή προφανώς ο πυρήνας K δεν είναι κενός (καθόσον $e \in K$), ο K είναι μια υποομάδα τής G βάσει τού θεωρήματος (5.4). Εάν $x \in K$ και $y \in G$, τότε

$$\varphi\left(gxg^{-1}\right) = \varphi(g)\varphi(x)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e \Longrightarrow gxg^{-1} \in K,$$

οπότε ο πυρήνας K είναι όντως μια *ορθόθετη* υποομάδα τής G.

Εάν δυο πλευρικές κλάσεις xK και yK είναι ίσες, τότε $y^{-1}x \in K$. Κατόπιν εφαρμογής τής φ παίρνουμε

$$\varphi\left(y^{-1}x\right) = \varphi(y)^{-1}\varphi(x) = e \Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(y).$$

Τούτο σημαίνει πως ορίζεται μια συνάρτηση

$$\psi : G/K \longrightarrow G', \quad \psi(xK) = \varphi(x).$$

Επειδή

$$\begin{aligned} &\psi(xK) = \psi(yK) \Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \\ &\Longrightarrow e = \varphi(y)^{-1}\varphi(x) = \varphi\left(y^{-1}x\right) \\ &\Longrightarrow y^{-1}x \in K \Longrightarrow xK = yK, \end{aligned}$$

η ψ είναι ενριπτική. Τέλος, επειδή $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$, η ψ αποτελεί έναν ισομορφισμό μεταξύ τής ομάδας πηλίκων G/K και τής $\mathrm{Im}(\varphi)$. □

Δυο ειδικές περιπτώσεις τού (16.1) είναι ιδιαίτερα χρήσιμες.

(16.2) Πόρισμα. *Εάν* $\mathrm{Im}\,(\varphi) = G'$, *τότε* $G/K \cong G'$.

(16.3) Πόρισμα. *Εάν* $\mathrm{Im}\,(\varphi) = G'$, *τότε η* φ *είναι ένας ισομορφισμός εάν και μόνον εάν ο πυρήνας* K *είναι η τετριμμένη υποομάδα τής* G.

(16.4) Παραδείγματα. Καλούμε τον αναγνώστη να ελέγξει το ότι καθεμιά από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι επιρριπτική και ομομορφισμός ομάδων, οπότε η εφαρμογή τού (16.1) είναι άμεση:

(i) Η $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n, \quad x \longmapsto x (\mathrm{mod}\ n)$, με πυρήνα της τον $K = n\mathbb{Z}$ (το σύνολο όλων των πολλαπλασίων τού n), οπότε

$$\boxed{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n}$$

(ii) Η $\mathbb{R} \longrightarrow C, \quad x \longmapsto e^{2\pi i x}$, με πυρήνα της την υποομάδα $K = \mathbb{Z}$, οπότε

$$\boxed{\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong C}$$

(iii) Η $\mathbb{C}\smallsetminus\{0\} \longrightarrow C, \ z \longmapsto \frac{z}{|z|}$, με πυρήνα της την υποομάδα $K = \mathbb{R}_{>0}$, οπότε

$$\boxed{\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}/\mathbb{R}_{>0} \cong C}$$

(iv) Η $O_n \longrightarrow \{\pm 1\}, \ A \longmapsto \det(A)$, με πυρήνα της την υποομάδα $K = SO_n$, οπότε

$$\boxed{O_n/SO_n \cong \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2}$$

(v) Η $U_n \longrightarrow C, \ A \longmapsto \det(A)$, με πυρήνα της την υποομάδα $K = SU_n$, οπότε

$$\boxed{U_n/SU_n \cong C}$$

(vi) Η $C \longrightarrow C, \quad z \longmapsto z^2$, με πυρήνα της την υποομάδα $K = \{\pm 1\}$, οπότε

$$\boxed{C/\{\pm 1\} \cong C}$$

(vii) Η ομάδα S_4 περιέχει τρία στοιχεία τάξης 2, ήτοι τα $(1\,2)\,(3\,4)\,,(1\,3)\,(2\,4)$ και $(1\,4)\,(2\,3)$. Αυτά τα στοιχεία, μαζί με το ταυτοτικό, σχηματίζουν μια υποομάδα τής S_4, η οποία είναι ισόμορφη με την ομάδα τού Klein και την οποία συμβολίζουμε ως V. Η συζυγία η δημιουργούμενη μέσω μιας μετάταξης $\theta \in S_4$ οφείλει να μετατάσσει το σύνολο αυτών των τριών στοιχείων τάξης 2 (απεικονίζοντάς το στον εαυτό του), επειδή συζυγή στοιχεία έχουν την ίδια τάξη. Στέλνοντας κάθε θ να απεικονίζεται στην αντίστοιχη μετάταξη (αυτών των τριών στοιχείων τάξης 2) μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $S_4 \longrightarrow S_3$, η οποία είναι επιρριπτική και ομομορφισμός ομάδων με πυρήνα της την V, οπότε από το πόρισμα (16.2) προκύπτει ότι

$$\boxed{S_4/V \cong S_3}$$

(viii) Κάθε στοιχείο τού συνόλου $\mathbb{H}$ των τετρανίων, το οποίο γράφεται υπό τη μορφή $bi + cj + dk$, καλείται «καθαρό τετράνιο». Ας ταυτίσουμε το σύνολο όλων των καθαρών τετρανίων με το $\mathbb{R}^3$ μέσω τής αντιστοίχισης $bi+cj+dk \longleftrightarrow (b, c, d)$. Εάν το q είναι ένα μη μηδενικό τετράνιο, η συζυγία η δημιουργούμενη μέσω τού q στέλνει το σύνολο των καθαρών τετρανίων να απεικονισθεί στον εαυτό του και επάγει μια *περιστροφή* εντός τού $\mathbb{R}^3$. Αυτή η κατασκευή μάς χορηγεί έναν ομομορφισμό ομάδων $\mathbb{H}\smallsetminus\{\mathbf{0}\} \longrightarrow SO_3$, ο οποίος είναι επιρριπτικός και έχει ως πυρήνα του την υποομάδα $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$. Επομένως, κατά το (16.2),

$$\boxed{(\mathbb{H}\smallsetminus\{\mathbf{0}\}) \,/\, (\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}) \cong SO_3}$$

(16.5) Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμών. *Έστω ότι οι H και J είναι δυο υποομάδες μιας ομάδας G με την J ορθόθετη εντός τής G. Τότε η HJ είναι μια υποομάδα τής G, η $H \cap J$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής H και ισχύει*

$$\boxed{HJ \,/\, J \cong H \,/\, H \cap J}$$

Απόδειξη. Έστω ότι τα g, g_* είναι στοιχεία τού HJ. Γράφοντάς τα υπό τη μορφή γινομένων $g = xy$, $g_* = x_* y_*$, όπου $x, x_* \in H$ και $y, y_* \in J$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} g g_*^{-1} &= x y y_*^{-1} x_*^{-1} \\ &= \left(x x_*^{-1}\right)\left(x_* y y_*^{-1} x_*^{-1}\right) \in HJ, \end{aligned}$$

οπότε το HJ είναι μια υποομάδα τής G βάσει τού θεωρήματος (5.4). (Πού χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η J είναι ορθόθετη;)

Η συνάρτηση

$$\varphi : H \longrightarrow HJ/J, \quad \varphi(x) = xeJ = xJ,$$

είναι ένας ομομορφισμός· είναι όμως και επίρριψη, διότι εάν $g = xy \in HJ$, τότε

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= xJ \\ &= xyJ \quad (\text{αφού } y \in J) \\ &= gJ. \end{aligned}$$

Το στοιχείο x τής H ανήκει στον πυρήνα τής φ εάν και μόνον εάν $xJ = J \Leftrightarrow x \in J$. Κατά συνέπειαν, ο πυρήνας τής φ ισούται με την τομή $H \cap J$ των υποομάδων H και J, και ο ζητούμενος ισομορφισμός είναι κατασκευάσιμος δυνάμει τού θεωρήματος (16.1). $\square$

(16.6) Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμών. *Έστω ότι οι H και J είναι δυο ορθόθετες υποομάδες μιας ομάδας G και ότι η H περιέχεται στην J. Τότε $J/H \lhd G/H$ και ισχύει*

$$\boxed{(G/H) \;/\; (J/H) \cong G/J}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση

$$\varphi : G/H \longrightarrow G/J, \quad \varphi\,(xH) = xJ,$$

είναι ένας επιρριπτικός ομομορφισμός («επιμορφισμός»). Μια πλευρική κλάση xH ανήκει στον πυρήνα τής φ εάν και μόνον εάν ισχύει $xJ = J \Leftrightarrow x \in J$. Κατά συνέπειαν, ο πυρήνας τής φ ισούται με την υποομάδα J/H και οι ισχυρισμοί μας είναι αληθείς δυνάμει τού θεωρήματος (16.1). $\square$

Ασκήσεις

16.1 Ποιες από τις ακόλουθες συναρτήσεις $\mathbb{C}\smallsetminus\{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{C}\smallsetminus\{\mathbf{0}\}$ είναι ομομορφισμοί ομάδων;

(a) $z \longmapsto z^*$ (b) $z \longmapsto z^2$
(c) $z \longmapsto iz$ (d) $z \longmapsto |z|$

16.2 Ποιες από τις ακόλουθες συναρτήσεις $GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ είναι ομομορφισμοί ομάδων;

(a) $A \longmapsto A^t$ (b) $A \longmapsto \left(A^{-1}\right)^t$
(c) $A \longmapsto A^2$ (d) $A \longmapsto A^*$

16.3 Έστω ότι οι G και H είναι δυο ομάδες. Δείξτε ότι η $G \times \{e\}$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής $G \times H$ και ότι

$$(G \times H) \;/\; (G \times \{e\}) \cong H.$$

16.4 Εάν η A είναι μια ορθόθετη υποομάδα μιας ομάδας G και η B μια ορθόθετη υποομάδα μιας ομάδας H, αποδείξτε ότι η $A \times B$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής $G \times H$ και ότι

$$(G \times H) \,/\, (A \times B) \cong (G \,/\, A) \times (H \,/\, B)\,.$$

16.5 Επαληθεύστε το ότι οι μεταφορές τής D_∞ συγκροτούν μια ορθόθετη υποομάδα τής D_∞ και το ότι η αντίστοιχη ομάδα πηλίκων είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_2$.

16.6 Δοθέντων δύο αριθμών $a \in \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}, b \in \mathbb{R}$, ορίστε τη συνάρτηση $f(a,b)$ ως εξής:

$$f(a,b) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(a,b)(x) = ax + b.$$

Δείξτε ότι η συλλογή όλων των συναρτήσεων αυτού τού είδους σχηματίζει μια ομάδα G ως προς την πράξη τής σύνθεσης συναρτήσεων. Εάν η H αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία τής G για τα οποία ισχύει $a = 1$, αποδείξτε ότι η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G και ότι $G/H \cong \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$.

16.7 Κάθε στοιχείο

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

τής $GL_2(\mathbb{C})$ γίνεται ο αίτιος για τον ορισμό ενός **μετασχηματισμού τού Möbius**

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

επί τού επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Δείξτε ότι αυτοί οι μετασχηματισμοί συγκροτούν μια ομάδα, τη λεγομένη **ομάδα τού Möbius**, ως προς την πράξη τής σύνθεσης συναρτήσεων και ότι η προκειμένη ομάδα είναι ισόμορφη με την ομάδα πηλίκων $GL_2(\mathbb{C}) \,/\, Z(GL_2(\mathbb{C}))$.

16.8 Δείξτε πως μια συνάρτηση $\varphi : G \longrightarrow G'$ μεταξύ ομάδων είναι ένας ομομορφισμός εάν και μόνον εάν το σύνολο $\{(g, \varphi(g)) \mid g \in G\}$ αποτελεί μια υποομάδα τής $G \times G'$.

16.9 Αποδείξτε ότι η ομάδα πηλίκων $\mathbb{S}^3 \,/\, \{\pm I\}$ είναι ισόμορφη τής SO_3. Επίσης, δώστε κατάλληλα επιχειρήματα για να συμπεράνετε ότι οι ομάδες $\mathbb{S}^3$ και SO_3 *δεν* είναι μεταξύ τους ισόμορφες.

16.10 Χρησιμοποιήστε την κατασκευαστική μέθοδο που συναντήσατε στην άσκηση 12.12 για να δείξετε ότι η ομάδα μετατάξεων S_n είναι ισόμορφη με μια ομάδα πηλίκων τής μορφής B_n/H, όπου η B_n είναι η ομάδα πλεξιδίων (με n σπάγκους).

16.11 Έστω $\varphi : G \longrightarrow G'$ ένας επιρριπτικός ομομορφισμός ομάδων. Ας συμβολίσουμε με το K τον πυρήνα του. Εάν η H' είναι μια υποομάδα τής ομάδας G', ορίστε τήν

$$\varphi^{-1}(H') = \{g \in G \mid \varphi(g) \in H'\}.$$

Αποδείξτε ότι η $\varphi^{-1}(H')$ είναι μια υποομάδα τής G, η οποία περιέχει τον K, και ότι η

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{η συλλογή όλων των} \\ \text{υποομάδων τής } G' \end{array} \right\} \ni H' \longleftrightarrow \varphi^{-1}(H') \in \left\{ \begin{array}{c} \text{η συλλογή όλων των} \\ \text{υποομάδων τής } G \\ \text{που περιέχουν τον } K \end{array} \right\}$$

αποτελεί μια *αμφίρριψη*.

16.12 Δείξτε ότι η H είναι μια μεγιστοτική ορθόθετη υποομάδα μιας ομάδας G εάν και μόνον εάν η ομάδα πηλίκων G/H είναι μια απλή ομάδα. («Μεγιστοτική» σημαίνει πως οι μόνες ορθόθετες υποομάδες τής G, οι οποίες περιέχουν την H, είναι η G και η H.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17

Δράσεις, τροχιές και σταθεροποιητές

Ένας καλός μαθηματικός ορισμός οφείλει να είναι ακριβής, να είναι σύντομος και να συλλαμβάνει μια απλή διαισθητική έννοια· εάν μάλιστα συμβαίνει να είναι και χρηστικός, τότε τόσο το καλύτερο. Ξεκινούμε το κεφάλαιο αυτό παραθέτοντας έναν ορισμό ο οποίος διαθέτει όλα αυτά τα ποιοτικά χαρακτηριστικά.

Μια ***δράση***[1] *μιας ομάδας G επί ενός συνόλου X είναι ένας ομομορφισμός από την G στην ομάδα S_X όλων των μετατάξεων τού X.*

Ας τον διερευνήσουμε διεξοδικότερα. Έστω $\varphi : G \longrightarrow S_X$ ένας ομομορφισμός. Για κάθε στοιχείο g τής G η συνάρτηση φ μας δίνει μια μετάταξη των στοιχείων τού X. Εάν $g, h \in G$, η μετάταξη $\varphi(gh)$ που αντιστοιχεί στο γινόμενο gh ισούται με τη σύνθεση $\varphi(g)\varphi(h)$, διότι η φ είναι ομομορφισμός. Φανταζόμαστε

[1](Σ.τ.Μ.): Σε άλλα βιβλία τής Θεωρίας Ομάδων ορίζεται ως **δράση** μιας ομάδας G επί ενός συνόλου X μια συνάρτηση $\mu : G \times X \longrightarrow X$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) $\mu(gh, x) = \mu(g, \mu(h, x)),\ \forall g, h \in G,\ \forall x \in X,$ (β) $\mu(e, x) = x,\ \forall x \in X.$

Όμως ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με τον ως άνω δοθέντα, διότι η συνάρτηση

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B},\ \ \varphi \longmapsto \mu_{\varphi},\ \ \text{όπου}\ \ \mu_{\varphi}(g, x) := \phi(g)(x), \forall g, h \in G,\ \forall x \in X,$$

από το $\mathbf{A} = \left\{ \begin{array}{c} \text{ομομορφισμοί} \\ \varphi : G \to S_X \end{array} \right\}$ επί τού συνόλου $\mathbf{B} = \left\{ \begin{array}{c} \text{συναρτήσεις } \mu : G \times X \to X \\ \text{με τις ιδιότητες (α), (β)} \end{array} \right\}$ είναι *αμφιρριπτική*.

τα στοιχεία τής G να μετατάσσουν τα στοιχεία τού X κατά έναν τρόπο, ο οποίος είναι *συμβατός* με την αλγεβρική δομή τής G.

Εφεξής θα απλοποιούμε, ως επί το πλείστον, τον συμβολισμό μας γράφοντας $g(x)$ για την εικόνα ενός $x \in X$ μέσω τής μετάταξης τής αντιστοιχιζόμενης στο g, αντί τού δύσχρηστου $\varphi(g)(x)$. Συχνά θα λέμε πως το $g \in G$ *στέλνει* το $x \in X$ στο $g(x) \in X$. Η αξίωσή μας από την φ να είναι ομομορφισμός γράφεται ως

$$gh(x) = g(h(x)),$$

για οιαδήποτε $g, h \in G$ και για οιοδήποτε $x \in X$.

(17.1) Παράδειγμα. Η άπειρη κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}$ δρα επί τής πραγματικής ευθείας μέσω (ακεραίων) μεταφορών. Ο ακέραιος n στέλνει τον πραγματικό αριθμό x στον πραγματικό αριθμό $n + x$. Εάν οι m και n είναι ακέραιοι αριθμοί, τότε

$$(m + n) + x = m + (n + x),$$

οπότε η ως άνω οριζόμενη συνάρτηση είναι πράγματι μια δράση.

(17.2) Παράδειγμα. Ακόμη και η πρώτη λέξη τού ορισμού μας είναι ενδεικτική. Ομιλούμε για «μια» δράση, καθότι μια δεδομένη ομάδα ενδέχεται να δρα επί τού ιδίου συνόλου κατά διαφορετικούς τρόπους. Εδώ θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα μιας δεύτερης δράσης τής $\mathbb{Z}$ επί τού $\mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι το $n \in \mathbb{Z}$ στέλνει το $x \in \mathbb{R}$ στο $(-1)^n x \in \mathbb{R}$ ή, με άλλα λόγια, ότι η μετάταξη η αντιστοιχιζόμενη σε κάθε άρτιο ακέραιο αριθμό είναι η ταυτοτική μετάταξη, ενώ η μετάταξη η αντιστοιχιζόμενη σε κάθε περιττό ακέραιο αριθμό είναι η $x \longmapsto -x$. Επειδή

$$(-1)^{m+n} x = (-1)^m (-1)^n x$$

για οιονδήποτε πραγματικό αριθμό x και οιουσδήποτε ακεραίους αριθμούς m και n, έχουμε και πάλι μια δράση τής $\mathbb{Z}$ επί τού $\mathbb{R}$.

Προτού αυξήσουμε το απόθεμά μας σε παραδείγματα, θα χρειασθούμε κάποια επιπλέον ορολογία. Εάν μια ομάδα G δρα επί ενός συνόλου X και το x είναι ένα στοιχείο τού X, τότε το σύνολο

$$G(x) = \{\, g(x) \mid g \in G\} \subseteq X$$

ονομάζεται **τροχιά τού** x (ως προς τη θεωρούμενη δράση τής G). Στο παράδειγμα (17.1) η τροχιά ενός $x \in \mathbb{R}$ είναι η

$$\mathbb{Z}(x) = \{\, n + x \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

ήτοι το σύνολο όλων των μεταφορών κατά μία ακεραία απόσταση. Στο παράδειγμα (17.2) η τροχιά ενός $x \in \mathbb{R}$ είναι η

$$\mathbb{Z}(x) = \begin{cases} \{-x, x\}, & \text{εάν} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \\ \{0\}, & \text{εάν} \quad x = 0. \end{cases}$$

Έστω τώρα $\mathcal{R}$ το υποσύνολο τού $X \times X$ το οριζόμενο ως εξής:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow [\exists g,\ g \in G : g(x) = y] .$$

Το $\mathcal{R}$ αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τού συνόλου X. (Πράγματι· η μετάταξη η αντιστοιχιζόμενη στο μοναδιαίο στοιχείο τής G είναι η ταυτοτική μετάταξη, οπότε κάθε $x \in X$ σχετίζεται με τον εαυτό του, διότι $e(x) = x$. Εάν το x σχετίζεται με το y, τότε $g(x) = y$ για κάποιο $g \in G$. Συνεπώς,

$$g^{-1}(y) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}g(x) = e(x) = x,$$

κι έτσι και το y σχετίζεται με το x. Εάν, τέλος, το x σχετίζεται με το y και το y σχετίζεται με το z, ας πούμε $g(x) = y$ και $g'(y) = z$, τότε

$$g'g(x) = g'(g(x)) = g'(y) = z,$$

οπότε το x θα σχετίζεται και με το z). Οι κλάσεις ισοδυναμίας τής $\mathcal{R}$ είναι ακριβώς οι τροχιές τής δράσης τής ομάδας μας. Κατά συνέπειαν, οι σαφώς διακεκριμένες τροχιές διαμερίζουν το σύνολο X.

Εάν το x είναι ένα στοιχείο τού X, τότε το σύνολο

$$G_x = \{\, g \in G \mid g(x) = x\}$$

των στοιχείων τής G που αφήνουν το x σταθερό σχηματίζει μια υποομάδα τής G, η οποία ονομάζεται **σταθεροποιητής**[2] (ή **σταθερωτής**) τού x. Στο παράδειγμα (17. 1) ο σταθεροποιητής ενός τυχόντος πραγματικού αριθμού x είναι η τετριμμένη υποομάδα $\mathbb{Z}_x = \{0\}$ τής $\mathbb{Z}$. Στο παράδειγμα (17.2) ο σταθεροποιητής ενός $x \in \mathbb{R}$ είναι ο

$$\mathbb{Z}_x = \begin{cases} 2\mathbb{Z}, & \text{εάν} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \\ \mathbb{Z}, & \text{εάν} \quad x = 0. \end{cases}$$

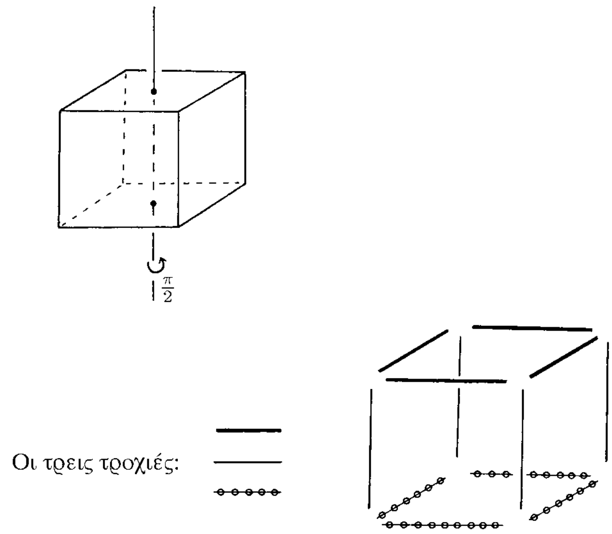
(17.3) Παράδειγμα. Έστω X το σύνολο των ακμών ενός κύβου. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια δράση τής $\mathbb{Z}_4$ επί τού X στρέφοντας τον κύβο περί έναν *άξονα*

[2](Σ.τ.Μ.): Σε άλλα βιβλία συναντούμε ως όρο συνώνυμο τού σταθεροποιητή (stabilizer) τη λεγομένη **ομάδα ισοτροπίας** (isotropy group).

ο οποίος διέρχεται από τα βαρύκεντρα δύο αντικειμένων εδρών του. Από τυπική άποψη, εάν η r είναι η μετάταξη τού X, η οποία επάγεται από τη στροφή που δείχνεται στο σχήμα 17.1, τότε ορίζουμε την

$$\varphi : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow S_X, \quad \varphi(m) = r^m.$$

Υπάρχουν τρεις σαφώς διακεκριμένες τροχιές, ήτοι οι τέσσερεις άνω ακμές, οι τέσσερεις κάτω ακμές και οι τέσσερεις κατακόρυφες ακμές. Ο σταθεροποιητής καθεμιάς των ακμών είναι η τετριμμένη υποομάδα $\{0\}$ τής $\mathbb{Z}_4$.



Σχήμα 17.1

(17.4) Παράδειγμα. Οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί διατηρούν τα μήκη, οπότε, εάν το X είναι η μοναδιαία σφαίρα εντός τού $\mathbb{R}^3$, έχουμε μια δράση τής SO_3 επί τού X. Ο πίνακας $A \in SO_3$ στέλνει το μοναδιαίου μήκους διάνυσμα $\mathbf{x}$ στο μοναδιαίου μήκους διάνυσμα $\mathbf{x}A^t$. Η τροχιά όλων των διανυσμάτων είναι *ολόκληρη η σφαίρα*. (Τα μοναδιαίου μήκους διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ καθορίζουν ένα επίπεδο και μια προσήκουσα στροφή τού $\mathbb{R}^3$ περί έναν άξονα, ο οποίος διέρχεται από το $\mathbf{0}$ και είναι κάθετος προς το εν λόγω επίπεδο, μεταβιβάζουσα το $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$. Επομένως, ο πίνακας αυτής τής στροφής είναι ένα στοιχείο τής SO_3 που στέλνει το $\mathbf{x}$ να απεικονισθεί στο $\mathbf{y}$).Έστω $\mathbf{e}_1$ το πρώτο μέλος τής συνήθους βάσης τού $\mathbb{R}^3$. Εάν ο

$A \in SO_3$ σταθεροποιεί το $\mathbf{e}_1$, τότε ο A είναι τής μορφής

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{B}} \end{array}\right]$$

όπου $B \in SO_2$. Κατά συνέπειαν, ο σταθεροποιητής τού $\mathbf{e}_1$ είναι ένα σύνηθες «αντίτυπο» τής SO_2 εντός τής SO_3. Όμως σημεία ανήκοντα στην ίδια τροχιά έχουν συζυγείς σταθεροποιητές (βλ. θεώρημα (17.6)). Επομένως, ο σταθεροποιητής καθενός των μοναδιαίου μήκους διανυσμάτων είναι ισόμορφος τής SO_2. Έτσι, η ως άνω δράση αποτελεί ένα παράδειγμα μιας μεταβατικής δράσης. (Μια δράση καλείται **μεταβατική** όταν υπάρχει μία και μόνη τροχιά.)

(17.5) Παράδειγμα. Θεωρήστε μια τυχούσα ομάδα G και συμβολίστε ως X το υποκείμενο σύνολό της. Υποθέστε ότι η G δρα επί τού X μέσω συζυγίας. Εν προκειμένω, κάθε $g \in G$ στέλνει το x στο gxg^{-1}. (Αυτή είναι όντως μια δράση, διότι

$$(gh)x(gh)^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1},$$

για όλα τα $g, h \in G$ και όλα τα $x \in X$). Οι τροχιές τής δράσης αυτής είναι ακριβώς οι *κλάσεις συζυγίας* τής G, ενώ ο σταθεροποιητής τού σημείου x είναι ο

$$G_x = \{ g \in G \mid gxg^{-1} = x \} = \{ g \in G \mid gx = xg \}$$

ή, με άλλα λόγια, η υποομάδα τής G η αποτελούμενη από εκείνα τα στοιχεία, τα οποία *μετατίθενται* με το x.

(17.6) Θεώρημα. *Ας υποθέσουμε ότι μια ομάδα G δρα επί ενός συνόλου X. Τότε στοιχεία ανήκοντα στην ίδια τροχιά έχουν συζυγείς σταθεροποιητές.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι τα x και y ανήκουν στην ίδια τροχιά, δηλαδή ότι $y = g(x)$ για κάποιο $g \in G$. Θα δείξουμε ότι

$$gG_xg^{-1} = G_y.$$

Εάν $h \in G_x$, τότε

$$\begin{aligned} ghg^{-1}(y) &= ghg^{-1}(g(x)) \\ &= gh(x) \\ &= g(x) \\ &= y. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $gG_xg^{-1} \subseteq G_y$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των x και y παίρνουμε αναλόγως

$$g^{-1}G_yg \subseteq G_x \Longrightarrow gG_xg^{-1} \supseteq G_y,$$

δηλαδή *και* τον αντίστροφο εγκλεισμό. □

(17.7) Θεώρημα τροχιών και σταθεροποιητών. *Ας υποθέσουμε ότι μια ομάδα G δρα επί ενός συνόλου X. Τότε για κάθε $x \in X$, η συνάρτηση*

$$\boxed{G(x) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{το σύνολο των αριστερών} \\ \text{πλευρικών κλάσεων} \\ \text{τού } G_x \text{ εντός τής } G \end{array} \right\}, \quad g(x) \longmapsto gG_x}$$

είναι αμφιρριπτική.

Απόδειξη. Η εν λόγω συνάρτηση είναι προφανώς επιρριπτική· είναι όμως και ενριπτική, διότι εάν $gG_x = g'G_x$, τότε $g = g'h$ για κάποιο στοιχείο $h \in G_x$, οπότε $g(x) = g'h(x) = g'(h(x)) = g'(x)$. □

(17.8) Πόρισμα. *Εάν η δρώσα ομάδα G είναι πεπερασμένη, τότε ο πληθικός αριθμός καθεμιάς τροχιάς διαιρεί την τάξη τής G.*

Απόδειξη. Κατά το θεώρημα τροχιών και σταθεροποιητών, ο πληθικός αριθμός τής $G(x)$ ισούται με $\frac{|G|}{|G_x|}$, οπότε $|G(x)| \cdot |G_x| = |G|$. □

(17.9) Παράδειγμα. Εάν η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα και X το υποκείμενο σύνολό της, και υποθέσουμε ότι η G δρα επί τού X μέσω συζυγίας, τότε, σύμφωνα με το (17.5), το πόρισμα (17.8) μας πληροφορεί ότι ο αριθμός των στοιχείων μιας οιασδήποτε κλάσης συζυγίας τής G διαιρεί την $|G|$.

(17.10) Παράδειγμα. Μπορούμε να αναπλάσουμε την απόδειξη τού θεωρήματος (13.1) τού Cauchy ως ακολούθως: έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και έστω p ένας πρώτος αριθμός, ο οποίος διαιρεί την $|G|$. Ως είθισται, το X είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων p-άδων $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ των σχηματιζομένων από στοιχεία τής G για τα οποία ισχύει η ισότητα $x_1x_2\cdots x_p = e$. Θυμίζουμε ότι ο p διαιρεί τον πληθικό αριθμό τού X. Υπάρχει μια φυσική δράση τής $\mathbb{Z}_p$ επί τού X. Το στοιχείο $m \in \mathbb{Z}_p$ στέλνει την p-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ στην $(x_{m+1}, \ldots, x_p, x_1 \ldots, x_m)$. Σύμφωνα με το πόρισμα (17.8), κάθε τροχιά περιέχει είτε 1 είτε p p-άδες. Εάν όλες οι τροχιές οι οποίες είναι διάφορες τής $(e, e, \ldots, e)$ περιέχουν p p-άδες, τότε ο p

δεν μπορεί να διαιρεί τον πληθικό αριθμό τού X. Επομένως, διαθέτουμε μία p-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, διάφορη τής $(e, e, \ldots, e)$, η οποία μένει *εξ αριστερών σταθερή* μέσω *όλων* των στοιχείων τής $\mathbb{Z}_p$. Τούτο όμως σημαίνει ότι $x_1 = x_2 = \cdots = x_p$, όπως ακριβώς απαιτείται.

(17.11) Θεώρημα. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα, η τάξη τής οποίας ισούται με κάποια δύναμη ενός πρώτου αριθμού p. Τότε το κέντρο τής G δεν είναι τετριμμένο.*

Απόδειξη. Θεωρήστε τή διαμέριση τής G στις κλάσεις συζυγίας της. Όπως γνωρίζουμε από το (17.9), ο πληθικός αριθμός καθεμιάς κλάσης συζυγίας τής G ισούται είτε με 1 είτε με κάποια δύναμη τού p. Εξ ορισμού, το κέντρο τής G συντίθεται από εκείνες τις κλάσεις συζυγίας, οι οποίες περιέχουν ένα και μόνο στοιχείο. Εάν το κέντρο τής G ήταν τετριμμένο, τότε η τάξη τής G θα ήταν ισότιμη με το 1 κατά μόδιο p, πράγμα που θα αντέφασκε προς την υπόθεσή μας, σύμφωνα με την οποία η τάξη τής G ισούται με κάποια δύναμη τού p. □

(17.12) Θεώρημα. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα τάξης $|G| = p^2$, όπου ο p είναι ένας πρώτος αριθμός. Τότε η G είναι ή κυκλική ή ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.*

Απόδειξη. Εάν η G περιέχει ένα στοιχείο τάξης p^2, τότε η G είναι κυκλική· ειδάλλως, όλα τα στοιχεία τής G, με εξαίρεση το e, έχουν τάξη ίση με p. Το κέντρο τής G είναι μη τετριμμένο κατά το θεώρημα (17.11). Έτσι, μπορούμε να επιλέξουμε ένα $x \in Z(G) \setminus \{e\}$ και ένα $y \in G \setminus \langle x \rangle$. Τα p^2 στοιχεία $x^i y^j$, $1 \leq i, j \leq p$, είναι σαφώς διακεκριμένα, καθότι $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$. Επομένως, $\langle x \rangle \langle y \rangle = G$. Κάθε στοιχείο τής $\langle x \rangle$ μετατίθεται με κάθε στοιχείο τής $\langle y \rangle$ αφού $x \in Z(G)$. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με το θεώρημα (10.4), η G είναι ισόμορφη με την $\langle x \rangle \times \langle y \rangle$, οπότε $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. □

Ασκήσεις

17.1 Έστω G η υποομάδα τής S_8 η παραγόμενη από τα $(1\,2\,3)(4\,5)$ και $(7\,8)$. Τότε η G δρα ως μια ομάδα μετατάξεων τού συνόλου $X = \{1, 2, \ldots, 8\}$. Υπολογίστε τήν τροχιά και τον σταθεροποιητή καθενός στοιχείου τού X.

17.2 Η άπειρη διεδρική ομάδα D_∞ δρα επί τής πραγματικής ευθείας κατά τρόπο φυσικό (βλ. κεφάλαιο 5). Μελετήστε λεπτομερώς την τροχιά και τον σταθεροποιητή καθενός των σημείων $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

17.3 Ταυτίστε την S_4 με την περιστροφική ομάδα συμμετριών τού κύβου, όπως κάναμε στο κεφάλαιο 8, και θεωρήστε τή δράση τής A_4 επί τού συνόλου των κορυφών τού κύβου. Προσδιορίστε τήν τροχιά και τον σταθεροποιητή καθεμιάς των κορυφών.

17.4 Για μια οιαδήποτε δοθείσα δράση μιας ομάδας G επί ενός συνόλου δείξτε ότι *όλα* τα σημεία κάποιας τροχιάς έχουν τον *ίδιον* σταθεροποιητή εάν και μόνον εάν ο εν λόγω σταθεροποιητής αποτελεί μια ορθόθετη υποομάδα τής G.

17.5 Εάν η ομάδα G δρα επί τού X και η ομάδα H επί τού Y, αποδείξτε ότι η $G \times H$ δρα επί τού $X \times Y$ ως εξής:

$$(g,h)(x,y) = (g(x), h(y)) .$$

Βεβαιωθείτε για το ότι η τροχιά τού (x,y) είναι η $G(x) \times H(y)$, ενώ ο σταθεροποιητής του είναι ο $G_x \times H_y$. Εφεξής θα ονομάζουμε την ως άνω δράση **δράση γινομένου** τής $G \times H$ επί τού $X \times Y$.

17.6 Εδώ παραθέτουμε τέσσερεις δράσεις ομάδων επί τού $\mathbb{R}^4$:

(a) Τη συνήθη δράση τής $GL_4(\mathbb{R})$.

(b) Ταυτίστε το $\mathbb{R}^4$ με το $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ και θεωρήστε τη δράση γινομένου τής ομάδας $SO_2 \times SO_2$.

(c) Εκλάβετε το $\mathbb{R}^4$ ως το $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ και υποθέστε πως η SU_2 δρα κατά τον συνήθη τρόπο.

(d) Ταυτίστε το $\mathbb{R}^4$ με το $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ και θεωρήστε τη δράση γινομένου τής ομάδας $SO_3 \times \mathbb{Z}$, όπου η $\mathbb{Z}$ δρα επί τού $\mathbb{R}$ προσθετικώς.

Προσδιορίστε τη δομή των τροχιών και των σταθεροποιητών για τις (a)-(d).

17.7 Εάν η ομάδα G δρα επί των συνόλων X και Y, δείξτε ότι ο τύπος

$$g((x,y)) = (g(x), g(y))$$

ορίζει μια δράση τής G επί τού καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$. Βεβαιωθείτε για το ότι ο σταθεροποιητής τού (x,y) ισούται με την τομή $G_x \cap G_y$. Δώστε ένα παράδειγμα που να δείχνει ότι η δράση αυτή δεν είναι κατ' ανάγκην μεταβατική, ακόμη και όταν η G δρα μεταβατικώς επί αμφοτέρων των X και Y. Από εδώ και στο εξής θα ονομάζουμε την ως άνω δράση **διαγώνιο δράση** τής G επί τού $X \times Y$.

17.8 Έστω $X = \{1,2,3,4\}$ και έστω G η υποομάδα τής S_4 η παραγόμενη από τα $(1\,2\,3\,4)$ και $(2\,4)$. Μελετήστε λεπτομερώς τις τροχιές και τους σταθεροποιητές ως προς τη διαγώνιο δράση τής G επί τού X.

17.9 Η ομάδα $C \times C$ καλείται **τόρος**. Σχεδιάστε μια εικόνα για την $C \times C$ προκειμένου να εξακριβώσετε τον λόγο για τον οποίο τη χρίσαμε έτσι. Περιγράψτε τις τροχιές των ακολούθων δράσεων τής $\mathbb{R}$ επί τού τόρου:

(a) Ο πραγματικός αριθμός t στέλνει το (e^{ix}, e^{iy}) στο $(e^{i(x+t)}, e^{iy})$.

(b) Αυτήν τη φορά ο t στέλνει το (e^{ix}, e^{iy}) στο $(e^{i(x+t)}, e^{i(y+t)})$.

(c) Τέλος, ο t στέλνει το (e^{ix}, e^{iy}) στο $(e^{i(x+t)}, e^{i(y+t\sqrt{2})})$.

17.10 Έστω x ένα στοιχείο μιας ομάδας G. Δείξτε ότι τα στοιχεία τής G τα οποία μετατίθενται με το x συγκροτούν μια υποομάδα τής G. Αυτή η υποομάδα καλείται **ο κεντροποιητής** (ή **ο συγκεντρωτής**) τού x και σημειώνεται ως $C(x)$. Αποδείξτε ότι ο πληθικός αριθμός τής κλάσης συζυγίας τού x ισούται με τον δείκτη τής $C(x)$ εντός τής G. Εάν κάποια κλάση συζυγίας περιέχει ακριβώς δύο στοιχεία, δείξτε ότι η G δεν μπορεί να είναι μια απλή ομάδα.

17.11 Εάν ο n είναι περιττός, δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο κλάσεις συζυγίας n-κύκλων εντός τής A_n, καθεμιά των οποίων περιέχει $\frac{(n-1)!}{2}$ στοιχεία. Εάν ο n είναι άρτιος, αποδείξτε ότι οι $(n-1)$-κύκλοι τής A_n συγκροτούν δύο κλάσεις συζυγίας, καθεμιά των οποίων περιέχει $\frac{(n-2)!\,n}{2}$ στοιχεία.

17.12 Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Δείξτε ότι οι πίνακες τής μορφής

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_p,$$

σχηματίζουν μια μη αβελιανή ομάδα με τάξη ίση με p^3.

17.13 Εάν η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα η οποία δρα μεταβατικώς επί τού συνόλου X και εάν η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G, δείξτε ότι όλες οι τροχιές τής δράσης τής επαγομένης από την H επί τού X έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό.

17.14 Έστω H μια πεπερασμένη υποομάδα μιας ομάδας G. Επαληθεύστε τό ότι ο τύπος

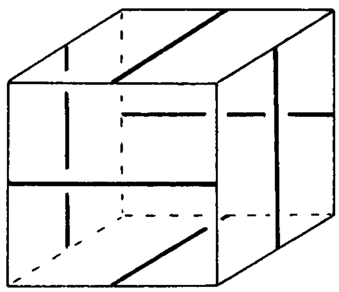
$$(h, h')\,(x) = hxh'^{-1}$$

ορίζει μια δράση τής $H \times H$ επί τής G. Αποδείξτε ότι η H αποτελεί μια ορθόθετη υποομάδα τής G εάν και μόνον εάν κάθε τροχιά αυτής τής δράσης περιέχει ακριβώς $|H|$ σημεία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18

Καταμέτρηση τροχιών

Δύο παιδιά, ο Ιερώνυμος και η Αιμιλία, έχουν προμηθευθεί κύβους, ένα δοχείο με κόκκινη βαφή και ένα δοχείο με πράσινη βαφή. Η Αιμιλία προτίθεται να διακοσμήσει τους κύβους της βάφοντας κάθε έδρα τους είτε με κόκκινο είτε με πράσινο χρώμα. Ο Ιερώνυμος σκοπεύει να διχοτομήσει κάθε έδρα τους μέσω μιας κόκκινης ή πράσινης λωρίδας, όπως δείχνουμε στο σχήμα 18.1, ούτως ώστε καμία των χρησιμοποιουμένων λωρίδων να μην τέμνει κάποια άλλη. Ποιος από τους δύο θα δημιουργήσει τον μεγαλύτερο αριθμό διαφορετικά διακοσμημένων κύβων;



Σχήμα 18.1

Τελικώς, ο Ιερώνυμος κερδίζει με πιθανότητα 12 προς 10. Τα παιδιά αντιλαμβάνονται ενστικτωδώς ότι οι περιστροφές τού κύβου παίζουν πρωτεύοντα ρόλο. Το βάψιμο τής «οροφής» τού κύβου με κόκκινο χρώμα και όλων των άλλων εδρών του με πράσινο χρώμα δίνει το ίδιο αποτέλεσμα, από τη σκοπιά τής διακόσμησης, με το βάψιμο τού «δαπέδου» τού κύβου με κόκκινο χρώμα και των λοιπών εδρών του με πράσινο χρώμα. Παίρνουμε το ένα από το άλλο με απλό αναποδογύρισμα τού κύβου. Ως εκ τούτου, θα συμφωνήσουμε στο να θεωρούμε, από εδώ και στο εξής, δυο χρωματισμένους κύβους ως «ταυτιζόμενους» όταν ο ένας προέρχεται από τον άλλον κατόπιν περιστροφής.

«Δοκιμή και πλάνη» δεν είναι η ορθή μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων αυτού τού είδους. Για παράδειγμα, θα ήταν απίθανο να ανακαλύψουμε και τους 9099 διαφορετικούς τρόπους βαφής των εδρών ενός κανονικού δωδεκαέδρου, κάνοντας χρήση κόκκινου, άσπρου ή μπλε χρώματος, μόνον μέσω απλού πειραματισμού! Αντ' αυτού θα αναλύσουμε το πρόβλημα τής Αιμιλίας ως εξής: η βαφή καθεμιάς των εδρών τού κύβου είτε με κόκκινο είτε με πράσινο χρώμα παράγει ένα αντικείμενο, το οποίο ονομάζουμε *χρωματισμένο κύβο*. Ο κύβος διαθέτει έξι έδρες, οπότε υπάρχουν ακριβώς 2^6 χρωματισμένοι κύβοι. Ας συμβολίσουμε το σύνολό τους ως X. Η ομάδα περιστροφικών συμμετριών τού κύβου δρα επί τού X και δυο χρωματισμένοι κύβοι είναι ουσιωδώς *διαφορετικοί* όταν δεν ανήκουν στην ίδια τροχιά. Για την επίλυση τού προβλήματός μας πρέπει να προσδιορίσουμε επακριβώς το πλήθος των σαφώς διακεκριμένων τροχιών ως προς την προκειμένη δράση.

Ας υποθέσουμε ότι η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα, η οποία δρα επί ενός πεπερασμένου συνόλου X, κι ας ορίσουμε ως $X^g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$ το σύνολο το αποτελούμενο από εκείνα τα στοιχεία τού X, τα οποία μένουν *σταθερά* μέσω τής (ως είθισται, εξ αριστερών) εφαρμογής ενός στοιχείου g τής G.

(18.1) Θεώρημα καταμέτρησης των τροχιών. *Το πλήθος των σαφώς διακεκριμένων τροχιών ισούται με*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|,$$

ήτοι με τον αριθμητικό μέσο των πληθικών αριθμών των συνόλων $\{X^g \mid g \in G\}$ *των σταθερών σημείων.*

Απόδειξη. Θα προσδιορίσουμε τον πληθικό αριθμό τού συνόλου

$$\{(g,x) \in G \times X \mid g(x) = x\}.$$

Αυτός ισούται με το άθροισμα

$$\sum_{g\in G}|X^g| \tag{$\star$}$$

από τη μία μεριά, και με το άθροισμα

$$\sum_{x \in X} |G_x| \tag{$\star\star$}$$

από την άλλη. Έστω ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_k$ είναι οι σαφώς διακεκριμένες τροχιές. Γράφουμε ξανά το άθροισμα $(\star\star)$ υπό τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in X_i} |G_x| .$$

Επειδή σημεία ανήκοντα στην ίδια τροχιά έχουν συζυγείς σταθεροποιητές, εάν το $\overline{x}$ είναι κάποιο (προ)επιλεγμένο σημείο τής X_i, τότε έχουμε

$$\sum_{x \in X_i} |G_x| = |X_i| \cdot |G_{\overline{x}}| = |G(\overline{x})| \cdot |G_{\overline{x}}| ,$$

όπου αυτό το τελευταίο γινόμενο ισούται με την τάξη $|G|$ τής δρώσας ομάδας G δυνάμει τού θεωρήματος τροχιών και σταθεροποιητών. Επομένως, το άθροισμα $(\star\star)$ είναι ίσο με $k\ |G|$ και το ζητούμενο k υπολογίζεται άμεσα λόγω τής ισότητας των $(\star)$ και $(\star\star)$. $\square$

(18.2) Θεώρημα. *Τα στοιχεία τής G τα οποία είναι συζυγή σταθεροποιούν το ίδιο πλήθος στοιχείων τού X.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι τα g και h είναι συζυγή εντός τής G, ήτοι ότι

$$ugu^{-1} = h$$

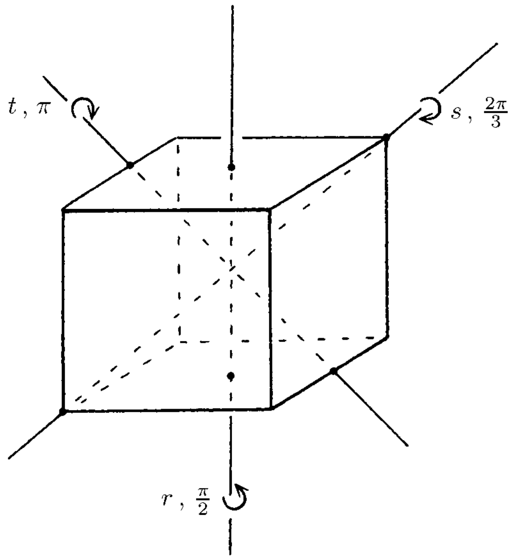
για κάποιο $u \in G$. Εάν το g σταθεροποιεί το x, τότε το h σταθεροποιεί το $u(x)$, διότι

$$h(u(x)) = ugu^{-1}(u(x)) = ug\,(x) = u(x).$$

Συνεπώς το u στέλνει το σύνολο X^g στο X^h. Η ίδια επιχειρηματολογία, αλλά αυτήν τη φορά με τους ρόλους των g και h αντεστραμμένους, δείχνει ότι το u^{-1} επαναφέρει το X^h στο X^g. Τούτο όμως σημαίνει ότι το u μάς χορηγεί μια αμφίρριψη μεταξύ των X^g και X^h, οπότε αυτά τα δύο σύνολα σταθερών στοιχείων πρέπει να έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό. $\square$

Τώρα ας επανέλθουμε στα αρχικά μας προβλήματα.

Επίλυση τού προβλήματος τής Αιμιλίας. Πρέπει να επιλέξουμε ένα στοιχείο από κάθε κλάση συζυγίας τής ομάδας περιστροφικών συμμετριών τού κύβου και να μελετήσουμε λεπτομερώς το πόσους χρωματισμένους κύβους αφήνει σταθερούς. Ως εκπροσώπους των κλάσεων συζυγίας επιλέγουμε τις (περι)στροφές r, r^2, s και t που δείχνονται στο σχήμα 18.2 μαζί με το ταυτοτικό στοιχείο.



Σχήμα 18.2

Ένας χρωματισμένος κύβος, ο οποίος μένει σταθερός μέσω τής r, οφείλει να έχει όλες τις κατακόρυφες ακμές του βαμμένες με το ίδιο χρώμα, διότι η r στρέφει καθεμιά εξ αυτών φέρνοντάς τη στη θέση τής πρώτης εκ δεξιών ερχομένης γειτόνισσάς της. Διαθέτουμε (ελεύθερη) επιλογή βαφής με δύο χρώματα για την οροφή, με δύο χρώματα για το δάπεδο και με δύο για τις λοιπές έδρες· επομένως, $|X^r| = 2^3$. Το τι συμβαίνει μετά την εφαρμογή τής (περι)στροφής s επί των εδρών τού κύβου περιγράφεται εν περιλήψει ως εξής:

$$\text{οροφή} \longmapsto \text{δεξιόπλευρη έδρα} \longmapsto \text{οπίσθια έδρα} \longmapsto \text{οροφή},$$

$$\text{δάπεδο} \longmapsto \text{αριστερόπλευρη έδρα} \longmapsto \text{εμπρόσθια έδρα} \longmapsto \text{δάπεδο},$$

δίνοντάς μας $|X^s| = 2^2$. Αφήνουμε τη λεπτομερή εξέταση τού τι συμβαίνει με τα r^2 και t στον αναγνώστη, αναφέροντας μόνον ότι το r^2 σταθεροποιεί 2^4 και το t 2^3 χρωματισμένους κύβους. Βεβαίως, η ταυτοτική περιστροφή σταθεροποιεί και τους 2^6 χρωματισμένους κύβους. Οι κλάσεις συζυγίας των r, r^2, s και t περιέχουν έξι, τρία, οκτώ και έξι στοιχεία, αντιστοίχως. Κατά συνέπειαν, το πλήθος των ουσιωδώς διαφορετικών χρωματισμένων κύβων, οι οποίοι μπορούν να αποκτηθούν ύστερα από τη βαφή καθεμιάς των εδρών τους είτε με κόκκινο είτε με πράσινο χρώμα, ισούται με

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{24}\left\{\left(6\times 2^3\right)+\left(3\times 2^4\right)+\left(8\times 2^2\right)+\left(6\times 2^3\right)+2^6\right\}\\&=\tfrac{1}{3}\{6+6+4+6+8\}\\&=10.\end{aligned}$$

□

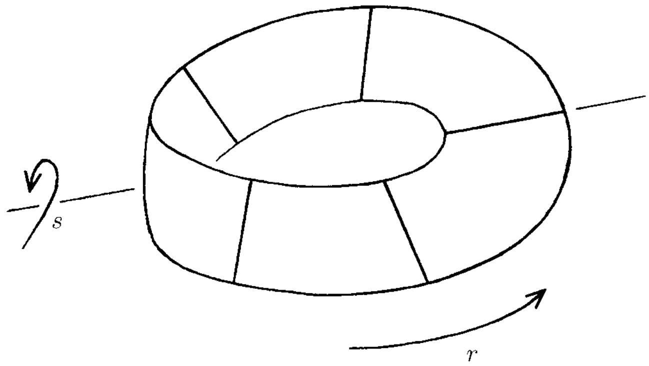
Επίλυση τού προβλήματος τού Ιερώνυμου. Έχουμε σχεδιάσει λωρίδες επί των εδρών τού κύβου όπως στο σχ. 18.1 και σκοπεύουμε να βάψουμε καθεμιά τους είτε με κόκκινο είτε με πράσινο χρώμα. Αυτό ομοιάζει σε μεγάλο βαθμό με το προηγούμενο πρόβλημα· ωστόσο, μεταξύ τους υπάρχει και μια αισθητή διαφορά. Εδώ, το σύνολο των σχεδιασμένων λωρίδων *δεν* στέλνεται να απεικονισθεί στον εαυτό του από *όλες* τις περιστροφικές συμμετρίες τού κύβου αλλά μόνον από τις *μισές* εξ αυτών, ήτοι από εκείνες οι οποίες επάγουν *άρτιες* μετατάξεις επί των τεσσάρων κυρίων διαγωνίων. Ως εκ τούτου, η ομάδα, η οποία μας παρέχει τις επιθυμητές συμμετρίες, δεν είναι ισόμορφη με ολόκληρη την S_4 αλλά με την A_4. Ως εκπροσώπους των κλάσεων συζυγίας της θεωρούμε τις (περι)στροφές r^2, s, s^2 και e, και το πλήθος των ουσιωδώς διαφορετικών χρωματισμένων κύβων στην προκειμένη περίπτωση ισούται με

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{12}\left\{\left(3\times 2^4\right)+\left(4\times 2^2\right)+\left(4\times 2^2\right)+2^6\right\}\\&=\tfrac{1}{3}\{12+4+4+16\}\\&=12.\end{aligned}$$

□

Θα κλείσουμε το κεφάλαιο αυτό με ένα τρίτο πρόβλημα αυτού τού τύπου (το οποίο προτάθηκε από τον L.M. Woodward). Και στις δύο πλευρές μιας («μεγέθους») 5×1 χάρτινης ταινίας, η οποία έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου, χαράσσουμε διαχωριστικές γραμμές κατά τέτοιον τρόπο, ώστε αυτή να διαιρείται σε πέντε («μοναδιαίου» μεγέθους) τετράγωνα. Τα άκρα τής εν λόγω ταινίας συγκολλώνται ύστερα από μισή συστροφή προκειμένου να σχηματισθεί μια **ταινία τού Möbius** M. Πόσοι διαφορετικοί τρόποι χρωματισμού μιας ταινίας αυτού τού είδους μπορούν να προκύψουν όταν μας επιτρέπεται η βαφή των τετραγώνων της κάνοντας χρήση τριών διαφορετικών χρωμάτων; Διαθέτουμε δέκα τετράγωνα και τρία χρώματα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν εν συνόλω 3^{10} χρωματισμένες ταινίες τού Möbius. Δυο κατ' αυτόν τον τρόπο χρωματισμένες ταινίες τού Möbius θα λογίζονται ως «διαφορετικές» όταν είναι διαφορετικές «ως προς τη φυσική συμμετρία» μιας ταινίας Möbius.

Για διευκόλυνσή σας φτειάξτε ένα πρότυπο («μοντέλο») τής M και τρέξτε το (ανάμεσα) στα δάκτυλά σας, ούτως ώστε τα τετράγωνα να κινηθούν κατά μία θέση. Ονομάστε αυτήν τη συμμετρία r. Ύστερα από δέκα επαναλήψεις μιας τέτοιας κίνησης επανακτάτε ό,τι είχατε στην αρχή, οπότε η r^{10} είναι η ταυτοτική συμμετρία. (Σημειώστε ότι η r *δεν* επάγεται από κάποια περιστροφή τού $\mathbb{R}^3$, καθώς αποτελεί απλώς μια μετακίνηση τής ταινίας τού Möbius που τη στέλνει να απεικονισθεί στον εαυτό της. Αυτός ο τύπος συμμετρίας αποκαλύπτεται σε όλο του το εύρος όταν η ταινία χρησιμοποιείται ως συνδετικός ιμάντας μετάδοσης κίνησης μεταξύ δύο τροχαλιών). Υπάρχει και άλλη μία φυσική συμμετρία s, η οποία δείχνεται στο σχήμα 18.3 (στροφή προς τα επάνω).



Σχήμα 18.3

Οι r και s παράγουν από κοινού μια ομάδα, η οποία είναι ισόμορφη με τη διεδρική ομάδα D_{10} και η οποία δρα επί των χρωματισμένων ταινιών κατά τον προφανή τρόπο. Οι κλάσεις συζυγίας τής D_{10} είναι οι

$$\{e\}, \qquad \{r, r^9\}, \qquad \{r^2, r^8\},$$

$$\{r^3, r^7\}, \qquad \{r^4, r^6\}, \qquad \{r^5\},$$

και

$$\{s, r^2s, r^4s, r^6s, r^8s\}, \qquad \{rs, r^3s, r^5s, r^7s, r^9s\}.$$

Παίρνοντας το πρώτο στοιχείο καθεμιάς εξ αυτών και μελετώντας λεπτομερώς το πόσες χρωματισμένες ταινίες τού Möbius αφήνει σταθερές, βρίσκουμε: 3^{10} για το e, 3 για το r, 3^2 για το r^2, 3 για το r^3, 3^2 για το r^4, 3^5 για το r^5, 3^6 για το s και 3^5 για το rs. (Για παράδειγμα, η συμμετρία s αφήνει αναλλοίωτα δύο τετράγωνα, ήτοι εκείνα τα οποία διατρυπώνται στο κέντρο τους από τον άξονά της, ενώ εναλλάσσει τα υπόλοιπα οκτώ ανά ζεύγη, σταθεροποιώντας κατ' αυτόν τον τρόπο εν συνόλω 3^6 χρωματισμένες ταινίες τού Möbius). Κατά το θεώρημα καταμέτρησης των τροχιών το πλήθος των σαφώς διακεκριμένων χρωματισμένων ταινιών τού Möbius ισούται με

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{20}\{3^{10} + (2 \times 3) + \left(2 \times 3^2\right) + (2 \times 3) + \left(2 \times 3^2\right) + \left(1 \times 3^5\right)\\ &+ \left(5 \times 3^6\right) + \left(5 \times 3^5\right)\}\\ &= 3210.\end{aligned}$$

Ο αναγνώστης είναι πιθανόν να θελήσει να προσδιορίσει διεξοδικούς τύπους για τις συμμετρίες r και s. Για να καταστεί αυτό εφικτό κατά έναν συστηματικό τρόπο εκλάβετε την M ως το σύνολο

$$\{\left(e^{2i\theta}, \lambda e^{i\theta}\right) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \,\big|\, -\pi < \theta \leq \pi,\ \ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Τότε η r στέλνει το $\left(e^{2i\theta}, \lambda e^{i\theta}\right)$ στο $(e^{2i(\theta+\frac{\pi}{5})}, \lambda e^{i(\theta+\frac{\pi}{5})})$, ενώ το s στέλνει το $\left(e^{2i\theta}, \lambda e^{i\theta}\right)$ στο $\left(e^{-2i\theta}, \lambda e^{-i\theta}\right)$.

Τέλος, θα άξιζε να μνημονεύσουμε ότι ποικίλες εφαρμογές τού θεωρήματος καταμέτρησης των τροχιών στη Χημεία είναι δυνατόν να εντοπισθούν στην ενότητα 20 τού βιβλίου [5] τού V.E. Hill.

Ασκήσεις

18.1 Ας υποθέσουμε ότι κάθε ακμή ενός κύβου βάφεται είτε με μαύρο είτε με άσπρο χρώμα. Πόσοι διαφορετικοί διακοσμημένοι κύβοι μπορεί να προκύψουν ακολουθώντας αυτήν τη συνθήκη βαφής;

18.2 Δείξτε ότι υπάρχουν πράγματι 9099 ουσιωδώς διαφορετικοί τρόποι χρωματισμού των εδρών ενός δωδεκαέδρου κάνοντας χρήση κόκκινου, άσπρου ή μπλε χρώματος.

18.3 Μια στρογγυλή τούρτα γενεθλίων υποδιαιρείται σε οκτώ ίσους κυκλικούς τομείς. Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να κατανείμουμε κόκκινα και πράσινα κεράκια, ούτως ώστε στο βαρύκεντρο καθενός των τομέων αυτών να βρίσκεται ακριβώς ένα κεράκι;

18.4 Ας υποθέσουμε πως, αντί να χρωματίσετε τις λωρίδες στο σχήμα 18.1, χρωματίζετε καθένα των ημίσεων των υποδιηρημένων εδρών τού κύβου. Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, εάν διαθέτετε μόνον δύο χρώματα;

18.5 Ας υποθέσουμε πως κατασκευάζουμε βραχιόλια, καθένα των οποίων συντίθεται από πέντε χάντρες περασμένες σε ένα κυκλικό συρματάκι. Πόσα διαφορετικά βραχιόλια (αυτού τού είδους) μπορούμε να δημιουργήσουμε, εάν έχουμε στη διάθεσή μας μόνον κόκκινες, μπλε και κίτρινες χάντρες;

18.6 Οι κορυφές, τα μεσοσημεία των ακμών και τα βαρύκεντρα των εδρών ενός κανονικού τετραέδρου T πρόκειται να επιγραφούν με τη χρήση τριών χρωμάτων. Αποδείξτε πως υπάρχουν 400707 τρόποι για να συμβεί αυτό, υπό την προϋπόθεση ότι λαμβάνετε υπ' όψιν την περιστροφική συμμετρία τού τετραέδρου T.

18.7 Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να χρωματισθούν οι κορυφές και οι ακμές ενός κανονικού εξαγώνου χρησιμοποιώντας κόκκινο, μπλε ή κίτρινο χρώμα για τις ακμές και μαύρο ή άσπρο χρώμα για τις κορυφές;

18.8 Εξετάστε την περιγραφή που δώσαμε για την ταινία τού Möbius παρουσιάζοντάς την ως ένα υποσύνολο τού $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ και προσδιορίστε τούς πίνακες τής U_2, οι οποίοι αναπαριστούν τις συμμετρίες r και s.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 19

Πεπερασμένες ομάδες περιστροφών

Η ειδική ορθογώνια ομάδα SO_3 μπορεί να θεωρηθεί, όπως προαναφέραμε στο κεφάλαιο 9, ως ταυτιζόμενη με την *ομάδα των περιστροφών* τού $\mathbb{R}^3$, οι οποίες σταθεροποιούν την αρχή των αξόνων. Εάν ένα γεωμετρικό αντικείμενο τοποθετηθεί εντός τού $\mathbb{R}^3$ κατά τέτοιον τρόπο, ώστε το βαρύκεντρό του να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων, τότε η ομάδα περιστροφικών συμμετριών του «είναι», υπ' αυτήν την έννοια, μια υποομάδα τής SO_3. Είμαστε ήδη εξοικειωμένοι με αρκετά παραδείγματα. Από μια ορθή κανονική πυραμίδα βασισμένη σε ένα κανονικό k-γωνο αποκτούμε μια κυκλική ομάδα τάξης k, ενώ μια ισόπεδη κανονική (n-γωνική) πλάκα με n ισομήκεις πλευρές παρουσιάζει διεδρική συμμετρία δίνοντάς μας την D_n. (Στην ειδική περίπτωση κατά την οποία $n = 2$, αντί τής ομάδας περιστροφικών συμμετριών τής ισόπεδης κανονικής πλάκας, χρησιμοποιούμε την ομάδα περιστροφικών συμμετριών τού κανονικού διπλεύρου γεωμετρικού μορφώματος που περιγράψαμε στην άσκηση 9.12. Πρόκειται για ένα στερεό, το οποίο ομοιάζει με έναν φακό). Επιπροσθέτως, έχουμε συναντήσει και τις ομάδες συμμετρίας των κανονικών (ή «πλατωνικών») στερεών. Όπως θα δούμε ευθύς παρακάτω, πέραν των κυκλικών και διεδρικών ομάδων και των ομάδων συμμετρίας των εν λόγω στερεών δεν υφίστανται -ως προς ισομορφισμό- άλλες *πεπερασμένες* υποομάδες τής SO_3. Ξεκινούμε με την παράθεση ενός ολιγότερο φιλόδοξου θεωρητικού αποτελέσματος που αφορά στις πεπερασμένες υποομάδες τής O_2.

(19.1) Θεώρημα. *Κάθε πεπερασμένη υποομάδα τής O_2 είναι ή κυκλική ή διεδρική.*

Απόδειξη. Έστω G μια πεπερασμένη, μη τετριμμένη υποομάδα τής O_2. Κατ' αρχάς υποθέτουμε ότι ολόκληρη η G περιέχεται στην ειδική ορθογώνια ομάδα SO_2, οπότε κάθε στοιχείο τής G αναπαριστά μια *περιστροφή* τού επιπέδου. Έστω A_θ ο πίνακας ο οποίος αναπαριστά τη στροφή κατά γωνία θ περί την αρχή των αξόνων (των συντεταγμένων) με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού (αριστερόστροφη φορά), όπου $0 \leq \theta < 2\pi$. Επιλέγουμε τον πίνακα $A_\varphi \in G$, ούτως ώστε η ϕ να είναι θετική και να αποτελεί την *ελάχιστη* γωνία με αυτήν την ιδιότητα. Τότε για κάθε $A_\theta \in G$ μπορούμε να διαιρέσουμε την θ με την ϕ και να τη γράψουμε ως $\theta = k\phi + \psi$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \psi < \phi$, οπότε

$$A_\theta = A_{k\phi+\psi} = (A_\phi)^k A_\psi \Longrightarrow A_\psi = (A_\phi)^{-k} A_\theta \in G,$$

(καθότι αμφότεροι οι A_θ και A_ϕ ανήκουν στην G), πράγμα που σημαίνει ότι $\psi = 0$, διότι αλλιώς θα καταλήγαμε σε άτοπο λόγω τής επιλογής τής ϕ. Επομένως η G παράγεται από τον πίνακα A_θ και είναι *κυκλική*.

Εάν η G δεν περιέχεται εξ ολοκλήρου στην ειδική ορθογώνια ομάδα SO_2, τότε ορίζουμε ως H την τομή $H = G \cap SO_2$. Η H αποτελεί μια υποομάδα τής G με δείκτη 2 και, σύμφωνα με όσα προαναφέραμε, είναι κυκλική αφού περιέχεται στην SO_2. Έστω A ένας γεννήτορας τής H και έστω B ένα στοιχείο τής διαφοράς $G \smallsetminus H$. Επειδή ο πίνακας B αναπαριστά έναν *κατοπτρισμό*, έχουμε $B^2 = I$. Στην περίπτωση κατά την οποία $A = I$, έχουμε $G = \{I, B\}$, δηλαδή η G είναι *κυκλική* τάξης 2. Ειδάλλως, η τάξη τού A είναι ένας ακέραιος $n \geq 2$, οπότε

$$G = \{I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}, B, AB, \ldots, A^{n-1}B\},$$

όπου $A^n = I$, $B^2 = I$, $BA = A^{-1}B$. Σε αυτήν την περίπτωση, η απεικόνιση γεννητόρων

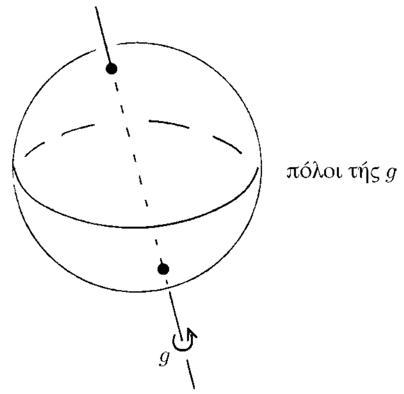
$$A \longmapsto r, \;\; B \longmapsto s,$$

καθορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ τής G και τής *διεδρικής ομάδας* D_n (όπου r και s είναι οι συνήθεις συμβολισμοί μας, οι εισαχθέντες στο κεφάλαιο 4, για τους γεννήτορες τής D_n). □

(19.2) Θεώρημα ταξινόμησης των πεπερασμένων υποομάδων τής SO_3.
Κάθε πεπερασμένη υποομάδα τής SO_3 είναι είτε ισόμορφη με μια κυκλική ομάδα είτε ισόμορφη με μια διεδρική ομάδα είτε ισόμορφη με την περιστροφική ομάδα συμμετριών ενός κανονικού στερεού [1].

[1](Σ.τ.Μ.): Η ταξινόμηση των πεπερασμένων υποομάδων τής SO_3 πρωτοεμφανίζεται στη βιβλιογραφία με το σύγγραμμα τού Felix Klein: *Vorlesungen über das Ikosaeder* (1884), αν και στην αρθρογραφία ήταν ήδη γνωστή από τις εργασίες των M.L. Frankenheim (1826), J.F. Hessel (1830) και A. Bravais (1849), οι οποίοι είχαν ασχοληθεί με τη συστηματική μελέτη των κλάσεων ορισμένων κρυστάλλων (ήτοι με τις κρυσταλλογραφικές σημειακές ομάδες).

Απόδειξη. Έστω G μια πεπερασμένη υποομάδα τής SO_3. Τότε κάθε στοιχείο τής G, που είναι διάφορο τού μοναδιαίου, αναπαριστά μια περιστροφή τού $\mathbb{R}^3$ περί έναν άξονα διερχόμενο από το $\mathbf{0} = (0,0,0)$. Η επιχειρηματολογία μας θα περιλάβει γεωμετρικά τεχνικά μέσα, ενώ θα προτιμήσουμε να εργασθούμε απευθείας με τις περιστροφές παρά με τους αντίστοιχους πίνακες. Τα δύο σημεία, στα οποία ο άξονας μιας περιστροφής $g \in G$ τέμνει τη μοναδιαία σφαίρα, ονομάζονται **πόλοι** τής g (βλ. σχ. 19.1). Εάν ο άξονας συμβαίνει να συμπίπτει με τον άξονα των κατηγμένων, τότε αποκτούμε τον συνήθη βόρειο και νότιο πόλο τής σφαίρας. Οι πόλοι μιας περιστροφής $g \in G$ είναι τα μόνα σημεία επί τής μοναδιαίας σφαίρας, τα οποία μένουν σταθερά μέσω τής εξ αριστερών εφαρμογής τής g.



Σχήμα 19.1

Έστω

$$X = \{\text{πόλοι των περιστροφών } g \mid g \in G \setminus \{e\}\}.$$

Επιλέγουμε ένα σημείο $x \in X$ και ένα στοιχείο $g \in G$. Υποθέτοντας ότι το x είναι ο ένας εκ των δύο πόλων ενός $h \in G$, παίρνουμε

$$(ghg^{-1})(g(x)) = g(h(x)) = g(x),$$

πράγμα που σημαίνει ότι το $g(x)$ αποτελεί έναν πόλο τού ghg^{-1}, οπότε $g(x) \in X$. Κατά συνέπειαν, *διαθέτουμε μια δράση τής G επί τού ως άνω συνόλου των πόλων X.* Το όλο σκεπτικό τής απόδειξης βασίζεται στην εφαρμογή τού θεωρήματος καταμέτρησης των τροχιών (για την εν λόγω δράση τής G) και στην ιδιότητα τού X να απαρτίζεται από σημεία τοποθετημένα σε ιδιαίτερα όμορφους γεωμετρικούς σχηματισμούς.

Έστω N το πλήθος των σαφώς διακεκριμένων τροχιών. Από κάθε τροχιά επιλέγουμε έναν πόλο. Ας συμβολίσουμε αυτούς τους πόλους ως $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Κάθε στοιχείο τής $G \smallsetminus \{e\}$ σταθεροποιεί ακριβώς δύο πόλους, ενώ το μοναδιαίο στοιχείο σταθεροποιεί όλους τους διαθέσιμους πόλους. Ως εκ τούτου, το θεώρημα καταμέτρησης των τροχιών μάς δίνει την ισότητα

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{|G|}\{2(|G|-1)+|X|\} \\ &= \frac{1}{|G|}\left\{2(|G|-1)+\sum_{i=1}^{N}|G(x_i)|\right\}. \end{aligned}$$

Αυτή επαναδιευθετείται ως ακολούθως:

$$\left.\begin{aligned} 2\left(1-\frac{1}{|G|}\right) &= N-\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{N}|G(x_i)| \\ &= N-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{|G_{x_i}|} \\ &= \sum_{i=1}^{N}\left(1-\frac{1}{|G_{x_i}|}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (\bigstar)$$

Υποθέτοντας ότι η G δεν είναι τετριμμένη, το αριστερό μέλος αυτής τής ισότητας είναι μεγαλύτερο ή ίσο τού 1 και μικρότερο τού 2. Όμως κάθε σταθεροποιητής G_x έχει τάξη τουλάχιστον 2, οπότε

$$1 \leq 1-\frac{1}{|G_{x_i}|} < 2$$

για όλα τα $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Συνεπώς, $N \in \{2, 3\}$.

▶ Εάν $N = 2$, τότε η $(\bigstar)$ μας δίνει

$$2 = |G(x_1)| + |G(x_2)|,$$

οπότε είναι δυνατόν να υπάρχουν μόνον δύο πόλοι. Αυτοί οι πόλοι καθορίζουν έναν άξονα L και κάθε στοιχείο τής $G \smallsetminus \{e\}$ οφείλει να είναι μία στροφή περί αυτόν τον άξονα. Το επίπεδο, το οποίο διέρχεται από το $\mathbf{0}$ και είναι κάθετο προς τον L, περιστρέφεται μέσω τής G επανερχόμενο στον εαυτό του. Κατά συνέπειαν, η G είναι ισόμορφη με μια υποομάδα τής SO_2, κι έτσι οφείλει να είναι *κυκλική* βάσει τού θεωρήματος (19.1).

► Εάν $N = 3$, τότε τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα. Γράφοντας, για λόγους συντομίας, x, y, z αντί των x_1, x_2, x_3, έχουμε

$$2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = 3 - \left(\frac{1}{|G_x|} + \frac{1}{|G_y|} + \frac{1}{|G_z|}\right)$$

ή, ισοδυνάμως,

$$1 + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{|G_x|} + \frac{1}{|G_y|} + \frac{1}{|G_z|}.$$

Το άθροισμα των τριών όρων τού δεξιού μέλους είναι *μεγαλύτερο* τού 1, οπότε υπάρχουν μόνον πέντε δυνατότητες για τις τιμές τις οποίες μπορούν να λάβουν οι $|G|$, $|G_x|$, $|G_y|$ και $|G_z|$. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτοντας (δίχως βλάβη τής γενικότητας) ότι

$$2 \leq |G_x| \leq |G_y| \leq |G_z|,$$

ο ανωτέρω τύπος μάς παρέχει τις εξής δυνατές τιμές:

Α/Α	$\|G\|$	$\|G_x\|$	$\|G_y\|$	$\|G_z\|$
(a)	4	2	2	2
(b)	$2n,\ n \geq 3$	2	2	n
(c)	12	2	3	3
(d)	24	2	3	4
(e)	60	2	3	5

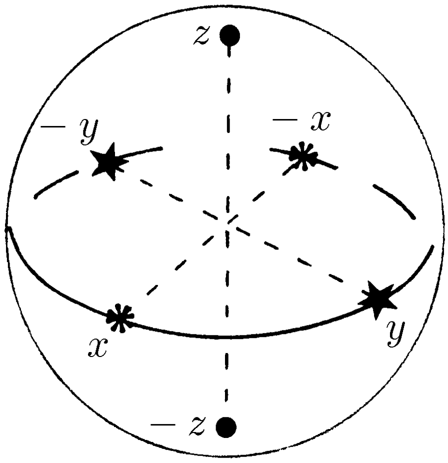
Θα εξετάσουμε καθεμιά από αυτές τις περιπτώσεις χωριστά.

Περίπτωση (a). Η G, σε αυτήν την περίπτωση, είναι μια ομάδα τάξης 4, στην οποία κάθε στοιχείο -διάφορο τού μοναδιαίου- έχει τάξη ίση με 2. Συνεπώς η G είναι ισόμορφη με την *ομάδα τού Klein*, εκλαμβανόμενη, εν προκειμένω, ως μια διεδρική ομάδα με τέσσερα στοιχεία. Έστω g ένας γεννήτορας τού σταθεροποιητή G_z. Υπενθυμίζουμε ότι το g διατηρεί τις αποστάσεις. Οι πόλοι x και $g(x)$ ισαπέχουν από το z. Το ίδιο ισχύει και για τους y και $g(y)$. Επομένως, το $-z$ οφείλει να είναι το άλλο σημείο τής τροχιάς $G(z)$, ενώ

$$g(x) = -x, \quad g(y) = -y.$$

Τούτο σημαίνει ότι οι άξονες οι διερχόμενοι από τα σημεία x, y, z είναι κάθετοι (ο ένας προς τον άλλο) και ότι οι τρεις τροχιές είναι οι $G(x) = \{\pm x\}$, $G(y) = \{\pm y\}$

και $G(z) = \{\pm z\}$, όπως στο σχ. 19.2.



Σχήμα 19.2

Περίπτωση (b). Εάν $|G_x| = |G_y| = 2$ και $|G_z| = n \geq 3$, τότε $|G| = 2n$. Ο άξονας, ο οποίος διέρχεται από το z, σταθεροποιείται μέσω όλων των περιστροφών τής G_z. Άρα η ομάδα G_z είναι κυκλική τάξης n. Ας υποθέσουμε ότι το g είναι η ελάχιστη περιστροφή, η οποία παράγει την G_z. Τα n στοιχεία

$$x, g\left(x\right), g^2(x), \ldots, g^{n-1}(x)$$

είναι σαφώς διακεκριμένα. (Πράγματι· εάν είχαμε $g^{\mu}(x) = g^{\nu}(x)$ για κάποιους ακεραίους μ, ν, όπου $0 \leq \nu < \mu \leq n-1$, τότε θα είχαμε $0 < \mu - \nu < n$ και

$$g^{\mu-\nu}(x) = x \Longrightarrow g^{\mu-\nu} \neq I, \text{ και } g^{\mu-\nu} \in G_x.$$

Επομένως το $g^{\mu-\nu}$ -και, κατά συνέπειαν, και το g- θα ήταν μια στροφή περί τον άξονα τον διερχόμενο από το x, πράγμα αδύνατον, διότι η τάξη τού g είναι ίση με $n > 2 = |G_x|$.) Επειδή λοιπόν $\frac{|G|}{|G_x|} = n$, έχουμε

$$G\left(x\right) = \{x, g\left(x\right), g^2(x), \ldots, g^{n-1}(x)\}$$

και κατ' αναλογίαν

$$G\left(y\right) = \{y, g\left(y\right), g^2(y), \ldots, g^{n-1}(y)\}.$$

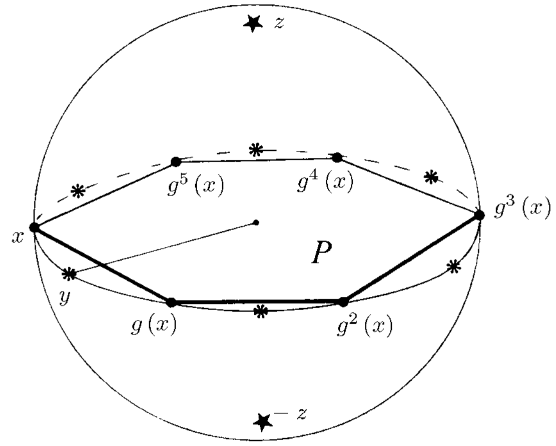
Επιπροσθέτως, $g\,(z) = z$, $g(-z) = -z$, οπότε $-z \notin G\,(x) \cup G\,(y)$, που σημαίνει ότι

$$G\,(z) = \{\pm z\}\,.$$

Επειδή το g διατηρεί τις αποστάσεις, παίρνουμε τελικώς

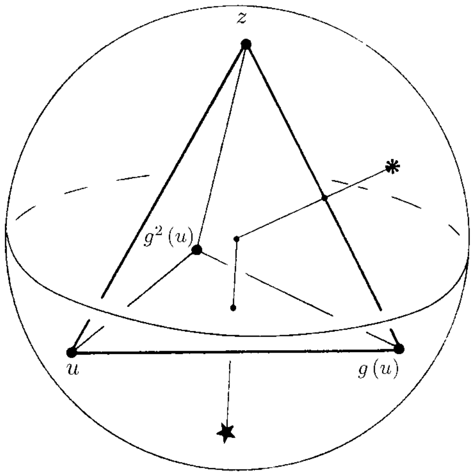
$$\|x - g(x)\| = \left\|g(x) - g^2(x)\right\| = \cdots = \left\|g^{n-1}(x) - x\right\|,$$

και έτσι τα $x, g\,(x)\,, \ldots\,, g^{n-1}(x)$ αποτελούν τις κορυφές ενός κανονικού n-γώνου P. Επειδή η G συνίσταται από $2n$ περιστροφές, οι οποίες απεικονίζουν το P στον εαυτό του, η G θα πρέπει να είναι η ομάδα περιστροφικών συμμετριών τού P. Κατά συνέπειαν, η G είναι *διεδρική*. Φυσικά, το επίπεδο το οριζόμενο από το P περιέχει το **0** και είναι κάθετο προς τον άξονα των κατηγμένων. Οι τροχιές των x, y, z εικονογραφούνται στο σχήμα 19.3.



Σχήμα 19.3

Περίπτωση (c). Εάν $|G_x| = 2$ και $|G_y| = |G_z| = 3$, τότε $|G| = 12$. Η τροχιά τού z αποτελείται από τέσσερα σημεία. Επιλέγουμε ένα εξ αυτών, ας το πούμε u, ούτως ώστε $0 < \|z - u\| < 2$. Επίσης επιλέγουμε έναν γεννήτορα g τής G_z. Τότε τα u, $g(u)$, $g^2(u)$ είναι σαφώς διακεκριμένα. Επειδή το g (ως ισομετρία) διατηρεί την απόσταση, αυτά ισαπέχουν από το z και αποτελούν τις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου. Εάν τώρα εστιάσουμε την προσοχή μας στο u (αντί να συνεχίσουμε να ασχολούμαστε με το z), θα παρατηρήσουμε ότι τα σημεία $z, g(u)$ και $g^2(u)$ ισαπέχουν από το u. Επομένως, τα σημεία $z, u, g(u)$ και $g^2(u)$ αποτελούν κορυφές ενός *κανονικού τετραέδρου*, το οποίο στέλνεται να απεικονιστεί στον εαυτό του μέσω όλων των περιστροφών τής G. Κι επειδή έχουμε $|G| = 12$, η G οφείλει να είναι η περιστροφική ομάδα τού εν λόγω τετραέδρου. Το σχήμα 19.4 δείχνει τις τρεις τροχιές.



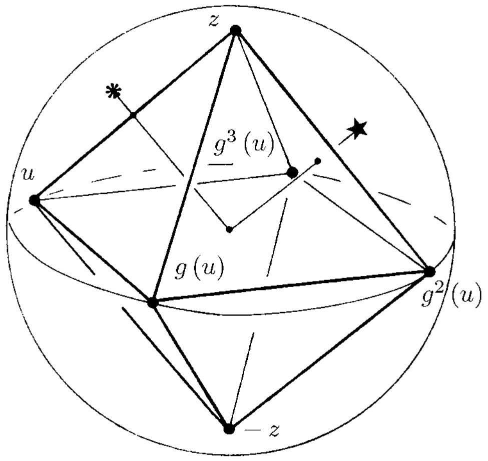
Το ❋ από την τροχιά τού x.
Το ✶ από την τροχιά τού y.

Σχήμα 19.4

Περίπτωση (d). Εάν $|G_x| = 2$, $|G_y| = 3$ και $|G_z| = 4$, τότε $|G| = 24$. Η τροχιά τού z αποτελείται από έξι σημεία. Επιλέγουμε ένα εξ αυτών, ας το πούμε u, ούτως ώστε $u \notin \{\pm z\}$. Επίσης επιλέγουμε έναν γεννήτορα g τής G_z. Τότε τα u, $g(u)$, $g^2(u)$, $g^3(x)$ είναι σαφώς διακεκριμένα σημεία, τα οποία ισαπέχουν από το z και αποτελούν τις κορυφές ενός τετραγώνου. Υπάρχει χώρος μόνο για ένα ακόμη στοιχείο εντός τής τροχιάς $G(z)$, οπότε αυτό το (τελευταίο) σημείο πρέπει να είναι το $-z$. Όμως και το $-u$ ανήκει στην $G(u) = G(z)$. Προφανώς, ο πόλος $-u$ δεν μπορεί να ανήκει στο δισύνολο $\{\pm z\}$, αλλά ούτε και να είναι ένα από τα σημεία $g(u)$, $g^3(x)$, διότι

$$\|g(u) - u\| = \left\|g^3(u) - u\right\| < 2.$$

Κατά συνέπειαν, $-u = g^2(u)$, οπότε τα σημεία z, u, $g(u)$, $g^2(u)$, $g^3(x)$ και $-z$ αποτελούν τις κορυφές ενός *κανονικού οκταέδρου* και η G είναι η ομάδα των περιστροφικών συμμετριών του (βλ. σχήμα 19.5).



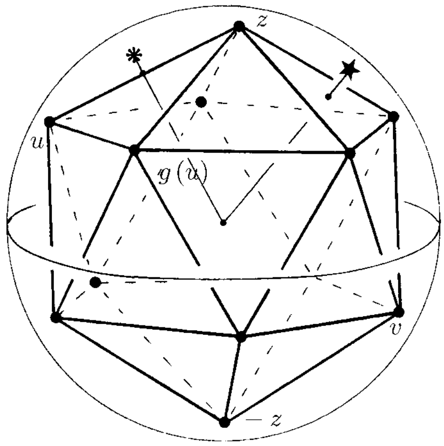
Το ❋ από την τροχιά τού x.
Το ★ από την τροχιά τού y.

Σχήμα 19.5

Περίπτωση (e). Εάν $|G_x| = 2$, $|G_y| = 3$ και $|G_z| = 4$, τότε $|G| = 60$. Η τροχιά τού z αποτελείται από δώδεκα σημεία. Επιλέγουμε δύο εξ αυτών, ας τα πούμε u και v, ούτως ώστε να ισχύει

$$0 < \|z-u\| < \|z-v\| < 2.$$

(Γιατί μπορούμε πάντοτε να κάνουμε μια τέτοια επιλογή;) Εάν το g είναι ο ελάχιστος γεννήτορας τής G_z, τότε τα u, $g(u)$, $g^2(u)$, $g^3(x)$ και $g^4(x)$ είναι σαφώς διακεκριμένα σημεία, τα οποία ισαπέχουν από το z και αποτελούν τις κορυφές ενός κανονικού πενταγώνου. Αλλά και τα v, $g(v)$, $g^2(v)$, $g^3(v)$ και $g^4(v)$ είναι σαφώς διακεκριμένα σημεία, τα οποία ισαπέχουν από το z (κατά μία απόσταση μεγαλύτερη τής $\|z-u\|$) και αποτελούν τις κορυφές ενός άλλου κανονικού πενταγώνου. Ως εκ τούτου, το $-z$ πρέπει να είναι το δωδέκατο σημείο τής τροχιάς $G(z)$. Αν στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στο u, βλέπουμε ότι $-u \in G(u) = G(z)$. Καθώς η απόσταση τού $-u$ από το u ισούται με 2, το $-u$ πρέπει να ανήκει στο σύνολο $\{v, g(v), g^2(v), g^3(v), g^4(v)\}$. Αλλάζοντας, εν ανάγκη, τη διάταξη επιγραφής των σημείων μας επί τής μοναδιαίας σφαίρας, μπορούμε να τα διευθετήσουμε κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να έχουμε $-u = v$ όταν $-g^r(u) = g^r(v)$, $1 \le r \le 4$, όπως στο σχήμα 19.6.



Το ✱ από την τροχιά τού x.
Το ★ από την τροχιά τού y.

Σχήμα 19.6

Έχοντας ως σημείο επόπτευσής μας το u, βλέπουμε έντεκα σημεία. Τα πέντε εξ αυτών, τα οποία βρίσκονται πλησιεστέρως τού u, οφείλουν να ισαπέχουν από το u. Αυτά είναι τα z, $g(u)$, $g^2(u)$, $g^3(x)$ και $g^4(x)$. Επομένως,

$$\|u - z\| = \|u - g(u)\| = \left\|u - g^2(u)\right\|.$$

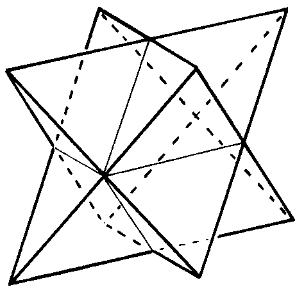
Είναι τώρα εύκολο να ελεγχθεί το ότι τα δώδεκα σημεία μας αποτελούν τις κορυφές ενός *κανονικού εικοσαέδρου* και το ότι η G είναι η ομάδα των περιστροφικών συμμετριών του. □

Ασκήσεις

19.1 Βρείτε τους πόλους των περιστροφών που περιγράψαμε στην άσκηση 9.8.

19.2 Συγκολλήστε δύο δωδεκάεδρα κατά μήκος μιας πενταγωνικής τους έδρας και βρείτε την περιστροφική ομάδα συμμετριών αυτού τού νέου στερεού. Ποια είναι η πλήρης ομάδα συμμετριών του;

19.3 Ας υποθέσουμε ότι ένα στερεό συντίθεται από δύο κανονικά τετράεδρα, τα οποία έχουν διευθετηθεί κατά τέτοιον τρόπο, ώστε οι ακμές τους να διχοτομούν η μία την άλλη υπό ορθή γωνία (βλ. σχήμα 19.7). Προσδιορίστε τήν ομάδα συμμετριών του.



Οκταγωνικό άστρο (Stella octangula)

Σχήμα 19.7

19.4 Δείξτε ότι η περιστροφική ομάδα συμμετριών τού **κυβοκταέδρου** (βλ. σχήμα 19.8) είναι ισόμορφη τής S_4. Ένας κύβος συντίθεται από έξι πυραμίδες, καθεμιά των οποίων έχει μια έδρα τού κύβου ως βάση της και το βαρύκεντρο τού κύβου ως απαρχή της. Τοποθετώντας αυτές τις πυραμίδες επί των εδρών ενός δευτέρου κύβου αποκτούμε το **ρομβοδωδεκάεδρο**. Φτειάξτε ένα πρότυπο τού ρομβοδωδεκαέδρου και δείξτε ότι το δυϊκό του είναι το κυβοκτάεδρο. [(Σ.τ.Μ.): Το κυβοκτάεδρο[2] είναι ένα εκ των εν συνόλω 13 «αρχιμηδείων[3]» ή «ημικανονικών» στερεών. (Πρβλ. τις αντίστοιχες ενότητες από τα βιβλία των M. Brückner[4], L. Fejes Tóth[5], [6], Ι.Σ. Παπαδάτου[7], A. Holden[8] και R. Hartshorne[9], καθώς και τις επεξηγήσεις και εικόνες των G.W. Hart και S. Dutch στο διαδίκτυο[10,11])].

[2]Κατά τον Ήρωνα, ο Αρχιμήδης αποδίδει την κατασκευή τού κυβοκταέδρου στον Πλάτωνα. (Βλ. T.L. Heath: *The History of Greek Mathematics*, Vol. **I**, Oxford, 1921, [p. 295])

[3]Αυτά τα στερεά μελετήθηκαν στο βιβλίο τού Αρχιμήδους *Περί (13) Ημικανονικών Πολυέδρων*, το οποίο όμως δεν έχει διασωθεί. Τις πληροφορίες μας περί τού περιεχομένου του τις αντλούμε από τον Πάππο (V, 34). [Πρβλ. Ε. Σταμάτη: *Άπαντα Αρχιμήδους*, Τ.Ε.Ε., Αθήνα, 1970.]

[4]M. Brückner: *Vielecke und Vielfläche*, Teubner, Leipzig, (1900).

[5]L. Fejes Tóth: *Regular Figures*, MacMillan, NY, (1964).

[6]H.S.M. Coxeter: *Regular Polytopes*, Dover Pub., (1973). [Εδ. 2.3]

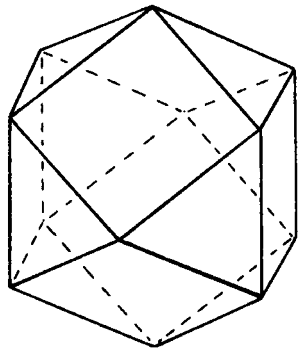
[7]Ι.Σ. Παπαδάτου: *Αρχιμήδη: Τα 13 ημικανονικά πολύεδρα*, Αθήνα 1978.

[8]A. Holden: *Shapes, Space and Symmetry*, Dover Pub., (1991).

[9]R. Hartshorne: *Geometry: Euclid and Beyond*, UTM, Springer-Verlag, (2000). [Ch. 8]

[10]http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/archimedean-info.html

[11]http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/archpol.htm



Κυβοκτάεδρο

Σχήμα 19.8

19.5 *Ταξινόμηση των πεπερασμένων υποομάδων τής* O_3. Έστω G μια πεπερασμένη υποομάδα τής ομάδας O_3 και έστω $H = G \cap SO_3$. Εάν η G περιέχει τον πίνακα $-I$, δείξτε ότι η G είναι ισόμορφη τής $H \times \mathbb{Z}_2$. Εάν, από την άλλη μεριά, ο πίνακας $-I$ δεν περιέχεται στην G, δείξτε ότι η συνάρτηση

$$G \longrightarrow SO_3, \qquad A \longmapsto (\det A) \cdot A,$$

μας παρέχει έναν ισομορφισμό μεταξύ τής ομάδας G και μιας υποομάδας τής SO_3. Τέλος, διαπιστώστε ότι οι μόνες ομάδες, οι οποίες μπορούν να παίξουν τον ρόλο των ως άνω H και G (ως προς ισομορφισμό) είναι ακριβώς αυτές που περιλαμβάνονται στον ακόλουθο κατάλογο:

H	G
$\{e\}$	$\{e\}\,,\ \mathbb{Z}_2$
$\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}_n,\ \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_{2n}$
D_n	$D_n,\ D_n \times \mathbb{Z}_2,\ D_{2n}$
A_4	$A_4,\ A_4 \times \mathbb{Z}_2,\ S_4$
S_4	$S_4,\ S_4 \times \mathbb{Z}_2$
A_5	$A_5, A_5 \times \mathbb{Z}_2$

19.6 Υλοποιήστε καθεμιά των ομάδων $\mathbb{Z}_{2n}, D_{2n}, A_5 \times \mathbb{Z}_2$ ως (πλήρη) ομάδα συμμετριών ενός καταλλήλου στερεού.

19.7 Προσδιορίστε εκείνα τα στερεά, οι περιστροφικές ομάδες συμμετριών των οποίων είναι ισόμορφες με την SO_2, την $SO_2 \times \mathbb{Z}_2$ και την O_2, αντιστοίχως.

19.8 Αποδείξτε ότι η SO_3 δεν περιέχει καμιά υποομάδα ισόμορφη τής $SO_2 \times SO_2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 20

Τα θεωρήματα τού Sylow

Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα, η τάξη τής οποίας διαιρείται με έναν πρώτο αριθμό p. Ας υποθέσουμε ότι ο p^m είναι η *ύψιστη* δύναμη τού p, η οποία διαιρεί την $|G|$, και ότι $k = \frac{|G|}{p^m}$.

(20.1) Θεώρημα. *Η ομάδα G περιέχει τουλάχιστον μία υποομάδα τάξης p^m.*

(20.2) Θεώρημα. *Δυο οιεσδήποτε υποομάδες τής G τάξης p^m είναι μεταξύ τους συζυγείς.*

(20.3) Θεώρημα. *Το πλήθος των υποομάδων τής G τάξης p^m είναι ισότιμο με το 1 κατά μόδιο p και διαιρεί τον k.*

Τα θεωρήματα αυτά πρωτοδημοσιεύθησαν από τον L. Sylow[1] το έτος 1872. Οι αποδείξεις που παρουσιάζονται παρακάτω οφείλονται στον H. Wielandt[2] (1959) και κάνουν αλλεπάλληλες χρήσεις τού θεωρήματος τροχιών και σταθεροποιητών.

Απόδειξη τού θεωρήματος (20.1). Συμβολίζουμε ως X τη συλλογή όλων των υποσυνόλων τής G, τα οποία έχουν ακριβώς p^m στοιχεία, και θεωρούμε τη δράση τής G επί τού X μέσω *αριστερών μεταφορών*, σύμφωνα με την οποία το $g \in G$ στέλνει κάθε $A \in X$ στο gA. Ο πληθικός αριθμός τού X ισούται με τον διωνυμικό συντελεστή $\binom{kp^m}{p^m}$, ο οποίος δεν διαιρείται με τον p (βλ. άσκηση 20.14). *Επομένως πρέπει*

[1](Σ.τ.Μ.): Βλ. L. Sylow: *Théorèmes sur les groupes de substitutions*, Math. Ann. **5**, (1872), 584-594.

[2](Σ.τ.Μ.): Βλ. H. Wielandt: *Ein Beweis für die Existenz der Sylowgruppen*, Archiv der Math. **10**, (1959), 401-402.

να υπάρχει μια τροχιά $G(A)$, *ο πληθικός αριθμός τής οποίας δεν είναι κάποιο πολλαπλάσιο τού* p. Κατά το θεώρημα (17.7) τροχιών και σταθεροποιητών,

$$|G| = |G(A)| \cdot |G_A|.$$

Ως εκ τούτου, ο αριθμός p^m διαιρεί την τάξη $|G_A|$ τού σταθεροποιητή G_A. Σημειωτέον ότι για όλα τα $a \in A$ και $g \in G_A$ έχουμε $ga \in A$. Αυτό σημαίνει ότι, για οιοδήποτε $a \in A$, ολόκληρη η δεξιά πλευρική κλάση $G_A a$ εμπεριέχεται στο A, οπότε $|G_A| \leq p^m$. Κατά συνέπειαν, ο σταθεροποιητής G_A είναι μια υποομάδα τής G τάξης *ίσης* με p^m. □

Αποδείξεις των θεωρημάτων (20.2) και (20.3). Έστω ότι οι $H_1, \ldots, H_t$ είναι οι υποομάδες τής G, οι οποίες έχουν τάξη p^m. Θεωρούμε τη δράση τής H_1 επί τού συνόλου $\{H_1, \ldots, H_t\}$ μέσω *συζυγίας*, σύμφωνα με την οποία το $h \in H_1$ στέλνει κάθε υποομάδα H_j στο hH_jh^{-1}. Εάν η υποομάδα K_j είναι ο σταθεροποιητής τής H_j ως προς αυτήν τη δράση, τότε $K_j = H_1 \cap H_j$. (Για να μη διακόψουμε τη ροή των κύριων επιχειρημάτων τής απόδειξής μας, θα δείξουμε την ισότητα αυτή χωριστά στο λήμμα που ακολουθεί). Ιδιαιτέρως, $K_1 = H_1$ και η τροχιά τής H_1 είναι ένα μονοσύνολο, ήτοι το $\{H_1\}$ (βάσει τού θεωρήματος τροχιών και σταθεροποιητών). Όταν $j \in \{2, \ldots, t\}$, τότε η τάξη $|K_j|$ τής K_j ισούται με μια δύναμη τού p, η οποία είναι μικρότερη τής p^m. Ως εκ τούτου, ο πληθικός αριθμός καθεμιάς εκ των υπολοίπων τροχιών είναι ένα πολλαπλάσιο τού p (και πάλι βάσει τού θεωρήματος τροχιών και σταθεροποιητών). Αθροίζοντας τους πληθικούς αριθμούς όλων των διαθέσιμων τροχιών, διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός t είναι ισότιμος με το 1 κατά μόδιο p ($t = 1 (\mathrm{mod}\, p)$).

Ας θεωρήσουμε τώρα τη δράση *ολόκληρης τής ομάδας* G επί τού $\{H_1, \ldots, H_t\}$ μέσω συζυγίας. Για την απόδειξη τού (20.2) οφείλουμε να διακριβώσουμε ότι αυτή η G-δράση είναι μεταβατική. Κάθε G-τροχιά συντίθεται από διάφορες H_1-τροχιές. Προφανώς, η G-τροχιά τής H_1 περιέχει την H_1. Γι' αυτόν τον λόγο ο πληθικός της αριθμός είναι ισότιμος με το 1 κατά μόδιο p. Ας υποθέσουμε τώρα ότι, για κάποιον $r \in \{2, \ldots, t\}$, η H_r *δεν* ανήκει στην G-τροχιά τής H_1, κι ας θεωρήσουμε τη δράση τής H_r επί τού $\{H_1, \ldots, H_t\}$ (και πάλι μέσω συζυγίας). Η G-τροχιά τής H_1 διαμερίζεται σε H_r-τροχιές και ο πληθικός αριθμός καθεμιάς εξ αυτών είναι ένα πολλαπλάσιο τού p (διότι η εξαιρετέα τροχιά $\{H_r\}$ δεν είναι παρούσα). Τούτο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $|G(H_1)| = 0 (\mathrm{mod}\, p)$, πράγμα το οποίο αντιφάσκει προς τον προηγούμενο υπολογισμό μας. Κατά συνέπειαν, η G-τροχιά τής H_1 ισούται με ολόκληρο το σύνολο $\{H_1, \ldots, H_t\}$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

Επειδή (σύμφωνα με το θεώρημα τροχιών και σταθεροποιητών) ο πληθικός αριθμός μιας τροχιάς ισούται πάντοτε με έναν διαιρέτη τής τάξης τής εκάστοτε δρώσας ομάδας, ο t οφείλει να διαιρεί τον kp^m. Όμως ο p δεν διαιρεί τον t, οπότε ο t πρέπει να είναι ένας διαιρέτης τού k. Η απόδειξή μας θα είναι πλήρης, αφού συμπληρωθεί και με τον προηγουμένως παραλειφθέντα έλεγχο τής ακόλουθης λεπτομέρειας:

(20.4) Λήμμα. *Η K_j είναι πράγματι η τομή των H_1 και H_j.*

Απόδειξη. Εξ ορισμού,

$$K_j = \left\{ h \in H_1 \mid hH_jh^{-1} = H_j \right\},$$

και επομένως $K_j \subseteq H_1$ και $H_1 \cap H_j \subseteq K_j$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $K_j \subseteq H_j$. Προφανώς έχουμε

$$K_jH_j = H_jK_j,$$

οπότε το K_jH_j αποτελεί μια *υποομάδα* τής G (βλ. άσκηση 15.1). Επιπροσθέτως, η H_j είναι εμφυτευμένη εντός τής K_jH_j ως μία ορθόθετη υποομάδα. Ως εκ τούτου, το δεύτερο θεώρημα ισομορφισμών (16.5) μας παρέχει τον ισομορφισμό

$$K_jH_j/H_j \cong K_j/(K_j \cap H_j),$$

απ' όπου έπεται ότι η τάξη τής K_jH_j ισούται με

$$\frac{|K_j| \cdot |H_j|}{|K_j \cap H_j|},$$

ήτοι με μία δύναμη τού πρώτου αριθμού p. Όμως η ύψιστη διαθέσιμη δύναμη τού p είναι η $p^m = |H_j|$. Κατά συνέπειαν,

$$K_jH_j = H_j \Longrightarrow K_j \subseteq H_j,$$

όπως ακριβώς απαιτείται. Εδώ λήγουν και οι αποδείξεις των θεωρημάτων (20.2) και (20.3). $\square$

Ταξινόμηση[3] των ομάδων τάξης $\leq$ 15

Τα θεωρήματα τού Sylow μάς επιτρέπουν την ταξινόμηση όλων των δυνατών ομάδων τάξης 12.

[3](Σ.τ.Μ): Ο κατάλογος ταξινόμησης των ομάδων τάξης $\leq$ 15, καθώς και τα γενικότερα σχόλια που αφορούν στην ταξινόμηση ομάδων τάξης ≤ 2000 και στο πρόβλημα απαρίθμησης μη ισομόρφων πεπερασμένων ομάδων, προσετέθησαν στην ελληνική έκδοση από τον μεταφραστή, αφ' ενός για λόγους πληρότητας και αφ' ετέρου για την πληροφόρηση τού αναγνώστη γύρω από ορισμένα νεότερα αποτελέσματα, τα οποία έχουν δημοσιευθεί μετά την έκδοση τού παρόντος βιβλίου.

(20.5) Θεώρημα. *Κάθε ομάδα τάξης* 12 *είναι ισόμορφη είτε με την κυκλική ομάδα* $\mathbb{Z}_{12}$ *είτε με το γινόμενο* $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ *είτε με τη διεδρική ομάδα* D_6 *είτε με τη δικυκλική ομάδα τάξης* 12 *είτε, τέλος, με την εναλλάσσουσα ομάδα* A_4.

Απόδειξη. Έστω G μια ομάδα με 12 στοιχεία. Υποθέτοντας ότι η G έχει t υποομάδες τάξης 3, τα θεωρήματα τού Sylow μάς πληροφορούν ότι $t = 1(\text{mod } 3)$ και ότι $t|\,4$. Συνεπώς *η G ή έχει μία και μόνη υποομάδα τάξης 3, η οποία είναι κατ' ανάγκην ορθόθετη, ή τέσσερεις συζυγείς υποομάδες τάξης* 3. Θα πραγματευθούμε αυτές τις δύο περιπτώσεις χωριστά. Σημειωτέον ότι τα θεωρήματα τού Sylow προλέγουν ότι θα υπάρχουν ή μία ή τρεις υποομάδες τής G τάξης 4.

► **Πρώτη περίπτωση**. Υποθέτουμε ότι η G περιέχει μια ορθόθετη υποομάδα H τάξης 3, η οποία παράγεται από το x. Έστω K μια υποομάδα τάξης 4. Τότε η K ή είναι κυκλική ή είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(a) Ας υποθέσουμε επί τού παρόντος ότι η K είναι *κυκλική* και ότι το y είναι ένας γεννήτορας τής K. Επειδή $H \cap K = \{e\}$, οι πλευρικές κλάσεις H, Hy, Hy^2, Hy^3 είναι σαφώς διακεκριμένες και $HK = G$. Κι αφού η H είναι ορθόθετη, γνωρίζουμε ότι το yxy^{-1} ανήκει στην H.

  (i) Εάν $yxy^{-1} = x$, τότε η G είναι αβελιανή και έχουμε
  $$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_{12}$$
  βάσει των θεωρημάτων (10.2) και (10.4).

  (ii) Η άλλη δυνατότητα, ήτοι εκείνη κατά την οποία $yxy^{-1} = x^2$ ή, ισοδυνάμως, $yx = x^2y$, μας δίνει
  $$y^2x = yx^2y = x^2yxy = x^4y^2 = xy^2.$$
  Έτσι, το x μετατίθεται με το y^2 και το στοιχείο $z = xy^2$ *έχει τάξη* 6. Επίσης έχουμε
  $$z^3 = x^3y^6 = y^2$$
  και
  $$yz = yxy^2 = y^3x = y^2x^2y = z^{-1}y.$$
  Η τάξη τού y ισούται με 4. Ως εκ τούτου, το y δεν ανήκει στην κυκλική ομάδα $\langle z\rangle$, οπότε οι πλευρικές κλάσεις $\langle z\rangle$ και $\langle z\rangle\, y$ καλύπτουν

ολόκληρη την G. Τα στοιχεία τους πολλαπλασιάζονται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} z^a z^b &= z^{a+b}, \\ z^a \left(z^b y\right) &= z^{a+b} y, \\ \left(z^a y\right) z^b &= z^{a-b} y, \\ \left(z^a y\right)\left(z^b y\right) &= z^{a-b} y^2 = z^{a-b+3}, \end{aligned}$$

όπου οι δυνάμεις τού z διαβάζονται κατά μόδιο 6. Ο έλεγχος τής ισχύος τής προσεταιριστικής ιδιότητας απαιτεί αρκετή προσοχή, όχι όμως και κάποιο ιδιαίτερο φυσικό χάρισμα. Ύστερα από αυτόν τον έλεγχο διαπιστώνουμε ότι διαθέτουμε μια ομάδα η οποία ανήκει στην οικογένεια των *δικυκλικών ομάδων*. (Το πρώτο μέλος αυτής τής οικογενείας είναι η ομάδα Q των τετρανίων. Βλ. άσκηση 20.15).

(b) Ας υποθέσουμε, από εδώ και στο εξής, ότι η K είναι ισόμορφη τής *ομάδας τού Klein* και ας επιγράψουμε τα στοιχεία της ως e, u, v, w, όπου

$$w = uv, \quad u^2 = v^2 = e.$$

Και πάλι έχουμε $H \cap K = \{e\}$, οι πλευρικές κλάσεις H, Hu, Hv, Hw είναι σαφώς διακεκριμένες και καλύπτουν ολόκληρη την G, ενώ $HK = G$. Επειδή η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G, παίρνουμε

$$uxu^{-1} = x^a, \qquad vxv^{-1} = x^b, \qquad wxw^{-1} = x^{ab},$$

όπου καθένα εκ των a, b, ab ανήκει στο σύνολο $\{-1, 1\}$.

(i) Εάν $a = b = ab = 1$, τότε η ομάδα μας είναι *αβελιανή* και ισόμορφη με την $H \times K$, οπότε

$$G \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2.$$

(ii) Ειδάλλως, δύο εκ των a, b, ab ισούται με το -1 και το τρίτο ισούται με το 1. Αλλάζοντας, εν ανάγκη, την επιγραφή των u, v, w, μπορούμε δίχως βλάβη τής γενικότητας να υποθέσουμε ότι $a = 1$ και $b = -1$. Τότε το u μετατίθεται με το x και το $z = ux$ έχει τάξη 6. Τα στοιχεία z και v παράγουν από κοινού την G και ικανοποιούν τις

$$z^6 = e, \quad v^2 = e, \quad vz = z^{-1} v,$$

δίνοντάς μας μια ομάδα ισόμορφη τής *διεδρικής ομάδας* D_6 τάξης 12.

► **Δεύτερη περίπτωση.** Εάν η G περιέχει τέσσερεις συζυγείς υποομάδες τάξης 3, τότε αυτές οι υποομάδες καταναλίσκουν οκτώ στοιχεία από την $G\smallsetminus\{e\}$, αφήνοντας κατ' αυτόν τον τρόπο χώρο μόνο για μία υποομάδα K τάξης 4.

(a) Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι η K *δεν μπορεί να είναι κυκλική*. Ας υποθέσουμε ότι η K είναι κυκλική, παραγόμενη από ένα στοιχείο y, και ότι το x είναι ένα στοιχείο τής διαφοράς $G\smallsetminus K$. Τότε το x έχει τάξη 3 και οι πλευρικές κλάσεις K, Kx, Kx^2 καλύπτουν ολόκληρη την G. Επειδή η K οφείλει να είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G, έχουμε $xyx^{-1} \in K$. Εάν $xyx^{-1} = y$, τότε η G είναι μια αβελιανή ομάδα, πράγμα το οποίο αντιφάσκει προς την υπόθεσή μας, σύμφωνα με την οποία η G περιέχει τέσσερεις συζυγείς υποομάδες τάξης 3. Αλλά και η ισότητα $xyx^{-1} = y^2$ στερείται νοήματος, καθότι τα y και y^2 έχουν διαφορετικές τάξεις. Τέλος, δεν είναι δυνατόν να ισχύει ούτε η $xyx^{-1} = y^3$, διότι αυτό θα σήμαινε ότι

$$y = x^3yx^{-3} = y^{27} = y^3.$$

(b) Η ορθόθετη υποομάδα K τής G, η οποία έχει τάξη 4, οφείλει (σύμφωνα με το (a)) να είναι ισόμορφη με την ο*μάδα τού Klein*. Όπως και προηγουμένως, επιγράφουμε τα στοιχεία της ως e, u, v, w, όπου

$$w = uv, \quad u^2 = v^2 = e,$$

και επιλέγουμε ένα στοιχείο $x \in G$ τάξης 3. Οι πλευρικές κλάσεις K, Kx, Kx^2 είναι σαφώς διακεκριμένες, οπότε τα u, v και x παράγουν από κοινού την G. Η συζυγία η δημιουργούμενη μέσω τού x μετατάσσει τα στοιχεία τού συνόλου $\{u, v, w\}$, διότι η K είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G. Αυτή η μετάταξη είναι ή η ταυτοτική ή ένας 3-κύκλος, καθόσον $x^3 = e$.

(i) Δεν είναι δυνατόν να αποκτηθεί η ταυτοτική μετάταξη, καθότι αυτό θα μας οδηγούσε σε μια αβελιανή ομάδα, ήτοι σε μια αντίφαση, όπως και προηγουμένως.

(ii) Αλλάζοντας, εν ανάγκη, τη διάταξη των επιγραφών μας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$xux^{-1} = v, \quad xvx^{-1} = w, \quad xwx^{-1} = u,$$

οπότε μέσω τής αμφίπλευρης αντιστοίχισης

$$u \longleftrightarrow (1\,2)\,(3\,4)\,, \quad v \longleftrightarrow (1\,3)\,(2\,4)\,, \quad x \longleftrightarrow (2\,3\,4)$$

προσδιορίζεται ένας ισομορφισμός $G \cong A_4$. □

[(Σ.τ.Μ.): Ανακεφαλαιώνοντας τα μέχρι στιγμής αποτελέσματα ταξινόμησης, ως προς ισομορφισμό, των **ομάδων μικρής τάξης**, επισημαίνουμε ότι οι ομάδες G τάξης $|G|$ προσδιορίζονται μέσω τού πορίσματος (11.3) όταν

$$|G| \in \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\},$$

μέσω τής άσκησης 10.12 όταν $|G| = 4$, μέσω τού θεωρήματος (15.13) όταν

$$|G| \in \{6, 10, 14\},$$

μέσω τού θεωρήματος (13.3) όταν $|G| = 8$, μέσω τού θεωρήματος (17.12) όταν $|G| = 9$ και μέσω τού θεωρήματος (20.5) όταν $|G| = 12$. Λαμβάνοντας μάλιστα υπ' όψιν ότι οι ομάδες τάξης 15 είναι κατ' ανάγκην κυκλικές (κατά την άσκηση 20.6 ή το θεώρημα (23.3), το οποίο αποδεικνύεται αργότερα στο κεφάλαιο 23), καταρτίζουμε τον ακόλουθο κατάλογο ταξινόμησης:

τάξη	G
1	τετριμμένη
2	$\mathbb{Z}_2$
3	$\mathbb{Z}_3$
4	$\mathbb{Z}_4,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
5	$\mathbb{Z}_5$
6	$\mathbb{Z}_6,\ D_3$
7	$\mathbb{Z}_7$
8	$\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2,$ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ D_4,\ Q$
9	$\mathbb{Z}_9,\ \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
10	$\mathbb{Z}_{10},\ D_5$
11	$\mathbb{Z}_{11}$
12	$\mathbb{Z}_{12},\ \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2,\ D_6,\ A_4$ ή δικυκλική τάξης 12
13	$\mathbb{Z}_{13}$
14	$\mathbb{Z}_{14},\ D_7$
15	$\mathbb{Z}_{15}$

Τι συμβαίνει με τις ομάδες τάξης ≥ 16;

Έστω $f(n)$ ο αριθμός όλων των μη ισομόρφων πεπερασμένων ομάδων τάξης n. Όπως βλέπετε από τον ανωτέρω κατάλογο (όπου $n \leq 15$), καθώς και από τις τιμές

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$f(n)$	14	1	5	1	5	2	2	1	15	2

και

n	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
$f(n)$	2	5	4	1	4	1	51	1	2	1

όπου $n \in \{16, \ldots, 35\}$, η συνάρτηση $f(n)$ παρουσιάζει περίεργα «άλματα», ιδιαιτέρως όταν στην ανάλυση τού n ως γινομένου πρώτων αριθμών εμφανίζεται κάποια σχετικώς υψηλή δύναμη τού 2. Επί τού παρόντος δεν φαίνεται να είναι δυνατή η εύρεση ενός «κλειστού» τύπου γι' αυτήν τη συνάρτηση. Εντούτοις, ο L. Pyber, βασισθείς σε ευφυείς προσεγγιστικές τεχνικές και σε ορισμένα προηγούμενα αποτελέσματα των G. Higman[4] και C.C. Sims[5], κατόρθωσε να εξαγάγει ένα αξιόλογο (ασυμπτωτικό) **άνω φράγμα**[6] τής $f(n)$, το οποίο, εν συντομία, γράφεται ως εξής:

$$\boxed{f(n) \leq n^{\left(\frac{2}{27}+o(1)\right)\mu^2}, \quad \text{καθώς } \mu \to \infty}$$

όπου p^μ είναι η ύψιστη δύναμη ενός πρώτου αριθμού p, η οποία διαιρεί τον n, και $o(1) \to \infty$, καθώς $\mu \to \infty$. (Για πιο πρόσφατες βελτιώσεις αυτού τού φράγματος για *ειδικές* κλάσεις ομάδων βλ. G. Venkataraman[7], G. Wei[8] και A. Mann[9].)

Από την άλλη μεριά, αξίζει να επισημανθεί η αισθητή πρόοδος, η οποία σημειώθηκε κατά τη δεκαετία[10] 1990-2000 (και οφείλεται τόσο σε νέες θεωρητικές τεχνικές όσο και στη χρήση ειδικών ηλεκτρονικών λογισμικών αλγεβρικών προγραμμάτων, όπως π.χ. τα **GAP**[11] και **MAGMA**[12]) και η οποία σχετίζεται με τη διεξοδική ταξινόμηση ομάδων *όλο και μεγαλύτερης τάξης*. Τα πλέον εντυπωσιακά αποτελέσματα προήλθαν από το πρόσφατο ερευνητικό έργο των μαθηματικών H.U.

[4] G. Higman: *Enumerating p-groups*, I, Proc. London Math. Soc. **10**, (1960), 24-30.

[5] C.C. Sims: *Enumerating p-groups*, Proc. London Math. Soc. **15**, (1965), 151-166.

[6] L. Pyber: *Enumerating finite groups of given order*, Ann. of Math. **137**, (1993), 203-220.

[7] G. Venkataraman: *Enumeration of finite soluble groups with abelian Sylow subgroups*, Quart. J. Math. Oxford **48**, (1997), 107-125.

[8] G. Wei: *Enumeration formulae for the number of finite groups and their applications*, Southeast Asian Bull. Math. **22**, (1998), 93-102.

[9] A. Mann: *Some questions about p-groups*, J. Australian Math. Soc. **67**, (1999), 356-379.

[10] Σημειωτέον ότι η λεπτομερής ταξινόμηση πεπερασμένων ομάδων μέχρι τη δεκαετία τού 1980 είχε περιορισθεί σε ομάδες τάξης ≤ 100. (Για μια σχετικώς εύκολη πρόσβαση στη θεωρητική ταξινόμηση ομάδων τάξης ≤ 31 παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο τού J.F. Humphreys: *A Course in Group Theory*, Oxford University Press, 1997. Για τις 51 ομάδες τάξης 32 βλ. M. Hall & J.K. Senior: *The Groups of Order* 2^n $(n \leq 6)$, Macmillan, NY, 1964.)

[11] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/gap

[12] http://www.maths.bath.ac.uk/Magma

Besche, B. Eick και E. O' Brien[13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20], οι οποίοι, εμφορούμενοι από το ιδιάζον γεγονός τής μετάβασής μας σε μια νέα χιλιετία, προσδιόρισαν *επακριβώς* τις εν συνόλω

$$\sum_{n\in\{1,\dots,2000\}\smallsetminus\{2^{10}\}} f(n) = 423\,164\,062$$

μη ισόμορφες ομάδες τάξης $n \in \{1,\dots,2000\}\smallsetminus\{2^{10}\}$ και υπολόγισαν την τιμή $f(2^{10})$. (Επίσης, κατασκεύασαν αλγορίθμους ταξινόμησης ορισμένων ειδικών πεπερασμένων ομάδων, όπως π.χ. εκείνων που έχουν τάξη $n = p^k \cdot q$, όπου p^k είναι μια σταθερή δύναμη ενός πρώτου αριθμού p και q οιοσδήποτε πρώτος αριθμός $\neq p$). Τα δέκα υψηλότερα «άλματα» τής $f(n)$, όταν $n \leq 2000$, είναι τα εξής:

n	$f(n)$
$2^{10} = 1024$	49487365422
$2^9 \cdot 3$	408641062
2^9	10494213
$2^8 \cdot 5$	1116461
$2^8 \cdot 3$	1090235
$2^8 \cdot 7$	1083553
$2^7 \cdot 3 \cdot 5$	241004
$2^7 \cdot 3^2$	157877
2^8	56092
$2^6 \cdot 3^3$	47937

Πρβλ. την «Small Group Library» που είναι καταχωρημένη στην ιστοσελίδα τού H.U. Besche[21].]

[13] E.A. O'Brien: *The p-group generation algorithm*, J. Symbolic Comput. **9**, (1990), 677-698.

[14] E.A. O'Brien: *The groups of order 256*, J. Algebra **143**, (1991), 219-235.

[15] Βλ. H.-U. Besche, B. Eick: *Construction of finite groups*, J. Symbolic Comput. **27**, (1999), 387-404.

[16] Βλ. H.-U. Besche, B. Eick: *The groups of order at most 1000 except 512 and 768,* J. Symbolic Comput. **27**, (1999), 405-413.

[17] B. Eick, E.A. O'Brien: *Enumerating p-groups*, J. Austr. Math. Soc. **67**, (1999), 191-205.

[18] Βλ. H.-U. Besche, B. Eick: *The groups of order $q^n \cdot p$*, Comm. in Alg. **29**, (2001), 1759-1772.

[19] Βλ. H.-U. Besche, B. Eick, E.A. O'Brien: *The groups of order at most 2000,* Electron. Research Announc. Amer. Math. Soc. **7**, (2001), 1-4.

[20] Βλ. H.-U. Besche, B. Eick, E.A. O'Brien: *A millennium project: constructing small groups*, preprint, July 2001.

[21] http://www.math.rwth-aachen.de/~Hans-Ulrich.Besche/small.html

Ασκήσεις

Ας υποθέσουμε ότι η G είναι μια ομάδα τάξης kp^m, όπου ο p είναι ένας πρώτος αριθμός, ο οποίος δεν διαιρεί τον k. Τότε κάθε υποομάδα τής G, η οποία περιέχει p^m στοιχεία, θα ονομάζεται p-**υποομάδα (τού) Sylow** τής G (ή απλώς μια **υποομάδα τού Sylow** όταν δεν υπάρχει ανάγκη να αναφερόμαστε επισταμένως στον πρώτο αριθμό p.)

20.1 Δείξτε ότι κάθε ομάδα τάξης 126 οφείλει να περιέχει μια ορθόθετη υποομάδα τάξης 7. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ομάδα τάξης 1000 που να είναι απλή.

20.2 Καταγράψτε όλες τις υποομάδες Sylow τής εναλλάσσουσας ομάδας A_5. Υπάρχουν μεταξύ αυτών και ορθόθετες υποομάδες;

20.3 Εάν κάθε υποομάδα τού Sylow μιας ομάδας G είναι ορθόθετη, δείξτε ότι η G είναι ισόμορφη με το γινόμενο όλων των υποομάδων Sylow που περιέχει.

20.4 Ταξινομήστε όλες τις ομάδες τάξης 1225.

20.5 Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα είναι ισόμορφη με το γινόμενο πεπερασμένου πλήθους (αβελιανών) ομάδων, καθεμιά των οποίων έχει τάξη ίση με τη δύναμη ενός πρώτου αριθμού.

Στις ακόλουθες τρεις ασκήσεις οι αριθμοί p και q είναι πρώτοι και $p > q$.

20.6 Εάν ο p δεν είναι ισότιμος με το 1 κατά μόδιο q, δείξτε ότι κάθε ομάδα τάξης pq είναι κυκλική.

20.7 Ταξινομήστε τις ομάδες τάξης p^2q όταν ο p δεν είναι ισότιμος με το 1 ή με το -1 κατά μόδιο q.

20.8 Υποθέτοντας ότι ο p^2 δεν είναι ισότιμος με το 1 κατά μόδιο q και ότι ο q^2 δεν είναι ισότιμος με το 1 κατά μόδιο p, ταξινομήστε τις ομάδες που έχουν τάξη p^2q^2.

20.9 Έστω p ένας πρώτος αριθμός που διαιρεί την τάξη μιας ομάδας G. Εάν η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G, ο δείκτης τής οποίας δεν είναι κάποιο πολλαπλάσιο τού p, δείξτε ότι η H οφείλει να περιέχει όλες τις p-υποομάδες Sylow τής G.

20.10 Υποθέστε ότι η H είναι μια υποομάδα Sylow μιας ομάδας G και ότι η J είναι μια υποομάδα τής G, η οποία περιέχει την H. Εάν η H είναι ορθόθετη εντός τής J και η J ορθόθετη εντός τής G, αποδείξτε ότι και η H είναι ορθόθετη εντός τής G.

20.11 Έστω H μια υποομάδα μιας ομάδας G. Σημειώστε ως X το σύνολο όλων των αριστερών πλευρικών κλάσεων τής H εντός τής G. Δείξτε ότι μέσω τού τύπου

$$g(xH) = gxH$$

ορίζεται μια δράση τής G επί τού X. Αποδείξτε ότι η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G εάν και μόνον εάν κάθε τροχιά τής δράσης τής επαγομένης από την H επί τού X είναι ένα μονοσύνολο (ήτοι περιέχει μόνον ένα σημείο).

20.12 Έστω ότι η G είναι μια πεπερασμένη ομάδα και ότι ο p είναι ο ελάχιστος πρώτος αριθμός, ο οποίος διαιρεί την $|G|$. Αποδείξτε ότι κάθε υποομάδα τής G με δείκτη ίσο με p οφείλει να είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G. (Ενδέχεται να επιθυμείτε να χρησιμοποιήσετε τη δράση που ορίσθηκε στην άσκηση 20.11.)

20.13 Εάν η J είναι μια υποομάδα μιας ομάδας G, η τάξη τής οποίας ισούται με κάποια δύναμη ενός πρώτου αριθμού p, διαπιστώστε ότι η J πρέπει να περιέχεται σε μια p-υποομάδα Sylow τής G. (Υπόδειξη: πάρτε ως H στην άσκηση 20.11 μια p-υποομάδα Sylow τής G και κατόπιν θεωρήστε τη δράση την επαγομένη από την J επί τού X.)

20.14 Εάν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός, ο k ένας θετικός ακέραιος που δεν είναι κάποιο πολλαπλάσιο τού p και ο x ένας ακέραιος αριθμός για τον οποίο ισχύει $0 \leq x \leq p^m - 1$, δείξτε ότι ο p δεν είναι διαιρέτης τού $\binom{kp^m - x}{p^m - x}$.

20.15 Έστω m ένας ακέραιος αριθμός ≥ 2. Θεωρώντας ως αφετηρία σας $4m$ στοιχεία

$$e, x, \ldots, x^{2m-1}, y, xy, \ldots, x^{2m-1}y$$

επιτρέψτε την εκτέλεση πολλαπλασιασμών τής μορφής

$$\begin{aligned}
&x^a x^b = x^{a+b} \\
&x^a \left(x^b y\right) = x^{a+b} y \\
&\left(x^a y\right) x^b = x^{a-b} y \\
&\left(x^a y\right)\left(x^b y\right) = x^{a-b+m}
\end{aligned}$$

όπου $0 \leq a, b \leq 2m - 1$ και όπου οι δυνάμεις τού εκάστοτε x διαβάζονται κατά μόδιο $2m$. Βεβαιωθείτε για το ότι η ανωτέρω διαδικασία ορίζει μια ομάδα G που είναι ισόμορφη τής ομάδας Q των τετρανίων όταν $m = 2$. Η εν λόγω ομάδα G καλείται **δικυκλική ομάδα** τάξης $4m$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 21

Πεπερασμένως παραγόμενες αβελιανές ομάδες

Μια ομάδα ονομάζεται **πεπερασμένως παραγόμενη** όταν διαθέτει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων. Οι πεπερασμένως παραγόμενες αβελιανές ομάδες είναι δυνατόν να ταξινομηθούν. Με αυτό εννοούμε ότι μπορούμε να καταρτίσουμε έναν κατάλογο (έστω και απειροπληθών) «απότυπων παραδειγμάτων», με κανένα από αυτά ισόμορφο με κάποιο άλλο, ούτως ώστε, εάν μας δοθεί μια *τυχούσα* πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή ομάδα, αυτή να οφείλει να είναι ισόμορφη με μία από εκείνες τού καταλόγου μας.

(21.1) Θεώρημα. *Κάθε πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή ομάδα είναι ισόμορφη με ένα ευθύ γινόμενο κυκλικών ομάδων τής μορφής*

$$\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k-1} \times \mathbb{Z}_{m_k} \times \mathbb{Z}^s,$$

όπου ο m_i διαιρεί τον m_{i+1} για όλους τούς $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Η $\mathbb{Z}^s$ χρησιμοποιείται ως συντόμευση τού ευθέος γινομένου s αντιτύπων τής προσθετικής ομάδας των ακεραίων. Ο αριθμός s καλείται η **βαθμίδα** τής ομάδας μας, ενώ οι $m_1, \ldots, m_k$ είναι οι **συντελεστές στρέψης** της. Δύο ειδικές περιπτώσεις τού ως άνω θεωρήματος αξίζει να διατυπωθούν χωριστά.

(21.2) Πόρισμα. *Κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα είναι ισόμορφη με ένα ευθύ* *γινόμενο κυκλικών ομάδων τής μορφής*

$$\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k - 1} \times \mathbb{Z}_{m_k},$$

όπου ο m_i διαιρεί τον m_{i+1} για όλους τούς $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

(21.3) Πόρισμα. *Κάθε πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή ομάδα, εντός τής οποίας δεν υπάρχουν στοιχεία πεπερασμένης τάξης, είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αντιτύπων τής $\mathbb{Z}$.* (Αυτό εμπίπτει στη γενική διατύπωση τού θεωρήματος (21.1) όταν επιτρέπουμε στον k να ισούται με μηδέν. Μια ομάδα, η οποία είναι ισόμορφη με το ευθύ γινόμενο s αντιτύπων τής $\mathbb{Z}$, καλείται **ελεύθερη αβελιανή ομάδα** βαθμίδας s.)

(21.4) Παραδείγματα. (i) Μην ξεγελιέστε από ομάδες όπως η $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$. Εκ πρώτης όψεως, ενδέχεται να σας προβληματίζει το γεγονός ότι το 6 δεν είναι διαιρέτης τού 10. Όμως, κάνοντας διπλή χρήση τού θεωρήματος (10.2), παίρνουμε

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30},$$

ήτοι μία ομάδα η οποία βρίσκεται στον κατάλογό μας.

(ii) Μια αβελιανή ομάδα τάξης 12 οφείλει να είναι ισόμορφη είτε με την $\mathbb{Z}_{12}$ είτε με την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$. Αυτό επιβεβαιώνει και πάλι τους υπολογισμούς τού κεφαλαίου 20.

(iii) Η υποομάδα τής $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, η οποία παράγεται από τα στοιχεία -1 και $\frac{i}{2}$, είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.

(iv) Η ομάδα $\mathbb{R}$ δεν είναι πεπερασμένως παραγόμενη (βλ. άσκηση 21.12) και, επομένως, δεν μπορεί να είναι ισόμορφη με καμία από τις ομάδες τού καταλόγου μας.

Έστω G μια πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή ομάδα, η οποία διαθέτει r σαφώς διακεκριμένα στοιχεία $x_1, \ldots, x_r$ ως γεννήτορές της. Εάν δεν υπάρχει σύνολο $r-1$ στοιχείων που να μπορεί να την παραγάγει, τότε ονομάζουμε το $\{x_1, \ldots, x_r\}$ **ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων**. Επειδή η θεωρούμενη ομάδα είναι αβελιανή, κάθε $g \in G$ μπορεί να γραφεί κατά έναν ιδιαίτερα όμορφο τρόπο ως μία λέξη

$$g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \qquad (\triangledown)$$

όπου οι $n_1, \ldots, n_r$ είναι ακέραιοι αριθμοί, απλώς με το να συλλέξουμε μαζί τις δυνάμεις των διαφόρων γεννητόρων. Μια έκφραση τής μορφής

$$e = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \qquad (\triangledown\triangledown)$$

ονομάζεται **σχέση** (υφιστάμενη) μεταξύ των γεννητόρων μας. Ας σημειωθεί ότι εάν ο q είναι ένας ακέραιος, τότε και το $\{x_1 x_2^q, x_2, \ldots, x_r\}$ είναι ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων τής G, διότι κάθε λέξη $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$ μπορεί να επαναγραφεί με τη βοήθεια των νέων αυτών γεννητόρων ως $(x_1x_2^q)^{n_1}\,x_2^{n_2-qn_1}\cdots x_r^{n_r}$.

Απόδειξη τού θεωρήματος (21.1). Ας υποθέσουμε, εν πρώτοις, ότι η G έχει ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων $\{x_1,\ldots,x_r\}$, για το οποίο η μόνη υφιστάμενη σχέση είναι η τετριμμένη που την αποκτούμε όταν θέτουμε $n_1=\cdots=n_r=0$ στην $(\bigtriangledown\bigtriangledown)$. Τότε η έκφραση $(\bigtriangledown)$ για το g, η παρεχόμενη μέσω αυτών των γεννητόρων, είναι μονοσημάντως ορισμένη και η συνάρτηση

$$G\longrightarrow\mathbb{Z}^r,\quad g\longmapsto(n_1,\ldots,n_r),$$

αποτελεί έναν ισομορφισμό.

Η πραγμάτευση τής γενικής περίπτωσης είναι, όπως θα αναμενόταν, περισσότερο κοπιώδης. Εν προκειμένω, ανεξαρτήτως τού πώς επιλέγουμε ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων για την G, υφίσταται πάντοτε (τουλάχιστον) μία μη τετριμμένη σχέση μεταξύ των γεννητόρων. Αλλά *ανάμεσα σε όλες τις σχέσεις, τις υφιστάμενες μεταξύ όλων των δυνατών ελαχιστοτικών συνόλων γεννητόρων τής G, θα υπάρχει μία δύναμη ενός γεννήτορα, η οποία θα διαθέτει έναν ελάχιστο θετικό ακέραιο αριθμό ως εκθέτη, ας τον πούμε* m_1. Ας υποθέσουμε ότι ο m_1 εμφανίζεται ως εκθέτης τού x_1 στη σχέση

$$e=x_1^{m_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}\qquad(\bigtriangledown\bigtriangledown\bigtriangledown)$$

την υφιστάμενη μεταξύ των γεννητόρων $x_1,\ldots,x_r$. Ισχυριζόμαστε ότι ο m_1 είναι ένας διαιρέτης τού n_2. Πράγματι· εάν

$$n_2=qm_1+u,\ \ q\in\mathbb{Z},\ \ \text{για κάποιον ακέραιο } u,\ \ 0\le u<m_1,$$

τότε

$$\begin{aligned} e &= x_1^{m_1}x_2^{qm_1+u}x_3^{n_3}\cdots x_r^{n_r}\\ &= (x_1x_2^q)^{m_1}\,x_2^ux_3^{n_3}\cdots x_r^{n_r}. \end{aligned}$$

Αλλά, επειδή *και* το $\{x_1x_2^q,x_2,\ldots,x_r\}$ είναι ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων τής G, τούτο θα ήταν αντιφατικό προς την επιλογή τού m_1 (ως τού *ελαχίστου* θετικού εκθέτη), εκτός και εάν το u ήταν ίσο με το μηδέν. Επομένως έχουμε $n_2=qm_1$, όπως ακριβώς ισχυρισθήκαμε. Κατ' αναλογίαν, μπορούμε να δείξουμε ότι ο m_1 είναι διαιρέτης καθενός εκ των $n_3,\ldots,n_r$, ήτοι ότι $n_i=q_im_1$, όπου $q_i\in\mathbb{Z}$, για κάθε i, $3\le i\le r$.

Μεταβαίνουμε, εν συνεχεία, σε ένα *νέο* σύστημα γεννητόρων $\{z_1,x_2,\ldots,x_r\}$, όπου

$$z_1=x_1x_2^qx_3^{q_3}\cdots x_r^{q_r}$$

και παρατηρούμε ότι η σχέση ($\bigtriangledown \bigtriangledown \bigtriangledown$) γράφεται ως

$$e = z_1^{m_1}.$$

Η αρχική επιλογή μας για τον εκθέτη m_1 μας εγγυάται ότι δεν υπάρχει μικρότερος θετικός ακέραιος, στον οποίον υψούμενο το z_1 να μας δίνει το ουδέτερο στοιχείο e, οπότε η τάξη τού z_1 ισούται με το m_1. Έστω $H = \langle z_1 \rangle$ και έστω G_1 η υποομάδα τής G η παραγόμενη από τα $x_2, \ldots, x_r$. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι $HG_1 = G$ και $H \cap G_1 = \{e\}$, οπότε, βάσει τού θεωρήματος (10.4), έχουμε

$$G \cong H \times G_1 \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times G_1.$$

Κατόπιν τούτου εργαζόμαστε με την G_1 (στη θέση τής G) και εκτελούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία. Και πάλι υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: ή $G_1 \cong \mathbb{Z}^{r-1}$ ή $G_1 \cong \mathbb{Z}_{m_2} \times G_2$. Επομένως, η αρχική ομάδα G ή θα είναι ισόμορφη με την ομάδα $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}^{r-1}$ ή θα είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times G_2$. Στη δεύτερη περίπτωση ο θετικός ακέραιος m_2 εμφανίζεται ως εκθέτης, ας πούμε τού y_2, σε μια υφιστάμενη σχέση τής μορφής

$$e = y_2^{m_2} y_3^{n'_3} \cdots y_r^{n'_r}$$

μεταξύ των μελών ενός ελαχιστοτικού συνόλου γεννητόρων $\{y_2, \ldots, y_r\}$ τής G_2. Επειδή το $\{z, y_2, \ldots, y_r\}$ αποτελεί ένα ελαχιστοτικό σύνολο γεννητόρων τής G και επειδή

$$e = z_1^{m_1} y_2^{m_2} y_3^{n'_3} \cdots y_r^{n'_r},$$

βλέπουμε ότι ο m_1 *είναι ένας διαιρέτης τού* m_2. Τώρα πλέον διαθέτουμε όλα τα ουσιαστικά συστατικά για την αποπεράτωση τής απόδειξή μας και μπορούμε -κατ' αναλογίαν- να συνεχίσουμε με την G_2 (στη θέση τής G_1). Τελικώς, η όλη διαδικασία λήγει ύστερα από την εκτέλεση πεπερασμένου πλήθους τέτοιων βημάτων, καθότι η G είναι πεπερασμένως παραγόμενη και σε κάθε βήμα ελαττώνουμε τον αριθμό των γεννητόρων κατά ένα. $\square$

Για να ολοκληρώσουμε την ταξινόμησή μας οφείλουμε να δείξουμε ότι, εάν δυο πεπερασμένως παραγόμενες αβελιανές ομάδες είναι μεταξύ τους ισόμορφες, τότε αυτές διαθέτουν την ίδια βαθμίδα και τους ίδιους συντελεστές στρέψης.

(21.5) Θεώρημα. *Έστω ότι οι G_1, G_2 είναι δυο πεπερασμένως παραγόμενες αβελιανές ομάδες, ισόμορφες με τα ευθέα γινόμενα*

$$G_j \cong \mathbb{Z}_{m_1^{(j)}} \times \mathbb{Z}_{m_2^{(j)}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_{k_j}^{(j)}} \times \mathbb{Z}^{s_j}, \;\; j = 1, 2,$$

(όπως στο θεώρημα (21.1)*). Εάν οι G_1 και G_2 είναι μεταξύ τους ισόμορφες, τότε* $k_1 = k_2$,

$$m_i^{(1)} = m_i^{(2)}, \ \forall i, \ 1 \le i \le k_1 = k_2 \ \ \textit{και} \quad s_1 = s_2 \, .$$

Προς τούτο θα χρειασθούμε τα δύο απλά λήμματα που ακολουθούν.

(21.6) Λήμμα. *Έστω ότι οι m και q είναι δυο θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Το πλήθος των ακεραίων αριθμών r, οι οποίοι ικανοποιούν τις $0 \le r < m$ και $m \,|qr$, ισούται με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των m και q.*

Απόδειξη. Εάν ο d είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και q, τότε τους γράφουμε ως $m = m'd$ και $q = q'd$, παίρνοντας μκδ$(m', q') = 1$. Καθώς $m \,|qr$, έχουμε $m'd \,|q'dr$, και επομένως $m' \,|r$. Τούτο σημαίνει ότι $r \in \{0, m', 2m', \ldots , (d-1)m'\}$. Και αντιστρόφως· καθένας εξ αυτών των ακεραίων ικανοποιεί τις δύο υποθέσεις μας, οπότε το ζητούμενο πλήθος ισούται πράγματι με d. □

(21.7) Λήμμα. *Εάν $H \cong \mathbb{Z}_m$, το πλήθος των στοιχείων $x \in H$, τα οποία ικανοποιούν την $x^q = e$, ισούται με τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των m και q. Πιο γενικά, εάν*

$$H \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k-1} \times \mathbb{Z}_{m_k},$$

τότε τούτο το πλήθος ισούται με μκδ$(m_1, q) \cdot$ μκδ$(m_2, q) \cdot \cdots \cdot$ μκδ(m_k, q) .

Απόδειξη. Το πλήθος των εν λόγω στοιχείων τής H παραμένει προφανώς αμετάβλητο κατόπιν εφαρμογής ενός οιουδήποτε ισομορφισμού, οπότε ο πρώτος ισχυρισμός δεν είναι παρά μια αναδιατύπωση τού λήμματος (21.6). (Επειδή η πράξη τής ομάδας $\mathbb{Z}_m$ είναι η πρόσθεση κατά μόδιο m, η q-οστή δύναμη ενός στοιχείου της, ας πούμε τού r, ισούται με το ουδέτερο στοιχείο εάν και μόνον εάν ο m διαιρεί τον qr). Για την επαλήθευση τού δευτέρου ισχυρισμού, εάν υποτεθεί ότι η q-οστή δύναμη ενός στοιχείου $(r_1, \ldots , r_k)$ τής $\mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_k}$ είναι το ουδέτερο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι έχουμε ακριβώς μκδ(m_1, q) επιλογές για το r_1, ακριβώς μκδ(m_2, q) επιλογές για το r_2 κ.ο.κ. □

Πρώτο μέρος τής απόδειξης τού θεωρήματος (21.5). Τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης εντός τής G_j, όπου $j \in \{1, 2\}$, συγκροτούν μια υποομάδα

$$H_j = \mathbb{Z}_{m_1^{(j)}} \times \mathbb{Z}_{m_2^{(j)}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_{k_j}^{(j)}} \times \{e\}.$$

Ένας οιοσδήποτε ισομορφισμός μεταξύ των G_1 και G_2 στέλνει τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης να απεικονισθούν σε στοιχεία πεπερασμένης τάξης. Συνεπώς,

$H_1 \cong H_2$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη τής γενικότητας, ότι $k_1 \geq k_2$ και εφαρμόζουμε το λήμμα (21.7) για τις H_1, H_2 και για $q = m_1^{(1)}$. Τότε

$$\prod_{\nu=1}^{k_1} \text{μκδ}(m_\nu^{(1)}, m_1^{(1)}) = \prod_{\nu=1}^{k_2} \text{μκδ}(m_\nu^{(2)}, m_1^{(1)}),$$

οπότε

$$\left(m_1^{(1)}\right)^{k_1} = \prod_{\nu=1}^{k_2} \text{μκδ}(m_\nu^{(2)}, m_1^{(1)}).$$

Κάθε παράγοντας τού δεξιού μέλους αυτής τής ισότητας είναι $\leq m_1^{(1)}$, πράγμα που σημαίνει ότι κατ' ανάγκην $k_1 = k_2$ και ότι $m_1^{(1)} \Big| m_1^{(2)}$. Από την άλλη μεριά, κατόπιν εφαρμογής τού ιδίου τεχνάσματος για $q = n_1$, παίρνουμε

$$\left(m_1^{(2)}\right)^{k_2} = \left(m_1^{(2)}\right)^{k_1} = \prod_{\nu=1}^{k_1} \text{μκδ}(m_\nu^{(1)}, m_1^{(2)}),$$

απ' όπου συνάγουμε ότι $m_1^{(2)} \Big| m_1^{(1)}$. Άρα, στην παρούσα φάση, γνωρίζουμε ήδη ότι $k_1 = k_2$ και $m_1^{(1)} = m_1^{(2)}$. Για λόγους συντομίας θέτουμε $k = k_1 (= k_2)$.

Εφαρμόζοντας το λήμμα (21.7) για τις H_1, H_2 και για $q = m_2^{(1)}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} m_1^{(1)} \left(m_2^{(1)}\right)^{k-1} &= \prod_{\nu=1}^{k} \text{μκδ}(m_\nu^{(2)}, m_2^{(1)}) \\ &= m_1^{(1)} \cdot \prod_{\nu=2}^{k} \text{μκδ}(m_\nu^{(2)}, m_2^{(1)}), \end{aligned}$$

οπότε $m_2^{(1)} \Big| m_2^{(2)}$. Εφαρμόζοντας εκ νέου το λήμμα (21.7) για τις υποομάδες H_1, H_2 και για $q = m_2^{(2)}$, παίρνουμε αναλόγως

$$m_1^{(1)} \cdot \prod_{\nu=2}^{k} \text{μκδ}(m_\nu^{(1)}, m_2^{(2)}) = m_1^{(1)} \left(m_2^{(2)}\right)^{k-1},$$

οπότε και $m_2^{(2)} \Big| m_2^{(1)}$. Άρα τελικώς έχουμε και $m_2^{(1)} = m_2^{(2)}$. Αφήνουμε ως άσκηση για τον αναγνώστη την περιγραφή των λεπτομερειών τής συνέχισης αυτής τής διαδικασίας, καθώς και τον έλεγχο τού τι συμβαίνει όταν θεωρούμε ως q το $m_3^{(1)}$ (και κατόπιν τούτου το $m_3^{(2)}$) κ.ο.κ. □

(21.8) Λήμμα. *Εάν* $\mathbb{Z}^{s_1} \cong \mathbb{Z}^{s_2}$, *τότε* $s_1 = s_2$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη τής γενικότητας, ότι $s_1 \leq s_2$. Έστω $\varphi : \mathbb{Z}^{s_1} \longrightarrow \mathbb{Z}^{s_2}$ ένας ισομορφισμός. Εκλαμβάνουμε την $\mathbb{Z}^{s_2}$ ως την υποομάδα τής $\mathbb{R}^{s_2}$ την αποτελούμενη από εκείνα της τα στοιχεία, οι συντεταγμένες των οποίων είναι ακέραιοι αριθμοί. Χρησιμοποιώντας τό x_i για τον συμβολισμό τού στοιχείου τής $\mathbb{Z}^{s_1}$, το οποίο έχει ως i-οστή του συντεταγμένη το 1 και όλες τις άλλες του συντεταγμένες ίσες με το μηδέν, εκφράζουμε κάθε $(r_1, \ldots, r_{s_1}) \in \mathbb{Z}^{s_1}$ ως

$$(r_1, \ldots, r_{s_1}) = r_1 x_1 + \cdots + r_{s_1} x_{s_1},$$

οπότε

$$\varphi\left((r_1, \ldots, r_{s_1})\right) = r_1 \varphi\left(x_1\right) + \cdots + r_{s_1} \varphi\left(x_{s_1}\right).$$

Ως εκ τούτου, η εικόνα $\mathrm{Im}(\varphi)$ τού ισομορφισμού φ περιέχεται στον (διανυσματικό) υπόχωρο τού $\mathbb{R}^{s_2}$ τον παραγόμενο από το σύνολο $\{\varphi\left(x_1\right), \ldots, \varphi\left(x_{s_1}\right)\}$. Επειδή όμως αυτός ο υπόχωρος οφείλει να περιέχει την ομάδα $\mathbb{Z}^{s_2}$, πρέπει να ισούται με ολόκληρο τον χώρο $\mathbb{R}^{s_2}$. Άρα $s_1 = s_2$. □

Δεύτερο μέρος τής απόδειξης τού θεωρήματος (21.5). Διαθέτουμε έναν ομομορφισμό ομάδων

$$G_1 \longrightarrow \mathbb{Z}^{s_1}, \quad (r_1, \ldots, r_k, r_{k+1}, \ldots, r_{k+s}) \longmapsto (r_{k+1}, \ldots, r_{k+s}),$$

ο οποίος είναι επιρριπτικός και έχει ως πυρήνα του την υποομάδα H_1. Επομένως,

$$G_1/H_1 \cong \mathbb{Z}^{s_1}.$$

Παρομοίως δείχνουμε ότι

$$G_2/H_2 \cong \mathbb{Z}^{s_2}.$$

Όπως ήδη εξηγήσαμε προηγουμένως, κάθε ισομορφισμός μεταξύ των G_1 και G_2 στέλνει την H_1 να απεικονισθεί επί τής H_2. Κατά συνέπειαν, θα επάγει έναν ισομορφισμό μεταξύ των ομάδων πηλίκων G_1/H_1 και G_2/H_2. Βάσει τού λήμματος (21.8), $s_1 = s_2$. □

Η απόδειξη που δώσαμε για το θεώρημα (21.1) είναι μεν αποδοτική, αλλά διόλου διαφωτιστική σε ό,τι αφορά στην αναγνώριση μιας πεπερασμένως παραγομένης αβελιανής ομάδας από ένα δοθέν σύνολο γεννητόρων και σχέσεων. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε πως κάτι τέτοιο είναι όντως εφικτό και μάλιστα κατά έναν συστηματικό τρόπο. Η ακολουθούμενη μέθοδος περιλαμβάνει πράξεις γραμμών και στηλών πινάκων· γι' αυτόν τον λόγο θα αλλάξουμε τον χρησιμοποιούμενο συμβολισμό μας καθιστώντας τον *προσθετικό*, δηλαδή θα γράφουμε $x + y$ για την πράξη τής ομάδας, 0 για το *ουδέτερο* (ή ταυτοτικό) στοιχείο και $-x$ (αντί τού x^{-1}) για το *αντίθετο* στοιχείο (αντί τού *αντιστρόφου*). Έτσι, στη συνηθέστερή του εκδοχή, το θεώρημα (21.1) αναφέρεται στην αβελιανή ομάδα την παρεχομένη από $k+s$ γεννήτορες $x_1, \ldots, x_{k+s}$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$m_1 x_1 = 0, \ldots, m_k x_k = 0.$$

Αυτή είναι ισόμορφη τής ομάδας πηλίκων A/N, όπου η A είναι μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα, τα στοιχεία τής οποίας είναι γραμμικοί συνδυασμοί τής μορφής

$$n_1 x_1 + \cdots + n_{k+s} x_{k+s}$$

με *ακεραίους* συντελεστές $n_1, \ldots, n_{k+s}$, ενώ η N είναι η υποομάδα τής A η παραγόμενη από τα $m_1 x_1, \ldots, m_k x_k$.

Ασκήσεις

21.1 Βρείτε τους συντελεστές στρέψης για καθεμιά από τις ακόλουθες ομάδες: (a) $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20}$, (b) $\mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{42}$, (c) $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{16}$.

21.2 Έστω G μια αβελιανή ομάδα τάξης 100. Δείξτε ότι η G οφείλει να περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο τάξης 10. Ποιοι είναι οι συντελεστές στρέψης τής G, εάν υποτεθεί ότι δεν υπάρχει στοιχείο τής G με τάξη > 10;

21.3 Εάν η τάξη μιας πεπερασμένης αβελιανής ομάδας δεν μπορεί να διαιρεθεί με το τετράγωνο ενός θετικού ακεραίου αριθμού, δείξτε ότι η προκειμένη ομάδα οφείλει να είναι κυκλική.

21.4 Ταξινομήστε τις αβελιανές ομάδες τάξης $81, 144$ και 216.

21.5 Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Εάν μια αβελιανή ομάδα G έχει τάξη $|G| = p^n$ και περιέχει $p-1$ στοιχεία τάξης p, δείξτε ότι η G είναι κυκλική.

21.6 Εάν οι G, A, B είναι πεπερασμένες αβελιανές ομάδες και εάν $G \times A \cong G \times B$, αποδείξτε ότι $A \cong B$.

21.7 Έστω G μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα τάξης 360 που δεν περιέχει κανένα στοιχείο τάξης 12 ή 18. Βρείτε τους συντελεστές στρέψης τής G. Πόσα στοιχεία τάξης 6 περιέχει η G;

21.8 Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένως παραγόμενη, μη τετριμμένη υποομάδα τής $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ οφείλει να είναι ισόμορφη με μία από τις $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}^s$ ή $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^s$, για κάποιον θετικό ακέραιο s.

21.9 Έστω G μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα. Συμβολίστε ως $\#(q)$ το πλήθος των στοιχείων x τής G τα οποία ικανοποιούν την ισότητα $x^q = e$. Προσδιορίστε τους συντελεστές στρέψης τής G όταν $\#(2) = 16$, $\#(4) = 32$, $\#(3) = 9$, $\#(9) = 81$ και όταν -ταυτοχρόνως- ισχύει $x^{36} = e$ για κάθε $x \in G$.

21.10 Επαναλάβετε ό,τι κάνατε στην άσκηση 21.9, αλλά τούτη τη φορά υπό την προϋπόθεση ότι $\#(2) = 4$, $\#(3) = 3$, $\#(5) = 125$ και ότι $x^{30} = e$ για κάθε $x \in G$.

21.11 Αβελιανοποιήστε τις

(a) $Q \times S_4$, (b) $D_{12} \times A_4$,

(c) $G \times \mathbb{Z}_{10}$, όπου η G είναι η δικυκλική ομάδα τάξης 12,

και καταγράψτε τους συντελεστές στρέψης των προκυπτουσών αβελιανών ομάδων.

21.12 Αποδείξτε ότι η $\mathbb{R}$ δεν μπορεί να παραχθεί από πεπερασμένου πλήθους στοιχεία, δείχνοντας ότι κάθε πεπερασμένως παραγόμενη ομάδα έχει *αριθμήσιμο* υποκείμενο σύνολο.

21.13 Ας υποθέσουμε ότι η G είναι μια ομάδα για την οποία χρησιμοποιούμε τον προσθετικό συμβολισμό. Η G καλείται **διαιρετή ομάδα** (ή **ομάδα με διαίρεση**) όταν, δοθέντος ενός $x \in G$ και ενός θετικού ακεραίου m, μπορούμε πάντοτε να βρούμε ένα στοιχείο y τής G, τέτοιο ώστε να ισχύει $my = x$. Για παράδειγμα, οι ομάδες $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ και C είναι διαιρετές ομάδες. Δείξτε ότι, αντιθέτως, οι $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}_{>0}$ δεν είναι διαιρετές ομάδες. Αποδείξτε ότι καμία μη τετριμμένη, διαιρετή ομάδα δεν μπορεί να είναι πεπερασμένως παραγόμενη.

21.14 Δείξτε ότι η $\mathbb{Q}_{>0}$ περιέχει μια ελεύθερη αβελιανή υποομάδα βαθμίδας s για αυθαιρέτως μεγάλες τιμές τού s.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 22

Πράξεις γραμμών και στηλών

Όντας τώρα πλέον οπλισμένοι με την περιγραφή των πεπερασμένως παραγομένων αβελιανών ομάδων μέσω γεννητόρων και σχέσεων, θα επιθυμούσαμε να έχουμε και τη δυνατότητα να *αναγνωρίζουμε* μια τέτοια ομάδα στην κανονιστική της μορφή, ήτοι όπως αυτή μάς δίνεται από το θεώρημα (21.1). Μια πράγματι αποδοτική (αλγοριθμική) διαδικασία για την επίτευξη αυτής τής αναγνώρισης παρατίθεται στο παρόν κεφάλαιο. Από αρχής μέχρι τέλους τού κεφαλαίου θα κάνουμε χρήση τού προσθετικού συμβολισμού, ξεκινώντας με ένα απλό παράδειγμα.

(22.1) Παράδειγμα. Έστω ότι η G είναι η αβελιανή ομάδα η προσδιοριζόμενη μέσω των γεννητόρων x, y, z και των σχέσεων

$$3x + 5y - 3z = 0 \tag{R_1}$$

$$4x + 2y = 0 \tag{R_2}$$

ήτοι μια ομάδα, η οποία είναι ισόμορφη τής ομάδας πηλίκων A/N, όπου η A είναι η ελεύθερη αβελιανή ομάδα, τα στοιχεία τής οποίας είναι γραμμικοί συνδυασμοί $ax + by + cz$ με ακεραίους συντελεστές, και η N η υποομάδα τής A η οποία παράγεται από τα $3x + 5y - 3z$ και $4x + 2y$. Αφαιρώντας τήν (R_1) από την (R_2) παίρνουμε

$$x - 3y + 3z = 0 \tag{R_3}$$

ενώ αφαιρώντας τρεις φορές την (R_3) από την (R_1) παίρνουμε

$$14y - 12z = 0 \qquad (R_4)$$

Εάν $u = 3x + 5y - 3z$ και $v = 4x + 2y$, το μόνο που κάναμε μέχρι στιγμής είναι να αλλάξουμε τους γεννήτορες u, v τής N, μεταβαίνοντας αρχικώς στους

$$u, \quad v - u = x - 3y + 3z$$

και κατόπιν στους $v - u, \quad u - 3(v - u) = 14y - 12z$. Συνεπώς προκύπτει η ίδια η ομάδα G ανεξαρτήτως τού εάν χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (R_1) και (R_2) ή τις (R_3) και (R_4). Επαναγράφοντας την (R_4) ως

$$\begin{aligned} 14y - 12z &= 2y + 12(y - z) \\ &= 2(y + 6(y - z)) = 0 \end{aligned}$$

και θέτοντας

$$x' = x - 3y + 3z, \quad y' = y + 6(y - z), \quad z' = y - z,$$

το $\{x', y', z'\}$ αποτελεί ένα νέο σύστημα γεννητόρων *για την* G, πράγμα το οποίο διαπιστώνεται εάν διασπάσουμε τη μετάβαση από το $\{x, y, z\}$ στο $\{x', y', z'\}$ σε αρκετές φάσεις, τουτέστιν

$$x, \ y, \ z$$

$$x - 3y, \ y, \ z$$

$$x - 3y + 3z, \ y, \ z$$

$$x - 3y + 3z, \ y, \ y - z$$

$$x - 3y + 3z, \quad y + 6(y - z), \quad y - z.$$

Οι σχέσεις (R_3) και (R_4) απλοποιούνται πλέον γραφόμενες ως $x' = 0$ και $2y' = 0$, αντιστοίχως. Επομένως, το x' δεν συνεισφέρει τίποτα και η G παράγεται από κοινού από ένα στοιχείο y' τάξης 2 και από ένα στοιχείο z' άπειρης τάξης. Εξ αυτού συμπεραίνουμε ότι $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$.

Όλοι αυτοί οι πρακτικοί χειρισμοί που απαιτήθηκαν για να φτάσουμε στον προκείμενο ισομορφισμό μπορούν να συμπτυχθούν κατά τρόπο συστηματικό με τη χρήση τού *πίνακα συντελεστών* των αρχικών σχέσεων (R_1) και (R_2). Τα αντίστοιχα βήματα έχουν ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{την 1η γραμμή}]{\text{αφαιρούμε από τη 2η γραμμή}} \begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{και τη δεύτερη γραμμή}]{\text{εναλλάσσουμε την πρώτη}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{τής 1ης γραμμής από τη 2η}]{\text{αφαιρούμε το 3 πλάσιο}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{τής 1ης στήλης στη 2η}]{\text{προσθέτουμε το 3 πλάσιο}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 14 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{τής 1ης στήλης από την 3η}]{\text{αφαιρούμε το 3 πλάσιο}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{στη δεύτερη στήλη}]{\text{προσθέτουμε την 3η στήλη}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{τής 2ης στήλης στην 3η}]{\text{προσθέτουμε το 6 πλάσιο}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας αναπαριστά τις νέες μας σχέσεις $x' = 0$ και $2y' = 0$, οι οποίες, με τη σειρά τους, μας επιτρέπουν να καταγράψουμε την κανονιστική μορφή $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ για την G.

Η μέθοδος που θα μας οδηγήσει σε μια γενικότερη (αλγοριθμική) διαδικασία εκτυλίσσεται ήδη στις πράξεις γραμμών και στηλών τού ανωτέρω απλού παραδείγματος. Εάν η G είναι η αβελιανή ομάδα η προσδιοριζόμενη μέσω των γεννητόρων $x_1, \ldots, x_n$ και των σχέσεων

$$\begin{cases} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \cdots + a_{1\,n}x_n = 0 \\ a_{2\,1}x_1 + a_{2\,2}x_2 + \cdots + a_{2\,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m\,1}x_1 + a_{m\,2}x_2 + \cdots + a_{m\,n}x_n = 0 \end{cases}$$

τότε απλοποιούμε τον πίνακα των συντελεστών $A = (a_{i\,j})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ δυνάμει των ακολούθων πράξεων:

(I) Εναλλαγή δύο γραμμών ή δύο στηλών.

(II) Πολλαπλασιασμός όλων των εγγραφών μιας γραμμής ή μιας στήλης με το -1.

(III) Πρόσθεση ενός ακεραίου πολλαπλασίου μιας γραμμής σε μια άλλη γραμμή ή ενός ακεραίου πολλαπλασίου μιας στήλης σε μια άλλη.

Οι πράξεις επί των γραμμών μεταβάλλουν τις σχέσεις και οι πράξεις επί των στηλών μεταβάλλουν τους γεννήτορες, αν και διατηρούν *την ίδια ομάδα G* απ' αρχής μέχρι τέλους. Ύστερα από κατάλληλη εφαρμογή τους προσδοκούμε την εύρεση ενός νέου συνόλου γεννητόρων και σχέσεων, το οποίο θα παριστά την ομάδα μας υπό την κανονιστική της μορφή. Η προσήκουσα μετατροπή τού πίνακα A εξασφαλίζεται μέσω τού ακολούθου θεωρήματος:

(22.2) Θεώρημα. *Για κάθε $m \times n$ πίνακα A, οι εγγραφές τού οποίου είναι ακέραιοι αριθμοί, υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία πράξεων τού τύπου I, II και III, η οποία μετατρέπει τον A σε έναν διαγώνιο πίνακα $D = (d_{ij})$, όπου*

$$d_{ii} \geq 0, \quad \forall i, \ 1 \leq i \leq k,$$

και

$$d_{11}\,|d_{22}\,|\cdots|d_{kk}, \quad \textit{με} \ \ k = \min(m,n).$$

Κάνοντας χρήση καταλλήλων νέων γεννητόρων $x'_1, \ldots, x'_n$, ο πίνακας D αναπαριστά τις σχέσεις

$$d_{11}x'_1 = 0, \ldots, \ d_{kk}x'_k = 0.$$

Γράφοντας το d_{ii} εν συντομία ως d_i, ας υποθέσουμε ότι $d_1 \geq 2$ και ότι $d_k \neq 0$. Τότε η κανονιστική μορφή τής G είναι η

$$\boxed{\mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_k} \times \mathbb{Z}^{n-k}}$$

Εάν $d_1 = d_2 = \cdots = d_s = 1$ και $d_{t+1} = \cdots = d_k = 0$, τότε οι γεννήτορες $x'_1, \ldots, x'_s$ πλεονάζουν, ενώ οι $x'_{t+1}, \ldots, x'_k$ έχουν άπειρη τάξη. Κατά συνέπειαν, σε αυτήν την περίπτωση η κανονιστική μορφή τής G γράφεται ως

$$\boxed{\mathbb{Z}_{d_{s+1}} \times \mathbb{Z}_{d_{s+2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_t} \times \mathbb{Z}^{n-t}}$$

Σκιαγράφηση τής απόδειξης τού θεωρήματος (22.2). Ομιλούμε για «σκιαγράφηση» εξαιτίας τού ότι το όλο σκεπτικό, επί τού οποίου στηρίζεται η απόδειξη, θα μπορούσε πολύ εύκολα να χαθεί, εάν εμμέναμε σε μια πέραν τού δέοντος τυποκρατία. Εάν ο A είναι ο μηδενικός πίνακας, τότε δεν χρειάζεται να κάνουμε τίποτα. Ειδάλλως, ο A διαθέτει τουλάχιστον μία μη μηδενική εγγραφή και, κάνοντας χρήση των πράξεων τού τύπου I και II, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα (που θα εξακολουθήσουμε να τον αποκαλούμε A), η επικεφαλής εγγραφή τού οποίου, ήτοι η a_{11}, θα είναι *θετική*. Ας ρίξουμε μια ματιά κατά μήκος τής πρώτης γραμμής. Εάν εντοπίσουμε μια εγγραφή a_{1j}, η οποία δεν είναι ίση με κάποιο πολλαπλάσιο τής a_{11}, τότε διαιρούμε την a_{1j} με την a_{11} παίρνοντας $a_{1j} = qa_{11} + u$, όπου $q, u \in \mathbb{Z}$ και $0 < u < a_{11}$. Αφαιρούμε q φορές την 1η στήλη από τη j-οστή στήλη (εκτελώντας μια πράξη τύπου III) και κατόπιν εναλλάσσουμε τη νεοσχηματιζόμενη j-οστή στήλη με την 1η στήλη (εκτελώντας μια πράξη τύπου I). Ο προκύπτων πίνακας έχει το u ως επικεφαλής εγγραφή του. Θέτουμε λοιπόν το ερώτημα τού κατά πόσον, στην παρούσα φάση, το u διαιρεί κάθε άλλη εγγραφή ανήκουσα στην 1η γραμμή.

Εάν η απάντηση είναι αρνητική, επαναλαμβάνουμε την ως άνω διαδικασία και κατασκευάζουμε τελικώς έναν πίνακα, η επικεφαλής εγγραφή τού οποίου, ας την πούμε v, είναι θετική και γνησίως μικρότερη τού u. Η διαδοχική επανάληψη μιας τέτοιας διαδικασίας δεν μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρον, καθότι η *φθίνουσα* ακολουθία $a_{11}, u, v, \ldots$ θετικών ακεραίων οφείλει -κάποια στιγμή- να τερματισθεί. Κατά συνέπειαν, απαιτούνται πεπερασμένου πλήθους βήματα προκειμένου να μεταβούμε σε έναν πίνακα B, η επικεφαλής εγγραφή τού οποίου διαιρεί κάθε άλλη εγγραφή ευρισκομένη στην 1η του γραμμή. Χρησιμοποιώντας πράξεις τού τύπου III για την αφαίρεση καταλλήλων πολλαπλασίων τής 1ης στήλης τού B από τις άλλες στήλες, καθίσταται δυνατή η αναγωγή όλων των εγγραφών τής 1ης γραμμής τού B, οι οποίες είναι διάφορες τής b_{11}, στο μηδέν. Τώρα εστιάζουμε την προσοχή μας στην 1η στήλη και προχωρούμε, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, κάνοντας χρήση πράξεων γραμμών αντί πράξεων στηλών, έως ότου καταλήξουμε σε έναν πίνακα τής μορφής:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \tag{$\blacklozenge$}$$

Σε αυτό το σημείο ενδέχεται να ενδώσουμε στον πειρασμό να εργασθούμε με τον μικρότερο πίνακα C_1, εκτελώντας εκ νέου την προαναφερθείσα διαδικασία, έως ότου πάρουμε έναν πίνακα τής μορφής

$$\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & C_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$$

κ.ο.κ. Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε πράγματι σε έναν διαγώνιο πίνακα, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι κατ' ανάγκην οι διαγώνιές του εγγραφές θα διαιρούσαν διαδοχικώς η μία την άλλη. Αντ' αυτής λοιπόν τής οδού προτιμάται μία άλλη. Ερωτούμε κατά πόσον κάθε εγγραφή τού C_1 είναι πολλαπλάσιο τής εγγραφής c_{11}. Εάν η c_{11} δεν διαιρεί την εγγραφή c_{ij}, τότε προσθέτουμε την i-οστή γραμμή τού πίνακα (♦) στην 1η του γραμμή και *επανεκκινούμε την όλη διαδικασία από την πρωταρχική της φάση*. Τούτο φαντάζει, εκ πρώτης όψεως, ως κάτι το τελείως αποκαρδιωτικό, έως ότου βεβαίως αντιληφθούμε ότι μας οδηγεί σε μια *νέα* εκδοχή τού (♦)

με μια θετική επικεφαλής εγγραφή, η οποία είναι μικρότερη τής c_{11}. Επαναλαμβάνουμε διαδοχικώς και αυτήν τη διαδικασία (η οποία, παρομοίως, περατούται έπειτα από πεπερασμένου πλήθους βήματα), έως ότου καταλήξουμε σε έναν πίνακα τού τύπου (♦), η επικεφαλής εγγραφή τού οποίου όντως διαιρεί κάθε άλλη εγγραφή. Η εν λόγω επικεφαλής εγγραφή είναι ο αυθεντικός διαγώνιος όρος d_{11} που επιζητούσαμε. *Από εδώ και στο εξής* μπορούμε να ξεκινήσουμε να απλοποιούμε τον μικρότερο πίνακα τον αντιστοιχούμενο στον C_1, όντας πλέον απολύτως βέβαιοι ότι θα καταλήξουμε σε έναν πίνακα τής μορφής

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \;\cdots\; 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \;\cdots\; 0 \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & C_3 \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

όπου $d_{11}\,|d_{22}$ και όπου κάθε εγγραφή τού C_3 είναι πολλαπλάσια τής d_{22}. Η όλη διαδικασία σταματά πλήρως με την απόκτηση τού διαγωνίου πίνακα $D = (d_{ij})$, ο οποίος έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. $\square$

(22.3) Παράδειγμα. Έστω G η αβελιανή ομάδα που καθορίζεται μέσω των γεννητόρων x, y και των σχέσεων $2x = 0, 3y = 0$. Αμέσως αναγνωρίζουμε ως κανονιστική μορφή για την G την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Η ανωτέρω περιγραφείσα διαδικασία μάς δίνει

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{γραμμή στην 1η}]{\text{προσθέτουμε τη 2η}} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{από τη δεύτερη}]{\text{αφαιρούμε την 1η στήλη}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{και τη 2η στήλη}]{\text{εναλλάσσουμε την 1η}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{στήλης από τη δεύτερη}]{\text{αφαιρούμε το 2 πλάσιο τής 1ης}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{γραμμής από τη δεύτερη}]{\text{αφαιρούμε το 3 πλάσιο τής 1ης}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{τη 2η στήλη με το} -1]{\text{πολλαπλασιάζουμε}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Σε αυτόν τον νέο τρόπο παράστασης τής G υπεισέρχονται γεννήτορες x', y' υποκείμενοι στις σχέσεις $x' = 0$ και $6y' = 0$, δίνοντάς μας πράγματι την ομάδα $\mathbb{Z}_6\,(\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$.

(22.4) Παράδειγμα. Έστω G η αβελιανή ομάδα η προσδιοριζόμενη μέσω των γεννητόρων x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 και των σχέσεων

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 10x_4 - 15x_5 &= 0, \\ 4x_2 - 8x_4 + 12x_5 &= 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 9x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 - 3x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Η αναγωγή τού πίνακα των συντελεστών υποδηλώνεται παρακάτω. Δεν είναι αναγκαίο να ακολουθήσουμε κατά γράμμα την (αλγοριθμική) διαδικασία τού (22.2). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορες συντομεύσεις· εδώ, για παράδειγμα, μπορούμε διαμιάς να απομακρύνουμε τις εγγραφές τής τετάρτης και τής πέμπτης στήλης (αντικαθιστώντας τες με μηδενικά), διότι αυτές οι στήλες αποτελούν ακέραια πολλαπλάσια τής δεύτερης στήλης. Για εξοικονόμηση χώρου, επιτρέπουμε σε κάθε βέλος να αναπαριστά αρκετές πράξεις γραμμών και στηλών.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 10 & -15 \\ 0 & 4 & 0 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & -2 & 6 & -9 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} &\to \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\to \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Επομένως, $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (Εδώ, $m = k = 4$, $n = 5$, $s = 1$ και $t = 3$.)

Ασκήσεις

22.1 Βρείτε τη βαθμίδα και τους συντελεστές στρέψης τής αβελιανής ομάδας τής καθοριζόμενης από τους γεννήτορες x_1, x_2, x_3, x_4 και τις σχέσεις

$$\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 11x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0. \end{aligned}$$

22.2 Μια αβελιανή ομάδα καθορίζεται από πέντε γεννήτορες υποκειμένους σε τέσσερεις σχέσεις, με πίνακα συντελεστών αυτών των σχέσεων τον

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 8 & 2 & -2 & -8 & 2 \\ 11 & -8 & 9 & -5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Αποδείξτε ότι η ομάδα αυτή είναι ισόμορφη τής $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$.

22.3 Έστω G μια αβελιανή ομάδα η οποία καθορίζεται από τους γεννήτορες x_1, x_2, x_3, x_4 και τις σχέσεις

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 12x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 - 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Αποδείξτε ότι η G είναι μια ελεύθερη ομάδα και προσδιορίστε τη βαθμίδα της.

22.4 Πώς επιδρούν οι ακέραιες πράξεις γραμμών και στηλών στην ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα;

22.5 Μια αβελιανή ομάδα G καθορίζεται από τους γεννήτορες x, y, z που υπόκεινται στις σχέσεις

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 0, \\ 6x + y + 7z &= 0, \\ 2x + 3y + 6z &= 0. \end{aligned}$$

Υπολογίστε την ορίζουσα τού πίνακα συντελεστών αυτών των σχέσεων. Μήπως η ορίζουσα σας δίνει κάποια επιπρόσθετη πληροφορία γύρω από την G; Προσδιορίστε τή βαθμίδα και τους συντελεστές στρέψης τής G.

22.6 Ας υποθέσουμε ότι δίνονται n γεννήτορες και n σχέσεις που καθορίζουν μια αβελιανή ομάδα G. Τι μπορείτε να πείτε για την G όταν ο πίνακας συντελεστών των σχέσεων αυτών έχει ορίζουσα διάφορη τού μηδενός; Τι συμβαίνει όταν η ορίζουσα τού εν λόγω πίνακα ισούται με 1 ή με -1;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 23

Αυτομορφισμοί

Ένας **αυτομορφισμός** μιας ομάδας G είναι ένας ισομορφισμός από την G επί τής G. Το σύνολο όλων των αυτομορφισμών σχηματίζει μια ομάδα ως προς την πράξη τής σύνθεσης συναρτήσεων, η οποία καλείται **ομάδα αυτομορφισμών** τής G και σημειώνεται ως $\mathrm{Aut}(G)$.

(23.1) Παραδείγματα. (i) Κάθε αυτομορφισμός θ τής $\mathbb{Z}$ πρέπει να στέλνει το 1 να απεικονίζεται σε έναν ακέραιο αριθμό, ο οποίος παράγει την $\mathbb{Z}$. Κατά συνέπειαν, $\theta(1) \in \{\pm 1\}$. Εάν $\theta(1) = 1$, τότε παίρνουμε τον ταυτοτικό αυτομορφισμό· ειδάλλως, $\theta(1) = -1$, και ο θ στέλνει κάθε ακέραιο αριθμό n να απεικονίζεται στον αντίθετό του $-n$. Βλέπουμε λοιπόν άμεσα ότι $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$.

(ii) Η συνάρτηση $G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto x^{-1}$, προσδιορίζει έναν αυτομορφισμό για οιαδήποτε *αβελιανή* ομάδα G.

(iii) Ας υποθέσουμε ότι $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ένας αυτομορφισμός μετατάσσει τα τρία στοιχεία, τα οποία υπολείπονται ύστερα από την αφαίρεση τού μοναδιαίου. Είναι μάλιστα εύκολο να ελεγχθεί το ότι κάθε μετάταξη αυτού τού είδους, συμπληρούμενη μέσω τής απεικόνισης τού e στο e, μας παρέχει έναν αυτομορφισμό τής $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Επομένως, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$.

(iv) Η ομάδα αυτομορφισμών $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ είναι ισόμορφη τής ομάδας R_n, η οποία εισήχθη στο κεφάλαιο 11. Τα στοιχεία τής R_n είναι οι θετικοί ακέραιοι αριθμοί, οι οποίοι είναι μικρότεροι τού n και σχετικώς πρώτοι προς τον n, ενώ η πράξη τής ομάδας είναι ο πολλαπλασιασμός κατά μόδιο n. Έστω θ ένας αυτομορφισμός τής $\mathbb{Z}_n$. Τότε η εικόνα $\theta(1)$ παράγει την ομάδα $\mathbb{Z}_n$. Συνεπώς, μκδ$(\theta(1), n) = 1$. Η συνάρτηση

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \longrightarrow R_n, \quad \theta \longmapsto \theta\,(1)\,,$$

αποτελεί έναν ισομορφισμό ομάδων. Κάποιες χρήσιμες ιδιότητες τής πεπερασμένης αβελιανής ομάδας R_n μελετώνται στην άσκηση 23.4.

(v) Κάθε αυτομορφισμός διατηρεί την τάξη καθενός εκ των στοιχείων τής εκάστοτε θεωρουμένης ομάδας. Επομένως, κάθε αυτομορφισμός τής S_3 οφείλει να απεικονίζει το σύνολο των αντιμεταθέσεων $\{(1\,2), (1\,3), (2\,3)\}$ στον εαυτό του. Έτσι, κάθε μετάταξη των $(1\,2), (1\,3), (2\,3)$ προσδιορίζει έναν αυτομορφισμό τής S_3 και $\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$.

(vi) Έστω θ ένας αυτομορφισμός τής $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Υποθέτοντας ότι $\theta\,((1,0)) = (a,b)$ και $\theta\,((0,1)) = (c,d)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \theta\,((m,n)) &= m\theta\,((1,0)) + n\theta\,((0,1)) \\ &= (ma+nc, mb+nd) \\ &= (m,n)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

οπότε ο αυτομορφισμός θ αναπαριστάται μέσω ενός 2×2 πίνακα με ακέραιες εγγραφές. Η ορίζουσα $ad-bc$ αυτού τού πίνακα ανήκει στο δισύνολο $\{\pm 1\}$, καθότι -ως συνάρτηση- ο θ είναι αντιστρέψιμος. Αλλά και η αντίστροφός του, με τη σειρά της, οφείλει να αναπαριστάται μέσω ενός 2×2 πίνακα με ακέραιες εγγραφές. Η ομάδα αυτομορφισμών $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ είναι ισόμορφη τής ομάδας $GL_2\,(\mathbb{Z})$ των 2×2 πινάκων με ακέραιες εγγραφές και ορίζουσα ± 1.

(vii) Η συζυγία η δημιουργούμενη μέσω ενός παγιωμένου στοιχείου g μιας ομάδας G μας παρέχει έναν ειδικό τύπο αυτομορφισμού, ήτοι τον $x \longmapsto gxg^{-1}$, ο οποίος καλείται **εσωτερικός αυτομορφισμός**. Οι εσωτερικοί αυτομορφισμοί συγκροτούν μια ορθόθετη υποομάδα $\mathrm{Inn}(G)$ τής $\mathrm{Aut}(G)$. Εάν η G είναι αβελιανή, τότε ο μόνος εσωτερικός αυτομορφισμός της είναι ο ταυτοτικός.

(23.2) Θεώρημα. *Η $\mathrm{Inn}(G)$ είναι ισόμορφη τής ομάδας πηλίκων $G/Z(G)$.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση

$$G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G), \quad g \longmapsto \left(x \longmapsto gxg^{-1}\right),$$

η οποία στέλνει κάθε g να απεικονιστεί σε έναν εσωτερικό αυτομορφισμό τής G, αποτελεί έναν ομομορφισμό ομάδων. Η εικόνα του αποτελείται από όλους τους εσωτερικούς αυτομορφισμούς, ενώ ο πυρήνας του ισούται με

$$\{g \in G \mid x = gxg^{-1}, \ \forall x, \ x \in G\} = \{g \in G \mid xg = gx, \ \forall x, \ x \in G\} = Z(G).$$

Έτσι, το ζητούμενο έπεται από το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών. □

(23.3) Θεώρημα. *Εάν οι p και q είναι δυο πρώτοι αριθμοί, για τους οποίους ισχύει $p > q$ και $q \nmid (p-1)$, τότε κάθε ομάδα τάξης pq είναι κυκλική.*

Απόδειξη. Εδώ ή εφαρμόζουμε τα θεωρήματα τού Sylow (βλ. άσκηση 20.6) ή επιχειρηματολογούμε εναλλακτικώς ως ακολούθως: Έστω G μια ομάδα τάξης pq. Επιλέγουμε ένα στοιχείο x τάξης p και ένα στοιχείο y τάξης q, και θέτουμε $H = \langle x \rangle$. Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι η H είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής G. Το σύνολο των αριστερών πλευρικών κλάσεων τής H εντός τής G έχει q στοιχεία. Η H δρα επ' αυτού τού συνόλου μέσω αριστερών μεταφορών, δηλαδή το $h \in H$ στέλνει την πλευρική κλάση gH στην hgH. Ο πληθικός αριθμός καθεμιάς των τροχιών είναι $\leq q$ και πρέπει να είναι ένας διαιρέτης τού $p = |H|$. Επομένως, κάθε τροχιά περιέχει ακριβώς μία πλευρική κλάση, ήτοι ισχύει $hgH = gH$ για όλα τα $g \in G$ και όλα τα $h \in H$. Η ισότητα αυτή ισοδυναμεί με το ότι $g^{-1}hg \in H$ για όλα τα $g \in G$ και όλα τα $h \in H$. Άρα η H είναι όντως μια ορθόθετη υποομάδα τής G.

Το στοιχείο y μας δίνει τον αυτομορφισμό $h \longmapsto yhy^{-1}$ τής H, η τάξη τού οποίου είναι αφ' ενός ένας διαιρέτης τού q (διότι $y^q = e$) και αφ' ετέρου ένας διαιρέτης τού $p-1$ (διότι, κατά το θεώρημα τού Lagrange, ισχύουν οι ισότητες $|\mathrm{Aut}(H)| = |\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p)| = p-1$). Καθώς έχουμε $q \nmid (p-1)$, αυτή η τάξη ισούται με το 1, οπότε προκύπτει ο ταυτοτικός αυτομορφισμός. Επομένως, $yh = hy$ για όλα τα $h \in H$. Εάν $K = \langle y \rangle$, τότε $HK = G$, $H \cap K = \{e\}$ και $hk = kh$ οποτεδήποτε $h \in H$, $k \in K$. Συνεπώς έχουμε

$$G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{pq}$$

βάσει των θεωρημάτων (10.4) και (10.2). □

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνονται δύο ομάδες H και J, καθώς και ένας ομομορφισμός $\varphi : J \longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$. Θα κατασκευάσουμε μια νέα ομάδα $H \times_\varphi J$, η οποία καλείται το **ημιευθύ γινόμενο** των H και J, το καθοριζόμενο μέσω τής φ, ως εξής: τα στοιχεία του είναι διατεταγμένα ζεύγη (x, y), όπου $x \in H$ και $y \in J$, και ο πολλαπλασιασμός του εξ ορισμού ο

$$(x, y)(x', y') = (x \cdot \varphi(y)(x'), y \cdot y').$$

Η πρώτη συντεταγμένη αυτού τού γινομένου αποκτάται με τη εφαρμογή τού αυτομορφισμού $\varphi(y)$ στο x' και τον μετέπειτα εξ αριστερών πολλαπλασιασμό τού αποτελέσματος με το x. Εδώ θα σημειώσουμε με έμφαση τον πολλαπλασιασμό τόσο τής H όσο και τής J με μια κουκκίδα. Το μοναδιαίο στοιχείο είναι το (e_H, e_J) και το αντίστροφο τού (x, y) το $\left(\varphi(y)^{-1}\left(x^{-1}\right), y^{-1}\right)$. Η προσεταιριστικότητα έπεται από το ότι

$$\begin{aligned}
[(x,y)\,(x',y')]\,(x'',y'') &= (x\cdot\varphi\,(y)\,(x'),y\cdot y')(x'',y'') \\
&= (x\cdot\varphi\,(y)\,(x')\cdot\varphi\,(y\cdot y')\,(x''),y\cdot y'\cdot y'') \\
&= (x\cdot\varphi\,(y)\,(x'\cdot\varphi\,(y')\,(x'')),y\cdot y'\cdot y'') \\
&\quad [\text{επειδή η } \varphi \text{ είναι ομομορφισμός}] \\
&= (x,y)(x'\cdot\varphi\,(y')\,(x''),y'\cdot y'') \\
&= (x,y)\,[(x',y')\,(x'',y'')]\,.
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $(x,y)\longmapsto y$ είναι ένας ομομορφισμός από την $H\times_\varphi J$ *επί* τής J, με πυρήνα του τον $\{\,(x,e_J)|\,x\in H\}$, ο οποίος είναι ισόμορφος τής H. Επομένως, διαθέτουμε ένα αντίτυπο τής H καθήμενο εντός τής $H\times_\varphi J$ ως *ορθόθετη* υποομάδα της. Επίσης, υπάρχει και ένα αντίτυπο τής J καθήμενο εντός τής $H\times_\varphi J$, ήτοι το $\{\,(e_H,y)|\,y\in J\}$, το οποίο είναι μια (όχι κατ' ανάγκην ορθόθετη) υποομάδα τής $H\times_\varphi J$.

Εάν η φ στέλνει κάθε στοιχείο τής J να απεικονισθεί στον ταυτοτικό αυτομορφισμό τής H, τότε επανακτάται το ευθύ γινόμενο $H\times J$ που έχουμε εισαγάγει στο κεφάλαιο 10. Το επόμενο θεώρημα γενικεύει το (10.4).

(23.4) Θεώρημα. *Εάν οι H,J είναι υποομάδες μιας ομάδας G, η H ορθόθετη με $HJ=G$ και $H\cap J=\{e\}$, τότε η G είναι ισόμορφη με το ημιευθύ γινόμενο $H\times_\varphi J$, όπου ο ομομορφισμός $\varphi:J\longrightarrow \mathrm{Aut}(H)$ είναι αυτός που ορίζεται διά μέσου τού τύπου*

$$\varphi\,(y)\,(x)=yxy^{-1},\ \ \forall x,\ \ x\in H,\quad \textit{και}\ \ \forall y,\ \ y\in J.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\psi:H\times_\varphi J\longrightarrow G,\quad \psi\,(x,y)=xy.$$

Η ψ είναι ένας ομομορφισμός, διότι

$$\begin{aligned}
\psi\,[(x,y)\,(x',y')] &= \psi(x\cdot\varphi\,(y)\,(x'),y\cdot y') \\
&= (xyx'y^{-1},y\cdot y') \\
&= xyx'y^{-1}yy' \\
&= xyx'y' \\
&= \psi\,(x',y')\,\psi\,(x',y')\,.
\end{aligned}$$

Επιπροσθέτως, η ψ είναι επιρριπτική, εξαιτίας τού ότι $G=HJ$, οπότε κάθε στοιχείο τής G μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή xy για κάποιους $x\in H$ και $y\in J$. Εάν το (x,y) ανήκει στον πυρήνα τής ψ, τότε $xy=e$ δίνοντάς μας $x=y^{-1}$. Επομένως, αμφότεροι οι x και y ανήκουν στην τομή $H \cap J = \{e\}$ και το (x, y) είναι το μοναδιαίο στοιχείο τής $H \times_\varphi J$. Σύμφωνα με το πόρισμα (16.3), η συνάρτηση ψ είναι ένας ισομορφισμός. $\square$

(23.5) Παραδείγματα. (i) Οι υποομάδες $H = \langle (1\,2\,3) \rangle$ και $J = \langle (1\,2) \rangle$ τής S_3 πληρούν τις υποθέσεις τού θεωρήματος (23.4). Κατά συνέπειαν, η S_3 είναι ισόμορφη με το ημιευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}_3 \times_\varphi \mathbb{Z}_2$, όπου η φ στέλνει τον γεννήτορα τής $\mathbb{Z}_2$ να απεικονισθεί στον μη τετριμμένο αυτομορφισμό τής $\mathbb{Z}_3$.

(ii) Οι ισομετρίες τού επιπέδου, ήτοι οι μετασχηματισμοί τού επιπέδου που διατηρούν τις αποστάσεις, συγκροτούν μία ομάδα E_2, τη λεγομένη **ευκλείδεια ομάδα**. Έστω T η υποομάδα τής E_2, η οποία απαρτίζεται από όλες τις μεταφορές, και έστω O η υποομάδα των ορθογωνίων μετασχηματισμών f_A, $A \in O_2$. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι η T είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής E_2, ότι $TO = E_2$ και ότι $T \cap O = I$. Άρα η E_2 είναι το ημιευθύ γινόμενο $T \times_\varphi O$, όπου η

$$\varphi : O \longrightarrow \mathrm{Aut}(T)$$

επάγεται μέσω συζυγίας.

Ασκήσεις

23.1 Προσδιορίστε τις ομάδες αυτομορφισμών των D_4 και D_5.

23.2 Μελετήστε λεπτομερώς τις $\mathrm{Aut}(Q)$ και $\mathrm{Inn}(Q)$.

23.3 Έστω G μια ομάδα. Εάν $Z(G) = \{e\}$, αποδείξτε ότι το κέντρο τής ομάδας αυτομορφισμών τής G περιέχει μόνον τον ταυτοτικό αυτομορφισμό.

23.4 Έστω m ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Δείξτε ότι

$$R_{2^m} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^{m-2}}, \ \ \forall m, \ m \geq 3,$$

και ότι η R_{p^m} είναι κυκλική τάξης $p^{m-1}\,(p-1)$ όταν ο p είναι ένας περιττός πρώτος αριθμός. Τώρα η άσκηση 11.6 σας επιτρέπει να μελετήσετε διεξοδικώς τους συντελεστές στρέψης τής ομάδας R_n για οιονδήποτε θετικό ακέραιο αριθμό n.

23.5 Μια υποομάδα H μιας ομάδας G καλείται **χαρακτηριστική υποομάδα** τής G όταν η H στέλνεται να απεικονισθεί στον εαυτό της μέσω όλων των αυτομορφισμών τής G. Δείξτε ότι οι $Z(G)$ και $[G, G]$ είναι πάντοτε χαρακτηριστικές υποομάδες τής G.

23.6 Οι ορθόθετες υποομάδες μιας ομάδας G είναι ακριβώς εκείνες οι υποομάδες τής G, οι οποίες μένουν αναλλοίωτες μέσω όλων των εσωτερικών αυτομορφισμών τής G. Παραθέστε μια ομάδα G και μια ορθόθετη υποομάδα H τής G, ούτως ώστε η H να μην είναι χαρακτηριστική υποομάδα τής G.

23.7 Έστω ότι οι G και H είναι δυο πεπερασμένες ομάδες, οι τάξεις των οποίων είναι σχετικώς πρώτοι αριθμοί. Δείξτε ότι αμφότερες οι $G \times \{e\}$ και $\{e\} \times H$ είναι χαρακτηριστικές υποομάδες τής $G \times H$. Αποδείξτε ότι

$$\mathrm{Aut}(G \times H) \cong \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(H).$$

Κάθε ομάδα τής μορφής $H \times_\varphi J$ θα καλείται εφεξής ημιευθύ γινόμενο *τής H με την J.*

23.8 Αποδείξτε ότι η δικυκλική ομάδα τάξης 12 είναι ισόμορφη τού ημιευθέος γινομένου τής $\mathbb{Z}_3$ με την $\mathbb{Z}_4$.

23.9 Δείξτε ότι η ομάδα Q δεν είναι ισόμορφη τού ημιευθέος γινομένου δύο μη τετριμμένων ομάδων.

23.10 Έστω G μια αβελιανή ομάδα. Συμβολίστε ως $G \mathbin{\tilde{\times}} \mathbb{Z}_2$ το ημιευθύ γινόμενο $G \times_\varphi \mathbb{Z}_2$, όπου η $\varphi : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ στέλνει το 1 να απεικονισθεί στον αυτομορφισμό $x \longmapsto x^{-1}$ τής G. Αποδείξτε τους ακόλουθους ισομορφισμούς:

$$\mathbb{Z}_n \mathbin{\tilde{\times}} \mathbb{Z}_2 \cong D_n, \quad \mathbb{Z} \mathbin{\tilde{\times}} \mathbb{Z}_2 \cong D_\infty, \quad SO_2 \mathbin{\tilde{\times}} \mathbb{Z}_2 \cong O_2.$$

23.11 Χρησιμοποιήστε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και την κατασκευή τού θεωρήματος (23.4) για να εκφράσετε την O_3 ως ένα ημιευθύ γινόμενο τής SO_3 με την $\mathbb{Z}_2$. Προσδιορίστε έναν ισομορφισμό μεταξύ αυτού τού ημιευθέος γινομένου και τού $SO_3 \times \mathbb{Z}_2$.

23.12 Έστω G η ομάδα των μετασχηματισμών τού $\mathbb{R}^2$ που διατηρούν την απόσταση, η παραγόμενη από τους $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ και $(x, y) \mapsto (-x, y + 1)$. Αποδείξτε ότι η G είναι ισόμορφη τού ημιευθέος γινομένου $\mathbb{Z} \times_\varphi \mathbb{Z}$, όπου η φ στέλνει το 1 να απεικονισθεί στον μη τετριμμένο αυτομορφισμό τής $\mathbb{Z}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 24

Η ευκλείδεια ομάδα

Οι *ισομετρίες τού επιπέδου* σχηματίζουν μια ομάδα με πράξη της τη σύνθεση συναρτήσεων· πρόκειται για τη λεγομένη **ευκλείδεια ομάδα**, την οποία συμβολίζουμε ως E_2. Αλλά ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή. Η απόδειξη τού ότι το σύνολο E_2 των ισομετριών τού επιπέδου είναι μια ομάδα, είναι κάτι που επαληθεύεται άμεσα. Πράγματι· μια συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ανήκει στο E_2 όταν διατηρεί τις αποστάσεις, ήτοι όταν

$$\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

για οιαδήποτε σημεία τού $\mathbb{R}^2$. Εάν $g, h \in E_2$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \|g(h(\mathbf{x})) - g(h(\mathbf{y}))\| &= \|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{y})\| \quad \text{(διότι η } g \text{ είναι μια ισομετρία)} \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \text{(διότι η } h \text{ είναι μια ισομετρία)} \end{aligned}$$

οπότε $gh \in E_2$. Η σύνθεση συναρτήσεων είναι, ως γνωστόν, πράξη προσεταιριστική, ενώ ο ταυτοτικός μετασχηματισμός τού επιπέδου παίζει τον ρόλο τού «μοναδιαίου» (ή «ταυτοτικού») στοιχείου. Τέλος, κάθε $g \in E_2$ είναι μια αμφίρριψη για την οποία ισχύει

$$\begin{aligned} \left\|g^{-1}(\mathbf{x}) - g^{-1}(\mathbf{y})\right\| &= \left\|g^{-1}(g(\mathbf{x})) - g^{-1}(g(\mathbf{y}))\right\| \quad \text{(διότι η } g \text{ είναι μια ισομετρία)} \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \text{(διότι η } g^{-1}g \text{ είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός)} \end{aligned}$$

οπότε $g^{-1} \in E_2$.

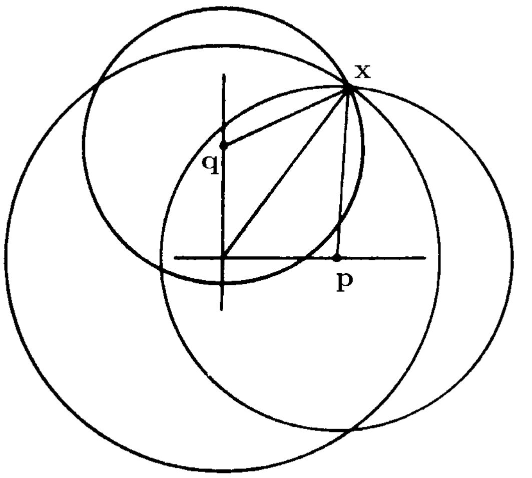
Οι περιστροφές, οι κατοπτρισμοί και οι μεταφορές αποτελούν οικεία παραδείγματα ισομετριών τού επιπέδου. (Μια *μεταφορά* κατά ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$ είναι μια συνάρτηση $\tau : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο ορισμού της τον $\tau(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + \mathbf{x}$, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Επειδή $\tau(\mathbf{0}) = \mathbf{v}$, μια μεταφορά είναι πλήρως καθορισμένη όταν γνωρίζουμε πού απεικονίζει την αρχή των αξόνων.)

(24.1) Πρόταση. *Κάθε στοιχείο τής ομάδας E_2 είναι ή μια στροφή περί την αρχή των αξόνων ακολουθούμενη από μια μεταφορά ή ένας κατοπτρισμός ως προς μία ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, ακολουθούμενος από μια μεταφορά.*

Απόδειξη. Έστω g ένα στοιχείο τής ομάδας E_2. Υποθέτουμε ότι $g(\mathbf{0}) = \mathbf{v}$ και ότι η τ είναι η μεταφορά κατά απόσταση $\mathbf{v}$. Τότε η σύνθετη ισομετρία $f = \tau^{-1}g$ *διατηρεί την αρχή των αξόνων σταθερή*. Ισχυριζόμαστε ότι η f είναι ή μια στροφή περί το $\mathbf{0}$ ή ένας κατοπτρισμός ως προς μία ευθεία διερχομένη από το $\mathbf{0}$. Ας θεωρήσουμε τα σημεία $\mathbf{p} = (1, 0)$ και $\mathbf{q} = (0, 1)$ ως σημεία αναφοράς μας. Κάθε σημείο $\mathbf{x}$ τού $\mathbb{R}^2$ είναι πλήρως καθορισμένο μέσω των τριών μετρικών μεγεθών:

$$\|\mathbf{x}\|, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|$$

διότι τρεις κύκλοι με μη συνευθειακά κέντρα τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο (βλ. σχ. 24.1).

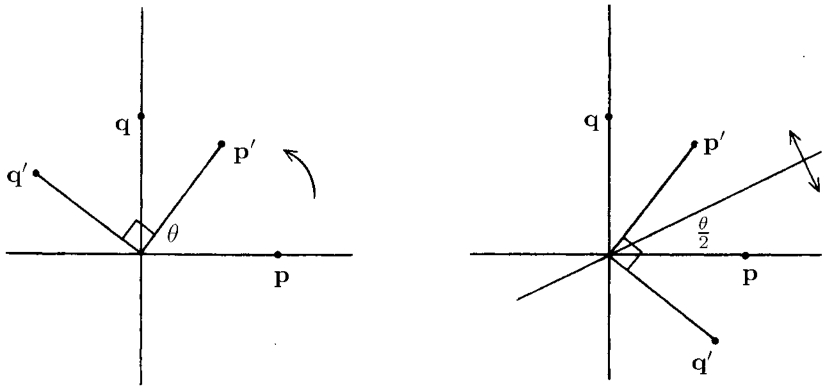


Σχήμα 24.1

Για τον ίδιο λόγο το σημείο $f(\mathbf{x})$ είναι καθορισμένο μέσω των αποστάσεών του από τα $\mathbf{0}$, $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$. Όμως

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|, \; \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \;\; \text{και} \;\; \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{q})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{q}\|.$$

Επομένως, ο τρόπος εφαρμογής τής ισομετρίας f επί *οιουδήποτε* σημείου τού επιπέδου είναι γνωστός άπαξ και γνωρίζουμε τις τιμές της $\mathbf{p}' = f(\mathbf{p})$ και $\mathbf{q}' = f(\mathbf{q})$. Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα, τα οποία περιγράφουμε στο σχ. 24.2.



Σχήμα 24.2

Επειδή

$$\|f(\mathbf{p})\| = \|\mathbf{p}\| = 1, \; \|f(\mathbf{q})\| = \|\mathbf{q}\| = 1 \text{ και } \|f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})\| = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \sqrt{2},$$

η γωνία $\sphericalangle(f(\mathbf{p}), \mathbf{0}, f(\mathbf{q}))$ είναι *ορθή*. Εάν λοιπόν μια στροφή κατά γωνία θ, με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού (ήτοι με αριστερόστροφη φορά), στέλνει το $\mathbf{p}$ να απεικονισθεί στο $f(\mathbf{p})$, τότε το $\mathbf{q}$ στρέφεται μεταβαίνοντας είτε στο $f(\mathbf{q})$ είτε στο $-f(\mathbf{q})$. Στην πρώτη περίπτωση η f είναι μια στροφή κατά γωνία θ με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού· στη δεύτερη περίπτωση η f είναι ένας κατοπτρισμός ως προς μία ευθεία, η οποία διέρχεται από το $\mathbf{0}$ και σχηματίζει μία γωνία ίση με $\frac{\theta}{2}$ με τον θετικό ημιάξονα των τετμημένων. Επειδή το g είναι η f ακολουθούμενη από τη μεταφορά τ, η απόδειξή μας τελειώνει εδώ. $\square$

Οι *μεταφορές* συγκροτούν μια υποομάδα T τής E_2. Αυτό είναι εύκολα επαληθεύσιμο βάσει τού θεωρήματος (5.4). Πράγματι· εάν οι $\tau_1, \tau_2 \in T$ ορίζονται από τους τύπους

$$\tau_1(\mathbf{x}) = \mathbf{u} + \mathbf{x}, \quad \tau_2(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + \mathbf{x},$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, τότε

$$\begin{aligned} \tau_1 \tau_2^{-1}(\mathbf{x}) &= \tau_1((-\mathbf{v}) + \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{u} + ((-\mathbf{v}) + \mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Επομένως η $\tau_1\tau_2^{-1}$ ανήκει στην T, αφού πρόκειται για τη μεταφορά κατά $\mathbf{u}-\mathbf{v}$. Ας συμβολίσουμε τώρα με το O την υποομάδα τής E_2 την αποτελούμενη από τους *ορθογώνιους μετασχηματισμούς*. Προφανώς, τα στοιχεία τής O είναι οι στροφές περί την αρχή των αξόνων και οι κατοπτρισμοί ως προς ευθείες διερχόμενες από την αρχή των αξόνων. Σύμφωνα με όσα προαναφέραμε,

$$E_2 = T\,O.$$

Η τομή των T και O περιέχει μόνον τον ταυτοτικό μετασχηματισμό, καθότι κάθε μη τετριμμένη μεταφορά κινεί την αρχή των αξόνων, ενώ αντιθέτως κάθε στοιχείο τής O διατηρεί την αρχή των αξόνων σταθερή.

(24.2) Πρόταση. *Κάθε στοιχείο g τής ομάδας E_2 γράφεται κατά μονοσήμαντο τρόπο ως σύνθεση $g = \tau f$ ενός ορθογωνίου μετασχηματισμού $f \in O$ και μιας μεταφοράς $\tau \in T$.*

Απόδειξη. Εάν $g = \tau f = \tau' f'$, όπου $\tau, \tau' \in T$ και $f, f' \in O$, τότε

$$(\tau')^{-1}\tau = f' f^{-1} \in T \cap O,$$

οπότε $\tau = \tau'$ και $f = f'$. □

Εάν γράψουμε μια ισομετρία τού επιπέδου g υπό τη μορφή $g = \tau f$, όπου $f \in O$ και $\tau \in T$, τότε η g ονομάζεται **ευθεία ισομετρία** όταν η f είναι μια στροφή περί την αρχή των αξόνων και **αντίθετη ισομετρία** όταν η f είναι ένας κατοπτρισμός (ως προς μία ευθεία διερχομένη από την αρχή των αξόνων).

(24.3) Πρόταση. (i) *Η T είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής E_2.*

(ii) *Υπάρχει ένας ισομορφισμός $T\,O = E_2 \cong T \times_{\varphi} O$ μεταξύ τής ομάδας των ισομετριών τού επιπέδου και τού ημιευθέος γινομένου των T και O, όπου ο ομομορφισμός $\varphi : O \longrightarrow \mathrm{Aut}(T)$ ορίζεται μέσω συζυγίας.*

Απόδειξη. (i) Έστω $\tau \in T$ με $\tau(\mathbf{0}) = \mathbf{v}$ και έστω $f \in O$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$ έχουμε

$$\begin{aligned} f\tau f^{-1}(\mathbf{x}) &= f\left(\mathbf{v} + f^{-1}(\mathbf{x})\right) \\ &= f(\mathbf{v}) + f\left(f^{-1}(\mathbf{x})\right) \quad \text{(διότι η } f \text{ είναι γραμμική)} \\ &= f(\mathbf{v}) + \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπειαν, η $f\tau f^{-1}$ (που είναι συζυγής τής τ) είναι μια μεταφορά κατά το διάνυσμα $f(\mathbf{v})$. Και επειδή τα στοιχεία των T και O παράγουν από κοινού την ομάδα E_2, βλέπουμε ότι η T είναι όντως ορθόθετη βάσει τού θεωρήματος (15.6).

(ii) Η δομή γινομένου, με την οποία είναι εφοδιασμένη η ομάδα E_2, αποσαφηνίζεται με τη βοήθεια τής αποσύνθεσης $E_2 = T\,O$. Εάν $g = \tau_1 f_1$ και $h = \tau_2 f_2$, όπου $\tau_1, \tau_2 \in T$ και $f_1, f_2 \in O$, τότε η

$$gh = \tau_1 f_1 \tau_2 f_2 = \left(\tau_1 f_1 \tau_2 f_1^{-1}\right)(f_1 f_2)$$

εκφράζει έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό ακολουθούμενο από μια μεταφορά. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση

$$E_2 \ni g \longmapsto (\tau, f) \in T \times_{\varphi} O$$

αποτελεί έναν ισομορφισμό ομάδων, όπου η $\varphi : O \longrightarrow \mathrm{Aut}(T)$ ορίζεται μέσω συζυγίας. $\square$

Για την ευχερέστερη εκτέλεση υπολογισμών σε γεωμετρικά προβλήματα απαιτείται η εισαγωγή ενός άλλου τρόπου συμβολισμού των ισομετριών τού επιπέδου. Έστω $g = \tau f$, όπου $\tau \in T$ και $f \in O$. Εάν $\mathbf{v} = \tau(\mathbf{0})$ και εάν ο M είναι ο ορθογώνιος 2×2 πίνακας, ο οποίος αναπαριστά την f ως προς τη συνήθη βάση τού διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$, τότε

$$g(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + f_M(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + \mathbf{x}M^t \qquad (\bowtie)$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. *Και αντιστρόφως·* εάν μας δοθούν ένα διάνυσμα $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ και ένας πίνακας $M \in O_2$, τότε ο τύπος ($\bowtie$) προσδιορίζει μια ισομετρία τού επιπέδου. Ως εκ τούτου, μπορούμε να εκλαμβάνουμε κάθε ισομετρία τού επιπέδου ως ένα *διατεταγμένο ζεύγος* $(\mathbf{v}, M)$, όπου $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ και $M \in O_2$. Υπό αυτήν την ταύτιση, ο «πολλαπλασιασμός» δύο τυχουσών ισομετριών τού επιπέδου $(\mathbf{v}_1, M_1)$ και $(\mathbf{v}_2, M_2)$ γράφεται ως ακολούθως:

$$(\mathbf{v}_1, M_1)(\mathbf{v}_2, M_2) = (\mathbf{v}_1 + f_{M_1}(\mathbf{v}_2),\ M_1 M_2).$$

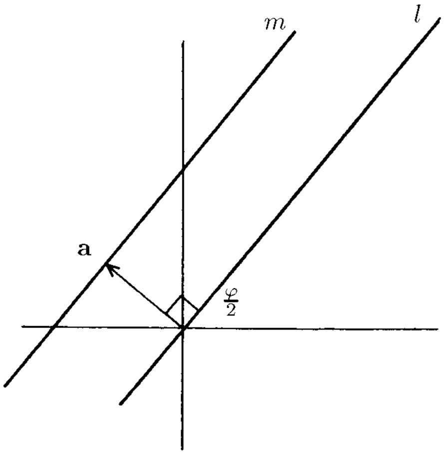
Εάν αναγκαζόμασταν να γίνουμε ιδιαίτερα ακριβείς, θα εξηγούσαμε ότι, εν προκειμένω, ταυτίζουμε την ομάδα E_2 των ισομετριών τού επιπέδου με το ημιευθύ γινόμενο $\mathbb{R}^2 \times_{\psi} O_2$, όπου ο ομομορφισμός $\psi : O_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ δεν είναι τίποτε άλλο από τη συνήθη δράση τής ορθογώνιας ομάδας O_2 επί τής προσθετικής ομάδας $\mathbb{R}^2$. Σημειωτέον ότι η

$$(\mathbf{v}, M) \text{ είναι μια } \begin{cases} \text{ευθεία ισομετρία} & \Longleftrightarrow \quad \det(M) = 1, \\[1em] \text{αντίθετη ισομετρία} & \Longleftrightarrow \quad \det(M) = -1. \end{cases}$$

Οι «απλούστερες» των ισομετριών είναι εύκολα περιγράψιμες υπό την ως άνω μορφή των διατεταγμένων ζευγών. Έστω ότι

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$$

και ότι οι l και m είναι οι ευθείες που δείχνονται στο σχήμα 24.3.



Σχήμα 24.3

Τότε,

(a) η *μεταφορά* κατά ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$ μπορεί να θεωρηθεί ως το διατεταγμένο ζεύγος $(\mathbf{v}, I)$, όπου το I συμβολίζει τον μοναδιαίο 2×2 πίνακα,

(b) η *στροφή* κατά μία γωνία θ, με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού, (περί την αρχή των αξόνων) είναι η ισομετρία $(\mathbf{0}, A)$,

(c) ο *κατοπτρισμός* ως προς την ευθεία l είναι η ισομετρία $(\mathbf{0}, B)$,

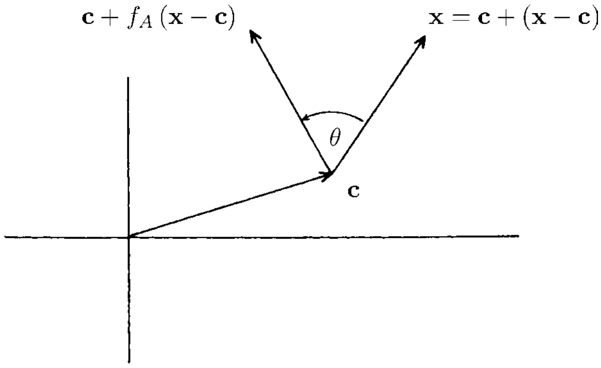
(d) η *στροφή* κατά μία γωνία θ, με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού, *περί ενός σημείου* $\mathbf{c}$, είναι η ισομετρία $(\mathbf{c} - f_A(\mathbf{c}), A)$,

(e) ο *κατοπτρισμός* ως προς την ευθεία m είναι η ισομετρία $(2\mathbf{a}, B)$. Σημειωτέον ότι $f_B(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}$.

Για τις (d) και (e) επιβάλλονται κάποιες περαιτέρω επεξηγήσεις. Η στροφή κατά μία γωνία θ περί το $\mathbf{c}$ στέλνει το διάνυσμα $\mathbf{x}$ να απεικονισθεί στο $\mathbf{c} - f_A(\mathbf{x} - \mathbf{c})$, όπως δείχνουμε στο σχήμα 24.4, και

$$\mathbf{c} - f_A(\mathbf{x} - \mathbf{c}) = \mathbf{c} + f_A(\mathbf{x}) - f_A(\mathbf{c}) = (\mathbf{c} - f_A(\mathbf{c})) + f_A(\mathbf{x}),$$

όπως ακριβώς απαιτείται.



Σχήμα 24.4

Από την άλλη μεριά, για την υλοποίηση τού κατοπτρισμού ως προς την ευθεία m μπορούμε να εκτελέσουμε κατ' αρχάς τη μεταφορά κατά $-\mathbf{a}$, ούτως ώστε η l να απεικονισθεί επί τής m, εν συνεχεία να εκτελέσουμε τον κατοπτρισμό ως προς την ευθεία l, και τελικώς να μεταφέρουμε την l και πάλι πίσω στην m. Κατ' αυτόν τον τρόπο, το $\mathbf{x}$ πηγαίνει πρώτα στο $\mathbf{x} - \mathbf{a}$, εν συνεχεία στο $f_B(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ και, τέλος, στο

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + f_B(\mathbf{x} - \mathbf{a}) &= \mathbf{a} + f_B(\mathbf{x}) - f_B(\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a} + f_B(\mathbf{x}) + \mathbf{a} \\ &= 2\mathbf{a} + f_B(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Κάθε ισομετρία τού επιπέδου, η οποία είναι ένας *κατοπτρισμός* ως προς μια ευθεία *ακολουθούμενος* από μια *μεταφορά* κατά ένα διάνυσμα, ο φορέας τού οποίου είναι *παράλληλος* προς τη θεωρούμενη ευθεία, καλείται **ολισθαίνων κατοπτρισμός**. Εάν λάβουμε ως ευθεία αναφοράς μας την m, τότε κάθε ολισθαίνων κατοπτρισμός κατά μήκος τής m είναι τής μορφής $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}, B)$, όπου $f_B(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ και $\mathbf{b} \neq 0$.

(24.4) Θεώρημα. *Κάθε ευθεία ισομετρία είναι ή μια μεταφορά ή μια περιστροφή. Κάθε αντίθετη ισομετρία είναι ή ένας κατοπτρισμός ή ένας ολισθαίνων κατοπτρισμός.*

Απόδειξη. Κάθε ευθεία ισομετρία αναπαριστάται μέσω ενός διατεταγμένου ζεύγους $(\mathbf{v}, A)$, όπου $0 \leq \theta < 2\pi$. Όταν $\theta = 0$, τότε παίρνουμε τη *μεταφορά* $(\mathbf{v}, I)$.

Ειδάλλως, η ορίζουσα

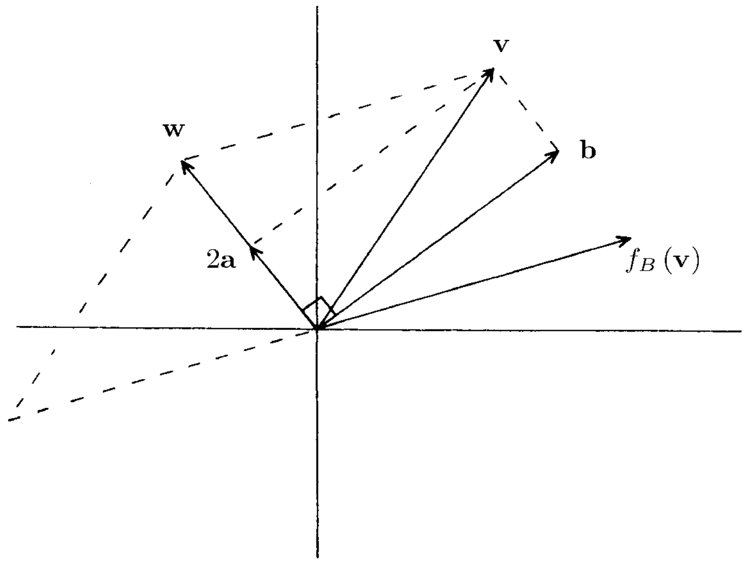
$$\det(I-A)=\det\begin{bmatrix}1-\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & 1-\cos\theta\end{bmatrix}=2-2\cos\theta$$

είναι θετική, πράγμα που σημαίνει ότι ο πίνακας $I-A$ είναι αντιστρέψιμος και ότι η εξίσωση $\mathbf{c}-f_A(\mathbf{c})=f_{I-A}(\mathbf{c})=\mathbf{v}$ έχει μία μονοσήμαντη λύση ως προς $\mathbf{c}$. Ως εκ τούτου, σε αυτήν την περίπτωση η δοθείσα ισομετρία είναι η *στροφή* $(\mathbf{c}-f_A(\mathbf{c}),A)$ περί το σημείο $\mathbf{c}$.

Κάθε αντίθετη ισομετρία αναπαριστάται μέσω ενός διατεταγμένου ζεύγους $(\mathbf{v},B)$, όπου $0\le\varphi<2\pi$. Εάν $f_B(\mathbf{v})=-\mathbf{v}$, τότε παίρνουμε τον *κατοπτρισμό* ως προς την ευθεία m για την οποία $\mathbf{a}=\frac{\mathbf{v}}{2}$. Εάν $f_B(\mathbf{v})\neq-\mathbf{v}$, τότε, θέτοντας $\mathbf{w}=\mathbf{v}-f_B(\mathbf{v})$, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}f_B(\mathbf{w}) &= f_B(\mathbf{v}-f_B(\mathbf{v}))\\ &= f_B(\mathbf{v})-f_B^2(\mathbf{v})\\ &= f_B(\mathbf{v})-\mathbf{v}=-\mathbf{w}.\end{aligned}$$

Εν συνεχεία, αλλάζουμε το σύστημα συντεταγμένων μας μεταβαίνοντας σε ένα άλλο, το οποίο έχει ως άξονές του τον φορέα τού $\mathbf{w}$ και την προς αυτόν κάθετη ευθεία στο σημείο $\mathbf{0}$. Εάν υπολογίσουμε τις δύο συνιστώσες τού $\mathbf{v}$ ως προς αυτό το νέο σύστημα συντεταγμένων, τότε παίρνουμε το διάνυσμα $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}/\left\|\mathbf{w}\right\|^2)\mathbf{w}$, από τη μία μεριά, και το διάνυσμα $\mathbf{b}$, από την άλλη, όπως δείχνουμε στο σχήμα 24.5.



Σχήμα 24.5

Κατά συνέπειαν, η ισομετρία μας είναι ο *ολισθαίνων κατοπτρισμός* $(2\mathbf{a}+\mathbf{b}, B)$, όπου

$$2\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\right)\mathbf{w}$$

και $\mathbf{b} = \mathbf{v} - 2\mathbf{a}$. □

(24.5) Παράδειγμα. Η συνάρτηση $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ η οριζόμενη μέσω τού τύπου

$$g(x,y) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y), 1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\right)$$

είναι μια ισομετρία, η οποία αντιστοιχεί στο διατεταγμένο ζεύγος $(\mathbf{v}, M)$, όπου $\mathbf{v} = (1, 1-\sqrt{2})$ και

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Επειδή $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, η g είναι μια στροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{4}$ με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού (αριστερόστροφη φορά). Το κέντρο της $\mathbf{c}$ δίνεται από την ισότητα

$$\mathbf{c} - f_M(\mathbf{c}) = \mathbf{c} - \mathbf{c}M^t = \mathbf{v},$$

καθότι έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{v}(I - M^t)^{-1} \\ &= (1, 1-\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= (1,1). \end{aligned}$$

Εν κατακλείδι, η g είναι μια στροφή κατά γωνία $\frac{\pi}{4}$ περί το σημείο $(1,1)$ με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού.

(24.6) Παράδειγμα. Εάν η $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ορίζεται μέσω τού τύπου

$$h(x,y) = \left(-\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}y\right), 4 + \frac{1}{2}\left(y - \sqrt{3}x\right)\right),$$

τότε η h είναι η ισομετρία $(\mathbf{v}, M)$, όπου $\mathbf{v} = (0,4)$ και

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας M αναπαριστά έναν κατοπτρισμό και

$$f_M(\mathbf{v}) = \mathbf{v}M^t = (-2\sqrt{3}, 2).$$

Επειδή $f_M(\mathbf{v}) \neq \mathbf{v}$, η ως άνω δοθείσα ισομετρία αποτελεί έναν ολισθαίνοντα κατοπτρισμό. Δυνάμει των προηγουμένως εισαχθέντων συμβολισμών παίρνουμε

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - f_M(\mathbf{v}) = (2\sqrt{3}, 2),$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 8, \quad \|\mathbf{w}\|^2 = 16,$$

$$2\mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\right)\mathbf{w} = (\sqrt{3}, 1),$$

και

$$\mathbf{b} = \mathbf{v} - 2\mathbf{a} = (-\sqrt{3}, 3).$$

Η ευθεία τής ολίσθησής μας διέρχεται από το $\mathbf{a}$ και είναι παράλληλη προς το $\mathbf{b}$, οπότε περιγράφεται από την εξίσωση

$$y - \frac{1}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Longrightarrow \sqrt{3}x + y = 2.$$

Ως εκ τούτου, η εφαρμογή τής ισομετρίας h ισοδυναμεί με την εκτέλεση τού κατοπτρισμού ως προς την εν λόγω ευθεία ακολουθούμενη από τη μεταφορά κατά $\mathbf{b} = (-\sqrt{3}, 3)$.

Ασκήσεις

24.1 Γράψτε καθεμιά από τις ακόλουθες στροφές ως ένα διατεταγμένο ζεύγος $(\mathbf{v}, M)$, όπου $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ και $M \in O_2$.

(a) Τη στροφή κατά $\frac{\pi}{6}$ περί το σημείο $(-1, -1)$ με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού.

(b) Τη στροφή κατά $\frac{\pi}{3}$ περί το σημείο $(1, 2)$ με φορά σύμφωνη με εκείνη των δεικτών τού ρολογιού.

24.2 Εκφράστε τον κατοπτρισμό ως προς την ευθεία $x + y + 3 = 0$, καθώς και τον κατοπτρισμό ως προς την ευθεία $\sqrt{3}y - x = 4$, υπό τη μορφή διατεταγμένων ζευγών.

24.3 Μια στροφή κατά π καλείται συνήθως **ημιστροφή**. Αποδείξτε ότι το γινόμενο δύο ημιστροφών είναι πάντοτε μια μεταφορά.

24.4 Δείξτε πως κάθε ισομετρία μπορεί να εκφρασθεί ως γινόμενο δύο ή τριών κατοπτρισμών.

24.5 Αποδείξτε ότι κάθε αντίθετη ισομετρία μπορεί να αποσυντεθεί εκφραζόμενη ως ένας κατοπτρισμός ακολουθούμενος από μία ημιστροφή.

24.6 Εάν η h είναι ένας ολισθαίνων κατοπτρισμός με άξονά του τον m και η g μια ισομετρία, δείξτε ότι το γινόμενο ghg^{-1} αποτελεί μια ολίσθηση κατά μήκος τής ευθείας $g(m)$.

24.7 Δείξτε ότι ο κατοπτρισμός ως προς μια ευθεία m, ακολουθούμενος από τον κατοπτρισμό ως προς μια ευθεία m', αποτελεί μια μεταφορά στην περίπτωση κατά την οποία οι m και m' είναι παράλληλες· ειδάλλως, αποτελεί μια στροφή.

24.8 Αποδείξτε ότι η

$$f(x,y) = \left(3 - \sqrt{3} - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, -3 - \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$$

αποτελεί μια στροφή.

24.9 Δείξτε ότι η

$$g(x,y) = \left(\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 14, \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 3\right)$$

αναπαριστά έναν ολισθαίνοντα κατοπτρισμό. Προσδιορίστε τόν άξονα τής ολίσθησης και το ποσόν τής μεταφοράς των σημείων κατά μήκος αυτού τού άξονα.

24.10 Αποδείξτε ότι η

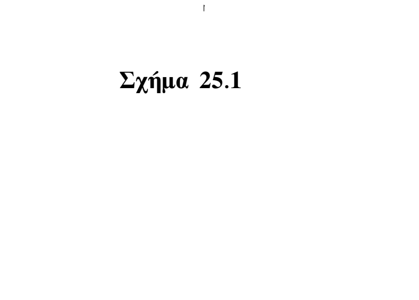
$$h(x,y) = \left(6 - \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y, 4 - \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y\right)$$

είναι ένας κατοπτρισμός. Κατόπιν, προσδιορίστε τόν καθρέπτη μέσω τού οποίου υλοποιείται αυτός ο κατοπτρισμός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 25

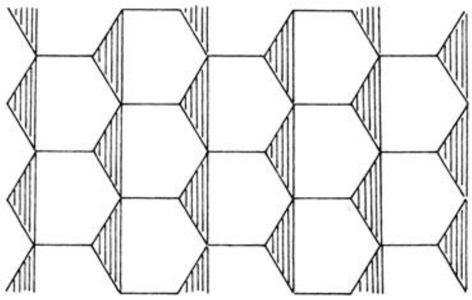
Κιγκλιδώματα και σημειακές ομάδες

Το σχήμα 25.1 δείχνει ένα επαναλαμβανόμενο διαμόρφωμα εξαγώνων, το οποίο, επ' άπειρον εκτεινόμενο (προς όλες τις κατευθύνσεις), *καλύπτει ολόκληρο το επίπεδο*. Αυτό το γεωμετρικό διαμόρφωμα διαθέτει αρκετή συμμετρία. Εάν, για παράδειγμα, εκτελέσουμε τις μεταφορές τ_1, τ_2 ή τον κατοπτρισμό ως προς τον άξονα των τετμημένων, ή ακόμη και τη στροφή κατά $\frac{\pi}{3}$ περί την αρχή των αξόνων (με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού), τότε τα προκείμενα εξάγωνα απεικονίζονται και πάλι σε εξάγωνα, πράγμα το οποίο έχει ως αποτέλεσμα τη διατήρηση τού γεωμετρικού διαμορφώματος.

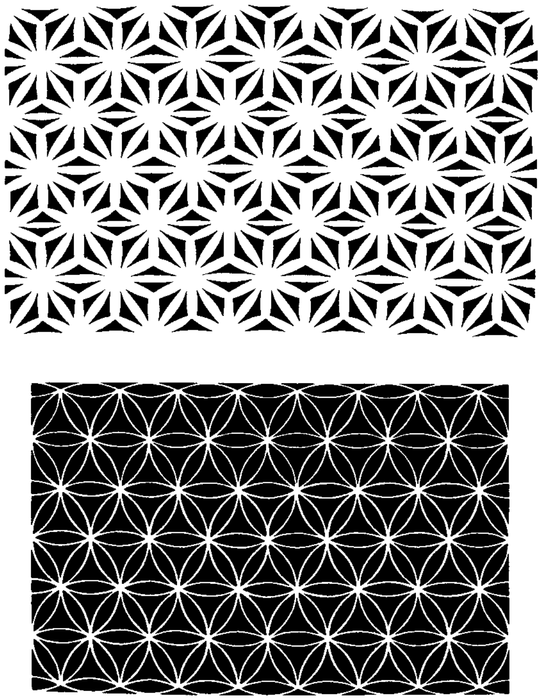


Σχήμα 25.1

Γραμμοσκιάζοντας εν μέρει κάθε εξάγωνο όπως στο σχήμα 25.2, κατασκευάζουμε ένα άλλο σχέδιο, το οποίο είναι «ολιγότερο συμμετρικό», καθότι η περιστροφική συμμετρία καταστρέφεται.



Σχήμα 25.2



Σχήμα 25.3

Ως συνήθως, η συμμετρία είναι μετρήσιμη μέσω μιας ομάδας· εν προκειμένω, η προσήκουσα ομάδα είναι εκείνη η υποομάδα τής ομάδας E_2 των ισομετριών τού επιπέδου, τα στοιχεία τής οποίας στέλνουν ένα δεδομένο γεωμετρικό διαμόρφωμα να απεικονισθεί στον εαυτό του. Πρόκειται να ταξινομήσουμε τις κατ' αυτόν τον τρόπο σχηματιζόμενες ομάδες συμμετριών δισδιαστάτων γεωμετρικών διαμορφωμάτων, ονομάζοντάς τες **ομάδες διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου**. Εάν βρίσκετε τα ως άνω αμιγή εξάγωνα κάπως πληκτικά για τη δημιουργία ενός διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου, τότε θα μπορούσατε να δοκιμάσετε τα σχέδια που δείχνουμε στο σχ. 25.3. Σημειωτέον ότι *και* τα δύο παρουσιάζουν ακριβώς την ίδια συμμετρία με εκείνην τού γεωμετρικού διαμορφώματος των (μη γραμμοσκιασμένων) εξαγώνων.

Εν συνεχεία, θα χρησιμοποιήσουμε όλες τις έννοιες και τους συμβολισμούς που εισήχθησαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ιδιαιτέρως, θα συμβολίσουμε κάθε ισομετρία τού επιπέδου μέσω ενός διατεταγμένου ζεύγους $(\mathbf{v}, M)$, όπου $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ και $M \in O_2$. Υπενθυμίζουμε ότι, εάν $g = (\mathbf{v}, M)$, τότε

$$g\left(\mathbf{v}\right) = \mathbf{v} + f_M\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{v} + \mathbf{x}M^t$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Τώρα ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\pi : E_2 \longrightarrow O_2, \quad (\mathbf{v}, M) \longmapsto M.$$

Πρόκειται για έναν ομομορφισμό ομάδων, διότι

$$\begin{aligned} \pi\left((\mathbf{v}_1, M_1)(\mathbf{v}_2, M_2)\right) &= \pi\left(\mathbf{v}_1 + f_{M_1}\left(\mathbf{v}_2\right), M_1M_2\right) \\ &= M_1M_2 \\ &= \pi\left(\mathbf{v}_1, M_1\right)\pi\left(\mathbf{v}_2, M_2\right), \end{aligned}$$

ενώ ο πυρήνας της αποτελείται από τις ισομετρίες $(\mathbf{v}, I), \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, ήτοι από τις μεταφορές. Εάν η G είναι μια υποομάδα τής E_2, τότε ορίζουμε τις υποομάδες

$$H = G \cap T, \qquad J = \pi\left(G\right).$$

Η H είναι **η υποομάδα των μεταφορών τής** G και η J **η σημειακή ομάδα τής** G. Η υποομάδα H των μεταφορών τής ομάδας συμμετριών τού γεωμετρικού διαμορφώματος των (μη γραμμοσκιασμένων) εξαγώνων (βλ. σχ. 25.1) παράγεται από τις μεταφορές τ_1, τ_2, ενώ η σημειακή ομάδα J είναι ένα αντίτυπο τής D_6 εντός τής O_2, η οποία προσδιορίζεται μέσω των δύο γεννητόρων

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Μετά την εκτέλεση τής γραμμοσκίασης, η μεν υποομάδα μεταφορών H παραμένει αμετάβλητη, η δε $J < O_2$ «μικραίνει» όντας κυκλική τάξης 2, παραγόμενη μόνον από τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Ο περιορισμός

$$\pi\,|_G : G \longrightarrow J$$

τής π επί τής εκάστοτε θεωρουμένης G είναι ένας επιρριπτικός ομομορφισμός (ήτοι ένας «επιμορφισμός»), οπότε

$$\boxed{J \cong G/H}$$

βάσει τού πρώτου θεωρήματος ισομορφισμών. Στο σημείο αυτό παραθέτουμε μια επακριβή περιγραφή των ομάδων που πρόκειται να ταξινομήσουμε.

*Μια υποομάδα τής E_2 ονομάζεται **ομάδα διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου** όταν η υποομάδα των μεταφορών της παράγεται από δύο γραμμικώς ανεξάρτητες μεταφορές*[1] *και -ταυτοχρόνως- η σημειακή της ομάδα είναι πεπερασμένη.*

Η ταξινόμησή τους (ως προς ισομορφισμό) θα γίνει στο κεφάλαιο 26. Επί τού παρόντος θα περιορισθούμε στην παροχή επιπρόσθετου πληροφοριακού υλικού σχετιζομένου με την υποομάδα μεταφορών και τη σημειακή ομάδα μιας ομάδας διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου.

Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε ως G μια ομάδα διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου, ως H την ομάδα μεταφορών της και ως J τη σημειακή της ομάδα. Έστω L η τροχιά τής αρχής των αξόνων ως προς τη δράση τής H επί τού $\mathbb{R}^2$. Το σύνολο L περιέχει προφανώς δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, διότι η H παράγεται από δύο γραμμικώς ανεξάρτητες μεταφορές. Επιλέγουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{a} \in L$ ελαχίστου μήκους· εν συνεχεία, επιλέγουμε ένα δεύτερο διάνυσμα $\mathbf{b}$ από το L, το οποίο κείται πλαγιογωνίως σχετικώς προς το $\mathbf{a}$ και έχει όσο το δυνατόν μικρότερο μήκος.

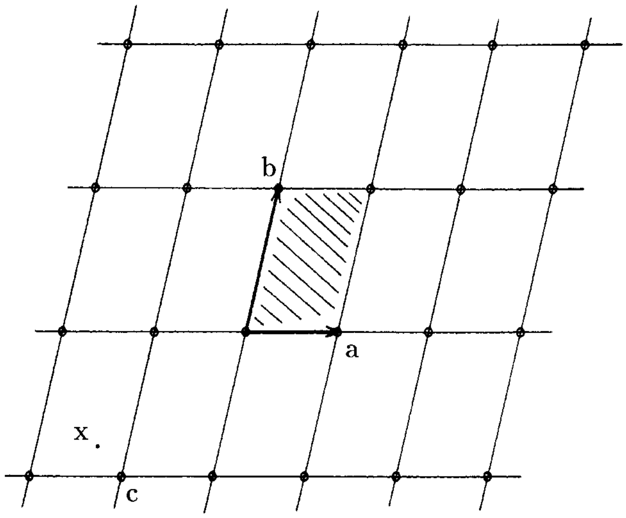
(25.1) Θεώρημα. *Το σύνολο L είναι ένα **κιγκλίδωμα** παραγόμενο από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Αυτό σημαίνει ότι το ως άνω L αποτελείται από όλους τούς γραμμικούς συνδυασμούς $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, όπου $m, n \in \mathbb{Z}$.*

[1](Σ.τ.Μ.): Δύο μεταφορές $g_1 = (\mathbf{v}_1, I)$ και $g_2 = (\mathbf{v}_2, I)$ είναι **γραμμικώς ανεξάρτητες** όταν τουλάχιστον ένα εκ των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι $\neq 0$ και *δεν υπάρχει κανένας* πραγματικός αριθμός $\lambda \neq 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση

$$T \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (\mathbf{v}, I) \longmapsto \mathbf{v},$$

είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ τής ομάδας των μεταφορών και τής προσθετικής ομάδας $\mathbb{R}^2$, ο οποίος στέλνει την H να απεικονισθεί στο L. Κατά συνέπειαν, το σύνολο L αποτελεί μια *υποομάδα* τής $\mathbb{R}^2$ και κάθε σημείο τού κιγκλιδώματος $\{m\mathbf{a} + n\mathbf{b} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ ανήκει στο L. Χρησιμοποιώντας τα σημεία αυτού τού κιγκλιδώματος μπορούμε να υποδιαιρέσουμε (ολόκληρο) το επίπεδο σε παραλληλόγραμμα, πρβλ. σχ. 25.4. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα $\mathbf{x} \in L$, το οποίο δεν ανήκει στο εν λόγω κιγκλίδωμα. Επιλέγουμε ένα παραλληλόγραμμο, το οποίο περιέχει το $\mathbf{x}$, καθώς και μια κορυφή $\mathbf{c}$ αυτού τού παραλληλογράμμου, ούτως ώστε η απόσταση $\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|$ να είναι μικρότερη ή ίση τής απόστασης τού $\mathbf{x}$ από οιοδήποτε άλλο σημείο τού κιγκλιδώματος.



Σχήμα 25.4

Τότε

$$\mathbf{x} - \mathbf{c} \notin \{\mathbf{0}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\} \quad \text{και} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < \|\mathbf{b}\|.$$

Εξάλλου, επειδή $\mathbf{x} \in L$ και $\mathbf{c} \in L$, έχουμε $\mathbf{x} - \mathbf{c} \in L$. Προφανώς, δεν μπορεί να ισχύει η ανισότητα

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < \|\mathbf{a}\|,$$

διότι υποθέσαμε ότι το $\mathbf{a}$ διαθέτει το *ελάχιστο* δυνατό μήκος εντός τού L. Από την άλλη μεριά, εάν είχαμε

$$\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < \|\mathbf{b}\|,$$

τότε το $\mathbf{x} - \mathbf{c}$ θα ήταν τοποθετημένο πλαγιογωνίως σχετικώς προς το $\mathbf{a}$, πράγμα που θα αντέφασκε προς την επιλογή τού $\mathbf{b}$. Άρα τελικώς δεν υπάρχει τέτοιο $\mathbf{x}$ και $L = \{\, m\mathbf{a} + n\mathbf{b} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. □

Θα ταξινομήσουμε αυτά τα κιγκλιδώματα L διαχωρίζοντάς τα σε *πέντε τύπους* αναλόγως προς τη μορφή τού βασικού τους παραλληλογράμμου, το οποίο προσδιορίζεται μέσω των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Στηριζόμενοι στις ιδιότητες τού κιγκλιδώματος και τής σημειακής ομάδας τής G, σκοπεύουμε να αντλήσουμε χρήσιμες πληροφορίες για την ίδια την ομάδα G. Αντικαθιστώντας, εν ανάγκη, το $\mathbf{b}$ με το $-\mathbf{b}$, μπορούμε δίχως βλάβη τής γενικότητας να υποθέτουμε ότι

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| .$$

Υπ' αυτήν την υπόθεση οι διαφορετικοί τύποι των κιγκλιδωμάτων ορίζονται ως ακολούθως:

(a) **Λοξό** (ή **πλαγιογώνιο**) **κιγκλίδωμα**:

$$\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$$

(b) **Ορθογώνιο κιγκλίδωμα**:

$$\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$$

(c) **Κεντραρισμένο ορθογώνιο κιγκλίδωμα**:

$$\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$$

(d) **Τετραγωνικό κιγκλίδωμα**:

$$\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$$

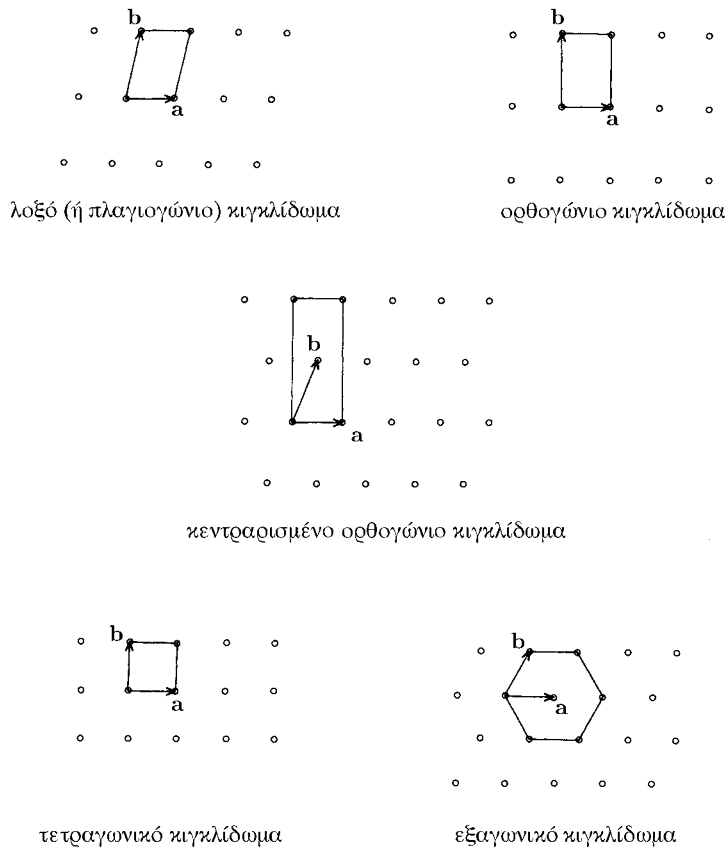
(e) **Εξαγωνικό κιγκλίδωμα**:

$$\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$$

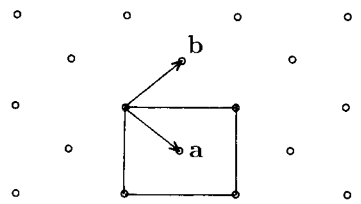
Ρίχνοντας μια ματιά στο σχήμα 25.5 βλέπετε το γιατί επιλέξαμε αυτές τις ονομασίες. Εκ πρώτης όψεως, φαίνεται να έχουμε ξεχάσει τη δυνατότητα

$$\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| .$$

Εδώ το βασικό παραλληλόγραμμο είναι ένας ρόμβος. Ως γνωστόν, οι διαγώνιοι ενός ρόμβου διχοτομούνται (η μία από την άλλη) και μάλιστα υπό ορθή γωνία. Έτσι, στην περίπτωση αυτήν, το κιγκλίδωμά μας είναι εφοδιασμένο με την κεντραρισμένη ορθογώνια δομή (c), ενώ τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδά του βασίζονται στα διανύσματα $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ και $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (βλ. σχ. 25.6).



Σχήμα 25.5



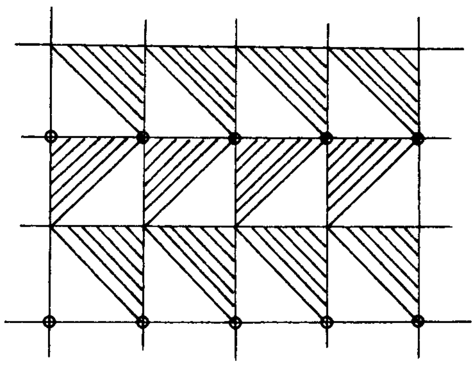
Σχήμα 25.6

(Οι ομάδες διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου εμφανίζονται στη βιβλιογραφία με διαφορετικές ονομασίες· η πλέον διαδεδομένη από αυτές είναι η ονομασία: **επίπεδες κρυσταλλογραφικές ομάδες**. Εάν φαντασθούμε τη γενίκευση των όσων προαναφέραμε *στις τρεις διαστάσεις*, τότε το αντίστοιχο κιγκλίδωμα παράγεται από τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα δίνοντάς μας σημειακούς σχηματισμούς, οι οποίοι περιγράφουν πρότυπα για την εσωτερική ατομική δομή των *κρυστάλλων*).

Η σημειακή ομάδα J είναι εξ ορισμού μια υποομάδα τής O_2. Ωστόσο, ενδέχεται *να μην υπάρχει κανένα αντίτυπο τής J εντός τής θεωρουμένης G*. Ας εξετάσουμε, π.χ., την ομάδα διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου G που παράγεται από τη μεταφορά $\tau(x, y) = (x+1, y)$ και τον ολισθαίνοντα κατοπτρισμό $h(x, y) = (-x, y+1)$. Η ευθεία, ως προς την οποία εκτελείται ο ολισθαίνων κατοπτρισμός h, είναι ο άξονας των τεταγμένων (ήτοι ο άξονας των y) και είναι παράλληλη προς την ευθεία, η οποία αποτελεί τον φορέα τού διανύσματος $(1, 0)$ τής μεταφοράς τ. Η G αποτελεί την ομάδα συμμετριών ενός καταλλήλου γεωμετρικού διαμορφώματος, τμήμα τού οποίου δείχνεται στο σχήμα 25.7. Εν προκειμένω, η σημειακή ομάδα είναι η υποομάδα

$$J = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

τής O_2. Εντούτοις, η ομάδα G αποτελείται εξ ολοκλήρου από μεταφορές και ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς που έχουν άπειρη τάξη. Κατά συνέπειαν, η G δεν περιέχει κανένα αντίτυπο τής J. Διπλή εκτέλεση τού ολισθαίνοντος κατοπτρισμού h μάς δίνει τη μεταφορά $(x, y) \longmapsto (x, y+2)$ και το αντίστοιχο κιγκλίδωμα παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1, 0)$ και $\mathbf{b} = (0, 2)$. Σημειωτέον ότι το κιγκλίδωμα *δεν* απεικονίζεται στον εαυτό του *από όλα* τα στοιχεία τής G. Μολαταύτα, η σημειακή ομάδα J διατηρεί το κιγκλίδωμα.



Σχήμα 25.7

(25.2) Θεώρημα. *Έστω ότι η G είναι μια ομάδα διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου, με την H ως ομάδα μεταφορών της και την J ως σημειακή της ομάδα, και ότι το L είναι το αντίστοιχο κιγκλίδωμα* (όπως στο (25.1)). *Τότε η J δρα επί τού κιγκλιδώματος L.*

Απόδειξη. Η σημειακή ομάδα, όντας μια υποομάδα τής O_2, δρα επί τού επιπέδου κατά τον συνήθη τρόπο. Εάν $M \in J$ και $\mathbf{x} \in L$, πρέπει να δείξουμε ότι το $f_M(\mathbf{x})$ ανήκει στο L. Ας υποθέσουμε ότι $\pi(g) = M$, όπου $g = (\mathbf{v}, M)$, και ότι με το τ συμβολίζουμε τη μεταφορά $(\mathbf{x}, I)$. Επειδή η H είναι ο πυρήνας τού ομομορφισμού $\pi|_G : G \longrightarrow J$, η H είναι ορθόθετη υποομάδα τής G, οπότε $g\tau g^{-1} \in H$. Όμως

$$\begin{aligned} g\tau g^{-1} = \ & (\mathbf{v}, M)(\mathbf{x}, I)\left(-f_M^{-1}(\mathbf{v}), M^{-1}\right) \\ &= (\mathbf{v}, M)(\mathbf{x} - f_M^{-1}(\mathbf{v}), M^{-1}) \\ &= \left(\mathbf{v} + f_M\left(\mathbf{x} - f_M^{-1}(\mathbf{v})\right), MM^{-1}\right) \\ &= (\mathbf{v} + f_M(\mathbf{x}) - \mathbf{v}, I) \\ &= (f_M(\mathbf{x}), I). \end{aligned}$$

Εξ αυτού έπεται ότι όντως το $f_M(\mathbf{x})$ ανήκει στο κιγκλίδωμα L. $\square$

Υπενθυμίζουμε (από το (19.1)) ότι οι πεπερασμένες υποομάδες τής O_2 είναι είτε κυκλικές είτε διεδρικές. Το επόμενο θεώρημα, ενίοτε αναφερόμενο στη βιβλιογραφία και ως «κρυσταλλογραφική περιοριστική συνθήκη», περιγράφει το ποιες εξ αυτών των υποομάδων θα μπορούσαν ενδεχομένως να προκύψουν ως σημειακές ομάδες μιας ομάδας διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου.

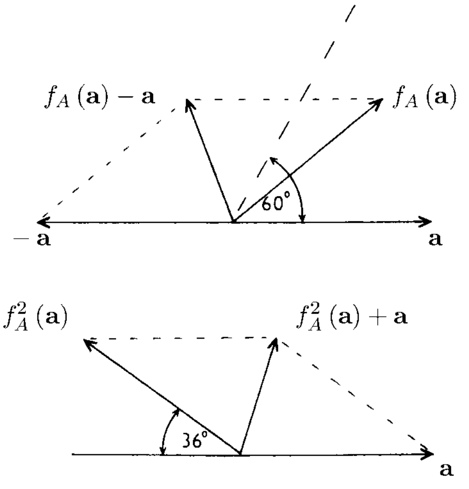
(25.3) Θεώρημα. *Η τάξη καθεμιάς των περιστροφών μιας ομάδας διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου οφείλει να ανήκει στο σύνολο* $\{2, 3, 4, 6\}$.

Απόδειξη. Κάθε περιστροφή μιας ομάδας διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου G έχει πεπερασμένη τάξη, καθότι η σημειακή ομάδα J είναι πεπερασμένη. Για οιαδήποτε περιστροφή τάξης q υπάρχει μια καταλλήλως επιλεγμένη δύναμή της, τέτοια ώστε να προκύπτει μια στροφή κατά $\frac{2\pi}{q}$ με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού. Συνεπώς ο αντίστοιχος πίνακας περιστροφής

$$A = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{q}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{q}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \end{bmatrix}$$

ανήκει στην J. Όπως και προηγουμένως, χρησιμοποιούμε το $\mathbf{a}$ για να συμβολίσουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα ελαχίστου μήκους εντός τού κιγκλιδώματος L

τής G. Επειδή η J δρα επί τού L, το $f_A\,(\mathbf{a})$ ανήκει στο L. Ας υποθέσουμε ότι $q > 6$. Τότε $\frac{2\pi}{q} < 60°$ και το $f_A\,(\mathbf{a}) - \mathbf{a}$ είναι ένα διάνυσμα τού L, το μήκος τού οποίου είναι μικρότερο τού μήκους τού $\mathbf{a}$ (βλ. σχ. 25.8), αντιφάσκοντας προς την επιλογή τού $\mathbf{a}$.



Σχήμα 25.8

Εάν $q = 5$, τότε η γωνία μεταξύ των $f_A^2\,(\mathbf{a})$ και $-\mathbf{a}$ είναι $36°$. Σε αυτήν την περίπτωση το $f_A^2\,(\mathbf{a}) + \mathbf{a}$ ανήκει στο L και το μήκος του είναι μικρότερο τού μήκους τού $\mathbf{a}$, αντιφάσκοντας και πάλι προς την επιλογή τού $\mathbf{a}$. □

(25.4) Πόρισμα. *Η σημειακή ομάδα μιας τυχούσας ομάδας διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου παράγεται από μία στροφή κατά μία γωνία ανήκουσα στο σύνολο* $\{0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\}$, *και ενίοτε και από έναν κατοπτρισμό.*

Απόδειξη. Είναι άμεση βάσει τού (25.3). □

(25.5) Θεώρημα. *Κάθε ισομορφισμός μεταξύ ομάδων διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου στέλνει μεταφορές να απεικονισθούν σε μεταφορές, περιστροφές σε περιστροφές, κατοπτρισμούς σε κατοπτρισμούς και ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς σε ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς.*

Απόδειξη. Έστω $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ ένας ισομορφισμός μεταξύ δυο ομάδων διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου και έστω τ_1 μια μεταφορά τής G_1. Οι μεταφορές και οι ολισθαίνοντες κατοπτρισμοί έχουν άπειρη τάξη, ενώ αντιθέτως οι περιστροφές και οι κατοπτρισμοί έχουν πεπερασμένη τάξη. Κατά συνέπειαν, η $\varphi\,(\tau_1)$ πρέπει να είναι ή μια μεταφορά ή ένας ολισθαίνων κατοπτρισμός. Ας υποθέσουμε, κατ' αρχάς, ότι η $\varphi(\tau_1)$ είναι ένας ολισθαίνων κατοπτρισμός και ας επιλέξουμε μια μεταφορά τ_2 από την G_2, η οποία δεν μετατίθεται με την $\varphi(\tau_1)$. (Κάθε μεταφορά $(\mathbf{v}, M)$, η οποία διαθέτει ως φορέα τού διανύσματος $\mathbf{v}$ μια ευθεία *μη παράλληλη* προς την ευθεία που απαιτείται για τον καθορισμό τού ολισθαίνοντος κατοπτρισμού, είναι κατάλληλη γι' αυτήν την επιλογή). Εάν $\varphi(g) = \tau_2$, τότε το g είναι κατ' ανάγκην ή μια μεταφορά ή ένας ολισθαίνων κατοπτρισμός. Ως εκ τούτου, το g^2 είναι μια μεταφορά, οπότε μετατίθεται με την τ_1. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού, κατά την υπόθεσή μας, η εικόνα $\varphi\left(g^2\right) = \tau_2^2$ δεν μετατίθεται με την εικόνα $\varphi(\tau_1)$. Έτσι, μέσω τού ισομορφισμού φ, οι μεταφορές πρέπει να απεικονίζονται σε μεταφορές και, αντιστοίχως, οι ολισθαίνοντες κατοπτρισμοί σε ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς.

Οι κατοπτρισμοί έχουν τάξη 2. Συνεπώς, η εικόνα ενός κατοπτρισμού μέσω ενός ισομορφισμού $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ ή είναι ένας κατοπτρισμός ή είναι μια ημιστροφή. Έστω $g \in G_1$ ένας κατοπτρισμός. Ας υποθέσουμε ότι η εικόνα $\varphi(g)$ είναι μια ημιστροφή κι ας επιλέξουμε μια μεταφορά $\tau_1 = (\mathbf{v}, M)$ από την G_1 με φορέα τού διανύσματος $\mathbf{v}$ μια ευθεία, η οποία *δεν είναι κάθετη* προς τον καθρέπτη[2] τού g. Τότε η σύνθεση $\tau_1 g$ είναι ένας ολισθαίνων κατοπτρισμός. Όμως το

$$\varphi(\tau_1 g) = \varphi(\tau_1)\,\varphi(g)\,,$$

ως γινόμενο μιας μεταφοράς και μιας ημιστροφής, είναι κι αυτό μια ημιστροφή, οπότε καταλήγουμε και πάλι σε αντίφαση. Άρα οι κατοπτρισμοί πρέπει να απεικονίζονται (μέσω τού ισομορφισμού φ) σε κατοπτρισμούς. Τέλος, και οι περιστροφές *προφανώς* στέλνονται (μέσω τού ισομορφισμού φ) σε περιστροφές. □

(25.6) Πόρισμα. *Εάν δυο ομάδες διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου είναι μεταξύ τους ισόμορφες, τότε το ίδιο θα ισχύει και για τις σημειακές τους ομάδες.*

Απόδειξη. Έστω ότι οι G_1 και G_2 είναι δυο ομάδες διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου με υποομάδες μεταφορών H_1, H_2 και σημειακές ομάδες J_1, J_2, αντιστοίχως. Εάν η $\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ είναι ένας ισομορφισμός, τότε $\varphi(H_1) = H_2$ βάσει τού θεωρήματος (25.5). Ως εκ τούτου, η φ επάγει έναν ισομορφισμό μεταξύ των ομάδων πηλίκων G_1/H_1 και G_2/H_2, οπότε $J_1 \cong G_1/H_1 \cong G_2/H_2 \cong J_2$. □

Ασκήσεις

25.1 Ποιες από τις ακόλουθες ομάδες αποτελούν ομάδες διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου;

[2](Σ.τ.Μ.): Για τον τυπικό ορισμό τού *καθρέπτη*, μέσω τού οποίου υλοποιείται ένας κατοπτρισμός, βλ. άσκηση 25.6.

(i) Η υποομάδα τής E_2 η παραγόμενη από τους ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς

$$g(x, y) = (-x, y + 1) \quad \text{και} \quad h(x, y) = (-x + 2, y + 1).$$

(ii) Η υποομάδα τής E_2 η παραγόμενη από τη μεταφορά $\tau(x, y) = (x + 1, y)$ και τον κατοπτρισμό ως προς τον άξονα των y.

(iii) Η υποομάδα τής E_2 η παραγόμενη από τον κατοπτρισμό ως προς τον άξονα των x και τη στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$ γύρω από το σημείο $(0, 1)$.

(iv) Η υποομάδα τής E_2 η παραγόμενη από τον κατοπτρισμό ως προς τον άξονα των x, τον κατοπτρισμό ως προς τον άξονα των y και τον κατοπτρισμό ως προς την ευθεία $x + y = 1$.

25.2 Ιχνογραφήστε τα κιγκλιδώματα τα οποία παράγονται από τα ακόλουθα ζεύγη διανυσμάτων και αναφέρετε ποιον τύπο κιγκλιδώματος αποκτάτε στην εκάστοτε περίπτωση.

(i) $\mathbf{a} = (-1, -\sqrt{3})$, $\mathbf{b} = (1, -\sqrt{3})$.

(ii) $\mathbf{a} = (1, 0)$, $\mathbf{b} = (2, -4)$.

(iii) $\mathbf{a} = (-2, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 3)$.

25.3 Έστω m μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από δύο σημεία ενός κιγκλιδώματος L. Αποδείξτε ότι η m περιέχει άπειρα σημεία τού L.

25.4 Εάν τα L_1 και L_2 είναι δυο κιγκλιδώματα, δείξτε ότι και η συλλογή των σημείων τής μορφής $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, όπου $\mathbf{x} \in L_1$ και $\mathbf{y} \in L_2$, αποτελεί ένα κιγκλίδωμα.

25.5 Ποιο είναι το αποτέλεσμα μιας ημιστροφής ακολουθούμενης από μια μεταφορά;

25.6 Ως **καθρέπτης**, μέσω τού οποίου υλοποιείται ένας κατοπτρισμός, ορίζεται εκείνη η ευθεία, η οποία σταθεροποιείται μέσω τού κατοπτρισμού. Δείξτε ότι δυο κατοπτρισμοί αλληλομετατίθενται εάν και μόνον εάν οι αντίστοιχοι καθρέπτες είτε ταυτίζονται είτε είναι μεταξύ τους κάθετοι.

25.7 Αποδείξτε ότι μια ημιστροφή μετατίθεται με έναν κατοπτρισμό εάν και μόνον εάν το κέντρο της ανήκει στον καθρέπτη, ως προς τον οποίο εκτελείται ο εν λόγω κατοπτρισμός.

25.8 Δείξτε ότι μια μεταφορά τ μετατίθεται με έναν κατοπτρισμό g εάν και μόνον εάν η τ στέλνει τον καθρέπτη τού g να απεικονισθεί στον εαυτό του.

25.9 Έστω τ μια μεταφορά κατά $\mathbf{v}$ και έστω g ένας κατοπτρισμός ως προς μια ευθεία m. Αποδείξτε ότι το $g\tau$ είναι ένας κατοπτρισμός όταν το $\mathbf{v}$ κείται καθέτως προς την m· ειδάλλως, μας δίνει έναν ολισθαίνοντα κατοπτρισμό.

25.10 Δείξτε ότι πλαγιάζοντας ένα τετραγωνικό κιγκλίδωμα κατά 45° μοίρες αποκτούμε μια κεντραρισμένη ορθογώνια δομή. Κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να προσδώσουμε μια κεντραρισμένη ορθογώνια δομή σε ένα εξαγωνικό κιγκλίδωμα;

25.11 Ας υποθέσουμε ότι το L είναι ένα κιγκλίδωμα παραγόμενο από τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ και ότι η g είναι μια περιστροφή η οποία διατηρεί το L. Θεωρώντας τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ ως βάση τού $\mathbb{R}^2$, ο πίνακας τής f έχει ακέραιες εγγραφές και, ιδιαιτέρως, το ίχνος του είναι ένας ακέραιος αριθμός. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι το ίχνος μένει αναλλοίωτο ως προς την αλλαγή βάσεων προκειμένου να δώσετε μια εναλλακτική απόδειξη για το θεώρημα (25.3).

25.12 Παραθέστε ένα παράδειγμα μιας ομάδας διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου με τη σημειακή της ομάδα ισόμορφη

(i) με την ομάδα τού Klein,

(ii) με μια κυκλική ομάδα τάξης 3.

25.13 Έστω G μια ομάδα διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου, η οποία διαθέτει ένα τετραγωνικό κιγκλίδωμα. Τι δυνατότητες υπάρχουν για τη σημειακή ομάδα τής G;

25.14 Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, αλλά αυτή τη φορά αντικαθιστώντας το τετραγωνικό κιγκλίδωμα με ένα εξαγωνικό.

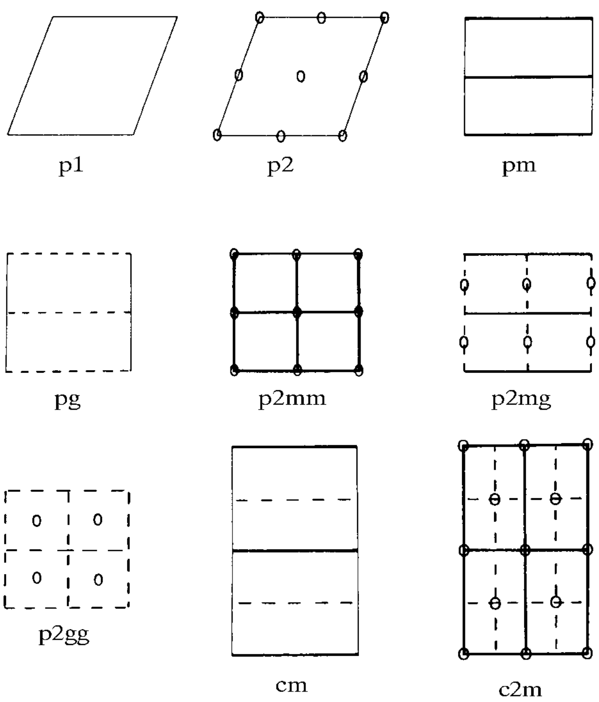
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 26

Διαμορφώματα διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου

Υπάρχουν *δεκαεπτά* διαφορετικές ομάδες διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου. Για να δούμε το *γιατί* συμβαίνει αυτό, θα εξετάσουμε διαδοχικώς κάθε έναν εκ των πέντε δυνατών τύπων κιγκλιδωμάτων. Δοθέντος ενός κιγκλιδώματος L, μελετούμε εν πρώτοις το ποιοι ακριβώς ορθογώνιοι μετασχηματισμοί διατηρούν το L. Τέτοιου είδους μετασχηματισμοί συγκροτούν μια ομάδα και, σύμφωνα με το θεώρημα (25.2), η σημειακή ομάδα οιασδήποτε ομάδας διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου, η οποία έχει το L ως κιγκλίδωμά της, οφείλει να αποτελεί μια υποομάδα τής ομάδας των εν λόγω ορθογωνίων μετασχηματισμών. Αυτή η περιοριστική συνθήκη, η οποία αφορά στη σημειακή ομάδα, μας αρκεί για να απαριθμήσουμε τις διαφορετικές ομάδες διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου. Μια εξαντλητική ανάλυση τής κάθε περίπτωσης θα καταλάμβανε πολύν χώρο. Ως εκ τούτου, θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε έναν μικρό αριθμό ενδεικτικών παραδειγμάτων, διαχωρίζοντάς τα από κάποιους (εν πολλοίς δευτερεύοντες) υπολογισμούς, οι οποίοι θα προταθούν ως ασκήσεις. Το γεγονός ότι όλες οι παρουσιαζόμενες ομάδες είναι «γνησίως διαφορετικές» (ήτοι ανά δύο μη ισόμορφες) θα αποδειχθεί στο τέλος τού παρόντος κεφαλαίου.

Προτού ξεκινήσουμε με την καθεαυτή ταξινόμηση, θα σχολιάσουμε τον τρόπο επιλογής των συμβολισμών μας. Κάθε ομάδα διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου φέρει μια ειδική ονομασία, η οποία αποτελείται από ορισμένα (διεθνώς αναγνωρισμένα) σύμβολα που περιλαμβάνουν τα γράμματα p, c, m, g και τους αριθμούς

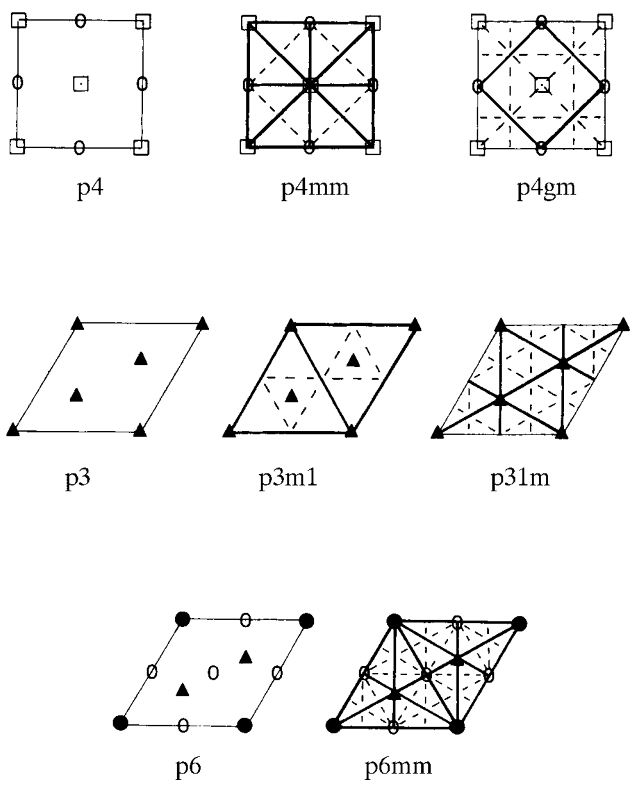
$1, 2, 3, 4, 6$. Το γράμμα **p** σχετίζεται με το κιγκλίδωμα και τίθεται εδώ διότι αποτελεί το αρχικό γράμμα τής λέξης **p**rimitive (= πρωταρχικό). Όταν θεωρούμε το κιγκλίδωμα ως συντιθέμενο από πρωταρχικά κελιά (ήτοι από αντίτυπα τού βασικού παραλληλογράμμου, τα οποία δεν περιέχουν κανένα κιγκλιδωματικό σημείο στο εσωτερικό τους), τότε το ονομάζουμε **πρωταρχικό κιγκλίδωμα**. Σε μία από τις εξεταζόμενες περιπτώσεις (ήτοι στην περίπτωση τής θεώρησης τού *κεντραρισμένου ορθογωνίου κιγκλιδώματος*), παίρνουμε ως βασικό δομικό λίθο ένα μη πρωταρχικό κελί και χρησιμοποιούμε το γράμμα **c** για τον συμβολισμό τού προκύπτοντος κεντραρισμένου κιγκλιδώματος (= **c**entred lattice). Το σύμβολο για έναν *κατοπτρισμό* (ή για τον *καθρέπτη* μέσω τού οποίου υλοποιείται ένας κατοπτρισμός) είναι το **m** (**m**irror), ενώ το σύμβολο για έναν *ολισθαίνοντα κατοπτρισμό* είναι το **g** (**g**lide reflection). Τέλος, το 1 χρησιμοποιείται για να υποδηλώνει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό και οι αριθμοί $i \in \{2, 3, 4, 6\}$ για να υποδηλώνουν περιστροφές τάξης i. (Συνήθως οι περιστροφές τάξης 2 ονομάζονται *ημιστροφές*.)



Σχήμα 26.1 (μέρος πρώτο)

Οι δεκαεπτά ομάδες μας εικονογραφούνται στο σχ. 26.1. Δείχνουμε το πώς είναι τοποθετημένα τα κέντρα των περιστροφών, καθώς και οι καθρέπτες και οι ευθείες ολίσθησης σχετικώς προς το αντίστοιχο βασικό παραλληλόγραμμο. Η παράθεση των συμβόλων 0, ▲, □, ● σημαίνει ότι ο σταθεροποιητής τού εκάστοτε σχεδιαζομένου σημείου είναι μια κυκλική ομάδα τάξης $2, 3, 4$ ή 6, αντιστοίχως. Οι καθρέπτες χαράσσονται με τη βοήθεια (τμημάτων) παχέων ευθειών, ενώ οι ολισθαίνοντες κατοπτρισμοί υποδηλώνονται μέσω (τμημάτων) διακεκομμένων ευθειών.

Εν συνεχεία θα προβούμε στην **κατά περίπτωση ανάλυσή μας**. Ως συνήθως, η G θα συμβολίζει μια ομάδα διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου, η οποία έχει την H ως υποομάδα μεταφορών της, την J ως σημειακή της ομάδα και το L ως κιγκλίδωμά της. Τα διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$, τα οποία παράγουν το L, θα είναι προεπιλεγμένα έτσι όπως παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 25. Δεν επέρχεται, βεβαίως, βλάβη τής γενικότητας, εάν υποθέσουμε ότι το $\mathbf{a}$ κείται επί τού άξονα των τετμημένων και ότι το $\mathbf{b}$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.



Σχήμα 26.1 (μέρος δεύτερο)

Τέλος, το A_θ θα συμβολίζει τον πίνακα, ο οποίος αναπαριστά μια στροφή κατά γωνία θ περί την αρχή των αξόνων με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών τού ρολογιού, ενώ το B_φ θα συμβολίζει τον πίνακα που αναπαριστά τον κατοπτρισμό ως προς την ευθεία, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία $\frac{\varphi}{2}$ με τον θετικό ημιάξονα των τετμημένων.

► **Πρώτη περίπτωση**. Υποθέτουμε, κατ' αρχάς, ότι το κιγκλίδωμα L τής G είναι *λοξό*. Τότε οι μόνοι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί, οι οποίοι διατηρούν το L, είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός και η στροφή κατά π περί την αρχή των αξόνων. Συνεπώς η σημειακή ομάδα J τής G είναι μια υποομάδα τής $\{\pm I\}$.

p1 Εάν $J = \{I\}$, τότε η G είναι η απλούστερη όλων των ομάδων διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου, αφού παράγεται από δύο γραμμικώς ανεξάρτητες μεταφορές. Τα στοιχεία της είναι τής μορφής $(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)$, όπου $m, n \in \mathbb{Z}$.

p2 Εάν $J = \{\pm I\}$, τότε η G περιέχει μία ημιστροφή και μπορούμε να θεωρούμε το σταθερό σημείο αυτής τής ημιστροφής ως αρχή των αξόνων τού συστήματος των συντεταγμένων μας. Έτσι, $(\mathbf{0}, -I) \in G$. Η ένωση των δύο δεξιών πλευρικών κλάσεων H και $H(\mathbf{0}, -I)$ είναι μια υποομάδα τής E_2 η οποία οφείλει να ισούται με την G. Εκείνα τα στοιχεία τής G, τα οποία δεν είναι μεταφορές, ανήκουν στην $H(\mathbf{0}, -I)$ και είναι τής μορφής

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(\mathbf{0}, -I) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, -I),$$

όπου $m, n \in \mathbb{Z}$. Με άλλα λόγια, παίρνουμε όλες τις ημιστροφές περί τα σημεία $\frac{1}{2}m\mathbf{a} + \frac{1}{2}n\mathbf{b}$. □

► **Δεύτερη περίπτωση**. Υποθέτουμε ότι το κιγκλίδωμα L είναι *ορθογώνιο*. Τότε υπάρχουν τέσσερεις ορθογώνιοι μετασχηματισμοί που διατηρούν το L, ήτοι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, μία ημιστροφή περί το $\mathbf{0}$, ο κατοπτρισμός ως προς τον άξονα των τετμημένων και ο κατοπτρισμός ως προς τον άξονα των τεταγμένων. Συνεπώς η σημειακή ομάδα J τής G είναι μια υποομάδα τής $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$. Θα διερευνήσουμε την ύπαρξη *νέων* ομάδων διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου (ήτοι ομάδων *που δεν έχουμε ξανασυναντήσει*), αγνοώντας τις p1 και p2 που έχουμε ήδη προσδιορίσει.

pm Εδώ $J = \{I, B_0\}$ και η G περιέχει έναν *κατοπτρισμό* υλοποιούμενο μέσω ενός οριζοντίου καθρέπτη.

pg Ας υποθέσουμε ότι $J = \{I, B_0\}$, αλλά ότι η G δεν περιέχει κανέναν κατοπτρισμό. Τότε η G οφείλει να περιέχει έναν ολισθαίνοντα κατοπτρισμό ως προς μία οριζόντια ευθεία. Επιλέγουμε ένα τυχόν σημείο αυτής τής ευθείας ως αρχή των αξόνων τού συστήματος συντεταγμένων μας. Η διπλή εφαρμογή ενός ολισθαίνοντος κατοπτρισμού μάς δίνει μια μεταφορά, οπότε ο ολισθαίνων κατοπτρισμός μας είναι κατ' ανάγκην τής μορφής $(\frac{1}{2}k\mathbf{a}, B_0)$, για κάποιον ακέραιο αριθμό k. Εάν ο k ήταν άρτιος, τότε η ισομετρία $(-\frac{1}{2}k\mathbf{a}, B_0)$ θα ήταν μια μεταφορά ανήκουσα στην G, οπότε ο κατοπτρισμός

$$(\mathbf{0}, B_0) = (-\tfrac{1}{2}k\mathbf{a}, I)(\tfrac{1}{2}k\mathbf{a}, B_0)$$

θα άνηκε στην G, πράγμα που θα αντέφασκε προς την υπόθεσή μας. Κατά συνέπειαν, ο k είναι *περιττός* και η ισομετρία

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}, B_0) = (-\tfrac{1}{2}(k-1)\mathbf{a}, I)(\tfrac{1}{2}k\mathbf{a}, B_0)$$

ανήκει στην G. Τα στοιχεία τής G τα οποία δεν είναι μεταφορές είναι τής μορφής

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}, B_0) = ((m + \tfrac{1}{2})\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_0),$$

όπου $m, n \in \mathbb{Z}$. Αυτοί είναι όλοι οι ολισθαίνοντες κατοπτρισμοί ως προς οριζόντιες ευθείες, οι οποίες είτε διέρχονται από κιγκλιδωματικά σημεία είτε διέρχονται από το μεσοσημείο τού ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει δύο κιγκλιδωματικά σημεία. Η ολίσθηση συντελείται κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα, το μήκος τού οποίου είναι ένα περιττό πολλαπλάσιο τού μήκους τού διανύσματος $\frac{1}{2}\mathbf{a}$.

Η θεώρηση τής $\{I, B_\pi\}$ ως σημειακής ομάδας (αντί τής $\{I, B_0\}$) ισοδυναμεί με την εναλλαγή των ρόλων των «οριζοντίων» και των «κατακορύφων» ευθειών στην ως άνω περιγραφείσα διαδικασία, οπότε δεν μας οδηγεί σε τίποτα το καινούργιο. Γι' αυτόν τον λόγο, *θα υποθέτουμε εφεξής πως η σημειακή μας ομάδα είναι ολόκληρη η* $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$. Υπάρχουν τρία ενδεχόμενα: από τις B_0, B_π υλοποιούνται ως κατοπτρισμοί τής G ή αμφότερες ή μόνον μία ή καμία.

p2mm Σε αυτήν την περίπτωση η G περιέχει έναν κατοπτρισμό υλοποιούμενο μέσω ενός οριζοντίου καθρέπτη και έναν κατοπτρισμό υλοποιούμενο μέσω ενός κατακορύφου καθρέπτη.

p2mg Εάν υποθέσουμε ότι η G περιέχει έναν κατοπτρισμό υλοποιούμενο μέσω ενός οριζοντίου καθρέπτη, αλλά κανέναν κατοπτρισμό υλοποιούμενο μέσω ενός κατακορύφου καθρέπτη, τότε ο B_π πρέπει να υλοποιείται (εντός τής G) μέσω ενός κατακορύφου ολισθαίνοντος κατοπτρισμού. Μια προσεκτική επιλογή τής αρχής των αξόνων τού συστήματος των συντεταγμένων μας στο σημείο τομής τού οριζοντίου καθρέπτη και τής κατακόρυφης ευθείας τής ολίσθησης, σε συνδυασμό με μια επιχειρηματολογία ανάλογη εκείνης που εφαρμόσαμε για την pg, μας επιτρέπει να υποθέσουμε (χωρίς βλάβη τής γενικότητας) ότι οι ισομετρίες $(\mathbf{0}, B_0)$ και $(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi)$ ανήκουν στην G. Το γινόμενο

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi)(\mathbf{0}, B_0) = (\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, -I)$$

είναι μια ημιστροφή περί το σημείο $\frac{1}{4}\mathbf{b}$. Οι δεξιές πλευρικές κλάσεις

$$H, \quad H(\mathbf{0}, B_0), \quad H(\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi), \quad H(\tfrac{1}{2}\mathbf{b}, -I)$$

καλύπτουν ολόκληρη την G. Στην πρώτη συναντούμε τις μεταφορές μας. Ένα τυπικό στοιχείο τής δεύτερης έχει τη μορφή

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, I)(\mathbf{0}, B_0) = (m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_0)$$

όπου $m, n \in \mathbb{Z}$. Όταν $m = 0$, τότε αυτή η ισομετρία αποτελεί έναν κατοπτρισμό υλοποιούμενο μέσω ενός οριζοντίου καθρέπτη, ο οποίος είτε διέρχεται από κιγκλιδωματικά σημεία είτε διέρχεται από το μεσοσημείο τού ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει δύο κιγκλιδωματικά σημεία. Όταν $m \neq 0$, τότε οι καθρέπτες μετατρέπονται σε ευθείες ολίσθησης, ενώ έχουμε ολίσθηση κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα, το μήκος τού οποίου ισούται με το μήκος τού $m\mathbf{a}$. Η τρίτη πλευρική κλάση περιέχει τα στοιχεία $(m\mathbf{a} + (n + \frac{1}{2})\mathbf{b}, B_\pi)$ που είναι ολισθαίνοντες κατοπτρισμοί ως προς οριζόντιες ευθείες, οι οποίες είτε διέρχονται από κιγκλιδωματικά σημεία είτε διέρχονται από το μεσοσημείο τού ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει δύο κιγκλιδωματικά σημεία. Η ολίσθηση συντελείται κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα, το μήκος τού οποίου ισούται με το μήκος τού $\frac{1}{2}\mathbf{b}$. Τέλος, η πλευρική κλάση $H(\frac{1}{2}\mathbf{b}, -I)$ αποτελείται από ημιστροφές, οι οποίες έχουν τα σημεία $\frac{1}{2}m\mathbf{a} + (n + \frac{1}{2})\mathbf{b}$ ως κέντρα τους. (Η εναλλαγή των ρόλων των «οριζοντίων» και των «κατακορύφων» ευθειών στην ως άνω περιγραφείσα διαδικασία μάς δίνει μια ομάδα ισόμορφη τής p2mg.)

p2gg Εδώ δεν διαθέτουμε κανέναν κατοπτρισμό εντός τής G. □

► **Τρίτη περίπτωση**. Εν συνεχεία υποθέτουμε ότι το κιγκλίδωμα L είναι *κεντραρισμένο ορθογώνιο*. Οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί, οι οποίοι διατηρούν το L, είναι ίδιοι με εκείνους που συναντήσαμε στην περίπτωση τού ορθογωνίου κιγκλιδώματος. Επομένως η σημειακή ομάδα J τής G είναι και πάλι μια υποομάδα τής $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$. Εδώ ανακαλύπτουμε δύο νέες ομάδες.

cm Ας υποθέσουμε ότι $J = \{I, B_0\}$ και ότι μέσω τού πίνακα B_0 κατασκευάζεται μια ισομετρία $(\mathbf{v}, B_0)$ ανήκουσα στην G. Προφανώς, αυτή η ισομετρία είναι είτε κατοπτρισμός υλοποιούμενος μέσω ενός οριζοντίου καθρέπτη είτε ένας ολισθαίνων κατοπτρισμός ως προς μία οριζόντια ευθεία. Επιλέγουμε ένα σημείο επί τού καθρέπτη ή επί τής ευθείας ολίσθησης ως αρχή των αξόνων τού συστήματος των συντεταγμένων μας, ούτως ώστε το $2\mathbf{v}$ να είναι ένα πολλαπλάσιο τού $\mathbf{a}$. Υπενθυμίζουμε ότι η *κατακόρυφη* διεύθυνση προσδιορίζεται μέσω τού διανύσματος $2\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

(i) Εάν $2\mathbf{v} = k\mathbf{a}$ και ο k είναι *άρτιος*, τότε ο *κατοπτρισμός*

$$(\mathbf{0}, B_0) = (-\tfrac{1}{2}k\mathbf{a}, I)(\tfrac{1}{2}k\mathbf{a}, B_0)$$

ανήκει στην G. Τα στοιχεία τής G, τα οποία δεν είναι μεταφορές, έχουν τη μορφή

$$(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_0) = ((m + \tfrac{1}{2}n)\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}n(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0)$$

όπου $m, n \in \mathbb{Z}$. Για n άρτιο και $m = -\frac{1}{2}n$, προσλαμβάνουμε όλους τους κατοπτρισμούς τους υλοποιούμενους μέσω οριζοντίων καθρεπτών, οι οποίοι διέρχονται από κιγκλιδωματικά σημεία. Εάν ο n είναι άρτιος αλλά ισχύει $m \neq -\frac{1}{2}n$, τότε αυτοί οι καθρέπτες μετατρέπονται σε ευθείες ολίσθησης. Η ολίσθηση συντελείται κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα, το μήκος τού οποίου είναι ένα πολλαπλάσιο τού μήκους τού $\mathbf{a}$. Τέλος, εάν ο n είναι περιττός, τότε διαθέτουμε ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς ως προς ευθείες, οι οποίες διέρχονται από το μεσοσημείο τού ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει δύο κιγκλιδωματικά σημεία. Η ολίσθηση συντελείται κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα, το μήκος τού οποίου είναι ένα περιττό πολλαπλάσιο τού μήκους τού $\frac{1}{2}\mathbf{a}$.

(ii) Εάν ο k είναι *περιττός*, τότε η ισομετρία

$$(\tfrac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0) = (-\tfrac{1}{2}(k+1)\mathbf{a} + \mathbf{b}, I)(\tfrac{1}{2}k\mathbf{a}, B_0)$$

ανήκει στην G. Αυτή είναι *και πάλι ένας κατοπτρισμός*, οπότε η μετατόπιση τής αρχής των αξόνων επί τού καθρέπτη του μας επαναφέρει στην αμέσως προηγούμενη περίπτωση. (Εξάλλου, η αντικατάσταση τής σημειακής ομάδας $\{I, B_0\}$ με την $\{I, B_\pi\}$ μας οδηγεί σε μία ομάδα ισόμορφη τής cm.)

c2mm Εάν $J = \{I, -I, B_0, B_\pi\}$, τότε η εκτέλεση αναλόγων υπολογισμών μάς οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αμφότεροι οι πίνακες B_0 και B_π είναι δυνατόν να υλοποιηθούν μέσω κατοπτρισμών εντός τής G. □

▶ **Τέταρτη περίπτωση**. Έστω ότι το κιγκλίδωμα L τής G είναι *τετραγωνικό*. Τότε η ομάδα των ορθογωνίων μετασχηματισμών οι οποίοι διατηρούν το L είναι η διεδρική ομάδα τάξης 8 που παράγεται από τους πίνακες $A_{\frac{\pi}{2}}$ και B_0. Η σημειακή ομάδα J είναι μια υποομάδα τής εν λόγω ομάδας και, προκειμένου να εισπράξουμε κάτι το καινούργιο, οφείλουμε να συμπεριλάβουμε τον πίνακα $A_{\frac{\pi}{2}}$ στα στοιχεία τής J. (Το ότι αυτός ο ισχυρισμός είναι αληθής συνάγεται από τη μελέτη των άλλων περιπτώσεων, η οποία αφήνεται ως άσκηση υπ' αρ. 26.9.)

p4 Εδώ η J παράγεται από τον πίνακα $A_{\frac{\pi}{2}}$.

p4mm Σε αυτήν την περίπτωση η J παράγεται από τους πίνακες $A_{\frac{\pi}{2}}$ και B_0, ενώ ο B_0 μπορεί να υλοποιηθεί μέσω ενός *κατοπτρισμού* τής G.

p4gm Ας υποθέσουμε τώρα ότι η J παράγεται και πάλι από τους πίνακες $A_{\frac{\pi}{2}}$ και B_0, αλλά ότι ο B_0 *δεν* μπορεί να υλοποιηθεί μέσω κανενός κατοπτρισμού τής G. Επιλέγουμε το σημείο, το οποίο παραμένει σταθερό μέσω μιας περιστροφής τάξης 4, ως αρχή των αξόνων τού συστήματος των συντεταγμένων μας, ούτως ώστε το $(\mathbf{0}, A_{\frac{\pi}{3}})$ να ανήκει στην G, και υποθέτουμε ότι η ισομετρία $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0)$ υλοποιεί τον πίνακα B_0 εντός τής G. Επειδή

$$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0)^2 = (2\lambda\mathbf{a}, I),$$

το 2λ είναι ένας ακέραιος αριθμός. Εάν το 2λ ήταν άρτιος, τότε ο κατοπτρισμός $(\mu\mathbf{b}, B_0) = (-\lambda\mathbf{a}, I)\,(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0)$ θα άνηκε στην G, πράγμα το οποίο θα ερχόταν σε αντίφαση προς την υπόθεσή μας. Κατά συνέπειαν, το 2λ είναι ένας *περιττός* αριθμός και η ισομετρία

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0) = ((\tfrac{1}{2} - \lambda)\mathbf{a}, I)(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0)$$

ανήκει στην G. Εξάλλου, $(\mathbf{0}, A_{\frac{\pi}{2}})(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0) = (\frac{1}{2}\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}, B_{\frac{\pi}{2}})$ και

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{b} - \mu\mathbf{a}, B_{\frac{\pi}{2}})^2 = ((\tfrac{1}{2} - \mu)(\mathbf{a} + \mathbf{b}), I),$$

δείχνοντάς μας ότι η διαφορά $\frac{1}{2} - \mu$ είναι ένας ακέραιος αριθμός. Εξ αυτού συμπεραίνουμε ότι ο *ολισθαίνων κατοπτρισμός*

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}\mathbf{b}, B_0) = ((\tfrac{1}{2} - \mu)\mathbf{b}, I)(\tfrac{1}{2}\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_0)$$

ανήκει στην G. Οι δεξιές πλευρικές κλάσεις

$$\begin{array}{ll} H(\mathbf{0}, I), & H(\mathbf{0}, A_{\frac{\pi}{2}}), \\ H(\mathbf{0}, -I), & H(\mathbf{0}, A_{\frac{3\pi}{2}}), \\ H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_0), & H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{2}}), \\ H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi), & H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{3\pi}{2}}), \end{array}$$

καλύπτουν ολόκληρη την G και είναι εύκολο να αναγνωρίσουμε τα στοιχεία τους γεωμετρικώς. Για παράδειγμα, ένα τυπικό στοιχείο τής $H(\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{2}})$ είναι τής μορφής

$$((m + \tfrac{1}{2})\mathbf{a} + (n + \tfrac{1}{2})\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{2}}) = (\tfrac{1}{2}(m + n + 1)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \tfrac{1}{2}(m - n)(\mathbf{a} - \mathbf{b}), B_{\frac{\pi}{2}})$$

όπου $m, n \in \mathbb{Z}$. Όταν $m + n + 1 = 0$, τότε λαμβάνουμε όλους τους κατοπτρισμούς τούς υλοποιούμενους μέσω καθρεπτών, οι οποίοι είναι κεκλιμένοι κατά $45°$ ως προς τον ορίζοντα και διέρχονται από το μεσοσημείο τού ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει δύο κιγκλιδωματικά σημεία. Όταν $m+n+1 \neq 0$ και η διαφορά $m-n$ είναι ένας περιττός αριθμός, τότε αυτοί οι καθρέπτες μετατρέπονται σε ευθείες ολίσθησης. Τέλος, όταν $m+n+1 \neq 0$ και η διαφορά $m - n$ είναι ένας άρτιος αριθμός, τότε διαθέτουμε ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς ως προς ευθείες κλίσης 1, οι οποίες διέρχονται από κιγκλιδωματικά σημεία. Από την άλλη μεριά, η πλευρική κλάση $H(\mathbf{0}, -I)$ περιέχει όλες τις ημιστροφές $(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, -I)$, οι οποίες έχουν τα σημεία $\frac{1}{2}m\mathbf{a} + \frac{1}{2}n\mathbf{b}$ ως κέντρα τους. Αφήνουμε την εξέταση των στοιχείων όλων των άλλων πλευρικών κλάσεων ως άσκηση για τον αναγνώστη. □

► **Πέμπτη περίπτωση**. Τέλος, υποθέτουμε ότι το L είναι *εξαγωνικό*. Τότε η σημειακή ομάδα πρέπει να περιέχεται στη διεδρική ομάδα τάξης 12 την παραγόμενη από τους πίνακες $A_{\frac{\pi}{3}}$ και B_0. Θα οδηγηθούμε σε νέες ομάδες διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου μόνον όταν η J περιέχει περιστροφές τάξης 3 ή τάξης 6. (Οι λοιπές περιπτώσεις καλύπτονται ύστερα από επίλυση τής άσκησης 26.10.)

p3 Σε αυτήν την περίπτωση η J παράγεται από τον πίνακα $A_{\frac{2\pi}{3}}$.

p3m1 Εδώ η J παράγεται από τους πίνακες $A_{\frac{2\pi}{3}}$ και B_0.

p31m Ας υποθέσουμε πως η J παράγεται από τους πίνακες $A_{\frac{2\pi}{3}}$ και $B_{\frac{\pi}{3}}$. Επιλέγουμε το σημείο το οποίο μένει σταθερό μέσω μιας περιστροφής τάξης 3 ως αρχή των αξόνων τού συστήματος συντεταγμένων μας, οπότε $(\mathbf{0}, A_{\frac{2\pi}{3}}) \in G$, και υποθέτουμε ότι η ισομετρία $(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{3}})$ υλοποιεί τον πίνακα $B_{\frac{\pi}{3}}$ εντός τής G. Επειδή

$$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{3}})^2 = ((\lambda + \mu)(\mathbf{a} + \mathbf{b}), I),$$

έχουμε $\lambda + \mu \in \mathbb{Z}$. Εξάλλου,

$$(\mathbf{0}, A_{\frac{2\pi}{3}})(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{3}}) = (\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mu\mathbf{a}, B_{\pi})$$

και

$$(\lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mu\mathbf{a}, B_{\pi})^2 = (\lambda(2\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mu\mathbf{a}, I),$$

πράγμα που σημαίνει ότι $\lambda \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ και ο *κατοπτρισμός*

$$(\mathbf{0}, B_{\frac{\pi}{3}}) = (-\lambda\mathbf{a} - \mu\mathbf{b}, I)(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}, B_{\frac{\pi}{3}})$$

ανήκει στην G. Τα στοιχεία τής G είναι τής μορφής $(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, M)$, όπου $m, n \in \mathbb{Z}$ και ο M είναι ένας πίνακας ειλημμένος από το σύνολο $\{I, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\frac{4\pi}{3}}, B_{\frac{\pi}{3}}, B_{\pi}, B_{\frac{5\pi}{3}}\}$. Ζητούμε από τον αναγνώστη να δώσει μια γεωμετρική ερμηνεία αυτών των στοιχείων. Για παράδειγμα, ένα στοιχείο τής μορφής $(m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, B_{\pi}) = ((m + \frac{1}{2}n)\mathbf{a} + \frac{1}{2}n(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_{\pi})$ είναι ένας κατοπτρισμός υλοποιούμενος μέσω ενός οριζοντίου καθρέπτη όταν $n = 0$, ενώ πρόκειται για έναν κατοπτρισμό υλοποιούμενο μέσω ενός κατακορύφου καθρέπτη όταν $n \neq 0$.

p6 Σε αυτήν την περίπτωση η J παράγεται από τον πίνακα $A_{\frac{\pi}{3}}$.

p6mm Εδώ η J παράγεται από τους πίνακες $A_{\frac{\pi}{3}}$ και B_0. □

Είναι όλες αυτές οι δεκαεπτά ομάδες ανά δύο μη ισόμορφες; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό, όπως θα δούμε ευθύς παρακάτω, είναι καταφατική. Κατά το πόρισμα (25.6), αρκεί να περιορισθούμε σε εκείνες τις ομάδες, οι οποίες διαθέτουν ισόμορφες σημειακές ομάδες. Ξεκινούμε λοιπόν με την παράθεση τού καταλόγου των σημειακών ομάδων.

Α/Α	G	J
1.	p1	τετριμμένη
2.	p2	$\mathbb{Z}_2$
3.	pm	$\mathbb{Z}_2$
4.	pg	$\mathbb{Z}_2$
5.	p2mm	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
6.	p2mg	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
7.	p2gg	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
8.	cm	$\mathbb{Z}_2$
9.	c2mm	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Α/Α	G	J
10.	p4	$\mathbb{Z}_4$
11.	p4mm	D_4
12.	p4gm	D_4
13.	p3	$\mathbb{Z}_3$
14.	p3m1	D_3
15.	p31m	D_3
16.	p6	$\mathbb{Z}_6$
17.	p6mm	D_6

Υπενθυμίζουμε ότι κάθε ισομορφισμός μεταξύ ομάδων διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου στέλνει μεταφορές να απεικονισθούν σε μεταφορές, περιστροφές σε περιστροφές, κατοπτρισμούς σε κατοπτρισμούς και ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς σε ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς.

(26.1) Θεώρημα. *Δεν υπάρχουν δύο εκ των* p2, pm, pg, cm *που να είναι μεταξύ τους ισόμορφες.*

Απόδειξη. Μεταξύ αυτών μόνον η p2 περιέχει περιστροφές, οπότε δεν είναι δυνατόν να είναι ισόμορφη με καμία των υπολοίπων. Εξάλλου, από τις τρεις υπολειπόμενες ομάδες, η pg είναι η μόνη που δεν περιέχει κανέναν κατοπτρισμό. Κατά συνέπειαν, η pg δεν είναι ισόμορφη τής pm ή τής cm. Τέλος, σημειώνουμε ότι, εάν θεωρήσουμε έναν ολισθαίνοντα κατοπτρισμό και τον γράψουμε ως έναν κατοπτρισμό ακολουθούμενο από μία μεταφορά, τότε τόσο ο κατοπτρισμός αυτός όσο και η μεταφορά *ανήκουν στην* pm. Ωστόσο, η cm περιέχει ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς, τα συστατικά μέρη των οποίων *δεν ανήκουν* στην cm. Για παράδειγμα, τούτο ισχύει για τον ολισθαίνοντα κατοπτρισμό

$$(\tfrac{1}{2}\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0) = (\tfrac{1}{2}\mathbf{a}, I)(\tfrac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}), B_0).$$

Ως εκ τούτου, ούτε η pm μπορεί να είναι ισόμορφη με την cm. □

(26.2) Θεώρημα. *Δεν υπάρχουν δύο εκ των* p2mm, p2mg, p2gg, c2mm *που να είναι μεταξύ τους ισόμορφες.*

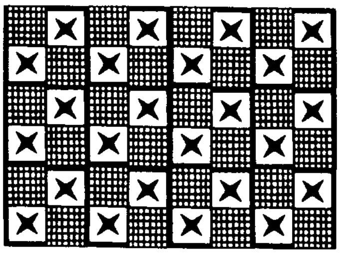
Απόδειξη. Μεταξύ αυτών μόνον η p2gg δεν περιέχει καμία περιστροφή, οπότε δεν είναι δυνατόν να είναι ισόμορφη με καμία των υπολοίπων. Εξάλλου, από τις τρεις υπολειπόμενες ομάδες, η p2mm είναι η μόνη που περιέχει τα συστατικά μέρη των ολισθαινόντων κατοπτρισμών της. Κατά συνέπειαν, η p2mm δεν είναι ισόμορφη τής p2mg ή τής c2mm. Τέλος, επισημαίνουμε ότι οι καθρέπτες όλων των κατοπτρισμών τής p2mg είναι οριζόντιοι, οπότε το γινόμενο δύο κατοπτρισμών μάς δίνει πάντοτε μία μεταφορά. Αντιθέτως, εντός τής c2mm συναντούμε κατοπτρισμούς, οι οποίοι άλλοτε υλοποιούνται μέσω οριζοντίων και άλλοτε μέσω κατακορύφων καθρεπτών. Εξ αυτού συνάγεται ότι το γινόμενο ενός κατοπτρισμού τού ενός και ενός κατοπτρισμού τού άλλου είδους μάς παρέχει μία ημιστροφή. Άρα ούτε η p2mg μπορεί να είναι ισόμορφη με την c2mm. □

(26.3) Θεώρημα. *Η* p4mm *δεν είναι ισόμορφη τής* p4gm.

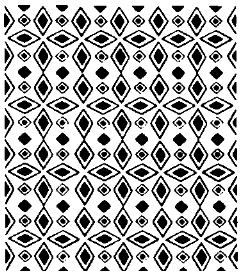
Απόδειξη. Κάθε περιστροφή τής p4mm τάξης ίσης με 4 μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο κατοπτρισμών, οι οποίοι ανήκουν στην p4mm. Όμως κάτι ανάλογο δεν ισχύει και για την ομάδα p4gm, διότι, για παράδειγμα, είναι αδύνατη η παραγοντοποίηση τής περιστροφής $(\mathbf{a}, A_{\frac{\pi}{2}})$, η οποία ανήκει στην p4gm, υπό τη μορφή γινομένου δύο κατοπτρισμών (βλ. άσκηση 26.4). Κατά συνέπειαν, η p4mm δεν είναι ισόμορφη τής p4gm. □

(26.4) Θεώρημα. *Η* p3m1 *δεν είναι ισόμορφη τής* p31m.

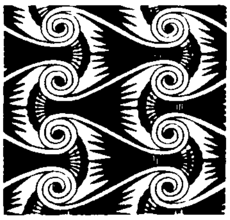
Απόδειξη. Κάθε περιστροφή τής p31m τάξης ίσης με 3 μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο κατοπτρισμών, οι οποίοι ανήκουν στην p31m. Όμως κάτι ανάλογο δεν ισχύει και για την ομάδα p3m1, διότι, για παράδειγμα, είναι αδύνατη η παραγοντοποίηση τής περιστροφής $(\mathbf{a}, A_{\frac{2\pi}{3}})$, η οποία ανήκει στην p3m1, υπό τη μορφή γινομένου δύο κατοπτρισμών (βλ. άσκηση 26.5). Κατά συνέπειαν, η p31m δεν είναι ισόμορφη τής p3m1. □



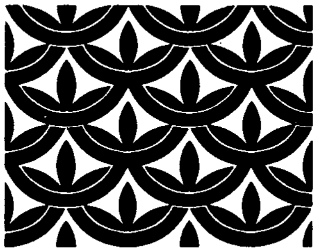
Νησιά Fiji p2



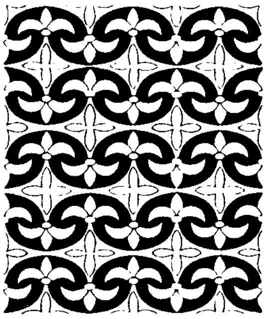
Ισπανία p2mm



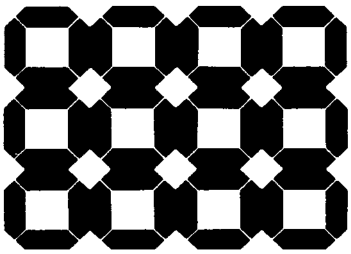
Αίγυπτος p2mg



Ιαπωνία cm

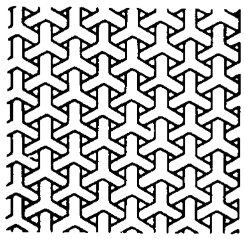


Γερμανία c2mm



Ιταλία p4mm

Αίγυπτος p4gm



Κίνα p3m1

Σχήμα 26.2

Με τα ανωτέρω θεωρήματα ολοκληρώνεται η ταξινόμηση των ομάδων διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου. Κατά την ταξινόμηση αυτή υιοθετήσαμε εσκεμμένα μια «πρακτική» πρόσβαση, καθότι είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε την εσωτερική δομή τους μόνον από τη λεπτομερή μελέτη *των στοιχείων* των προκειμένων ομάδων. [(Σ.τ.Μ): Για ομοιάζουσες προσβάσεις βλ. τα συγγράμματα των H.S.M. Coxeter[1], H.S.M. Coxeter & W.O.J. Moser[2], R. Bix[3], καθώς και τα άρθρα των R.L.E. Schwarzenberger[4] και D. Schattschneider[5]. Επίσης, όμορφες έγχρωμες εικόνες των αντιστοίχων γεωμετρικών διαμορφωμάτων και ενδιαφέροντα ιστορικά στοιχεία βρίσκει κανείς και στις ιστοσελίδες των D.E. Joyce[6] και S. Dutch[7].]

Το σχ. 26.2 δείχνει παραδείγματα γεωμετρικών διαμορφωμάτων από διαφόρους πολιτισμούς, οι συμμετρίες των οποίων υλοποιούνται μέσω των οκτώ από τις εν συνόλω δεκαεπτά ομάδες διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου. Η τρισδιάστατη γενίκευση αυτών των ομάδων, η οποία ενδιαφέρει όσους ασχολούνται με την Κρυσταλλογραφία, είναι σαφώς πιο περίπλοκη. Στις τρεις διαστάσεις υπάρχουν εν συνόλω 219 κλάσεις ισομορφίας. [(Σ.τ.Μ): Για μια εισαγωγή στην υψηλοδιάστατη Μαθηματική Κρυσταλλογραφία ο αναγνώστης παραπέμπεται στα συγγράμματα των F.C. Phillips[8], T. Janssen[9] και R.L.E. Schwarzenberger[10]].

Ασκήσεις

26.1 Περιγράψτε τα στοιχεία καθεμιάς των ομάδων c2mm, p4mm, p3m1 και διαπιστώστε ότι αυτές οι ομάδες διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου αναπαριστώνται μέσω των αντιστοίχων μερών τού σχήματος 26.1.

26.2 Εν συνεχεία, εξετάστε καθένα των γεωμετρικών διαμορφωμάτων τού σχήματος 26.2 μελετώντας λεπτομερώς την εκάστοτε αποκτώμενη ομάδα διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου.

26.3 Βρείτε έναν ολισθαίνοντα κατοπτρισμό τής p2mg, τα συστατικά μέρη τού οποίου δεν ανήκουν στην p2mg. Κάνετε το ίδιο και για την c2mm.

[1] H.S.M. Coxeter: *Introduction to Geometry*, Wiley, (1961). (Ειδικότερα, βλ. κεφ. 4.)

[2] H.S.M. Coxeter & W.O.J. Moser: *Generators and Relations of Discrete Groups*, 4th ed., Springer-Verlag, 1984.

[3] R. Bix: *Topics in Geometry*, Academic Press, (1994).

[4] R.L.E. Schwarzenberger: *The 17 plane symmetry groups*, Math. Gazette **58**, (1974), 123-131.

[5] D. Schattschneider: *The plane geometry groups: their recognition and notation*, Amer. Math. Monthly **85**, (1978), 439-450.

[6] Βλ. http://www.clarku.edu/~djoyce/wallpaper

[7] Βλ. http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/2dspcgrp.htm

[8] F.C. Phillips: *An Introduction to Crystallography*, 4th ed., Wiley, 1971.

[9] T. Janssen: *Crystallographic Groups*, North-Holland, 1973.

[10] R.L.E. Schwarzenberger: *N-dimensional Crystallography*, Pitman, 1980.

26.4 Αποδείξτε ότι η περιστροφή $(\mathbf{a}, A_{\frac{\pi}{2}})$ δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί, γραφόμενη ως γινόμενο δύο κατοπτρισμών που ανήκουν στην p4gm.

26.5 Δείξτε ότι η περιστροφή $(\mathbf{a}, A_{\frac{2\pi}{3}})$ δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί, γραφόμενη ως γινόμενο δύο κατοπτρισμών που ανήκουν στην p3ml.

26.6 Κάθε γεωμετρικό διαμόρφωμα επαναλαμβανόμενο κατά κάποιον κανονικό τρόπο κατά μήκος μιας συνεχούς («άπειρης») λωρίδας καλείται **ζωοφόρος**[11] (ή **φρίζα**[12] ή, απλώς, **διακοσμητική λωρίδα**[13]).

Η ομάδα συμμετριών ενός τέτοιου γεωμετρικού διαμορφώματος χαρακτηρίζεται από την εύλογη αξίωση τού να διαθέτει υποομάδα μεταφορών ισόμορφη τής άπειρης κυκλικής ομάδας. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας φανταζόμαστε ότι η διαθέσιμη λωρίδα μας είναι η$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\}$ και υποθέτουμε ότι η μικρότερη μεταφορά, η οποία διατηρεί το διαμόρφωμά μας, είναι η $\tau(x,y) = (x+1, y)$. Δείξτε ότι (ύστερα από κατάλληλη επιλογή τής αρχής των αξόνων τού συστήματος των συντεταγμένων) προκύπτουν **επτά** δυνατές ομάδες ως ομάδες συμμετριών μιας ζωοφόρου, ήτοι εκείνες οι ομάδες, οι οποίες έχουν τους εξής γεννήτορες:

(i) Την τ.
(ii) Τον ολισθαίνοντα κατοπτρισμό $g(x,y) = (x + \frac{1}{2}, -y)$.
(iii) Την τ και την περιστροφή $f(x,y) = (-x, -y)$.
(iv) Την τ και τον κατοπτρισμό $q(x,y) = (-x, y)$.
(v) Την τ και τον κατοπτρισμό fq.
(vi) Τις τ, f και q.
(vii) Τις τ, f και q.

[11](Σ.τ.Μ.): Η αντίστοιχη τής λέξης **frieze** στα ελληνικά είναι **ζωοφόρος** (ή *ζωφόρος*). Κατά την αρχαιότητα οι ζωοφόροι ήταν *διακοσμητικές ζώνες ή λωρίδες* με συνεχείς παραστάσεις σκηνών με ανθρώπους και ζώα, οι οποίες αποτελούσαν τμήματα αρχιτεκτονικών μνημείων (ως επί το πλείστον ιωνικού ρυθμού). Ιδιαιτέρως, οι ζωοφόροι των αρχαίων ελληνικών ναών ήταν τοποθετημένες μεταξύ τού επιστυλίου και τού γείσου. Η περίφημη ζωοφόρος τού Παρθενώνα, έργο τού Φειδία, τού Αλκαμένη κ.ά., απεικονίζει Ολυμπίους θεούς και την Παναθηναϊκή πομπή. (Το μεγαλύτερό της μέρος βρίσκεται στο Βρετανικό Μουσείο από την εποχή τής «πώλησής» της -το 1816- από τον λόρδο Έλγιν. Αρκετές πλάκες από τη βόρεια πλευρά της, καθώς και κάποιες άλλες μεμονωμένες, βρίσκονται στο Μουσείο τής Ακροπόλεως).

[12](Σ.τ.Μ.): Στην αρχιτεκτονική χρησιμοποιείται και η λέξη **φρίζα** για την (τεχνητή) απόδοση τού «frieze». Όμως η λέξη «frieze» προήλθε από τη γαλλική λέξη «frise» και αυτή, με τη σειρά της, από τη μεσαιωνική «frisium» ή «phrygium» που αποτελεί απλή παραλλαγή τής λατινικής λέξης «phryx». Κατά συνέπειαν, η «φρίζα» αποτελεί ουσιαστικώς *γλωσσικό αντιδάνειο*, καθότι η «phryx» είναι ο εκλατινισμός τής αρχαιοελληνικής λέξης «Φρύξ (-γος)». Η **Φρυγία** ήταν περιώνυμη για τις *χρυσοποίκιλτες ταινίες και ζώνες της.* [Η Φρυγία ήταν αρχαία χώρα στη ΒΔ Μικρά Ασία. Αναφορές περί αυτής συναντούμε ήδη στην Ιλιάδα (βλ. εδ. Β 861). Σύμφωνα με τον Ηρόδοτο, οι Φρύγες (ή Βρύγες/Βρύγοι) ήταν γείτονες των Μακεδόνων, οι οποίοι κατά τον 12ο π.Χ. αιώνα μετακινήθηκαν προς τη Μικρά Ασία.]

[13](Σ.τ.Μ.): Διακοσμητικές λωρίδες εντοπίζονται και σε καλλιτεχνικά δημιουργήματα μικροτέρου μεγέθους, όχι μόνο στον αρχαίο ελληνικό πολιτισμό, όπου αφθονούν τέτοιοι διάκοσμοι σε τοιχογραφίες, αγγεία τής γεωμετρικής εποχής, αετώματα κ.ά. (με μαιάνδρους, ανθέμια, κυμάτια κ.ά.), αλλά και σε πολλούς άλλους και μάλιστα σε διάφορες ιστορικές εποχές. Ήδη προαναφέρθηκαν οι χρυσοποίκιλτες ζώνες τής Φρυγίας. Ενδεικτικά προσθέτουμε τις αρχαίες περσικές τοιχογραφίες (όπως π.χ. το διάζωμα με τους τοξότες από το παλάτι τού Δαρείου στα Σούσα, βλ. [1] Fig. 25), διάφορες ρωμαϊκές αρχιτεκτονικές διακοσμήσεις με τόξα και φυλλώματα, ορισμένα αραβουργήματα, υαλοπίνακες μεσαιωνικών καθεδρικών ναών (γοτθικού ρυθμού) κ.λπ. Βεβαίως, εγχάρακτα ταινιωτά μοτίβα χρησιμοποιήθηκαν και στους ύστερους χρόνους προκειμένου να κοσμηθούν οικιακά σκεύη.

Επινοήστε γεωμετρικά διαμορφώματα, οι συμμετρίες των οποίων υλοποιούνται μέσω αυτών των ομάδων.

26.7 Σημειώστε ότι οι ομάδες (i) και (ii) τής προηγούμενης άσκησης είναι άπειρες κυκλικές, παρότι αναπαριστούν διαφορετικούς τύπους συμμετρίας. Ταξινομήστε τις επτά αυτές «ομάδες ζωοφόρου» ως προς ισομορφισμό. Δυο ομάδες ζωοφόρου θα πρέπει να θεωρούνται ως *ισοδύναμες* όταν είναι μεταξύ τους ισόμορφες μέσω ενός ισομορφισμού ο οποίος στέλνει μεταφορές να απεικονισθούν σε μεταφορές, περιστροφές σε περιστροφές, κατοπτρισμούς σε κατοπτρισμούς και ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς σε ολισθαίνοντες κατοπτρισμούς. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν δύο διαφορετικές ομάδες από τις ανωτέρω ομάδες τού καταλόγου μας που να είναι μεταξύ τους ισοδύναμες υπ' αυτήν την έννοια[14].

26.8 Δείξτε ότι η σημειακή ομάδα μιας ομάδας ζωοφόρου είναι είτε τετριμμένη είτε κυκλική τάξης 2 είτε ισόμορφη με την ομάδα τού Klein.

26.9 Έστω G μια ομάδα διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου, η οποία διαθέτει *τετραγωνικό* κιγκλίδωμα, ούτως ώστε η σημειακή της ομάδα J να αποτελεί μια υποομάδα τής $\left\{I, A_{\frac{\pi}{2}}, -I, A_{\frac{3\pi}{2}}, B_0, B_{\frac{\pi}{2}}, B_\pi, B_{\frac{3\pi}{2}}\right\}$. Δείξτε ότι ο ακόλουθος κατάλογος περιέχει όλες τις δυνατές J και G, υπό την προϋπόθεση ότι η J δεν περιέχει καμία περιστροφή τάξης 4.

J	G
$\{I\}$	p1
$\{\pm I\}$	p2
$\left\{I, B_0 B_{\frac{3\pi}{2}}\right\}$	pm ή pg
$\left\{I, B_\pi B_{\frac{3\pi}{2}}\right\}$	pm ή pg

J	G
$\{I, -I, B_0, B_\pi\}$	p2mm, p2mg ή p2gg
$\left\{I, B_{\frac{\pi}{2}}\right\}$	cm
$\left\{I, B_{\frac{3\pi}{2}}\right\}$	cm
$\left\{I, -I, B_{\frac{\pi}{2}}, B_{\frac{3\pi}{2}}\right\}$	c2mm

Στις τρεις τελευταίες περιπτώσεις θα πρέπει να γείρετε το κιγκλίδωμα κατά 45° ως προς τον ορίζοντα.

26.10 Έστω G μια ομάδα διακοσμητικού επιστρώματος τοίχου, η οποία διαθέτει *εξαγωνικό* κιγκλίδωμα, ούτως ώστε η σημειακή της ομάδα J να αποτελεί μια

[14](Σ.τ.Μ): Πρβλ. D.L. Johnson: *Symmetries*, SUMS, Springer-Verlag, (2001), σελ. 85.

υποομάδα τής διεδρικής ομάδας τής παραγόμενης από τον $A_{\frac{\pi}{3}}$ και τον B_0. Δείξτε ότι ο ακόλουθος κατάλογος περιέχει όλες τις δυνατές J και G, υπό την προϋπόθεση ότι η J δεν περιέχει καμία περιστροφή τάξης 3.

J	G
$\{I\}$	p1
$\{\pm I\}$	p2
$\left\{I, B_{\frac{k\pi}{3}}\right\},\ 0 \leq k \leq 5$	cm

J	G
$\{I, -I, B_0, B_\pi\}$	c2mm
$\left\{I, -I, B_{\frac{\pi}{3}}, B_{\frac{4\pi}{3}}\right\}$	c2mm
$\left\{I, -I, B_{\frac{2\pi}{3}}, B_{\frac{5\pi}{3}}\right\}$	c2mm

(Πιθανώς να χρειασθείτε κατ’ αρχάς τη λύση τής άσκησης 25.10.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 27

Ελεύθερες ομάδες και παραστάσεις

Συχνά είναι χρήσιμο το να είμαστε σε θέση να περιγράψουμε μια ομάδα με τη βοήθεια ενός συνόλου γεννητόρων και ενός συνόλου «σχέσεων». Για παράδειγμα, η διεδρική ομάδα D_n προσδιορίζεται μέσω των γεννητόρων r και s, οι οποίοι υπόκεινται στις σχέσεις $r^n = e$, $s^2 = e$ και $sr = r^{-1}s$ ή -ισοδυνάμως- στις $r^n = s^2 = (rs)^2 = e$. Αντιλαμβανόμαστε ότι όλα τα στοιχεία αυτής τής ομάδας μπορούν να γραφούν ως γινόμενα δυνάμεων των r και s, και ότι ο πολλαπλασιαστικός κατάλογος είναι πλήρως καθορισμένος μέσω των δοθέντων σχέσεων. Για να καταστεί τούτο σαφές θα εισαγάγουμε την έννοια τής «ελεύθερης» ομάδας.

Πιθανώς η απλούστερη έννοια που θα μπορούσε να γίνει άμεσα κατανοητή είναι αυτή τού ελευθέρου συνόλου γεννητόρων μιας δοθείσας ομάδας. Ένα υποσύνολο X μιας ομάδας G καλείται **ελεύθερο σύνολο γεννητόρων** για την G όταν κάθε στοιχείο $g \in G \smallsetminus \{e\}$ μπορεί να εκφρασθεί κατά τρόπο *μοναδικό* ως ένα γινόμενο

$$g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k} \qquad (*)$$

πεπερασμένου μήκους, όπου τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ανήκουν στο X, τα x_i δεν είναι ποτέ ίσα με τα x_{i+1} και καθένας των n_i είναι ένας ακέραιος αριθμός διάφορος τού μηδενός. Ονομάζουμε το σύνολο των γεννητόρων «ελεύθερο», επειδή μέσω τής μοναδικότητας τού $(*)$ δεν υφίστανται σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του. Εάν μια ομάδα G διαθέτει ένα ελεύθερο σύνολο γεννητόρων X, τότε η G καλείται **ελεύθερη ομάδα** (επί τού X).

Για ένα δοθέν μη κενό σύνολο X μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ομάδα, η οποία θα έχει το X ως ελεύθερο σύνολο γεννητόρων, ως εξής: Μια **λέξη** ειλημμένη από το *αλφάβητο* X ορίζεται ως ένα πεπερασμένο γινόμενο $x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$, με καθένα των x_i να ανήκει στο X και όλους τούς n_i ακεραίους αριθμούς· καλείται μάλιστα **ανηγμένη λέξη** όταν, επιπροσθέτως, τα x_i δεν είναι ποτέ ίσα με τα x_{i+1} και όλοι οι n_i είναι διάφοροι τού μηδενός. Μπορούμε βεβαίως πάντοτε να φτειάξουμε μια ανηγμένη λέξη από μια τυχούσα λέξη μαζεύοντας μαζί τις δυνάμεις όταν συναντούμε ίσα παρακείμενα στοιχεία και παραλείποντας τις μηδενικές δυνάμεις (εν ανάγκη με επανάληψη αυτής τής διαδικασίας αρκετές φορές). Η παράθεση ενός παραδείγματος αξίζει όσο και μια ολόκληρη σελίδα επεξηγήσεων. Εάν $X = \{x, y, z\}$ και εάν θεωρήσουμε τη λέξη

$$w = x^{-3}x^2\, y^5\, y^{-5}\, x^7\, z^2\, z^{-2}\, x^{-1}\, x\, z\, y^2\, x^{-1},$$

τότε

$$\begin{aligned} w &= x^{-1}y^0\ x^7\, z^0\, x^0\, z\, y^2\, x^{-1} \\ &= x^{-1}x^7\, z\, y^2\, x^{-1} \\ &= x^6\, z\, y^2\, x^{-1}, \end{aligned}$$

η οποία είναι μια ανηγμένη λέξη. Σημειωτέον ότι τα στοιχεία τού X δεν μετατίθενται (το ένα με το άλλο). Βεβαίως, ενδέχεται η εκτέλεση αυτής τής αναγωγικής διαδικασίας να μπορεί να γίνει και κατά διαφορετικούς τρόπους. Για τού λόγου το αληθές, στο ως άνω παράδειγμά μας μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} w &= \left(x^{-3}x^2\, y^5\, y^{-5}\, x^7\, z^2\right)\left(z^{-2}\, x^{-1}\, x\, z\, y^2\, x^{-1}\right) \\ &= \left(x^{-1}y^0\ x^7\, z^2\right)\left(z^{-2}\, x^0\, z\, y^2\, x^{-1}\right) \\ &= \left(x^{-1}x^7\, z^2\right)\left(z^{-2}\ z\, y^2\, x^{-1}\right) \\ &= \left(x^6\, z^2\right)\left(z^{-1}\ y^2\, x^{-1}\right) \\ &= x^6\, z^2\, z^{-1}\ y^2\, x^{-1} \\ &= x^6\, z\, y^2\, x^{-1}. \end{aligned}$$

Ωστόσο, *το τελικό αποτέλεσμα θα είναι πάντοτε το ίδιο*, όπως θα διαπιστώσουμε στο θεώρημα (27.1), και κάθε λέξη w θα ανάγεται σε μία μονοσημάντως ορισμένη ανηγμένη λέξη $\overline{w}$. Εξάλλου, η αναγωγή π.χ. τής λέξης x_1^0 μας δίνει μια λέξη χωρίς σύμβολο, η οποία θα αναφέρεται ως **κενή λέξη**. Τώρα μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε λέξεις μεταξύ τους, αναγράφοντας απλώς και μόνον τη μια πίσω από την άλλη. Όταν αυτό γίνεται με δύο ανηγμένες λέξεις, ας πούμε τις w_1 και w_2, τότε το $w_1 w_2$ ενδέχεται να μην είναι μια ανηγμένη λέξη, καθότι το τελευταίο σύμβολο τής w_1 μπορεί να συμπίπτει με το πρώτο σύμβολο τής w_2. Όμως η w_1w_2 απλοποιείται πάντοτε και καθίσταται μια ανηγμένη λέξη $\overline{w_1w_2}$. Το σύνολο όλων των ανηγμένων λέξεων σχηματίζει μια ομάδα με «γινόμενό της» το $\overline{w_1w_2}$. (Η προσεταιριστικότητα έπεται από το ότι οι λέξεις $\overline{(\overline{w_1w_2})\, w_3}$ και $\overline{w_1\,(\overline{w_2w_3})}$ προκύπτουν από δύο διαφορετικές αναγωγές τής *ίδιας* λέξης $w_1w_2w_3$, οπότε

$$\overline{(\overline{w_1w_2})\, w_3} = \overline{w_1\,(\overline{w_2w_3})} = \overline{w_1w_2w_3}.$$

Το μοναδιαίο της στοιχείο είναι η κενή λέξη, ενώ το αντίστροφο στοιχείο τής ανηγμένης λέξης $x_1^{n_1}\,\cdots\,x_k^{n_k}$ είναι η $x_k^{-n_k}\,\cdots\,x_1^{-n_1}$, η οποία είναι επίσης ανηγμένη.)

Θα ονομάσουμε αυτήν την ομάδα των ανηγμένων λέξεων (των ειλημμένων από το αλφάβητο X) **ελεύθερη ομάδα παραγόμενη από τα στοιχεία τού** X και θα τη συμβολίζουμε ως $F(X)$. Τα όσα εκθέσαμε μέχρι τούδε εξαρτώνται κατ' ουσίαν από το ακόλουθο θεώρημα.

(27.1) Θεώρημα. *Κάθε λέξη μπορεί να απλοποιηθεί σε μία και μόνη ανηγμένη λέξη.*

Απόδειξη. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε ένα τέχνασμα που μας θυμίζει σε μεγάλο βαθμό την απόδειξη τού θεωρήματος τού Cauchy. Για κάθε $x \in X$ κατασκευάζουμε μια μετάταξη φ_x τού συνόλου των ανηγμένων λέξεων μέσω τού τύπου

$$\varphi_x\,(w) = \overline{xw},$$

όπου η w είναι μια *ανηγμένη* λέξη. (Προφανώς η $\overline{xw}$ είναι καλώς ορισμένη, διότι η w είναι ανηγμένη). Εάν η

$$u = x_1^{m_1}\,x_2^{m_2}\,\cdots\,x_s^{m_s}$$

είναι μια τυχούσα λέξη, τότε ως φ_u ορίζουμε τη σύνθεση μετατάξεων

$$\varphi_u = \left(\varphi_{x_1}\right)^{m_1}\left(\varphi_{x_2}\right)^{m_2}\,\cdots\,\left(\varphi_{x_s}\right)^{m_s}.$$

Οι μετατάξεις των ανηγμένων λέξεων σχηματίζουν μια *ομάδα* ως προς την πράξη τής σύνθεσης μετατάξεων. Επομένως, εάν οι u, w είναι δυο λέξεις και εάν η u ανάγεται κατά κάποιον τρόπο στην w, τότε $\varphi_u = \varphi_w$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ίδια λέξη u μπορεί να απλοποιηθεί κατά δύο διαφορετικούς τρόπους δίνοντάς μας τις ανηγμένες λέξεις v και w. Τότε $\varphi_v = \varphi_u = \varphi_w$. Αλλά, επειδή η μετάταξη φ_v στέλνει την κενή λέξη να απεικονισθεί στην w, έχουμε κατ' ανάγκην $v = w$. $\square$

Κάθε ελεύθερη ομάδα, η οποία παράγεται από ένα και μόνο στοιχείο x, είναι άπειρη κυκλική, αφού οι μόνες ανηγμένες λέξεις που μπορούν να σχηματισθούν είναι οι δυνάμεις τής μορφής x^n. Όταν υπάρχουν δύο ή και περισσότεροι γεννήτορες, η $F(X)$ αποτελεί μια μη αβελιανή ομάδα, κάθε στοιχείο τής οποίας έχει άπειρη τάξη. Ας σημειωθεί ότι κάθε αμφίρριψη $\varphi : X \longrightarrow Y$ επάγει έναν ισομορφισμό $F(X) \cong F(Y)$. Εν προκειμένω, κάθε ανηγμένη λέξη

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

τής $F(X)$ απεικονίζεται (μέσω τής φ) στην ανηγμένη λέξη

$$\varphi(x_1)^{n_1} \varphi(x_2)^{n_2} \cdots \varphi(x_k)^{n_k}$$

τής $F(Y)$. Εφεξής θα συμβολίζουμε ως F_n «την» ελεύθερη ομάδα την παραγόμενη από ένα σύνολο με n στοιχεία.

(27.2) Θεώρημα. *Η αβελιανοποίηση τής F_n μάς δίνει την $\mathbb{Z}^n$.*

Απόδειξη. Έστω $\{z_1, \ldots, z_n\}$ ένα ελεύθερο σύνολο γεννητόρων για την F_n. Η $F_n^{\mathrm{ab}} = F_n / [F_n, F_n]$ είναι αβελιανή και παράγεται από τις πλευρικές κλάσεις $\{ z_k [F_n, F_n] \mid 1 \leq k \leq n\}$. Συγκεντρώνοντας μαζί τις δυνάμεις, τις εμφανιζόμενες σε κάθε γεννήτορα, γράφουμε κάθε στοιχείο τής F_n^{ab} μονοσημάντως υπό τη μορφή

$$z_1^{r_1} z_2^{r_2} \cdots z_n^{r_n} [F_n, F_n].$$

Η συνάρτηση

$$F_n^{\mathrm{ab}} \longrightarrow \mathbb{Z}^n, \qquad z_1^{r_1} z_2^{r_2} \cdots z_n^{r_n} [F_n, F_n] \longmapsto (r_1, r_2, \ldots, r_n),$$

αποτελεί έναν ισομορφισμό ομάδων. □

(27.3) Θεώρημα. *Εάν $F_m \cong F_n$, τότε $m = n$.*

Απόδειξη. Κάθε ισομορφισμός $\varphi : G \longrightarrow H$ μεταξύ δύο τυχουσών ομάδων G και H στέλνει τη μεταθέτρια ομάδα $[G, G]$ τής G να απεικονισθεί στη μεταθέτρια ομάδα $[H, H]$ τής H, αφού κάθε μεταθέτης $xyx^{-1}y^{-1}$ τής G απεικονίζεται στον μεταθέτη $\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1}$ τής H. Συνεπώς, ο ισομορφισμός φ επάγει έναν ισομορφισμό μεταξύ των αβελιανοποιημένων ομάδων G^{ab} και H^{ab}. Εάν λοιπόν $F_m \cong F_n$, τότε (βάσει τού θεωρήματος (27.2)) $F_m^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^m \cong \mathbb{Z}^n \cong F_n^{\mathrm{ab}}$, οπότε κατ' ανάγκην $m = n$ (κατά το λήμμα (21.8)). □

Έστω G μια ομάδα και έστω X ένα σύνολο το οποίο παράγει την G. Τότε υπάρχει ένας φυσικός ομομορφισμός από την ελεύθερη ομάδα $F(X)$ επί τής G, ο οποίος απεικονίζει κάθε ανηγμένη λέξη $x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$ στο αντίστοιχο γινόμενο των στοιχείων τής ομάδας εντός τής G. Αυτός είναι επιρριπτικός (ήτοι ένας «επιμορφισμός»), διότι το X παράγει την G. Εάν με το N συμβολίσουμε τον πυρήνα αυτού τού επιμορφισμού, τότε, κατά το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών, η $F(X)/N$ είναι ισόμορφη με την G. Επομένως, *κάθε ομάδα G είναι ισόμορφη μιας ομάδας πηλίκων $F(X)/N$ μιας ελεύθερης ομάδας.* Αυτός ακριβώς ο ισομορφισμός μάς επιτρέπει να περιγράφουμε τις ομάδες κατά τρόπο αυστηρό κάνοντας χρήση γεννητόρων και σχέσεων. Ας υποθέσουμε τώρα πως η R είναι μια συλλογή λέξεων εντός τής $F(X)$, τέτοια ώστε οι λέξεις της να παράγουν από κοινού με τις συζυγείς τους την N. Τούτο σημαίνει πως η N είναι η ελάχιστη ορθόθετη υποομάδα τής $F(X)$ που περιέχει την R. Αυτές οι λέξεις προσδιορίζουν επακριβώς το ποιες λέξεις εντός τής $F(X)$ καθίστανται το μοναδιαίο στοιχείο όταν μεταβαίνουμε από την $F(X)$ στην G, ήτοι το ποια γινόμενα στοιχείων τής G είναι ίσα με το μοναδιαίο στοιχείο τής G. Υπ' αυτές τις προϋποθέσεις λέμε πως η R είναι ένα **σύνολο οριζουσών σχέσεων** για την G.

(27.4) Παράδειγμα. Εάν $G = D_n$ και $X = \{r, s\}$, τότε οι λέξεις $r^n, s^2, (rs)^2$ σχηματίζουν ένα σύνολο οριζουσών σχέσεων για την G. Έστω M η ελάχιστη ορθόθετη υποομάδα τής $F(X)$ που περιέχει αυτές τις τρεις λέξεις και έστω N, όπως και προηγουμένως, ο πυρήνας τού ομομορφισμού $\pi : F(X) \longrightarrow D_n$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει η ισότητα $M = N$. Προφανώς τα στοιχεία r^n, s^2 και $(rs)^2$ στέλνονται μέσω τού π να απεικονισθούν στο μοναδιαίο στοιχείο τής D_n, οπότε η M περιέχεται στην N και, βάσει τού τρίτου θεωρήματος ισομορφισμών (16.6), διαθέτουμε έναν ομομορφισμό

$$F(X)/M \longrightarrow F(X)/N$$

με πυρήνα του την ομάδα πηλίκων N/M. Ιδιαιτέρως έχουμε $|F(X)/M| \geq 2n$. Από την άλλη μεριά, οι πλευρικές κλάσεις rM και sM παράγουν την ομάδα πηλίκων $F(X)/M$ και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$(rM)^n = M, \qquad (sM)^2 = M, \qquad (rsM)^2 = M$$

ή, ισοδυνάμως, τις σχέσεις

$$(rM)^n = M, \qquad (sM)^2 = M, \qquad srM = r^{n-1}sM \qquad (**)$$

διότι τα r^n, s^2 και $(rs)^2$ ανήκουν στην M. Κάνοντας χρήση των $(**)$ είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι πλευρικές κλάσεις

$$M,\, rM,\, \dots\, ,\, r^{n-1}M,\, sM,\, rsM,\, \dots\, ,\, r^{n-1}sM$$

συγκροτούν μια υποομάδα τής ομάδας πηλίκων $F(X)/M$. Επειδή αυτή η υποομάδα περιέχει τόσο την rM όσο και την sM, οφείλει να ταυτίζεται με ολόκληρη την ομάδα πηλίκων $F(X)/M$. Άρα $|F(X)/M| \leq 2n$. Εξ αυτού συνάγουμε ότι $|F(X)/M| = 2n$ και ότι $M = N$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα μη κενό σύνολο X και μια συλλογή λέξεων R ειλημμένων από το αλφάβητο X. Η ομάδα, η προσδιοριζόμενη μέσω **τού συνόλου των γεννητόρων** X και μέσω τής συλλογής **των οριζουσών σχέσεων** R, είναι εξ ορισμού η ομάδα πηλίκων $F(X)/N$, όπου η N είναι η ελάχιστη ορθόθετη υποομάδα τής $F(X)$ που περιέχει την R. Εάν η G είναι μια τυχούσα ομάδα, η οποία είναι ισόμορφη τής $F(X)/N$, τότε λέμε πως το ζεύγος X, R αποτελεί μια **παράσταση** τής G. Ιδιαιτέρως, όταν το X συμβαίνει να είναι ένα πεπερασμένο σύνολο με στοιχεία του τα $x_1, x_2, \ldots, x_s$ και η R ένα πεπερασμένο σύνολο λέξεων με στοιχεία του τα $w_1, w_2, \ldots, w_t$, τότε λέμε πως η G είναι **πεπερασμένως παριστώμενη** (με **γεννήτορές** της τους $x_1, x_2, \ldots, x_s$, υποκειμένους στις ορίζουσες **σχέσεις** $w_1, w_2, \ldots, w_t$), και γράφουμε

$$G \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_s \mid w_1, w_2, \ldots, w_t\}\ .$$

(27.5) Παραδείγματα. Αναφέρουμε τα εξής παραδείγματα παραστάσεων οικείων μας ομάδων:

(i) $\mathbb{Z} \equiv \{x \mid —\}$.

(ii) $\mathbb{Z}_n \equiv \{x \mid x^n\}$.

(iii) $D_n \equiv \{x, y \mid x^n,\, y^2,\, (xy)^2\}$.

(iv) $Q \equiv \{x, y \mid x^4,\, x^2y^{-2},\, xyxy^{-1}\}$.

(v) Για κάθε ακέραιο αριθμό $m \geq 2$ η παράσταση

$$\{x, y \mid x^{2m}, x^m y^{-2}, xyxy^{-1}\}$$

προσδιορίζει τη λεγομένη *δικυκλική* ομάδα τάξης $4m$ (πρβλ. άσκηση 20.15).

(vi) Η ίδια ομάδα ενδέχεται να διαθέτει πολλές διαφορετικές παραστάσεις. Για παράδειγμα,

$$\mathbb{Z} \equiv \{x \mid —\} \equiv \{x, y \mid y\},$$

$$\mathbb{Z}_6 \equiv \{x \mid x^6\} \equiv \{x, y \mid x^3,\, y^2,\, xyx^{-1}y^{-1}\}.$$

Αυτή η δεύτερη παράσταση τής $\mathbb{Z}_6$ την περιγράφει υπό τη μορφή $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$.

(vii) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \equiv \{x, y \mid x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}\}$.

(viii) Η παράσταση

$$\{x_1, \ldots, x_n \mid x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1},\ 1 \leq i < j \leq n\}$$

προσδιορίζει μια *ελεύθερη αβελιανή ομάδα βαθμίδας* n.

(27.6) Παραδείγματα. Εδώ παραθέτουμε παραστάσεις για δύο ομάδες διακοσμητικών επιστρωμάτων τοίχου.

$$\mathrm{pg} \equiv \{x, y \mid x^2 y^{-2}\}.$$

Οι γεννήτορες είναι παράλληλοι ολισθαίνοντες κατοπτρισμοί. Χρησιμοποιώντας τούς συμβολισμούς τού κεφαλαίου 26 μπορούμε να θέσουμε ως $x = (\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0)$ και ως $y = (\frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{b}, B_0)$.

$$\mathrm{p3m1} \equiv \left\{x, y \;\middle|\; x^2, y^3, \left(xy^{-1}xy\right)^3\right\}.$$

Εδώ η ομάδα παράγεται από έναν κατοπτρισμό και από μια περιστροφή τάξης 3, π.χ. από τα $x = (\mathbf{0}, B_0)$ και $y = (\mathbf{a}, A_{\frac{2\pi}{3}})$.

Οι ελεύθερες ομάδες επιδέχονται τον ακόλουθο *χαρακτηρισμό.*

(27.7) Θεώρημα. *Έστω X ένα υποσύνολο μιας ομάδας G. Τότε το X αποτελεί ένα ελεύθερο σύνολο γεννητόρων για την G εάν και μόνον εάν για κάθε ομάδα H και για κάθε συνάρτηση $X \longrightarrow H$ υπάρχει μια* μονοσημάντως ορισμένη *επέκταση αυτής τής συνάρτησης σε έναν ομομορφισμό $G \longrightarrow H$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε, κατ' αρχάς, ότι το X είναι ένα ελεύθερο σύνολο γεννητόρων για την G. Τότε, κάθε στοιχείο τής $G \setminus \{e\}$ μπορεί να γραφεί κατά έναν και μόνον τρόπο ως ανηγμένη λέξη ειλημμένη από το αλφάβητο X. Εάν μας δοθεί μια οιαδήποτε ομάδα H και μια συνάρτηση $f : X \longrightarrow H$, τότε ο *μόνος τρόπος*, με τον οποίο μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε έναν ομομορφισμό $G \longrightarrow H$, είναι να απεικονίσουμε κάθε ανηγμένη λέξη ως εξής:

$$x_1^{n_1}\, x_2^{n_2}\, \cdots\, x_k^{n_k} \longmapsto [f\,(x_1)]^{n_1}\, [f\,\,(x_2)]^{n_2}\, \cdots\, [f\,(x_k)]^{n_k}$$

και το μοναδιαίο στοιχείο τής G σε εκείνο τής H.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι, για οιαδήποτε ομάδα H και οιαδήποτε συνάρτηση $X \longrightarrow H$, μπορούμε να βρούμε μια μονοσημάντως ορισμένη επέκταση αυτής τής συνάρτησης σε έναν ομομορφισμό $G \longrightarrow H$. Όπως και προηγουμένως, υποθέτουμε ότι η $\pi : F\,(X) \longrightarrow G$ είναι ο ομομορφισμός, ο οποίος στέλνει κάθε ανηγμένη λέξη να απεικονισθεί στο ίδιο γινόμενο, αλλά θεωρούμενο ως ένα στοιχείο τής G. Θα δείξουμε ότι η π είναι ένας *ισομορφισμός*, πράγμα που σημαίνει πως το X αποτελεί κατ' ανάγκην ένα ελεύθερο σύνολο γεννητόρων για την G. Θεωρώντας ως H την $F(X)$, η ένθεση τού X εντός τής $F(X)$ επεκτείνεται σε έναν ομομορφισμό $\varphi : G \longrightarrow F(X)$. Προφανώς η σύνθεση $\varphi\pi$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση από την $F(X)$ επί τής $F(X)$, καθότι η φ είναι η ταυτοτική συνάρτηση επί τού X. Επιπροσθέτως, τόσο η σύνθεση $\pi\varphi : G \longrightarrow G$ όσο και η ταυτοτική συνάρτηση από την G επί τής G είναι ομομορφισμοί, οι οποίοι επεκτείνουν την ένθεση τού X εντός τής G υπεράνω ολόκληρης τής G. Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, υπάρχει *μόνον μία* επέκταση αυτού τού είδους, οπότε *και* η $\pi\varphi : G \longrightarrow G$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση από την G επί τής G. Άρα η π είναι όντως ένας ισομορφισμός. □

Ασκήσεις

27.1 Μετατρέψτε τις ακόλουθες λέξεις, τις κατασκευασθείσες μέσω τού αλφαβήτου $\{x, y, z\}$, σε ανηγμένες λέξεις:
(i) $w_1 = x^{-1}y^3y^{-1}z^{-2}zzy^{-1}z^{-4}z$,
(ii) $w_2 = z^3y^{-2}xx^{-1}yx^4z^{-6}z^4$,
(iii) $w_3 = zy^5y^{-2}y^{-3}z^5x^2z^{-1}zx^{-3}xz^{-4}x^{-4}y$.

27.2 Για τις ως άνω w_1, w_2, w_3 δείξτε ότι ισχύουν οι εξής ισότητες:

$$\overline{w_1w_2} = x^3z^{-2}, \quad \overline{w_2w_3} = z^3, \quad \overline{w_1w_2w_3} = x^{-1}y.$$

27.3 Ας υποθέσουμε ότι οι m και n είναι δυο θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας επιρριπτικός ομομορφισμός (ήτοι ένας «επιμορφισμός») $F_n \longrightarrow F_m$ εάν και μόνον εάν $m \leq n$.

27.4 Δείξτε ότι η F_n περιέχει πάντοτε μια ορθόθετη υποομάδα δείκτη 2.

27.5 Αποδείξτε λεπτομερώς ότι η $\{x, y \mid xyx^{-1}y^{-1}\}$ είναι μια παράσταση για την $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

27.6 Αποδείξτε ότι η $\{x, y \mid y^2, (xy)^2\}$ είναι μια παράσταση για την άπειρη διεδρική ομάδα.

27.7 Δείξτε ότι η $F_2 \times F_2$ δεν είναι ελεύθερη ομάδα. Γράψτε μια παράσταση για την $F_2 \times F_2$.

27.8 Βρείτε μια παράσταση για καθεμιά των επτά ομάδων ζωοφόρου. (Αυτές οι ομάδες εισήχθησαν στην άσκηση 26.6.)

27.9 Εάν τα x και y παράγουν την F_2, ορίσουμε το

$$X = \{xyx^{-1}, x^2yx^{-2}, x^3yx^{-3}, \dots\}$$

και συμβολίσουμε με H την υποομάδα την παραγόμενη από το X, δείξτε ότι το X αποτελεί ένα ελεύθερο σύνολο γεννητόρων για την H.

27.10 Έστω n ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Αποδείξτε ότι η F_2 περιέχει μια υποομάδα ισόμορφη τής F_n.

27.11 Εάν οι G και H είναι δυο ομάδες, μπορούμε να σχηματίσουμε λέξεις $x_1 x_2 \ldots x_n$, όπου κάθε x_i ανήκει στην αποσυνδετή ένωση $G \cup H$. Υπ' αυτές τις προϋποθέσεις ονομάζουμε μια λέξη **ανηγμένη** όταν τα x_i και x_{i+1} δεν ανήκουν ποτέ στην ίδια ομάδα και όταν το x_i δεν ισούται ποτέ με το μοναδιαίο στοιχείο τής G ή το μοναδιαίο στοιχείο τής H. Δείξτε ότι, ύστερα από συμπερίληψη τής κενής λέξης στο σύνολο αυτών των λέξεων, πολλαπλασιασμό των ανηγμένων λέξεων με την τοποθέτηση τής μιας δίπλα στην άλλη και παράλληλη αναγωγή τού εκάστοτε γινομένου κατά το δοκούν, δημιουργούμε μια νέα ομάδα. Αυτή η ομάδα καλείται **ελεύθερο γινόμενο** των G και H και συμβολίζεται ως $G * H$.

27.12 Έστω P μια ομάδα η οποία περιέχει τις ομάδες G και H ως υποομάδες της. Αποδείξτε ότι η P είναι ισόμορφη με το ελεύθερο γινόμενο $G * H$ των G και H, και μάλιστα μέσω ενός ισομορφισμού, οι περιορισμοί τού οποίου επί των G και H είναι ταυτοτικοί, εάν και μόνον εάν για κάθε αυθαίρετη ομάδα K και για ομομορφισμούς $G \longrightarrow K$ και $H \longrightarrow K$ υπάρχουν μονοσημάντως ορισμένες επεκτάσεις τους σε έναν ομομορφισμό $P \longrightarrow K$.

27.13 Δείξτε ότι η $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ είναι ισόμορφη τής F_2.

27.14 Αποδείξτε ότι $D_\infty \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 28

Δέντρα και το θεώρημα των Nielsen και Schreier

Ένα **γράφημα** Γ αποτελείται: από ένα σύνολο A (το σύνολο των **διευθυνομένων ακμών**), από ένα σύνολο V (το σύνολο των **κορυφών**), καθώς και από δύο συναρτήσεις

$$A \longrightarrow A, \qquad \alpha \longmapsto \overline{\alpha},$$

$$A \longrightarrow V \times V, \quad \alpha \longmapsto (i(\alpha), t(\alpha)),$$

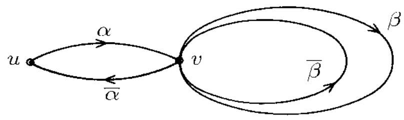
οι οποίες ικανοποιούν τις $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$, $\overline{\alpha} \neq \alpha$ και $i(\overline{\alpha}) = t(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in A$. Οι κορυφές $i(\alpha)$ και $t(\alpha)$ είναι η **αρχική** και, αντιστοίχως, η **τερματική** κορυφή τής διευθυνομένης ακμής α, ενώ η $\overline{\alpha}$ είναι η **ανάστροφος** τής α. Εφεξής, χάριν συντομίας, θα αναφέρουμε (ως επί το πλείστον) τις διευθυνόμενες ακμές απλώς ως *ακμές*.

Ο ως άνω ορισμός παραείναι αφηρημένος! Ωστόσο, για καλή μας τύχη, μπορούμε να σχεδιάζουμε εικόνες κάνοντας χρήση κουκκίδων για τις κορυφές και τόξων για τις ακμές, όπως π.χ. στο σχ. 28.1(a). Στην πραγματικότητα, η διαίσθησή μας θα έμενε ικανοποιημένη ακόμη και εάν θεωρούσαμε μόνον απλουστευμένα διαγράμματα, όπως αυτό τού σχ. 28.1(b), υπό τον όρο ότι θα θυμόμαστε πως κάθε «φυσική» ακμή οφείλει να αναπαριστά ένα ζεύγος διευθυνομένων ακμών.

Ένας **δρόμος** εντός ενός γραφήματος Γ, ο οποίος συνδέει την κορυφή u με την κορυφή v, είναι μια διατεταγμένη n-άδα ακμών $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ (όπου n κάποιος θετικός ακέραιος αριθμός), για τις οποίες ισχύουν οι ισότητες

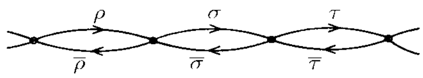
$$i\,(\alpha_1) = u, \quad i\,(\alpha_{k+1}) = t\,(\alpha_k)\,, \ \forall k, \ 1 \le k \le n-1, \quad t\,(\alpha_n) = v.$$

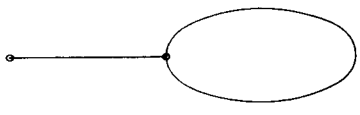
Κάθε δρόμος τής μορφής $\alpha\overline{\alpha}$, κατασκευαζόμενος από μία ακμή α ακολουθούμενη από την ανάστροφό της, ονομάζεται **ταξίδι μετ' επιστροφής**.



$$i\,(\alpha) = u$$
$$t\,(\alpha) = v$$
$$i\,(\beta) = t\,(\beta) = v$$

(a)

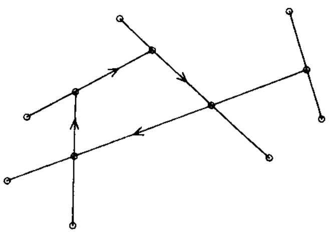




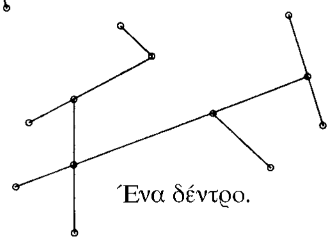
(b)

Σχήμα 28.1

Ένα γράφημα καλείται **δέντρο** όταν δυο τυχούσες (αλλά σαφώς διακεκριμένες) κορυφές του μπορούν πάντοτε να συνδέονται μέσω ενός (τουλάχιστον) δρόμου και όταν -ταυτοχρόνως- κάθε δρόμος του, ο οποίος συνδέει μια κορυφή με τον εαυτό της, υποχρεούται να περιέχει ένα (τουλάχιστον) ταξίδι μετ' επιστροφής. Το σχ. 28.2 εικονογραφεί αυτούς τους ορισμούς σε δύο παραδείγματα.



Ένα γράφημα
που δεν είναι δέντρο.



Ένα δέντρο.

Σχήμα 28.2

Εάν το Γ είναι ένα δέντρο και οι u και v είναι δυο σαφώς διακεκριμένες κορυφές του, τότε υπάρχει *μόνον ένας* δρόμος, ο οποίος συνδέει μεταξύ τους τις u και v, και ο οποίος δεν περιέχει *κανένα* ταξίδι μετ' επιστροφής. Ο εν λόγω δρόμος είναι η **γεωδαισιακή** $\overrightarrow{uv}$ από την κορυφή u στην κορυφή v. Κάθε άλλος δρόμος, ο οποίος συνδέει την κορυφή u με την κορυφή v, μπορεί να αποκτηθεί από τη γεωδαισιακή $\overrightarrow{uv}$ ύστερα από διαδοχική πρόσθεση ταξιδίων μετ' επιστροφής (βλ. άσκηση 28.2).

Εν συνεχεία, θα αξιοποιήσουμε τη θεμελιώδη έννοια τής «δράσης μιας ομάδας επί ενός δέντρου». Μια **δράση μιας ομάδας** G **επί ενός γραφήματος** Γ είναι μια δράση (υπό τη συνήθη έννοια) τής G τόσο επί τού A όσο και επί τού V, τέτοια ώστε

$$g\left(\overline{\alpha}\right)=\overline{g(\alpha)},\quad g(i(\alpha))=i\left(g\left(\alpha\right)\right),\quad g(\alpha)\neq\overline{\alpha},$$

για όλα τα $g\in G$ και όλες τις ακμές $\alpha\in A$. Με άλλα λόγια, τα στοιχεία τής G μετατάσσουν τις ακμές και τις κορυφές τού Γ κατά έναν τρόπο, ο οποίος είναι συμβατός προς τη δομή που έχει το Γ ως γράφημα, ενώ -ταυτοχρόνως- δεν επιτρέπεται σε κανένα στοιχείο τής ομάδας G να αναστρέφει ακμές. Τα στοιχεία τής ομάδας επιδεικνύουν ορθή συμπεριφορά όταν δρουν επί των τερματικών κορυφών, καθότι έχουμε

$$g(t(\alpha))=g\left(i\left(\overline{\alpha}\right)\right)=i\left(g\left(\overline{\alpha}\right)\right)=i\left(\overline{g(\alpha)}\right)=t\left(g\left(\alpha\right)\right),$$

για κάθε ακμή α. Θα λέμε πως η G **δρα ελευθέρως** επί τού Γ στην περίπτωση κατά την οποία οι σταθεροποιητές όλων των κορυφών (ως προς τη θεωρούμενη δράση) είναι ισόμορφοι με την τετριμμένη ομάδα $\{e\}$ τής G.

(28.1) Παράδειγμα. Θεωρούμε ένα γράφημα, η απλουστευμένη εικόνα τού οποίου είναι το γράμμα Y, καθώς και μια κυκλική ομάδα τάξης 3, η οποία δρα επ' αυτού μέσω περιστροφών. Από τυπική άποψη έχουμε το $A=\{\,\alpha_r,\overline{\alpha_r}\mid 1\leq r\leq 3\}$ ως σύνολο (διευθυνομένων) ακμών και το $V=\{v,v_1,v_2,v_3\}$ ως σύνολο κορυφών, όπου $\overline{\overline{\alpha_r}}=\alpha_r$, $i\left(\alpha_r\right)=t\left(\overline{\alpha_r}\right)=v$, $t\left(\alpha_r\right)=i\left(\overline{\alpha_r}\right)=v_r$. Εάν το g είναι ένας γεννήτορας τής G, τότε η εν λόγω δράση καθορίζεται μέσω τής

$$g\left(\alpha_r\right)=\alpha_{r+1}\,(\mathrm{mod}\ 3)\,.$$

Ο σταθεροποιητής τής κορυφής v ισούται με ολόκληρη την ομάδα G, οπότε η G δεν δρα ελευθέρως.

(28.2) Παράδειγμα. Έστω ότι το A διαθέτει ένα ζεύγος ακμών $\alpha_r,\overline{\alpha_r}$ για κάθε ακέραιο αριθμό r, $V=\mathbb{Z}$ και $\overline{\overline{\alpha_r}}=\alpha_r$, $i\left(\alpha_r\right)=t\left(\overline{\alpha_r}\right)=r$, $t\left(\alpha_r\right)=i\left(\overline{\alpha_r}\right)=r+1$. Αναλογιζόμαστε το γράφημα αυτό ως την πραγματική ευθεία επί τής οποίας έχουμε μαρκάρει τους ακεραίους αριθμούς εν είδει κορυφών. Εάν η G είναι άπειρη κυκλική με γεννήτορά της το g, τότε η $g(\alpha_r) = \alpha_{r+1}$ προσδιορίζει μια *ελεύθερη* δράση τής G επί τού προκειμένου γραφήματος Γ.

(28.3) Παράδειγμα. Έστω Γ όπως στο προηγούμενο παράδειγμα και έστω G η άπειρη διεδρική ομάδα με παράστασή της την $\left\{ g, h \mid h^2, (gh)^2 \right\}$. Τότε οι

$$g(\alpha_r) = \alpha_{r+2}, \;\; h(\alpha_r) = \overline{\alpha_{-r-1}}$$

μας παρέχουν μια δράση τής G επί τού Γ.

(28.4) Παράδειγμα. Εάν μας δοθεί μια ομάδα G και ένα σύνολο γεννητόρων X τής G, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γράφημα $\Gamma(G, X)$ ως εξής: Έστω A η συλλογή όλων των διατεταγμένων ζευγών (g, z), όπου $g \in G$ και είτε το z είτε το z^{-1} ανήκει στο X. Παίρνοντας ως V την ίδια την G ορίζουμε

$$\overline{(g,z)} = (gz, z^{-1}),$$

$$i((g,z)) = g, \qquad t((g,z)) = gz.$$

Έτσι, διαθέτουμε μία κορυφή για κάθε στοιχείο τής G, καθώς και μία ακμή με αρχική κορυφή g_1 και τερματική κορυφή g_2 οποτεδήποτε ισχύει

$$\left(\text{είτε} \;\; g_1 x = g_2 \;\; \text{είτε} \;\; g_1 x^{-1} = g_2 \right),$$

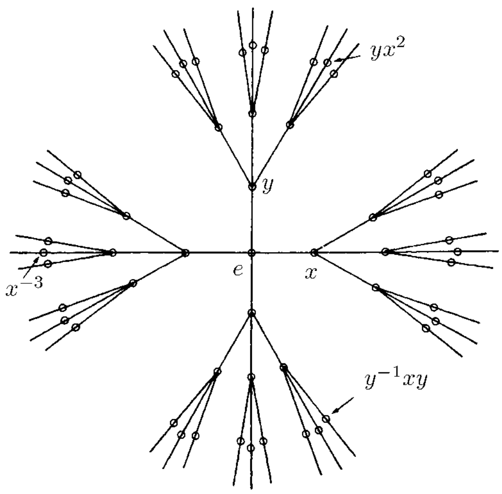
για κάποιον γεννήτορα x εντός τού X. Η δράση τής G επί τού εαυτού της μέσω μεταφορών εξ αριστερών μετατάσσει τις κορυφές τού γραφήματος $\Gamma(G, X)$, ενώ επεκτείνεται και επί των ακμών μέσω τής $g'(g, z) = (g'g, z)$, σχηματίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο μια *ελεύθερη* δράση τής G επί τού $\Gamma(G, X)$.

Δυο τυχούσες κορυφές g, h αυτού τού γραφήματος μπορούν να συνδεθούν μέσω ενός δρόμου. Δοθέντων δυο στοιχείων $g, h \in G$, εκφράζουμε το $g^{-1}h$ ως γινόμενο συμβόλων $z_1 z_2 \cdots z_k$, καθένα εκ των οποίων είτε ανήκει στο X είτε διαθέτει αντίστροφο που ανήκει στο X. Τότε $h = g z_1 z_2 \cdots z_k$ και η k-άδα ακμών

$$(g, z_1), \; (gz_1, z_2), \ldots, \; (gz_1 z_2 \cdots z_{k-1}, z_k)$$

αποτελεί έναν δρόμο, ο οποίος ξεκινά από το g και καταλήγει στο h.

Εδώ παραθέτουμε δύο ειδικές περιπτώσεις. Εάν η G είναι μια πεπερασμένη κυκλική ομάδα τάξης n και το X αποτελείται από έναν και μόνο γεννήτορα, τότε μπορούμε να αναλογιζόμαστε το $\Gamma(G, X)$ ως ένα πολύγωνο με n πλευρές εφοδιασμένο με τη δράση τής G την αναπαριστώμενη μέσω περιστροφών. Εάν, από την άλλη μεριά, η G είναι μια ελεύθερη ομάδα παραγόμενη από το $X = \{x, y\}$, τότε ο τρόπος δόμησης τού $\Gamma(G, X)$ εικονογραφείται στο σχήμα 28.3. Φυσικά, δεν είμαστε σε θέση παρά να σχεδιάσουμε μόνον λίγες από τις πρώτες του ακμές και κορυφές. Υποψιαζόμαστε όμως, εντελώς ορθά, ότι το εν λόγω γράφημα είναι ένα δέντρο.



Σχήμα 28.3

(28.5) Θεώρημα. *Εάν το X είναι ένα ελεύθερο σύστημα γεννητόρων τής G, τότε το $\Gamma(G, X)$ είναι ένα δέντρο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ είναι ένας δρόμος ο οποίος συνδέει την «κορυφή» g με τον εαυτό της. Εάν

$$\alpha_1 = (g, z_1),\ \alpha_2 = (gz_1, z_2),\ \ldots,\ \alpha_n = (gz_1z_2 \cdots z_{n-1}, z_n),$$

τότε $g = gz_1z_2 \cdots z_n$ και επομένως $e = z_1z_2 \cdots z_n$. Καθώς το X είναι ένα ελεύθερο σύστημα γεννητόρων τής G, η κενή λέξη είναι η μόνη λέξη που αναπαριστά το μοναδιαίο στοιχείο e, οπότε το $z_1z_2 \cdots z_n$ πρέπει να περιέχει ένα ζεύγος παρακειμένων συμβόλων τής μορφής zz^{-1}. Με άλλα λόγια, ο δρόμος $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$ περιέχει ένα ταξίδι μετ' επιστροφής. Συνεπώς το $\Gamma(G, X)$ είναι ένα δέντρο. □

Ας υποθέσουμε ότι μια ομάδα G δρα επί ενός δέντρου Γ. Θεωρούμε τη συλλογή T όλων εκείνων των δέντρων των περιεχομένων στο Γ, τα οποία δεν περιέχουν περισσότερες τής μίας ακμής και τής μίας κορυφής από κάθε τροχιά. Ένα στοιχείο Λ τής T, το οποίο είναι μεγιστοτικό ως προς τη μερική διάταξη την οριζόμενη από τον εγκλεισμό συνόλων, ονομάζεται **δέντρο αναφοράς**. *Μεγιστοτικό* σημαίνει πως, εάν ένα Δ ωσαύτως ανήκει στο T και εάν $\Lambda \subseteq \Delta$, τότε $\Lambda = \Delta$. Η ύπαρξη ενός μεγιστοτικού στοιχείου διασφαλίζεται μέσω τής εφαρμογής τού λεγομένου *λήμματος τού Zorn*. (Βλ. π.χ. ενότητα 16 στο βιβλίο [7] τού Halmos.)

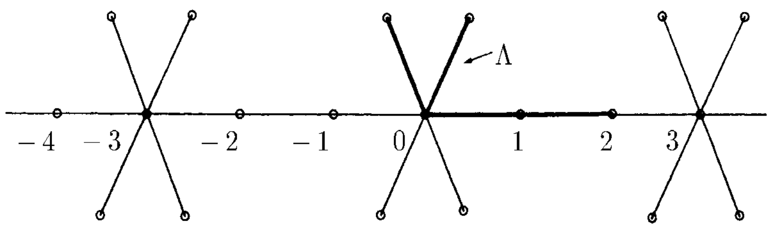
(28.6) Παράδειγμα. Έστω Γ το άπειρο δέντρο, το οποίο αναπαριστάται στο σχήμα 28.4. Εκλάβετέ το ως ένα υποσύνολο τού επιπέδου και θεωρήστε τή δράση τής

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \equiv \left\{ g, h \mid ghg^{-1}h^{-1}, h^2 \right\}$$

επ' αυτού, η οποία προσδιορίζεται μέσω των

$$g((x,y)) = (x+3,y)\,, \quad h\left((x,y)\right) = (x,-y)\,.$$

Ένα δέντρο αναφοράς δείχνεται στο διάγραμμα. Προσδιορίστε όλα τα δυνατά δέντρα αναφοράς που περιέχουν την κορυφή 0. (Αυτά είναι εν συνόλω δώδεκα.)



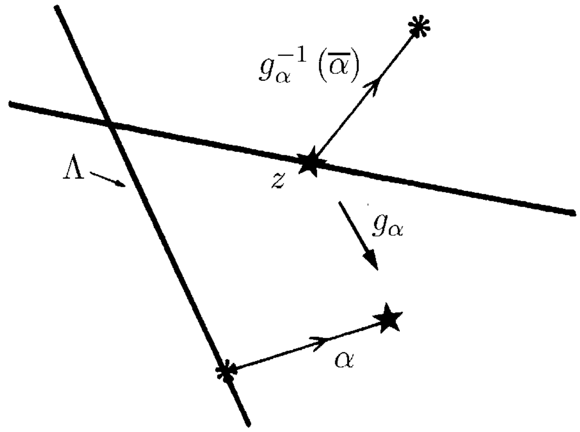
Σχήμα 28.4

(28.7) Θεώρημα. *Κάθε δέντρο αναφοράς περιέχει ακριβώς μία κορυφή από κάθε τροχιά.*

Απόδειξη. Έστω Λ ένα δέντρο αναφοράς για τη δράση μιας ομάδας G επί ενός γραφήματος Γ. Εξ ορισμού, δεν υπάρχουν δύο κορυφές τού Λ ανήκουσες στην ίδια τροχιά. Ας υποθέσουμε ότι το Λ δεν περιέχει μια κορυφή από κάθε τροχιά. Επιλέγουμε μια κορυφή v από το Λ και μια κορυφή z από το Γ, η τροχιά τής οποίας δεν συναντά το Λ. Έστω α η πρώτη ακμή τής $\overrightarrow{zv}$ και έστω $y = t(\alpha)$. Εάν η τροχιά τής κορυφής y συναντά το Λ, ας πούμε $g(y) \in \Lambda$ (για κάποιο $g \in G$), τότε, προσθέτοντας τις κορυφές $g(z), g(\alpha)$ και $g(\overline{\alpha})$ στο Λ, κατασκευάζουμε ένα δέντρο μεγαλύτερο από το Λ το οποίο περιέχει *το πολύ μία* κορυφή από κάθε τροχιά. Τούτο όμως αντιφάσκει προς τη μεγιστοτικότητα τού Λ. Από την άλλη μεριά, εάν η τροχιά τού y δεν συναντά το Λ, το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να αντικαταστήσουμε την κορυφή z με την κορυφή y και να επαναλάβουμε την ως άνω επιχειρηματολογία έως ότου καταλήξουμε και πάλι σε αντίφαση. □

(28.8) Θεώρημα. *Εάν μια ομάδα G δρα ελευθέρως επί ενός δέντρου, τότε η G είναι μια ελεύθερη ομάδα.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η G δρα ελευθέρως επί τού δέντρου Γ. Έστω Λ ένα δέντρο αναφοράς για την εν λόγω δράση. Τότε το Λ περιέχει ακριβώς μία κορυφή από κάθε τροχιά. Ας συμβολίσουμε ως A_* τη συλλογή εκείνων των ακμών τού Γ, οι οποίες, παρότι δεν ανήκουν (καθ' ολοκληρίαν) στο Λ, έχουν αρχικές κορυφές ανήκουσες στο Λ. Για μια δοθείσα ακμή $\alpha \in A_*$ υποθέτουμε ότι η z είναι η κορυφή τού Λ, η οποία ανήκει στην ίδια τροχιά που ανήκει και η κορυφή $t(\alpha)$, και επιλέγουμε ένα κατάλληλο στοιχείο $g_\alpha \in G$, ούτως ώστε να ισχύει $g_\alpha(z) = t(\alpha)$. Υπάρχει μόνον ένα στοιχείο με αυτήν την ιδιότητα. (Πράγματι· εάν αμφότερα τα g_α και h_α στέλνουν την κορυφή z στην κορυφή $t(\alpha)$, τότε $h_\alpha^{-1}g_\alpha(z) = z$. Όμως η δράση μας είναι *ελεύθερη*, οπότε το $h_\alpha^{-1}g_\alpha$ οφείλει να είναι το μοναδιαίο στοιχείο τής G. Συνεπώς, $g_\alpha = h_\alpha$). Οι ως άνω ακμές και τα αντίστοιχα στοιχεία τής δρώσας ομάδας εμφανίζονται *ανά ζεύγη*, αφού *και* η ακμή $\alpha' = g_\alpha^{-1}(\overline{\alpha})$ ανήκει στο A_* *και* έχουμε $g_{\alpha'} = g_\alpha^{-1}$ (βλ. σχήμα 28.5). Για *κάθε* $\alpha \in A_*$ διαλέγουμε *ένα* από τα μέλη τού ζεύγους g_α, g_α^{-1} και συμβολίζουμε το υποσύνολο τής G που προκύπτει ως X. *Θα δείξουμε ότι το X αποτελεί ένα ελεύθερο σύνολο γεννητόρων για την G.*



Σχήμα 28.5

Επιλέγουμε, κατ' αρχάς, μια κορυφή v τού Λ. Δοθέντος ενός $g \in G \setminus \{e\}$, έστω α η πρώτη ακμή τής γεωδαισιακής από την κορυφή v στην κορυφή $g(v)$, η οποία *δεν* ανήκει στο Λ. Τότε, βεβαίως, η α θα ανήκει κατ' ανάγκην στο A_*. Εφαρμόζουμε το g_α^{-1} στη γεωδαισιακή από την κορυφή $t(\alpha)$ στην κορυφή $g(v)$. Ο δρόμος που προκύπτει ξεκινά από την κορυφή $g_\alpha^{-1}(t(\alpha))$ τού Λ και καταλήγει στην κορυφή $g_\alpha^{-1}g(v)$. Ακολουθώντας αυτόν τον νέο δρόμο έως την πρώτη ακμή β στην οποία αυτός εγκαταλείπει το Λ και εφαρμόζοντας, εν συνεχεία, το g_β^{-1} στη γεωδαισιακή από την κορυφή $t(\beta)$ στην κορυφή $g_\alpha^{-1}g(v)$, λαμβάνουμε έναν νέο δρόμο, ο οποίος ναι μεν ξεκινά και πάλι από μια κορυφή ανήκουσα στο Λ, αλλά καταλήγει στην κορυφή $g_\beta^{-1}g_\alpha^{-1}g(v)$. Εκτελούμε επανειλημμένως αυτήν τη διαδικασία παρατηρώντας ότι ο δρόμος μας υφίσταται βράχυνση όταν κανείς μεταβαίνει από τη μία της φάση στην επομένη. Έτσι, κατασκευάζουμε τελικώς έναν δρόμο, ο οποίος βρίσκεται *καθ' ολοκληρίαν εντός τού* Λ. Ας υποθέσουμε ότι το σημείο απόληξής του είναι το $g_\nu^{-1}\ldots g_\beta^{-1}g_\alpha^{-1}g(v)$. Καθώς δύο οιεσδήποτε κορυφές τού Λ ανήκουν στην ίδια τροχιά, θα πρέπει να ισχύει

$$g_\nu^{-1}\cdots g_\beta^{-1}g_\alpha^{-1}g(v)=v,$$

κι επειδή η εν λόγω δράση είναι ελεύθερη, θα έχουμε

$$g_\nu^{-1}\cdots g_\beta^{-1}g_\alpha^{-1}g=e\Longrightarrow g=g_\alpha g_\beta\cdots g_\nu. \tag{$\blacktriangledown$}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο βλέπουμε ότι τα στοιχεία τού X παράγουν πράγματι την ομάδα G.

Το δεξιό μέλος τής ισότητας ($\blacktriangledown$) καθορίζει μια ανηγμένη λέξη $w(g)$ σχηματιζόμενη από σύμβολα ανήκοντα στο X. Η κατασκευή μας χρησιμοποίησε τη γεωδαισιακή $\overrightarrow{vg(v)}$, αλλά και κάθε άλλος δρόμος που συνδέει την κορυφή v με την κορυφή $g(v)$ θα ήταν εξίσου κατάλληλος και θα οδηγούσε στην *ίδια* ανηγμένη λέξη. Εν πρώτοις, θα βεβαιωθούμε για το ότι η πρόσθεση ενός και μόνου ταξιδίου μετ' επιστροφής $\sigma\overline{\sigma}$ στη γεωδαισιακή δεν μεταβάλλει την $w(g)$. Αυτό είναι εύκολο· απλώς αρκεί να παρακολουθήσουμε το τι συμβαίνει με την ακμή σ κατά την εκτέλεση τής ως άνω περιγραφείσας διαδικασίας. Η σ είτε καταλήγει εντός τού Λ σε κάποια της φάση, οπότε η ($\blacktriangledown$) παραμένει αμετάβλητη, είτε πηγαίνει σε μια ακμή τ τού A_*, οπότε η ($\blacktriangledown$) αλλάζει και καθίσταται η

$$g=g_\alpha g_\beta\ \cdots\ g_\tau g_\tau^{-1}\ \cdots\ g_\nu.$$

Όμως και στις δύο περιπτώσεις η $w(g)$ παραμένει αμετάβλητη. Με ανάλογο τρόπο πραγματεύεται κανείς και την περίπτωση κατά την οποία υπάρχουν περισσότερα τού ενός ταξίδια μετ' επιστροφής. Υπενθυμίζουμε τώρα ότι κάθε δρόμος που συνδέει δύο κορυφές μπορεί να αποκτηθεί από τη γεωδαισιακή ύστερα από τη διαδοχική πρόσθεση ταξιδίων μετ' επιστροφής.

Για να ολοκληρώσουμε την αποδεικτική μας επιχειρηματολογία θα δείξουμε πως κάθε αποσύνθεση τής μορφής

$$g=g_\gamma g_\delta\ \cdots\ g_\rho,\ \ \gamma,\delta,\ldots,\rho\in A_*$$

μπορεί να υλοποιηθεί μέσω ενός καταλλήλου δρόμου, ο οποίος συνδέει την κορυφή v με την κορυφή $g(v)$. Κατόπιν τούτου θα είμαστε βέβαιοι ότι η $w(g)$ είναι όντως *η μόνη* ανηγμένη λέξη η οποία σχηματίζεται από στοιχεία τού X και αναπαριστά το g. Για την επιθυμητή απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή επί τού μήκους τής αποσύνθεσης. Έστω $g_1 = g_\delta \cdots g_\rho$. Υποθέτουμε ότι ο P είναι ο δρόμος ο οποίος συνδέει την κορυφή v με την κορυφή $g_1(v)$ και υλοποιεί αυτήν την αποσύνθεση τού g_1. Ακολουθώντας πρώτα τη γεωδαισιακή $\overrightarrow{vg_\gamma(v)}$ και κατόπιν τον δρόμο $g_\gamma(P)$ κατασκευάζουμε έναν δρόμο Q, ο οποίος συνδέει την κορυφή v με την κορυφή $g(v)$. Ας εξετάσουμε τη γεωδαισιακή $\overrightarrow{vg_\gamma(v)}$. Αυτή ξεκινά με την $\overrightarrow{vi(\gamma)}$, εγκαταλείπει το Λ στην ακμή γ, και μετά συνεχίζει με την $g_\gamma(\overrightarrow{zv})$, όπου $z = g_\gamma^{-1}(t(\gamma)) \in \Lambda$. Εφαρμόζοντας το πρώτο βήμα τής ως άνω περιγραφείσας διαδικασίας για τον Q παίρνουμε το g_γ, οπότε μένουμε με τη γεωδαισιακή $\overrightarrow{zv}$ (η οποία ανήκει στο Λ) ακολουθούμενη από τον δρόμο P. Κατά συνέπειαν, ο δρόμος Q υλοποιεί το $g_\gamma g_\delta \cdots g_\rho$, όπως ακριβώς απαιτείται. □

(28.9) Θεώρημα των Nielsen και Schreier. *Κάθε υποομάδα μιας ελεύθερης ομάδας είναι ελεύθερη.*

Απόδειξη. Έστω F μια ελεύθερη ομάδα παραγόμενη από το σύνολο X και έστω G μια υποομάδα τής F. Τότε, ως γνωστόν, η F δρα ελευθέρως επί τού δέντρου $\Gamma(F, X)$ και κατά συνέπειαν το ίδιο ισχύει και για την G. Άρα η G είναι όντως ελεύθερη δυνάμει τού θεωρήματος (28.8). □

[(Σ.τ.Μ.): Η πρώτη απόδειξη τού ανωτέρω θεωρήματος δόθηκε το 1921 από τον Δανό μαθηματικό J. Nielsen (1890-1959) υπό την προϋπόθεση ότι η θεωρούμενη ομάδα είναι πεπερασμένως παραγόμενη. Το 1927 ο O. Schreier (1901-1929) έδειξε ότι το θεώρημα παραμένει εν ισχύ ακόμη και όταν αυτή η υπόθεση απαλειφθεί. Η πρώτη «γεωμετρική» απόδειξή του οφείλεται στους R. Baer και F.W. Levi (1936). Η ως άνω απόδειξη (με χρήση τής Θεωρίας Δέντρων) οφείλεται κατ' ουσίαν στον J.-P. Serre[1]. Για διάφορες παραλλαγές της (οι οποίες -όμως- χρησιμοποιούν αρκετές τεχνικές έννοιες από την Αλγεβρική Τοπολογία) βλ. J.J. Rotman [6] (κεφ. 11) και W.S. Massey[2]. Επίσης, για μια καθαρώς «αλγεβρική» απόδειξη ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο τού D.J.S. Robinson[3].]

[1]Πρβλ. J.-P. Serre: *Trees*, Springer-Verlag, (1980).

[2]W.S. Massey: *Algebraic Topology: An Introduction*, 2nd ed., GTM, Vol. **56**, Springer-Verlag, (1977), θεωρ. 7.2 σελ. 203.

[3]D.J.S. Robinson: *A Course in the Theory of Groups*, GTM, Vol. **80**, Springer-Verlag, (1982), κεφ. 6.

Ασκήσεις

28.1 Σχεδιάστε (απλουστευμένα) διαγράμματα για τα ακόλουθα γραφήματα:

(i) $A = \{\alpha, \overline{\alpha}, \beta, \overline{\beta}, \gamma, \overline{\gamma}, \delta, \overline{\delta}\}$,
$V = \{u, v, w\}$ και
$i(\alpha) = t(\gamma) = t(\delta) = u$,
$t(\alpha) = i(\beta) = i(\delta) = v$,
$t(\beta) = i(\gamma) = w$.

(ii) $A = \{\alpha_r, \overline{\alpha_r} \mid 1 \leq r \leq 7\}$,
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ και
$i(\alpha_1) = t(\alpha_4) = i(\alpha_5) = t(\alpha_7) = v_1$,
$t(\alpha_1) = i(\alpha_2) = t(\alpha_6) = v_2$,
$t(\alpha_2) = i(\alpha_3) = t(\alpha_5) = i(\alpha_7) = v_3$,
$t(\alpha_3) = i(\alpha_4) = i(\alpha_6) = v_4$.

28.2 Έστω ότι τα u και v είναι δυο διακεκριμένες κορυφές ενός δέντρου Γ. Δείξτε ότι υπάρχει μόνον ένας δρόμος εντός τού Γ ο οποίος συνδέει το u με το v και ο οποίος δεν περιέχει κανένα ταξίδι μετ' επιστροφής. Αυτός ο δρόμος είναι η λεγομένη γεωδαισιακή $\overrightarrow{uv}$ από το u στο v. Εάν ο P είναι ένας άλλος δρόμος από το u στο v, δείξτε ότι υπάρχουν δρόμοι $P_1, P_2, \ldots, P_k$ εντός τού Γ, καθένας των οποίων συνδέει το u με το v, ούτως ώστε ο P_{r+1} να αποκτάται από τον P_r κατόπιν ενός και μόνου ταξιδίου μετ' επιστροφής , για όλα τα r, όπου $1 \leq r \leq k-1$, με την ιδιότητα: $P_1 = \overrightarrow{uv}$ και $P_k = P$.

28.3 Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε μια δράση μιας ομάδας επί ενός δέντρου Γ. Εάν το στοιχείο g τής προκειμένης ομάδας σταθεροποιεί δυο κορυφές u και v τού Γ, αποδείξτε ότι το g οφείλει να αφήνει ολόκληρη τη γεωδαισιακή $\overrightarrow{uv}$ σταθερή.

28.4 Προσδιορίστε δέντρα αναφοράς για τις δράσεις των ομάδων που περιγράψαμε στα παραδείγματα (28.1), (28.2) και (28.3) τού παρόντος κεφαλαίου.

28.5 Μελετήστε λεπτομερώς όλες τις δυνατές δράσεις μιας κυκλικής ομάδας τάξης 2 επί των γραφημάτων που δόθηκαν στην άσκηση 28.1.

28.6 Εξετάστε το πώς η απόδειξη τού θεωρήματος (28.8) εφαρμόζεται στο παράδειγμα (28.2), καθώς και στη φυσική δράση τής ελεύθερης ομάδας με δύο γεννήτορες επί τού δέντρου που δείχνεται στο σχήμα 28.3.

28.7 Τα στοιχεία τής ομάδας

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \text{πίνακες } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

δρουν επί τού άνω ημίσεος τού μιγαδικού επιπέδου ως μετασχηματισμοί Möbius. Ας συμβολίσουμε ως α το τόξο τού μοναδιαίου κύκλου, το οποίο συνδέει το σημείο $\exp\left(\frac{\pi i}{3}\right)$ με το σημείο $\exp\left(\frac{\pi i}{2}\right)$ στο άνω ήμισυ τού μιγαδικού επιπέδου, κι ας ορίσουμε το Γ ως την ένωση όλων των τμημάτων $g(\alpha)$, όπου $g \in SL_2(\mathbb{Z})$. Σχεδιάστε μια εικόνα τού Γ και διαπιστώστε ότι αυτό αναπαριστά ένα δέντρο. Εν συνεχεία, δείξτε ότι η δράση τής $SL_2(\mathbb{Z})$ επί τού Γ δεν είναι ελεύθερη.

28.8 Έστω ότι τα u και v είναι δυο κορυφές ενός γραφήματος Γ. Εάν οι P και P' είναι δυο δρόμοι, καθένας των οποίων συνδέει το u με το v, θα λέμε πως ο P' είναι **παρακείμενος** τού P υπό τον όρο ότι ο P' μπορεί να αποκτηθεί από τον P ύστερα από επισύναψη ή απομάκρυνση ενός και μόνου ταξιδίου μετ' επιστροφής. Δείξτε ότι τούτη η μορφή συσχέτισης μας οδηγεί στον καθορισμό μιας *σχέσης ισοδυναμίας* επί τού συνόλου όλων των δρόμων οι οποίοι συνδέουν το u με το v εντός τού Γ ως εξής: εξ ορισμού θεωρούμε τον δρόμο P ως σχετιζόμενο με τον Q όταν υφίστανται δρόμοι $P_1, P_2, \ldots, P_k$ εντός τού Γ, καθένας των οποίων συνδέει το u με το v, ούτως ώστε ο P_r να είναι παρακείμενος τού P_{r+1} για όλα τα r, όπου $1 \leq r \leq k-1$. Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας υπάρχουν όταν το Γ είναι ένα δέντρο;

28.9 Έστω Γ ένα γράφημα και έστω v μια κορυφή τού Γ. Ένας δρόμος P εντός τού Γ, ο οποίος συνδέει το v με τον εαυτό του, καλείται **βρόχος** βασισμένος στο v. Θα συμβολίσουμε με το $[P]$ την κλάση ισοδυναμίας τού P ως προς τη σχέση ισοδυναμίας την εισαχθείσα στην προηγούμενη άσκηση. Επίσης, εάν οι $P = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s$ και $Q = \beta_1\beta_2\ldots\beta_t$ συνδέουν το v με τον εαυτό του, θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό PQ για να εννοούμε τον βρόχο $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s\beta_1\beta_2\ldots\beta_t$. Αποδείξτε ότι η συλλογή όλων των κλάσεων ισοδυναμίας βρόχων, των βασισμένων στο v, συγκροτεί μια ομάδα ως προς την εξής πράξη («γινόμενο»):

$$[P]\,[Q] = [PQ].$$

Η ομάδα αυτή είναι η αποκαλούμενη **θεμελιώδης ομάδα** τού Γ η βασισμένη στο v.

28.10 Υιοθετήστε την ορολογία την εισαχθείσα στην προηγούμενη άσκηση και υποθέστε ότι δυο οιεσδήποτε διακεκριμένες κορυφές τού Γ συνδέονται πάντοτε μέσω ενός δρόμου. Έστω Λ το μεγιστοτικό δέντρο εντός τού Γ. Δείξτε ότι όλες οι κορυφές τού Γ περιέχονται στο Λ. Εν συνεχεία επιλέξτε μία ακμή από κάθε ζεύγος διευθυνομένων ακμών οι οποίες δεν ανήκουν στο Λ και συμβολίστε ως X την προκύπτουσα συλλογή ακμών. Αποδείξτε ότι η θεμελιώδης ομάδα τού Γ, η βασισμένη στο v, είναι ισόμορφη με την ελεύθερη ομάδα $F(X)$.

Βιβλιογραφία

[1] WEYL, H.: *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton N.J., 1952.

[(Σ.τ.Μ.): Υπάρχει και στα ελληνικά, σε μετάφραση Θ. Ηλιάδη και επ. επιμέλεια Μ. Λάμπρου, από τις Εκδόσεις Τροχαλία, 1991.]

(*Μια κλασική πραγματεία που θα έπρεπε να διαβασθεί από κάθε φοιτητή και καθηγητή Μαθηματικών.*)

[2] LYNDON, R.C.: *Groups and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge (England), 1985.

[3] NEUMANN, P.M., STOY, G.A., THOMPSON, E.C.: *Groups and Geometry*, Duplicated notes produced by the Mathematical Institute, Oxford University, 1980.

[(Σ.τ.Μ.): Αυτές οι σημαντικές σημειώσεις πανεπιστημιακών παραδόσεων κυκλοφορούν από το έτος 1994 και σε μορφή βιβλίου από τον εκδοτικό οίκο Oxford University Press.]

[4] REES, E.G.: *Notes on Geometry*, Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin, 1983.

(*Τονίζει τον ρόλο που παίζουν οι ομάδες στη Γεωμετρία.*)

[5] HILL, V.E.: *Groups, Representations and Characters*, Hafner Press, New York, 1975.

(*Περιέχει μια βασική εισαγωγή στη Θεωρία Αναπαραστάσεων Ομάδων.*)

[6] ROTMAN, J.J.: *An Introduction to the Theory of Groups*, Allyn and Bacon, Boston. Third edition, 1984.

[(Σ.τ.Μ.): Το 1995 κυκλοφόρησε και η τετάρτη έκδοση αυτού τού βιβλίου (καθώς και μια δεύτερη ανατύπωσή της το 1999), με βελτιώσεις και επεκτάσεις τής ύλης του, από τον εκδοτικό οίκο Springer-Verlag.]

(*Πρόκειται για ένα έξοχο σύγγραμμα μεταπτυχιακού επιπέδου.*)

[7] HALMOS, P.R.: *Naive Set Theory*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1960, and Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin, 1974.

(*Περιέχει στοιχεία τής Συνολοθεωρίας, συμπεριλαμβανομένου και τού λήμματος τού Zorn. Υποδειγματικό για τον τρόπο με τον οποίο θα όφειλε κανείς να γράφει Μαθηματικά.*)

[8] JONES, O.: *The Grammar of Ornament*, Day and Son, London, 1856, and Omega Books, Ware (England), 1986.

(*Περιέχει μια θαυμαστή συλλογή κοσμητικών διαμορφωμάτων και σχεδίων προερχομένων από διαφόρους πολιτισμούς από όλον τον κόσμο.*)

[9] MARTIN, G.E.: *Transformation Geometry*, Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin, 1983.

[10] LOCKWOOD, E.H., MACMILLAN, R.H.: *Geometric Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge (England), 1978.

(*Συνιστάται για το πλούσιο πληροφοριακό υλικό που διαθέτει γύρω από τις ζωοφόρους, τα διακοσμητικά επιστρώματα τοίχων και διάφορα άλλα διαμορφώματα τού τρισδιαστάτου χώρου.*)

Ευρετήριο