Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Άλγεβρα (Μ 110)**

Εαρινό Εξάμηνο 2009, Εξέταση Σεπτεμβρίου **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο (i) Να αποδειχθεί ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ διαθέτει τουλάχιστον έναν πρώτο διαιρέτη.

(ii) Με τη βοήθεια τού (i) και τής «εις άτοπον απαγωγής» να αποδειχθεί ότι το σύνολο των πρώτων αριθμών είναι ένα απειροσύνολο.

ΘΕΜΑ 2ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί *το θεώρημα τού Cayley*.

ΘΕΜΑ 3ο (i) Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Εάν $A \subseteq G$ και $B \subseteq G$, τότε ορίζουμε ως AB το σύνολο

$$AB := \{\, xy \mid x \in A \ \text{ και } \ y \in B\}.$$

Εάν $A, B, C \subseteq G$, να αποδειχθεί ότι $A\,(B \cup C) = AB \cup AC$.

(ii) Εάν οι H και K είναι δυο υποομάδες μιας ομάδας $(G, \cdot)$ και εάν $K \subseteq H$, να αποδειχθεί μέσω τού (i) ότι ισχύει η ισότητα

$$|G : K| = |G : H| \; |H : K| \, .$$

ΘΕΜΑ 4ο Έστω ότι ο R είναι ένας δακτύλιος και τα I, J δύο ιδεώδη του. Να αποδειχθεί ότι

$$(I + J) \,/\, (I \cap J) \cong ((I + J) \,/ I) \times ((I + J) \,/ J) \, .$$

ΘΕΜΑ 5ο Έστω R μια ακεραία περιοχή.

(i) Να διατυπωθεί ο αλγόριθμος διαιρέσεως δύο πολυωνύμων με τους συντελεστές τους ειλημμένους από την R.

(ii) Εάν $a \in R$ και $f\,(\mathsf{X}) \in R[\mathsf{X}]$, να αποδειχθεί ότι το υπόλοιπο τής διαιρέσεως τού $f(\mathsf{X})$ διά τού $\mathsf{X} - a$ ισούται με το $f(a)$.

(iii) Να αποδειχθεί ότι ένα στοιχείο $a \in R$ αποτελεί θέση μηδενισμού ενός πολυωνύμου $f\,(\mathsf{X}) \in R[\mathsf{X}]$ εάν και μόνον εάν $\mathsf{X} - a \mid f(\mathsf{X})$.

(iv) Εάν οι $a_1, a_2, \ldots, a_k \in R$ είναι k σαφώς διακεκριμένες θέσεις μηδενισμού ενός $f\,(\mathsf{X}) \in R[\mathsf{X}]$, να αποδειχθεί ότι

$$(\mathsf{X} - a_1)\,(\mathsf{X} - a_2) \cdots (\mathsf{X} - a_k) \mid f(\mathsf{X}).$$

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν ο a είναι ένας περιττός ακέραιος και $m, n \in \mathbb{N}$, τότε

$$m \neq n \Longrightarrow \text{μκδ}(a^{2^m} + 2^{2^m}, a^{2^n} + 2^{2^n}) = 1.$$

(ii) Εάν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός τής μορφής $3k + 2$ (όπου k κάποιος μη αρνητικός ακέραιος) και $p \mid a^2 + ab + b^2$, για κάποιους $a, b \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, τότε $p \mid a$ και $p \mid b$. (*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί «εις άτοπον απαγωγή» και το μικρό θεώρημα τού Fermat.)

ΘΕΜΑ 7ο Επί τού καρτεσιανού γινομένου $G := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ορίζεται η εσωτερική πράξη

$$(a,b) \star (c,d) := \Big(a + (-1)^b c, b + d\Big),$$

όπου "+" η συνήθης πράξη τής προσθέσεως επί τού $\mathbb{Z}$. Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Το ζεύγος $(G, \star)$ αποτελεί μια μη αβελιανή ομάδα.

(ii) Τα $H := \{(a,b) \in G \mid b = 0\}$ και $K := \{(a,b) \in G \mid a = 0\}$ αποτελούν υποομάδες τής $(G, \star)$.

(iii) $H \lhd G$ και $K \ntriangleleft G$.

(iv) Υφίσταται ένας ισομορφισμός ομάδων $G/H \cong K$.

ΘΕΜΑ 8ο Να αποδειχθεί ότι η προσθετική ομάδα $(\mathbb{Z}[\mathsf{X}], +)$ των πολυωνύμων με ακεραίους συντελεστές είναι ισόμορφη τής πολλαπλασιαστικής ομάδας $(\mathbb{Q}_{>0}, \cdot)$.

ΘΕΜΑ 9ο Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος με μοναδιαίο (πολλαπλασιαστικό) στοιχείο, για τον οποίο ισχύει η ισότητα $x^3 = x, \forall x \in R$. Να αποδειχθεί (i) ότι $6x = 0,\ \forall x \in R$, και (ii) ότι ο R είναι κατ' ανάγκην μεταθετικός.

ΘΕΜΑ 10ο Έστω p ένας περιττός πρώτος. Για το πολυώνυμο

$$f_p(\mathsf{X}) := \sum_{j=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{2j} \mathsf{X}^{p-2j} (\mathsf{X}^2 - 1)^j \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$$

να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Ο συντελεστής τού X εντός τού $f_p(\mathsf{X})$ ισούται με $(-1)^{\frac{p-1}{2}} p$.

(ii) Υφίσταται ένα πολυώνυμο $g_p(\mathsf{X}) \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$ για το οποίο ισχύει $f_p(\mathsf{X}) = \mathsf{X} g_p(\mathsf{X})$.

(iii) Το $g_p(\mathsf{X})$ είναι ανάγωγο εντός τού $\mathbb{Q}[\mathsf{X}]$.

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες. (Καθένα των υποερωτημάτων των θεμάτων 1, 6 και 9 αξιολογείται βαθμολογικώς με μία μονάδα. Το υποερώτημα (i) τού θέματος 3 αξιολογείται βαθμολογικώς με μισή μονάδα και το (ii) με μιάμιση μονάδα. Καθένα των υποερωτημάτων των θεμάτων 5 και 7 αξιολογείται βαθμολογικώς με μισή μονάδα. Τέλος, καθένα των υποερωτημάτων (i) και (ii) τού θέματος 10 αξιολογείται βαθμολογικώς με μισή μονάδα, ενώ η ορθή απάντηση τού (iii) οδηγεί στη λήψη μίας μονάδας.)**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως σημειώσεις και βιβλία θα παραμείνουν κλειστά.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τού διαγωνίσματος δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!