ΑΛΓΕΒΡΑ: 9ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να αποδειχθεί ότι οι μόνοι ενδομορφισμοί τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών είναι ο ταυτοτικός και ο μηδενικός.

2. Να αποδειχθεί ότι οι μόνοι ενδομορφισμοί τού σώματος $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι ο ταυτοτικός και ο μηδενικός.

3. Να εξετασθεί το κατά πόσον τα υποσώματα $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ και $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ τού σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ή δεν είναι μεταξύ τους ισόμορφα.

4. Να αποδειχθεί ότι ο μόνος αυτομορφισμός τού σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι ο ταυτοτικός. (Υπόδειξη: Να αποδειχθεί εν πρώτοις ότι για οιονδήποτε αυτομορφισμό f τού σώματος $\mathbb{R}$ έχουμε $f|_{\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. Εν συνεχεία, να χρησιμοποιηθεί το γεγονός ότι κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών.)

5. Έστω K ένα σώμα με $\text{χαρ}(K) = p > 0$.

(i) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$f : K \longrightarrow K, \quad x \longmapsto f(x) := x^p,$$

είναι ένας ενδομορφισμός. Η f καλείται, ιδιαιτέρως, **απεικόνιση τού Frobenius**.

(ii) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση τού Frobenius είναι ένας αυτομορφισμός τού K όταν το K είναι πεπερασμένο σώμα.

6. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$I = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & x \\ 0 & y \end{array} \right) \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

είναι ένα αριστερό μη αμφίπλευρο ιδεώδες και το σύνολο

$$J = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x & y \\ 0 & 0 \end{array} \right) \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

ένα δεξιό μη αμφίπλευρο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

7. Εάν ο R είναι ένας δακτύλιος και το a ένα στοιχείο του, να αποδειχθεί ότι το $I = \{r \in R \mid ra = 0_R\}$ είναι ένα αριστερό και το $J = \{r \in R \mid ar = 0_R\}$ ένα δεξιό ιδεώδες τού R.

8. Ας υποθέσουμε ότι η $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια (αριθμήσιμη) οικογένεια ιδεωδών ενός δακτυλίου R και ότι

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

Να αποδειχθεί ότι η ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ αποτελεί ένα ιδεώδες τού R.

9. Εάν το I είναι ιδεώδες ενός δακτυλίου R, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Ο πηλικοδακτύλιος R/I δεν περιέχει μηδενοδιαιρέτες εάν και μόνον εάν για οιαδήποτε $a, b \in R$, για τα οποία ισχύει $ab \in I$, έχουμε είτε $a \in I$ είτε $b \in I$.

(ii) Ο πηλικοδακτύλιος R/I είναι μεταθετικός εάν και μόνον εάν $ab - ba \in I$ για οιαδήποτε $a, b \in R$.

(iii) Ο πηλικοδακτύλιος R/I έχει μοναδιαίο στοιχείο εάν και μόνον εάν υπάρχει κάποιο στοιχείο $e \in R$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$ae - a \in I \quad \text{και} \quad ea - a \in I, \quad \forall a \in R.$$

10. Εάν ο R είναι ένας μεταθετικός 1-δακτύλιος. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν $a, b \in R$ και $a^m = 0_R = b^n$ για κάποιους $m, n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε $(a+b)^l = 0_R$.

(ii) Το σύνολο $\mathrm{Nil}(R)$ των μηδενοδυνάμων στοιχείων τού R αποτελεί ένα ιδεώδες τού R.

(iii) Ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathrm{Nil}(R)$ δεν διαθέτει μηδενοδύναμα στοιχεία πέραν τού $0_{R/\mathrm{Nil}(R)} = \mathrm{Nil}(R)$.

11. Εάν οι R και S είναι δυο δακτύλιοι και $I = \{(r, 0_S) \mid r \in R\}$, να αποδειχθεί ότι το I είναι ιδεώδες τού $R \times S$ και ότι

$$(R \times S)/I \cong S.$$

12. Εάν οι m, n είναι φυσικοί αριθμοί ≥ 2, να αποδειχθεί ότι

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / (m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n.$$

13. Έστω M ένα μη κενό σύνολο και έστω $(\mathfrak{P}(M), +, \cdot)$ ο δακτύλιος που ορίσθηκε στην άσκηση **4** τού 8ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα για οιοδήποτε σύνολο $E \subseteq M$:

(i) Το $\mathfrak{P}(E)$ είναι ένα ιδεώδες τού $\mathfrak{P}(M)$.

(ii) Η απεικόνιση

$$f_E : \mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(M), \ \ A \longmapsto f_E(A) := A \cap (M \setminus E)$$

είναι ομομορφισμός.

(iii) $\mathfrak{P}(M)/\mathfrak{P}(E) \cong \mathfrak{P}(M \setminus E)$.

14. Έστω R ο δακτύλιος

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; c = 0 \right\}$$

και

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \;\middle|\; a = c = d = 0 \right\}.$$

Να αποδειχθεί ότι το I είναι ένα ιδεώδες τού R και ότι

$$R/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

15. Εάν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και

$$\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r = \frac{a}{b}, \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), \text{ με μκδ}(a,b) = 1 \text{ και } p \nmid b \right\}$$

ο δακτύλιος των p-αδικών κλασμάτων (βλ. άσκηση **8** τού 8ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων), να αποδειχθεί ότι το

$$I = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r = \frac{a}{b}, \ (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), \text{ με μκδ}(a,b) = 1 \text{ και } p \nmid b, \ p \mid a \right\}$$

είναι ιδεώδες τού $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ και ότι

$$\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}/I \cong \mathbb{Z}_p.$$