ΑΛΓΕΒΡΑ: 8ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος για τον οποίο ισχύει η ισότητα

$$x^2 = x, \ \ \forall x \in R.$$

Να αποδειχθεί ότι $2x = 0, \ \forall x \in R$, και ότι ο εν λόγω δακτύλιος οφείλει να είναι μεταθετικός. Επιπροσθέτως, στην περίπτωση κατά την οποία ο R έχει τουλάχιστον τρία στοιχεία, να αποδειχθεί ότι ο R διαθέτει μηδενοδιαιρέτες. (Αυτού τού είδους οι δακτύλιοι ονομάζονται **δακτύλιοι τού Boole**).

2. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος για τον οποίο ισχύει η ισότητα

$$x^2 = 2x, \ \ \forall x \in R.$$

Να αποδειχθεί ότι $x^3 = 0, \ \forall x \in R$.

3. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας 1-δακτύλιος για τον οποίο ισχύει η ισότητα

$$x^3 = x, \ \ \forall x \in R.$$

Να αποδειχθεί (i) ότι $6x = 0, \ \forall x \in R$, και (ii) ότι ο R είναι κατ' ανάγκην μεταθετικός.

4. Έστω M ένα μη κενό σύνολο και $\mathfrak{P}(M)$ το δυναμοσύνολό του. Να αποδειχθεί ότι η τριάδα $(\mathfrak{P}(M), +, \cdot)$, όπου

$$\begin{cases} A + B := A \triangle B, \\ A \cdot B := A \cap B, \ \ \forall A, B \in \mathfrak{P}(M), \end{cases}$$

αποτελεί έναν μεταθετικό 1-δακτύλιο τού Boole. (Για τον ορισμό και τις ιδιότητες τής «συμμετρικής διαφοράς» $A \triangle B$ δυο συνόλων $A, B \in \mathfrak{P}(M)$ βλ. άσκηση **8** τού 1ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων.)

5. Ένα στοιχείο a ενός δακτυλίου R καλείται **ταυτοδύναμο** όταν $a^2 = a$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Έστω R τυχών δακτύλιος. Κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο $a \in R \smallsetminus \{0\}$ είναι μη μηδενοδύναμο.

(ii) Εάν ο R είναι μια ακεραία περιοχή, τότε το μόνο ταυτοδύναμο στοιχείο $a \in R \smallsetminus \{0\}$ είναι το μοναδιαίο στοιχείο 1_R.

(iii) Το άθροισμα $a + b$ δυο ταυτοδυνάμων στοιχείων a, b ενός δακτυλίου R είναι ταυτοδύναμο εάν και μόνον εάν $ab = ba$ και $2ab = 0$.

(iv) Η διαφορά $a - b$ δυο ταυτοδυνάμων στοιχείων a, b ενός 1-δακτυλίου R είναι ταυτοδύναμη εάν και μόνον εάν $ab = ba$ και $2(1_R - a)b = 0$.

(v) Εάν δυο ταυτοδύναμα στοιχεία a, b ενός δακτυλίου R μετατίθενται αμοιβαίως, ήτοι $ab = ba$, τότε τα

$$ab, \quad a + b - ab, \quad (a - b)^2 = a + b - 2ab$$

είναι ταυτοδύναμα.

6. Για οιονδήποτε φυσικό αριθμό $m \geq 2$ να αποδειχθεί ότι $\mathrm{Nil}(\mathbb{Z}_m) = \{[0]_m\}$ εάν και μόνον εάν ο m στερείται τετραγώνων (πρβλ. άσκηση **14** τού 3ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων).

7. Έστω

$$R := \left\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις προσθέσεως και πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το R είναι δακτύλιος και $\mathbb{Z} \subsetneqq R \subsetneqq \mathbb{Q}$,

(ii) Το R είναι ακεραία περιοχή.

(iii) $R^{\times} = \{ 2^{\nu} \mid \nu \in \mathbb{Z} \}$.

8. Για οιονδήποτε πρώτο αριθμό p ορίζουμε το σύνολο

$$\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} := \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r = \frac{a}{b},\ (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}),\ \text{με μκδ}\,(a,b) = 1 \text{ και } p \nmid b \right\}.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{Q}$. (Το $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ ονομάζεται **δακτύλιος των p-αδικών κλασμάτων** και παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο στην Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών.)

(ii) Να προσδιορισθεί η ομάδα $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}^{\times}$ των αντιστρεψίμων στοιχείων τού $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$.

9. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας 1-δακτύλιος. Υποθέτοντας την ύπαρξη δύο στοιχείων $a, b \in R$, για τα οποία ισχύουν οι ισότητες

$$ab + ba = 1_R,\ \ a^2 b + ba^2 = a,$$

να αποδειχθεί ότι $a \in R^{\times}$ με το $2b$ ως αντίστροφό του.

10. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε στρεβλό σώμα R ισχύει η ισότητα

$$aba = a - \left(a^{-1} + \left(b^{-1} - a \right)^{-1} \right)^{-1},$$

για οιαδήποτε $a, b \in R \smallsetminus \{0\}$ με $a \neq b^{-1}$.

11. Να αποδειχθεί λεπτομερώς ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i]$ των ακεραίων τού Gauss είναι ακεραία περιοχή αλλά όχι και σώμα.

12. Για οιονδήποτε ακέραιο $m \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $a + b\sqrt{m} \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή $a^2 - mb^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$.

(ii) Ο δακτύλιος $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ είναι *υπόσωμα* τού $\mathbb{C}$.

(iii) Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ είναι *ακεραία περιοχή*.

(Όταν $m \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, 1\}$ και ο m δεν είναι τέλειο τετράγωνο, λέμε πως ο $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ είναι η **τετραγωνική ακεραία περιοχή** η αντιστοιχιζόμενη στον m και, κατ' αναλογίαν, πως το σώμα $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ είναι το **τετραγωνικό αριθμητικό σώμα** το αντιστοιχιζόμενο στον m.)

Επιπροσθέτως, να αποδειχθεί ότι για οιουσδήποτε ακεραίους αριθμούς $m_1, m_2 \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, 1\}$ στερούμενους τετραγώνων (πρβλ. άσκηση **14** τού 3ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων) έχουμε

$$\mathbb{Q}(\sqrt{m_1}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m_2}) \Longleftrightarrow m_1 = m_2.$$

13. Να εξετασθεί εάν τα σύνολα $A := \{ a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$ και

$$B := \{ a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \}$$

αποτελούν υποσώματα τού σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

14. Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος χωρίς μηδενοδιαιρέτες, κάθε γνήσιος υποδακτύλιος τού οποίου διαθέτει μόνον πεπερασμένου πλήθους στοιχεία. Να αποδειχθεί ότι ο R είναι σώμα.

15. Εάν το K είναι ένα σώμα χαρακτηριστικής $p > 0$ και ο n ένας σταθερός φυσικός αριθμός, να αποδειχθεί ότι το

$$L := \{ x \in K \mid x^{p^n} = x \}$$

είναι ένα υπόσωμα τού K.