ΑΛΓΕΒΡΑ: 7ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να προσδιορισθούν όλες οι υποομάδες τής ομάδας $\mathfrak{S}_3$. Ποιες εξ αυτών είναι ορθόθετες;

2. Εάν μια μετάταξη $\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ n \geq 2$, γραφεί ως μια πεπερασμένη ακολουθία

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_s$$

s συντιθέμενων -ανά δύο ξένων μεταξύ τους- κύκλων $\tau_1, \ldots, \tau_s$ με μήκη $k_1, \ldots, k_s \geq 2$, αντιστοίχως, να αποδειχθεί ότι

$$\mathrm{ord}\,(\sigma) = \text{εκπ}(k_1, \ldots, k_s).$$

3. Δίδεται η μετάταξη

$$\sigma := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \in \mathfrak{S}_{10}.$$

Να προσδιορισθεί η μετάταξη

$$\sigma^{100} = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{100 \text{ φορές}}.$$

4. Εάν ο $[\alpha_1\, \alpha_2\, \cdots\, \alpha_k]$ είναι ένας k-κύκλος τής $\mathfrak{S}_n$, $1 \leq k \leq n$, να αποδειχθεί ότι

$$\sigma \circ [\alpha_1\, \alpha_2\, \cdots\, \alpha_k] \circ \sigma^{-1} = [\sigma(\alpha_1)\ \sigma(\alpha_2)\ \cdots\ \sigma(\alpha_k)],\ \ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

5. Έστω n ένας φυσικός αριθμός ≥ 3. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Η εναλλάσσουσα ομάδα $\mathfrak{A}_n$ παράγεται από το σύνολο

$$\{\,[i\,j] \circ [k\,l] \mid 1 \leq i < j \leq n,\ \ 1 \leq k < l \leq n\,\}.$$

(ii) Η $\mathfrak{A}_n$ παράγεται από όλους τους 3-κύκλους.

(iii) Η $\mathfrak{A}_n$ παράγεται από το εξής σύνολο $n-2$ κύκλων μήκους 3:

$$\{\,[1\,2\,j] \mid 3 \leq j \leq n\,\}.$$

6. (i) Εάν ορίσουμε τη **διεδρική ομάδα** D_n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ως την υποομάδα

$$\boxed{D_n := \langle a, b\rangle \subsetneqq \mathfrak{S}_n}$$

τής συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$ την παραγόμενη από τις μετατάξεις

$$a := [1\,2\,\ldots\,n],\quad b := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \ldots & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

να αποδειχθεί ότι

$$a^n = b^2 = (ab)^2 = \mathrm{id},\ \ a^k \neq \mathrm{id},\ \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

(ii) Μέσω των σχέσεων (i) να αποδειχθεί ότι

$$D_n = \left\{ a^i b^j \;\middle|\; 0 \leq i \leq n-1,\ \ 0 \leq j \leq 1 \right\}$$

με τάξη $|D_n| = 2n$, και ότι $\langle a\rangle \lhd D_n$.

7. Εάν οι m και n είναι δυο φυσικοί αριθμοί και $m \geq 2$, να αποδειχθεί ότι

$$\boxed{n \mid \varphi\left(m^n - 1\right)}$$

όπου φ η συνάρτηση τού Euler. (Υπόδειξη: Να εφαρμοσθεί το θεώρημα τού Lagrange για μια υποομάδα τάξεως n μιας «κατάλληλης» ομάδας τάξεως $\varphi\left(m^n - 1\right)$.)

8. Άς υποθέσουμε ότι οι m και n είναι δυο φυσικοί αριθμοί ≥ 2 και ότι μκδ$(m, n) = 1$. Εν συνεχεία, ας επιλέξουμε δυο ακεραίους αριθμούς κ, λ, τέτοιους ωστε να ισχύει η ισότητα $\kappa m + \lambda n = 1$. Χρησιμοποιώντας τόν συμβολισμό τον εισαχθέντα στην άσκηση **1** τού 6ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Μέσω τού τύπου $f([a]_m, [b]_n) := [\kappa m b + \lambda n a]_{mn}$ ορίζεται ένας ισομορφισμός ομάδων

$$f : \mathbb{Z}_m^\times \times \mathbb{Z}_n^\times \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_{mn}^\times$$

(όπου στο πεδίο ορισμού η δομή τής ομάδας είναι η συνήθης δομή που δίδεται σε ένα καρτεσιανό γινόμενο ομάδων, πρβλ. άσκηση **9** τού 5ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων).

(ii) Η συνάρτηση φ τού Euler είναι *πολλαπλασιαστική*, ήτοι ισχύει

$$\boxed{\varphi\left(mn\right) = \varphi\left(m\right)\varphi\left(n\right).}$$

(Πρόκειται για μια *ομαδοθεωρητική απόδειξη* τού λήμματος **2.4.17**.)

9. Έστω $(G, \cdot)$ μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα και έστω $u := \prod_{g \in G} g$ το γινόμενο όλων των στοιχείων της. Να αποδειχθεί ότι:

(i) Εάν η G διαθέτει ακριβώς ένα στοιχείο a τάξεως 2, τότε $u = a$ (ειδάλλως $u = e_G$).

(ii) Για κάθε πρώτο αριθμό p ισχύει η ισοτιμία

$$\boxed{(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.}$$

(Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί το (i) για την ομάδα $G = (\mathbb{Z}_p)^\times$. Πρόκειται για μια *ομαδοθεωρητική απόδειξη* τού θεωρήματος **2.4.40** τού Wilson.)

10. Έστω $H := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(n) = n\}$. Να αποδειχθεί ότι το H είναι υποομάδα τής $\mathfrak{S}_n$ και να προσδιορισθεί ο δείκτης $|\mathfrak{S}_n : H|$.

11. Να δοθούν παραδείγματα ομάδων G και υποομάδων $H \subseteq G$, ούτως ώστε:

(i) $|H| < \infty$ και $|G : H| < \infty$,

(ii) $|H| = \infty$ και $|G : H| < \infty$,

(iii) $|H| < \infty$ και $|G : H| = \infty$,

(iv) $|H| = \infty$ και $|G : H| = \infty$.

12. Η υποομάδα $(\mathbb{Z},+)$ τής (αβελιανής ομάδας) $(\mathbb{Q},+)$ είναι προφανώς ορθόθετη, οπότε ορίζεται η πηλικοομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Να αποδειχθεί ότι

$$\mathbb{Q} = \coprod_{\lambda\in[0,1)\cap\mathbb{Q}} (\lambda+\mathbb{Z}) \Longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{\,\lambda+\mathbb{Z} \mid \lambda\in[0,1)\cap\mathbb{Q}\}$$

(οπότε ως σύνολο το $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι άπειρο *αριθμήσιμο*) και ότι *όλα* τα στοιχεία τής $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},+)$ έχουν *πεπερασμένη* τάξη.

13. Εάν η H είναι μια υποομάδα μιας ομάδας G με $|G:H|=2$, να αποδειχθεί ότι $g^2\in H$ για κάθε $g\in G$.

14. Έστω $\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ η ειδική γραμμική ομάδα (2×2)-πινάκων με τις εγγραφές τους ειλημμένες από το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Εάν

$$\mathbf{i} := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

τότε η υποομάδα

$$Q := \langle \mathbf{j},\mathbf{k}\rangle \subset \mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$$

η παραγόμενη από τους $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$, καλείται **ομάδα των τετρανίων** και (όπως διαπιστώνεται εύκολα) έχει τάξη 8, καθότι

$$\boxed{Q = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{j},\, \mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-\mathbf{I}_2,\, \mathbf{j}^3=-\mathbf{j},\, \mathbf{j}^4=\mathbf{k}^4=\mathbf{I}_2,\, \mathbf{k}, \\ \mathbf{k}^3=-\mathbf{k},\, \mathbf{jk}=\mathbf{i},\;\, \mathbf{jk}^3=\mathbf{kj}=-\mathbf{jk} \end{array} \right\}.}$$

Σημειωτέον ότι η Q δεν είναι αβελιανή (αφού $\mathbf{kj}\neq\mathbf{jk}$) και ότι

$$\langle\mathbf{i}\rangle = \{\mathbf{I}_2,\mathbf{i},\mathbf{i}^2=-\mathbf{I}_2,\mathbf{i}^3=-\mathbf{i}\},\;\; \langle\mathbf{j}\rangle = \{\mathbf{I}_2,\mathbf{j},\mathbf{j}^2,\mathbf{j}^3\},\;\; \langle\mathbf{k}\rangle = \{\mathbf{I}_2,\mathbf{k},\mathbf{k}^2,\mathbf{k}^3\},$$

με

$$\langle\mathbf{i}\rangle\cap\langle\mathbf{j}\rangle = \langle\mathbf{j}\rangle\cap\langle\mathbf{k}\rangle = \langle\mathbf{i}\rangle\cap\langle\mathbf{k}\rangle = \{\pm\mathbf{I}_2\}.$$

(i) Να αποδειχθεί ότι όλες οι υποομάδες τής Q είναι ορθόθετες.

(ii) Να προσδιορισθούν όλες οι υποομάδες τής Q.

$\cdot$	$\mathbf{I}_2$	$-\mathbf{I}_2$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{k}$
$\mathbf{I}_2$	$\mathbf{I}_2$	$-\mathbf{I}_2$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{k}$
$-\mathbf{I}_2$	$-\mathbf{I}_2$	$\mathbf{I}_2$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{I}_2$	$\mathbf{I}_2$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$
$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{I}_2$	$-\mathbf{I}_2$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{I}_2$	$\mathbf{I}_2$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{i}$
$-\mathbf{j}$	$-\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{I}_2$	$-\mathbf{I}_2$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{I}_2$	$\mathbf{I}_2$
$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{I}_2$	$-\mathbf{I}_2$

15. Εάν οι K και H είναι δυο υποομάδες μιας ομάδας G, και εάν η H είναι υποομάδα πεπερασμένου δείκτη εντός τής G, να αποδειχθεί ότι *και* η $K \cap H$ είναι υποομάδα πεπερασμένου δείκτη εντός τής K, και ότι -επιπροσθέτως- ισχύει η ανισοϊσότητα:

$$|K : K \cap H| \leq |G : H| .$$

16. Έστω G μια ομάδα για την οποία υπάρχει ένας $n \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$(xy)^n = x^n y^n, \quad \forall\, (x, y) \in G \times G.$$

Ορίζουμε τα σύνολα

$$G_{(n)} := \{\, x \in G \mid x^n = e_G \} , \quad G^{(n)} := \{x^n \mid x \in G\} .$$

Να αποδειχθεί ότι $G_{(n)} \trianglelefteq G,\ G^{(n)} \trianglelefteq G$ και ότι

$$|G^{(n)}| = \left|G : G_{(n)}\right| .$$

17. Εκλαμβάνοντας την $\mathfrak{S}_3$ (κατά φυσικό τρόπο) ως υποομάδα τής $\mathfrak{S}_4$ να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $\mathfrak{S}_3 \cap V = \{\mathrm{id}\}$,

(ii) $\mathfrak{S}_3 V/V \cong \mathfrak{S}_3$,και

(iii) $\mathfrak{S}_3 V = \mathfrak{S}_4$, όπου ως

$$\boxed{V := \{\mathrm{id}, [1\ 2] \circ [3\ 4] , [1\ 3] \circ [2\ 4] , [1\ 4] \circ [2\ 3]\} \lhd \mathfrak{S}_4}$$

συμβολίζεται η λεγομένη **ομάδα των τεσσάρων στοιχείων τού Klein**.

18. Έστω G τυχούσα ομάδα και έστω $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ η ομάδα των αυτομορφισμών της. Το υποσύνολο $\mathrm{Inn}(G)$ τής $\mathrm{Aut}(G)$ των **εσωτερικών αυτομορφισμών** τής G αποτελείται από όλους τους αυτομορφισμούς τής μορφής

$$\phi_h : G \longrightarrow G, \quad \phi_h(g) = h^{-1} g h, \ \forall g,\ g \in G,$$

όπου $h \in G$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το ζεύγος $(\mathrm{Inn}(G), \circ)$ είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$. (Η πηλικοομάδα $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ ονομάζεται **ομάδα των εξωτερικών αυτομορφισμών** τής G.)

(ii) Η απεικόνιση

$$f : G \longrightarrow \mathrm{Inn}(G), \quad f\,(h) = \phi_h, \ \forall h,\ h \in G,$$

είναι ένας επιμορφισμός ομάδων με πυρήνα του τον $\mathrm{Ker}(f) = Z(G)$, όπου

$$Z(G) := \{\, g \in G \mid xg = gx, \ \forall x, \ x \in G\}$$

είναι το λεγόμενο **κέντρο** τής ομάδας G και, ως εκ τούτου,

$$\boxed{G/Z\,(G) \cong \mathrm{Inn}(G).}$$

(iii) Εάν η ομάδα $\mathrm{Inn}(G)$ είναι κυκλική, τότε η G είναι αβελιανή και η $\mathrm{Inn}(G)$ κατ' ανάγκην τετριμμένη.

(iv) Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{Inn}(Q) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, όπου Q η ομάδα των τετρανίων (βλ. άσκ. **14**).

19. Έστω G μια ομάδα και έστω K μια υποομάδα της. Υποθέτοντας ότι οι H_1, H_2 είναι δυο υποομάδες τής G με $H_1 \subseteq H_2$ και $H_1 \trianglelefteq G$, να αποδειχθεί ότι $K \cap H_1 \trianglelefteq K \cap H_2$ και ότι η $K \cap H_2 / K \cap H_1$ είναι ισόμορφη με κάποια υποομάδα τής H_2/H_1.

20. Έστω ότι η απεικόνιση $f : G_1 \longrightarrow G_2$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων και ότι $H_1 \trianglelefteq G_1$ και $H_2 := f(H_1) \trianglelefteq G_2$. Να αποδειχθεί ότι

$$G_1/H_1 \cong G_2/H_2.$$