ΑΛΓΕΒΡΑ: 6ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Έστω m ένας φυσικός αριθμός ≥ 2. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Ένα στοιχείο τού αβελιανού μονοειδούς $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ (που έχει το $[1]_m$ ως ουδέτερο στοιχείο) διαθέτει αντίστροφο (= συμμετρικό ως προς την πράξη τού πολλαπλασιασμού κλάσεων ισοτιμίας κατά μοδιο m) εάν και μόνον εάν ανήκει στο σύνολο

$$\boxed{(\mathbb{Z}_m)^\times := \{[k]_m \in \mathbb{Z}_m \mid 1 \leq k \leq m-1,\ \text{μκδ}\,(k,m) = 1\}.}$$

Ως εκ τούτου, το ζεύγος $((\mathbb{Z}_m)^\times, \cdot)$ είναι μια αβελιανή ομάδα τάξεως $\varphi(m)$, όπου φ η συνάρτηση τού Euler. (Η εν λόγω ομάδα ονομάζεται ιδιαιτέρως **ομάδα των πολλαπλασιαστικώς αντιστρεψίμων στοιχείων τού** $\mathbb{Z}_m$.)

(ii) Η ομάδα $((\mathbb{Z}_9)^\times, \cdot)$ είναι κυκλική, ενώ η $((\mathbb{Z}_8)^\times, \cdot)$ δεν είναι.

2. Έστω $(\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}, \cdot)$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών. Συμβολίζοντας ως

$$\boxed{\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| = 1\},}$$

τον **μοναδιαίο κύκλο** τού μιγαδικού επιπέδου και ως

$$\boxed{\mathcal{E}_n := \{\, z \in \mathbb{C} \mid\ z^n = 1\}}$$

το σύνολο των n-οστών ριζών τής μονάδας, όπου $n \in \mathbb{N}$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Οι κυκλικές υποομάδες $\langle i \rangle$ και $\left\langle \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right\rangle$ τής $(\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}, \cdot)$ είναι πεπερασμένες (τάξεως 4 και 8, με 2 και 6 γεννήτορες, αντιστοίχως), ενώ η $\langle 1+i \rangle$ έχει άπειρη τάξη και διαθέτει μόνον 2 γεννήτορες.

(ii) Το ζεύγος $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ είναι υποομάδα τής $(\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}, \cdot)$.

(iii) Το ζεύγος $(\mathcal{E}_n, \cdot)$ είναι κυκλική υποομάδα τής $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ (τάξεως n) με $\mathcal{E}_n = \left\langle \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right) \right\rangle$. Ερώτημα: Ποιες είναι οι υποομάδες που παράγει το $\zeta \in \mathcal{E}_n$ στις ακόλουθες περιπτώσεις;

n	6	6	12	12	12
ζ	$\exp\left(\frac{4\pi i}{6}\right)$	$\exp\left(\frac{10\pi i}{6}\right)$	$\exp\left(\frac{4\pi i}{12}\right)$	$\exp\left(\frac{6\pi i}{12}\right)$	$\exp\left(\frac{10\pi i}{12}\right)$

(iv) Ακόμη και η ένωση $\mathcal{E}_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_n$ είναι μια ομάδα (άπειρης τάξεως) με πράξη της τον πολλαπλασιασμό (όπου το $\mathcal{E}_\infty$ είναι σύνολο αριθμήσιμο).

3. Έστω $(F, +)$ μια ομάδα με ουδέτερό της στοιχείο το 0_F. Εάν υποθέσουμε ότι το ζεύγος $(F\smallsetminus\{0_F\}, \cdot)$ είναι μια αβελιανή ομάδα, όπου η (πολλαπλασιαστικώς) υποδηλούμενη εσωτερική της πράξη είναι *επιμεριστική* ως προς την "$+$", ήτοι ισχύει

$$x\,(y+z) = xy + xz,\ \ \forall\,(x,y,z) \in F^3,$$

τότε λέμε πως η τριάδα $(F,+,\cdot)$ είναι ένα **σώμα**. Να αποδειχθεί ότι οι τριάδες $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$ και $(\mathbb{C},+,\cdot)$ (οι καθοριζόμενες από τη συνήθη πρόσθεση και τον συνήθη πολλαπλασιασμό ρητών, πραγματικών και μιγαδικών αριθμών, αντιστοίχως), καθώς και η $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$, όπου p ένας πρώτος αριθμός, αποτελούν σώματα.

4. Εάν οι m και n είναι δυο φυσικοί αριθμοί και το F ένα σώμα, τότε κάθε απεικόνιση

$$f:\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}\longrightarrow F \qquad (*)$$

ονομάζεται $(m\times n)$-**πίνακας** με τις «εγγραφές[1]» του ειλημμένες από το F. Αντί τού σχετικώς δύσχρηστου συμβολισμού $(*)$ ενός $(m\times n)$-πίνακα, γράφουμε απλώς

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & \cdots & a_{m-1\,n-1} & a_{m-1\,n} \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \cdots & a_{m\,n-1} & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

ή $(a_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}$, όπου

$$a_{ij}:=f(i,j),\ \forall\,(i,j)\in\{1,2,\ldots,m\}\times\{1,2,\ldots,n\}.$$

Συμβολίζοντας ως $\mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$ το σύνολο όλων των $(m\times n)$-πινάκων με εγγραφές ειλημμένες από ένα σώμα F, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το ζεύγος $(\mathrm{Mat}_{m\times n}(F),+)$, όπου

$$(a_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}+(b_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n}:=(a_{ij}+b_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n},$$

για κάθε $((a_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n},(b_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le n})\in(\mathrm{Mat}_{m\times n}(F))^2$, είναι μια αβελιανή ομάδα με ουδέτερό της στοιχείο τον $(m\times n)$-πίνακα, όλες οι εγγραφές τού οποίου είναι ίσες με το 0_F.

(ii) Το ζεύγος $(\mathrm{Mat}_{n\times n}(F),\cdot)$, όπου "$\cdot$" ο *πολλαπλασιασμός πινάκων*:

$$\mathbf{AB}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i\,k}b_{k\,j}\right)_{1\le i,j\le n},$$

για οιουσδήποτε $\mathbf{A}=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(F)$, είναι ένα μονοειδές με ουδέτερό του στοιχείο τον *μοναδιαίο* $(n\times n)$-πίνακα

$$\mathbf{I}_n:=\begin{pmatrix} 1_F & 0_F & \cdots & 0_F & 0_F \\ 0_F & 1_F & \cdots & 0_F & 0_F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_F & 0_F & \cdots & 1_F & 0_F \\ 0_F & 0_F & \cdots & 0_F & 1_F \end{pmatrix}$$

(όπου με το 1_F συμβολίζουμε το ουδέτερο στοιχείο τής $(F\smallsetminus\{0_F\},\cdot)$).

(iii) Το $(\mathrm{Mat}_{n\times n}(F),\cdot)$ δεν είναι κατ' ανάγκην αβελιανό όταν $n\ge 2$.

(iv) Εάν

$$\boxed{\mathbf{GL}_n(F):=\{\,\mathbf{A}\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(F)\ \mid\ \exists\mathbf{B}\in\mathrm{Mat}_{n\times n}(F):\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}_n\}}$$

[1] Οι **εγγραφές** (αγγλ. entries) ενός πίνακα $(*)$ είναι οι $m\times n$ εικόνες τής f.

τότε το ζεύγος $(\mathbf{GL}_n(F), \cdot)$ αποτελεί μια ομάδα. (Αυτή η ομάδα ονομάζεται **γενική γραμμική ομάδα** βαθμού n.)

(v) Εάν $F = \mathbb{Q}$ και $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{Q})$, όπου

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

τότε $\text{ord}(\mathbf{A}) = 4$, $\text{ord}(\mathbf{B}) = 3$, αλλά $\text{ord}(\mathbf{AB}) = \infty$.

5. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω F ένα σώμα. Εάν συμβολίσουμε την *ορίζουσα* ενός οιουδήποτε $(n \times n)$-πίνακα $\mathbf{A}$ ως $\det(\mathbf{A})$, να επαληθευθεί η ισότητα

$$\mathbf{GL}_n(F) = \{\, \mathbf{A} \in \text{Mat}_{n\times n}(F) \;\mid\; \det(\mathbf{A}) \neq 0_F \}$$

και να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$\boxed{\mathbf{SL}_n(F) := \{\, \mathbf{A} \in \mathbf{GL}_n(F) \;\mid\; \det(\mathbf{A}) = 1_F \}}$$

είναι υποομάδα τής $\mathbf{GL}_n(F)$. (Αυτή η υποομάδα ονομάζεται **ειδική γραμμική ομάδα** βαθμού n.)

6. Εάν η G είναι μια ομάδα με μόνες υποομάδες της την τετριμμένη και τον εαυτό της, να αποδειχθεί ότι η G είναι κατ' ανάγκην κυκλική.

7. Να αποδειχθεί ότι κάθε ομάδα αρτίας τάξεως περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο το οποίο έχει τάξη 2.

8. Εάν ένα στοιχείο a μιας ομάδας $(G, \cdot)$ έχει τάξη mn, όπου $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, και $\text{μκδ}(m, n) = 1$, να αποδειχθεί ότι υπάρχουν *μονοσημάντως ορισμένα* στοιχεία b, c τής G, ούτως ώστε

$$a = bc = cb,$$

όπου τα b και c είναι «δυνάμεις» τού a με $\text{ord}(b) = m$ και $\text{ord}(c) = n$.

9. Εάν η $(G, \cdot)$ είναι μια αβελιανή ομάδα και $(g, h) \in G \times G$ με

$$\text{ord}\,(g) = m \in \mathbb{N}, \;\; \text{ord}\,(h) = n \in \mathbb{N},$$

να αποδειχθεί η αμφίπλευρη συνεπαγωγή:

$$\text{ord}\,(gh) = mn \Longleftrightarrow \text{μκδ}\,(m, n) = 1.$$

10. Εάν ο n είναι ένας φυσικός αριθμός, να αποδειχθεί *ομαδοθεωρητικώς* ότι ισχύει η ισότητα

$$\boxed{n = \sum_{d \,\mid\, n} \varphi\,(d)}$$

όπου φ η συνάρτηση τού Euler και το άθροισμα είναι ειλημμένο υπεράνω όλων των (διακεκριμένων) διαιρετών d τού n $(1 \leq d \leq n)$. (Υπόδειξη: Να εφαρμοσθεί καταλλήλως το πόρισμα **3.2.42** για μια κυκλική ομάδα G τάξεως n.)

11. Να αποδειχθεί ότι μια ομάδα G τάξεως $n \in \mathbb{N}$ είναι κυκλική εάν και μόνον εάν για κάθε θετικό διαιρέτη d τού n υπάρχει το πολύ μία κυκλική υποομάδα τής G τάξεως d. (Υπόδειξη: Να εφαρμοσθεί το πόρισμα **3.2.45**, καθώς και το αποτέλεσμα τής ασκήσεως **10**.)

12. Να εξετασθεί ποιες εκ των ακολούθων απεικονίσεων είναι ομομορφισμοί ομάδων:

(i) $f : (\mathbb{Z}_{12}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_{12}, +)$, $f([n]_{12}) := [n+1]_{12}$,

(ii) $f : (G, \cdot) \longrightarrow (G, \cdot)$, $f(g) := g^3$, όπου η $G = \langle a \rangle$ είναι μια κυκλική ομάδα τάξεως 12,

(iii) $f : (\mathbb{Z}_8, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_2, +)$, $f([n]_8) := [n]_2$.

13. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $(\mathcal{E}_n, \cdot)$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των n-οστών ριζών τής μονάδας (βλ. άσκηση **2**). Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$f : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathcal{E}_n, \cdot)\,, \quad f(k) := \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right), \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

αποτελεί έναν επιμορφισμό ομάδων και να προσδιορισθεί ο πυρήνας της.

14. Εάν το F είναι ένα σώμα, να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$(\mathbf{GL}_n(F), \cdot) \longrightarrow (F \smallsetminus \{0_F\}, \cdot), \quad \mathbf{A} \longmapsto \det(\mathbf{A})\,,$$

είναι ένας επιμορφισμός ομάδων με την $\mathbf{SL}_n(F)$ ως πυρήνα της (βλ. άσκηση **5**).

15. Να αποδειχθεί ότι οι προσθετικές ομάδες $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ και $(\mathbb{R}, +)$ είναι ανά δύο μη ισόμορφες.

16. Δίδονται η προσθετική ομάδα $G := \{\, a + bi \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \}$ τής $(\mathbb{C}, +)$ και η πολλαπλασιαστική ομάδα $H := \{\, 2^a 3^b \;\big|\; (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \}$. Να αποδειχθεί ότι $G \cong H$.

17. Εάν η $f : G \longrightarrow H$ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $\mathrm{ord}(f(g)) \mid \mathrm{ord}(g)$, $\forall g \in G$ με $\mathrm{ord}(g) \in \mathbb{N}$.

(ii) $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\} \Longrightarrow [\mathrm{ord}(f(g)) = \mathrm{ord}(g),\ \forall g \in G$ με $\mathrm{ord}(g) \in \mathbb{N}.]$

18. Εάν η $(G, \cdot)$ είναι μια κυκλική ομάδα άπειρης τάξεως, να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$f : G \longrightarrow G, \quad f(g) := g^2, \ \forall g \in G,$$

είναι μονομορφισμός, αλλά όχι και αυτομορφισμός.

19. Εάν η $(G, \cdot)$ είναι μια πεπερασμένη ομάδα και η $f : G \longrightarrow G$ ένας μονομορφισμός, να αποδειχθεί ότι η f είναι κατ' ανάγκην αυτομορφισμός τής G.

20. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Να αποδειχθεί ότι η G είναι αβελιανή εάν και μόνον εάν η απεικόνιση

$$f : G \longrightarrow G, \quad f(g) := g^{-1}, \ \forall g \in G,$$

είναι ένας αυτομορφισμός τής G.