ΑΛΓΕΒΡΑ: 5ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\mathbb{Q}\smallsetminus\{0\}$ όλων των ρητών αριθμών που είναι διάφοροι τού μηδενός, εφοδιαζόμενο με την πράξη τής συνήθους διαιρέσεως, είναι ένα ομαδοειδές. Εν συνεχεία, να εξετασθεί το κατά πόσον αυτό είναι (ή δεν είναι) (i) προσεταιριστικό και (ii) αβελιανό.

2. Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο A εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη "$\circledcirc$", η οποία ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:

$$(a \circledcirc b) \circledcirc (c \circledcirc d) = (a \circledcirc c) \circledcirc (b \circledcirc d), \;\; \forall\,(a,b,c,d) \in A^4.$$

Υποθέτοντας ότι το ομαδοειδές $(A, \circledcirc)$ διαθέτει ουδέτερο στοιχείο, να αποδειχθεί ότι είναι *και* προσεταιριστικό *και* αβελιανό.

3. Να εξετασθεί η ύπαρξη εξ αριστερών και εκ δεξιών ουδετέρων στοιχείων τού ομαδοειδούς $(\mathbb{R}, \star)$, όπου

$$x \star y := |x|\, y, \;\; \forall\,(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

4. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με την εσωτερική πράξη "$\circledast$", όπου

$$x \circledast y := x + y - xy, \;\; \forall\,(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Διαθέτει το ομαδοειδές $(\mathbb{R}, \circledast)$ ουδέτερο στοιχείο; Και αν ναι, τότε ποια $x \in \mathbb{R}$ επιδέχονται συμμετρικά στοιχεία ως προς την "$\circledast$"; Ποιες θα είναι οι απαντήσεις στα ίδια ερωτήματα στην περίπτωση κατά την οποία, αντί τού ομαδοειδούς $(\mathbb{R}, \circledast)$, θεωρήσουμε το $(\mathbb{Z}, \circledast|_{\mathbb{Z}})$;

5. (i) Επί τού συνόλου $\mathbb{R}$ ορίζουμε μια εσωτερική πράξη "$\odot$" ως ακολούθως:

$$x \odot y := ax + ay + bxy + c, \;\; \forall\,(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$. Υποθέτοντας ότι το ομαδοειδές $(\mathbb{R}, \odot)$ έχει το $e \in \mathbb{R}$ ως ουδέτερό του στοιχείο και ότι το $x \in \mathbb{R}$ διαθέτει μονοσημάντως ορισμένο συμμετρικό στοιχείο ως προς την "$\odot$" εάν και μόνον εάν $x \in \mathbb{R}\smallsetminus\{d\}$, όπου d είναι ένας πραγματικός αριθμός διάφορος τού e, να προσδιορισθούν τα a, b, c συναρτήσει των d και e.

(ii) Έστω $(\mathbb{R}, *)$ το ομαδοειδές το οριζόμενο μέσω τής εσωτερικής πράξεως:

$$x * y := x + y + x^2 y^2, \;\; \forall\,(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Να αποδειχθεί ότι το $(\mathbb{R}, *)$ είναι ένα αβελιανό, μη προσεταιριστικό ομαδοειδές με ουδέτερο στοιχείο, καθώς και το ότι υπάρχουν στοιχεία τού $\mathbb{R}$ τα οποία διαθέτουν δύο συμμετρικά στοιχεία, ένα συμμετρικό στοιχείο ή και κανένα συμμετρικό στοιχείο ως προς την πράξη "$*$".

6. Έστω m ένας φυσικός αριθμός και $E := \{0, 1, ..., m-1\}$. Επί τού E ορίζεται η εσωτερική πράξη:

$$a * b := \begin{cases} a + b, & \text{όταν } a + b < m, \\ r, & \text{όταν } a + b = m + r, \;\; 0 \leq r < m. \end{cases}$$

για κάθε $a, b \in E$. Να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(E, *)$ αποτελεί μια ομάδα τάξεως m.

7. Να αποδειχθεί ότι τα κατωτέρω σύνολα αποτελούν ομάδες:

(i) Το $\{\, 2^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ εφοδιασμένο με την πράξη τού πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών,

(ii) Το $\{\, \frac{1+2m}{1-2n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ εφοδιασμένο με την πράξη τού πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών,

(iii) Το $\{\, a + b\sqrt{2} \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}\}$ εφοδιασμένο με τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών,

(iv) Το σύνολο των (2×2)-πινάκων (με τις εγγραφές τους ειλημμένες από το σύνολο των μιγαδικών αριθμών)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

όπου $\omega \in \mathbb{C}\smallsetminus\{1\}$, $\omega^3 = 1$, εφοδιασμένο με την πράξη τού συνήθους πολλαπλασιασμού πινάκων. Ποιες εκ των ομάδων των ορισθέντων στα (i)-(iv) είναι αβελιανές;

8. Έστω T ένα ισόπλευρο τρίγωνο εντός τού $\mathbb{R}^2$ και έστω O το σημείο τομής των μεσοκαθέτων του. Υποθέτοντας ότι η $\sigma_0 : T \longrightarrow T$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση, η $\sigma_1 : T \longrightarrow T$ (και, αντιστοίχως, η $\sigma_2 : T \longrightarrow T$) η απεικόνιση που εκφράζει τη στροφή κατά $\frac{2\pi}{3}$ (και, αντιστοίχως, κατά $\frac{4\pi}{3}$) περί το O, και ότι οι $\tau_j : T \longrightarrow T$, $j = 1,2,3$, είναι οι απεικονίσεις οι αντιστοιχούσες στους κατοπτρισμούς ως προς τις τρεις μεσοκαθέτους τού T, να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$, εφοδιασμένο με την πράξη τής συνθέσεως απεικονίσεων, αποτελεί μια ομάδα και να προσδιορισθεί ο κατάλογος των συνθέσεων όλων των ζευγών στοιχείων της.

9. Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και η $(G_j, \circledast_j)_{1\leq j\leq n}$ είναι μια οικογένεια n ομάδων, να αποδειχθεί ότι το *καρτεσιανό* (ή *ευθύ*) *γινόμενο* $\prod_{j=1}^{n} G_j$ των μελών της, εφοδιασμένο με την πράξη "$\odot$", όπου

$$(g_1, \ldots, g_n) \odot (g_1', \ldots, g_n') := (g_1 \circledast_1 g_1', \ldots, g_n \circledast_n g_n'),$$

$\forall ((g_1, \ldots, g_n), (g_1', \ldots, g_n')) \in (\prod_{j=1}^{n} G_j)^2$, αποτελεί μια ομάδα.

10. Έστω $G = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Επί τού G ορίζεται η εσωτερική πράξη:

$$(\alpha, \beta, \gamma) \star (\xi, \eta, \zeta) := \Big(\alpha + (-1)^{\beta}\, \xi, \beta + (-1)^{\gamma}\, \eta, (-1)^{\xi}\, \gamma + \zeta\Big).$$

Να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(G, \star)$ αποτελεί μια ομάδα. (Σημειωτέον ότι η ανωτέρω πράξη "$\star$" επί τού $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ είναι διαφορετική τής «συνήθους» πράξεως "$\odot$" (τής ασκήσεως **9**) με την οποία εφοδιάζεται ένα καρτεσιανό γινόμενο ομάδων.)

11. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο της το e και με τάξη $|G| = n \in \mathbb{N}$. Για οιαδήποτε n-άδα στοιχείων $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, να αποδειχθεί η ύπαρξη φυσικών αριθμών k, m για τους οποίους ισχύει $1 \leq k \leq m \leq n$ και

$$g_k g_{k+1} \cdots g_{m-1} g_m = e.$$

12. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα. Για κάθε *ακέραιο* $n \in \mathbb{Z}$ αποδειχθεί ότι

$$\left(a^{-1}ba\right)^n = a^{-1}b^n a, \quad \forall\, (a,b) \in G \times G.$$

13. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο της το e. Υποθέτοντας ότι

(a) $(ab)^2 = (ba)^2$, $\forall\,(a,b) \in G \times G$, και

(b) $(\forall a \in G)\,\big(a^2 = e \Longrightarrow a = e\big)$

να αποδειχθεί ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $x^2 = yx^2y^{-1}$, $\forall\,(x,y) \in G \times G$,

(ii) $yxy^{-1} = y^{-1}xy$, $\forall\,(x,y) \in G \times G$,

(iii) η $(G, \cdot)$ είναι αβελιανή.

14. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα με ουδέτερο στοιχείο της το e. Εάν $|G| = 2n$, για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, και

$$P := \{x \in G \mid x^{-1} = x\},$$

να αποδειχθεί ότι

(i) $\exists m \in \mathbb{N} : \mathrm{card}(P) = 2m$,

(ii) $\exists a \in G \smallsetminus \{e\} : a^2 = e$.

15. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα και έστω S ένα μη κενό σύνολο. Εάν η $f : S \longrightarrow G$ είναι μια αμφίρριψη, να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(S, \odot)$ είναι μια ομάδα όταν -εξ ορισμού-

$$x \odot y := f^{-1}\left(f(x) \cdot f(y)\right), \;\; \forall\,(x,y) \in S \times S.$$

16. Εάν για οιονδήποτε φυσικό αριθμό m συμβολίσουμε ως $m\mathbb{Z}$ το σύνολο $\{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το $m\mathbb{Z}$ είναι υποομάδα τής $(\mathbb{Z}, +)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

(ii) Εάν $m, n \in \mathbb{N}$, τότε [η $(m\mathbb{Z}, +)$ είναι υποομάδα τής $(n\mathbb{Z}, +)$] $\Longleftrightarrow n \mid m$.

17. Έστω $(G, \cdot)$ μια αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο της το e. Να αποδειχθεί ότι τα σύνολα H_m, $m \in \mathbb{Z}$, όπου

$$H_m := \{g \in G \mid g^m = e\},$$

είναι υποομάδες τής G.

18. Έστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα και έστω g ένα στοιχείο τής G. Να αποδειχθεί ότι το

$$C_G(g) := \{h \in G \mid hg = gh\}$$

αποτελεί υποομάδα τής G. (Το $C_G(g)$ καλείται -ιδιαιτέρως- **κεντροποιητής** τού g.)

19. Να αποδειχθεί ότι η ένωση $H \cup K$ δυο υποομάδων H, K μιας δεδομένης ομάδας G αποτελεί μια υποομάδα τής G εάν και μόνον εάν $H \subseteq K$ ή $K \subseteq H$.

20. Εάν τα H και K είναι δυο μη κενά *υποσύνολα* μιας ομάδας $(G, \cdot)$, τότε ορίζουμε το **γινόμενο** HK ως εξής:

$$HK := \{hk \mid h \in H,\; k \in K\}.$$

(i) Εάν το H και όλα τα μέλη μιας οικογενείας συνόλων $(K_j)_{j \in J}$ είναι μη κενά, να αποδειχθεί ότι

$$H\left(\bigcup_{j \in J} K_j\right) = \bigcup_{j \in J} HK_j, \qquad \left(\bigcup_{j \in J} K_j\right) H = \bigcup_{j \in J} K_j H.$$

(ii) Εάν τα H και K είναι υποομάδες τής G, να αποδειχθεί ότι το HK αποτελεί μια υποομάδα τής G εάν και μόνον εάν $HK = KH$.