ΑΛΓΕΒΡΑ: 4ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $a, b \in \mathbb{Z}$, να αποδειχθεί ότι οι συντελεστές τού διωνυμικού αναπτύγματος τού $(a+b)^n$ είναι περιττοί εάν και μόνον εάν $n = 2^k - 1$, για κάποιον $k \in \mathbb{N}$.

2. Εάν $a \in \mathbb{Z},\ b, c, m \in \mathbb{N}$, με $a^b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)$ και $a^c \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)$, να αποδειχθεί ότι

$$a^{\text{μκδ}(b,c)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m).$$

3. Εάν $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, με $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$, και $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ένα πολυώνυμο με ακεραίους συντελεστές, να αποδειχθεί η ισχύς τής ισοτιμίας

$$f(a) \equiv f(b) (\mathrm{mod}\, m).$$

4. Να αποδειχθεί ότι για οιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και για οιονδήποτε περιττό ακέραιο αριθμό a ισχύει η ισοτιμία

$$a^{2^n} \equiv 1 \left(\mathrm{mod}\, 2^{n+2}\right).$$

5. Να προσδιορισθεί το υπόλοιπο τής διαιρέσεως τού 3^{100} διά τού 101.

6. Να αποδειχθεί ότι το 51 διαιρεί το $10^{32n+9} - 7$ για κάθε φυσικό αριθμό n.

7. Να αποδειχθεί ότι για οιονδήποτε ακέραιο αριθμό a ισχύει η ισοτιμία

$$a^{33} \equiv a \,(\mathrm{mod}\, 15)\,.$$

8. Να αποδειχθεί ότι για οιονδήποτε περιττό ακέραιο αριθμό a ισχύει η ισοτιμία

$$a^{17} \equiv a \,(\mathrm{mod}\, 8160)\,.$$

9. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες τής συναρτήσεως φι τού Euler:

(i) Η φ δεν είναι ούτε ενριπτική ούτε επιρριπτική.

(ii) Εάν $m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$, τότε $\varphi(m) = m - 1 \Longleftrightarrow$ ο m είναι πρώτος αριθμός.

(iii) Εάν $m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$, τότε το $\varphi(m)$ είναι άρτιος αριθμός.

(iv) $n = \sum\limits_{d|n} \varphi(d)$ για οιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$.

(v) Εάν $m, n, k \in \mathbb{N}$, και $n \mid m$, τότε $\varphi\left(mn^k\right) = n^k \varphi(m)\,.$

(vi) $\varphi\left(m^2\right) = m\varphi(m)$ για οιονδήποτε $m \in \mathbb{N}$.

(vii) Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ και $m \mid n$, τότε $\varphi(m) \mid \varphi(n)\,.$

(viii) Εάν $m \in \mathbb{N}$, τότε $3 \mid m \Longleftrightarrow \varphi(3m) = 3\varphi(m)$
και $3 \nmid m \Longleftrightarrow \varphi(3m) = 2\varphi(m)\,.$

(ix) $\varphi(mn)\,\varphi(\text{μκδ}(m,n)) = \varphi(m)\,\varphi(n)\text{μκδ}(m,n)$ για οιουσδήποτε $m, n \in \mathbb{N}$.

(x) $\varphi(m)\,\varphi(n) = \varphi(\text{μκδ}(m,n))\,\varphi(\text{εκπ}(m,n))$ για οιουσδήποτε $m, n \in \mathbb{N}$.

10. Εάν οι p, q είναι περιττοί πρώτοι με $p \neq q$, και a ένας ακέραιος για τον οποίο ισχύει $\text{μκδ}(a, pq) = 1$, να αποδειχθεί η ισχύς τής ισοτιμίας

$$a^{\frac{\varphi(pq)}{2}} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, pq)\,.$$

11. Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ και μκδ$(m, n) = 1$, να αποδειχθεί ότι

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}.$$

12. Εάν $n \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{Z}$, όπου μκδ$(a, n) = 1 =$ μκδ$(a-1, n)$, να αποδειχθεί η ισχύς τής ισοτιμίας

$$\sum_{j=0}^{\varphi(n)-1} a^j \equiv 0 \pmod{n}.$$

13. Να επιλυθούν οι γραμμικές ισοτιμίες (με τον x προσδιοριστέο):

(i) $5x \equiv 3 \pmod{24}$,

(ii) $540x \equiv 18 \pmod{462}$.

14. Εάν ο p είναι περιττός πρώτος αριθμός, να αποδειχθεί ότι

$$(p-1)! \equiv p - 1 (\mathrm{mod} \sum_{j=1}^{p-1} j).$$

15. Εάν ο p είναι περιττός πρώτος αριθμός, να αποδειχθεί η ισχύς των ισοτιμιών

$$\prod_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} (2j+1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}, \quad \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} (2j)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$