# ΑΛΓΕΒΡΑ: 3ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

**1.** Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται διά τού 6 και ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων διαιρείται διά τού 24.

**2.** Να αποδειχθεί με τη βοήθεια τής ταυτότητας τής ευκλειδείου διαιρέσεως ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 1$ γράφεται ως άθροισμα δυνάμεων τού δύο, ήτοι υπό τη μορφή

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_s},$$

όπου $k_1, k_2, \ldots, k_s \in \mathbb{N}_0$ και $0 \leq k_s < \cdots < k_2 < k_1$.

**3.** Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Κάθε πρώτος περιττός αριθμός $p$ γράφεται είτε υπό τη μορφή $p = 4k + 1$ είτε υπό τη μορφή $p = 4k + 3$, για κάποιον $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Κάθε φυσικός αριθμός τής μορφής $4m + 3,\ m \in \mathbb{N}_0$, έχει έναν πρώτο διαιρέτη τής μορφής $4n + 3,\ n \in \mathbb{N}_0$.

**4.** Έστω $n \in \mathbb{N}$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν ο $n$ είναι περιττός, τότε $\frac{n(n+1)}{2} \mid n!$.

(ii) Εάν $\frac{n(n+1)}{2} \nmid n!$, τότε ο $n + 1$ είναι κατ' ανάγκην πρώτος.

**5.** Εάν οι $m, n \in \mathbb{N}$ είναι μεταξύ τους πρώτοι, να αποδειχθεί ότι μκδ$(m^2 + n^2, m + n) \in \{1, 2\}$.

**6.** Εάν ο $p = 2^n + 1$ είναι πρώτος αριθμός (όπου $n$ φυσικός $\geq 2$), να αποδειχθεί ότι ο $n$ ισούται με μια δύναμη τού δύο.

**7.** Να αποδειχθεί ότι μκδ$\big(15n^2 + 8n + 6, 30n^2 + 21n + 13\big) = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

**8.** Για οιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς $a, m, n$ με $a \geq 2$ να αποδειχθεί ότι

$$\text{μκδ}\,(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{μκδ}(m,n)} - 1.$$

**9.** Για οιουσδήποτε μη μηδενικούς ακεραίους $a, b$ να αποδειχθεί η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$\text{μκδ}\,(a, b) = \text{εκπ}\,(a, b) \Longleftrightarrow |a| = |b|\,.$$

**10.** Εάν $a, b, c \in \mathbb{N}$ και εάν μκδ$(a, b, c)$εκπ$(a, b, c) = abc$, να δειχθεί ότι

$$\text{μκδ}\,(a, b) = \text{μκδ}\,(b, c) = \text{μκδ}\,(c, a) = 1.$$

**11.** Για οιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς $a, b, c$ να αποδειχθούν οι ακόλουθες ισότητες:

(i) μκδ$(a, \text{εκπ}\,(b, c)) = \text{εκπ}(\text{μκδ}\,(a, b)\,, \text{μκδ}\,(a, c))\,,$

(ii) εκπ$(a, \text{μκδ}\,(b, c)) = \text{μκδ}(\text{εκπ}\,(a, b)\,, \text{εκπ}\,(a, c))\,.$

**12.** Για οιουσδήποτε μη μηδενικούς ακεραίους $a, b, c$ να αποδειχθεί η ισότητα

$$\text{μκδ}\,(\text{εκπ}\,(a, b)\,, \text{εκπ}\,(b, c)\,, \text{εκπ}\,(c, a)) = \text{εκπ}\,(\text{μκδ}\,(a, b)\,, \text{μκδ}\,(b, c)\,, \text{μκδ}\,(c, a))\,.$$

**13.** Εάν $m, n \in \mathbb{N}$ και οι $a_1, \ldots, a_n$ μη μηδενικοί ακέραιοι αριθμοί, να αποδειχθούν οι ακόλουθες ισότητες:

(i) μκδ$(a_1^m, \ldots, a_n^m) =$ μκδ$(a_1, \ldots, a_n)^m$,

(ii) εκπ$(a_1^m, \ldots, a_n^m) =$ εκπ$(a_1, \ldots, a_n)^m$.

**14.** Λέμε πως ένας ακέραιος $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ **στερείται τετραγώνων** όταν δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός $m \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, \pm 1\}$ με $m^2 \mid n$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Ένας ακέραιος αριθμός $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, \pm 1\}$ στερείται τετραγώνων εάν και μόνον εάν στη (μονοσημάντως ορισμένη) παράσταση τού $n$,

$$n = \operatorname{sgn}(n)\ p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

ως γινομένου διακεκριμένων πρώτων, έχουμε

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 1.$$

(ii) Κάθε ακέραιος αριθμός $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ γράφεται ως γινόμενο $n = ab$ δύο κατ' απόλυτη τιμή μονοσημάντως ορισμένων μη μηδενικών ακεραίων $a, b$, όπου ο μεν $a$ στερείται τετραγώνων, ο δε $b$ είναι τέλειο τετράγωνο[1].

**15.** Εάν ως $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συμβολίσουμε την ακολουθία των πρώτων αριθμών, να αποδειχθεί η ισχύς των ακολούθων ανισοϊσοτήτων:

(i) $p_n \leq p_1 \cdots p_{n-1} + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$,

(ii) $p_{n-1} \geq n + 2$ για οιονδήποτε φυσικό αριθμό $n \geq 5$,

(iii) $p_{n-1} \geq 2n + 2$ για οιονδήποτε φυσικό αριθμό $n \geq 10$,

(iv) $p_n \leq 2^{2^{n-1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

[1] Ένας $m \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ καλείται **τέλειο τετράγωνο** όταν $\exists r \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\} : r^2 = m$.