ΑΛΓΕΒΡΑ: 2ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Έστω ότι οι $\mathcal{R}_i \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ i = 1, 2, 3$, είναι οι διμελείς σχέσεις επί τού $\mathbb{N}$ οι οποίες ορίζονται ως εξής:

(i) $(x, y) \in \mathcal{R}_1 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ Το x είναι πολλαπλάσιο τού y.

(ii) $(x, y) \in \mathcal{R}_2 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x = y - 1$.

(iii) $(x, y) \in \mathcal{R}_3 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ Το x έχει το ίδιο πλήθος ψηφίων με το y.

Ποιες εξ αυτών είναι α) ανακλαστκές, β) συμμετρικές, γ) μεταβατικές;

2. Έστω $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$ η διμελής σχέση επί τού $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}.$$

Να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{R}$ αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τού και εν συνεχεία να προσδιορισθεί η κλάση ισοδυναμίας τού $\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}^*$.

3. Έστω $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ η διμελής σχέση επί τού $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$(x, y) \in \mathcal{R} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} xy > 0.$$

Να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{R}$ αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τού $\mathbb{R}^*$ και εν συνεχεία να περιγραφούν οι κλάσεις της.

4. Επί τού συνόλου $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ορίζεται η διμελής σχέση

$$(z, w) \in \mathcal{R} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} w - z \in \mathbb{R}.$$

Να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{R}$ αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τού $\mathbb{C}$ και εν συνεχεία να περιγραφούν οι κλάσεις της.

5. Έστω $A = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ και έστω $\mathcal{R}$ η διμελής σχέση επί τού A η οποία ορίζεται ως εξής:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathcal{R} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x_1 y_1 \left(x_2^2 - y_2^2\right) = x_2 y_2 \left(x_1^2 - y_1^2\right).$$

Να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{R}$ αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τού A και ότι, εάν το (x_0, y_0) είναι ένα παγιωμένο στοιχείο τού A, τότε

$$((x, y), (x_0, y_0)) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} \ \text{ή} \ \frac{y}{x} = -\frac{x_0}{y_0}.$$

Επίσης, να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία τής κλάσεως ισοδυναμίας τού διατεταγμένου ζεύγους $(2, 1)$ (ως προς την $\mathcal{R}$).

6. Εάν οι $\mathcal{R}_1$ και $\mathcal{R}_2$ είναι δυο σχέσεις ισοδυναμίας επί ενός συνόλου A, να αποδειχθεί ότι

(i) η τομή τους $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ είναι και αυτή μια σχέση ισοδυναμίας, και

(ii) ότι η ένωσή τους $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ *δεν* είναι *κατ' ανάγκην* μια σχέση ισοδυναμίας. Επιπροσθέτως, να δοθεί ένα (ειδικό) παράδειγμα σχέσεων ισοδυναμίας $\mathcal{R}_1$ και $\mathcal{R}_2$ επί ενός καταλλήλου συνόλου A, ούτως ώστε να ισχύει $\mathcal{R}_1 \neq \mathcal{R}_2$ και η ένωση $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ να *είναι* μια σχέση ισοδυναμίας.

7. Εάν η $\mathcal{R}_1$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί ενός συνόλου A και η $\mathcal{R}_2$ μια σχέση ισοδυναμίας επί ενός συνόλου B, να αποδειχθεί ότι η διμελής σχέση $\mathcal{R}$ επί τού $A \times B$, η οποία ορίζεται ως ακολούθως:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathcal{R} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (x_1, x_2) \in \mathcal{R}_1 \;\text{ και }\; (y_1, y_2) \in \mathcal{R}_2,$$

είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί τού $A \times B$.

8. Έστω $f : A \longrightarrow B$ τυχούσα απεικόνιση. Να αποδειχθεί η ύπαρξη
(i) μιας σχέσεως ισοδυναμίας $\mathcal{R}_f$ $(:=\sim_f)$ επί τού A,
(ii) μιας επιρρίψεως $\varphi : A \longrightarrow A/\mathcal{R}_f$, και
(iii) μιας ενρίψεως $h : A/\mathcal{R}_f \longrightarrow B$,
ούτως ώστε να ισχύει: $f = h \circ \varphi$. (Υπόδειξη: Να ορισθεί ως «$\sim_f$» η $a \sim_f a' \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f(a) = f(a')$, η φ μέσω τού τύπου $\varphi(a) := [a]_{\sim_f}$ και η h μέσω τού τύπου $h([a]_{\sim_f}) := f(a)$.)

9. Έστω A ένα μη κενό σύνολο και

$$\mathcal{R} = \{\, (x, y) \in A \times A \mid x = y \}$$

η λεγομένη *διαγώνιός* του. Να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{R}$ είναι ταυτοχρόνως *και* σχέση ισοδυναμίας *και* σχέση (ολικής) διατάξεως· εν συνεχεία, να αποδειχθεί ότι η διαγώνιος τού A είναι *η μόνη* διμελής σχέση επί τού A με αυτήν την ιδιότητα.

10. Έστω A το σύνολο $A := \{a, b, c, d, e\}$ και έστω $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ η διμελής σχέση

$$\mathcal{R} = \{(a, c), (b, c), (d, e)\} \cup \{\, (x, y) \in A \times A \mid x = y \}$$

επ' αυτού. Να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(A, \mathcal{R})$ αποτελεί ένα μερικώς, αλλά όχι και ολικώς διατεταγμένο σύνολο. Επίσης, να αποδειχθεί ότι το A διαθέτει δύο μεγιστοτικά και τρία ελαχιστοτικά στοιχεία (ως προς την $\mathcal{R}$).

11. Επί τού συνόλου $\mathbb{R}^{[0,1]}$ ορίζεται η διμελής σχέση

$$(f, g) \in \mathcal{R} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f(x) - g(x) \geq 0, \ \forall x \in [0, 1].$$

Να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathcal{R})$ αποτελεί ένα μερικώς, αλλά όχι και ολικώς διατεταγμένο σύνολο.

12. Να αποδειχθεί ότι, εάν τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πεπερασμένα σύνολα, τότε

$$\operatorname{card}(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) = \operatorname{card}(A_1) \cdot \operatorname{card}(A_2) \cdot \cdots \cdot \operatorname{card}(A_n).$$

13. Να αποδειχθεί ότι, εάν τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πεπερασμένα σύνολα, τότε

$$\operatorname{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} (-1)^{k-1} \operatorname{card}(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}).$$

Ιδιαιτέρως, εάν τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι πεπερασμένα σύνολα και ανα δύο ξένα, τότε

$$\operatorname{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \operatorname{card}(\coprod_{j=1}^{n} A_j) = \operatorname{card}(A_1) + \cdots + \operatorname{card}(A_n).$$

14. Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο με πληθικό αριθμό $n = \mathrm{card}(A)$. Να αποδειχθεί ότι το δυναμοσύνολο $\mathfrak{P}(A)$ τού A είναι πεπερασμένο και έχει πληθικό αριθμό

$$\mathrm{card}\,(\mathfrak{P}(A)) = 2^n.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε μαθηματική επαγωγή επί τού n.)

15. (i) Να αποδειχθεί πως, παρότι $(-1,1) \subsetneqq \mathbb{R}$, τα απειροσύνολα

$$(-1,1) := \{\, x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$$

και $\mathbb{R}$ έχουν την ίδια ισχύ. (Υπόδειξη: Θεωρήστε τήν απεικόνιση

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$$

την οριζομένη μέσω τού τύπου: $f\,(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.)

(ii) Να αποδειχθεί ότι το ανοικτό διάστημα $(-1,1)$ έχει την ίδια ισχύ με οιοδήποτε άλλο ανοικτό διάστημα

$$(a,b) := \{\, x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

τής πραγματικής ευθείας, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $a < b$. (Υπόδειξη: Θεωρήστε τήν απεικόνιση

$$f : (-1,1) \longrightarrow (a,b)$$

την οριζομένη μέσω τού τύπου: $f\,(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$.)