ΑΛΓΕΒΡΑ: 10ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Έστω R μια ακεραία περιοχή. Να αποδειχθεί ότι

$$\text{χαρ}(R[\mathsf{X}]) = \text{χαρ}(R).$$

2. Εντός τού $\mathbb{Z}_5[\mathsf{X}]$ να εκτελεσθεί η διαίρεση τού πολυωνύμου

$$f(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^4 + [4]_5\,\mathsf{X}^2 + \mathsf{X} + [1]_5$$

διά τού πολυωνύμου $g(\mathsf{X}) = [2]_5\,\mathsf{X}^2 + [1]_5$.

3. Να επινοηθούν παραδείγματα πολυωνύμων $f(\mathsf{X})$, $g(\mathsf{X}) \in \mathbb{Z}_4[\mathsf{X}]$, με τη βοήθεια των οποίων να είναι δυνατή η κατανόηση τού *γιατί* ο αλγόριθμος τής διαιρέσεως δεν μπορεί να επεκταθεί και στον $\mathbb{Z}_4[\mathsf{X}]$. (Υπόδειξη: Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_4[\mathsf{X}]$ δεν είναι ακεραία περιοχή· ως εκ τούτου, εμπεριέχει μηδενοδιαιρέτες.)

4. Έστω $f(\mathsf{X}) \in \mathbb{Q}[\mathsf{X}]$. Εάν ο άρρητος αριθμός $a + b\sqrt{c}$ (όπου $a, b, c \in \mathbb{Q}$ και $\sqrt{c} \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$) είναι μια θέση μηδενισμού τού $f(\mathsf{X})$, να δειχθεί πως το ίδιο ισχύει και για τον $a - b\sqrt{c}$, και μάλιστα ότι, εν προκειμένω,

$$\text{mult}(f; a + b\sqrt{c}) = \text{mult}(f; a - b\sqrt{c}).$$

5. Εάν το πολυώνυμο $f(\mathsf{X}) = a_0 + a_1\mathsf{X} + \cdots + a_n\mathsf{X}^n \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$ δέχεται ως θέση μηδενισμού του τον ρητό αριθμό $\frac{\lambda}{\mu}$, όπου $\text{μκδ}(\lambda, \mu) = 1$, να αποδειχθεί ότι

$$\boxed{\lambda \mid a_0 \quad \text{και} \quad \mu \mid a_n.}$$

Κατόπιν τούτου να αποδειχθεί ότι το πολυώνυμο

$$f(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^n + 2\kappa\mathsf{X} + 2 \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}],$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, δεν δέχεται ρητό αριθμό ως θέση μηδενισμού του.

6. Να αποδειχθεί ότι τα ακόλουθα πολυώνυμα είναι ανάγωγα εντός τού $\mathbb{Q}[\mathsf{X}]$:

(i) $f(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^3 - 2$,

(ii) $f(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^2 + 5\mathsf{X} + 1$,

(iii) $f(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^3 + 39\mathsf{X}^2 - 4\mathsf{X} + 8$,

(iv) $f(\mathsf{X}) = 3\mathsf{X}^3 - 5\mathsf{X}^2 + 128\mathsf{X} + 17$,

(v) $f(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^6 + \mathsf{X}^3 + 1$,

(vi) $f(\mathsf{X}) = \mathsf{X}^5 - 2\mathsf{X}^4 + 6\mathsf{X} + 10$.

7. Έστω $f(\mathsf{X}) = \sum_{j=0}^{n} a_j\mathsf{X}^j \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$ με $n \geq 1$ και $a_n \neq 0$. Εάν $\rho_1, \ldots, \rho_n \in \mathbb{C}$ είναι οι n θέσεις μηδενισμού τού $f(\mathsf{X})$, να αποδειχθούν οι ακόλουθοι τύποι (που ονομάζονται, ιδιαιτέρως, **τύποι τού Vieta**):

$$\boxed{S_k = (-1)^k\,\frac{a_{n-k}}{a_n}, \quad \forall k \in \{1, \ldots, n\},}$$

όπου

$$S_k := \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} \rho_{j_1} \rho_{j_2} \cdots \rho_{j_k}.$$

8. Να προσδιορισθεί το άθροισμα των τετραγώνων και των κύβων των (μιγαδικών) θέσεων μηδενισμού τής εξισώσεως:

$$2\mathsf{X}^3 - 3\mathsf{X}^2 + 4\mathsf{X} - 8 = 0.$$

9. Να προσδιορισθεί πολυώνυμο τρίτου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, το οποίο να έχει τις $\rho_1 = 5$ και $\rho_2 = i$ ως θέσεις μηδενισμού του.

10. (i) Εάν ο n είναι ένας περιττός ακέραιος αριθμός $\geq 1,\ \varphi \in \mathbb{R}$ και $c = \cos\varphi$, να εκφρασθεί το $\cos n\varphi$ ως πολυώνυμο τού c με ακεραίους συντελεστές.

(ii) Εάν ο $p \geq 3$ είναι ένας πρώτος αριθμός και το $\varphi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\cos p\varphi = \frac{p}{p+1}$, να αποδειχθεί ότι το $\cos\varphi$ αποτελεί θέση μηδενισμού ενός αναγώγου πολυωνύμου $f(\mathsf{X}) \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$ βαθμού p. (Υπόδειξη: Να εφαρμοσθεί καταλλήλως το κριτήριο αναγωγιμότητας τού Eisenstein.)