ΑΛΓΕΒΡΑ: 1ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Ας υποθέσουμε ότι τα A, B και C είναι τυχόντα σύνολα. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:
(i) $A \cap B \subseteq A, \;\; A \subseteq A \cup B$,
(ii) $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$ **(Μεταθετικοί νόμοι)**
(iii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \;\; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ **(Προσεταιριστικοί νόμοι)**
(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,, \;\; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **(Επιμεριστικοί νόμοι)**

2. Έστω ότι τα A, B, C είναι τρία σύνολα. Να αποδειχθεί ότι ισχύει η ακόλουθη αμφίπλευρη συνεπαγωγή:

$$A \cup B = B \cap C \Longleftrightarrow A \subseteq B \subseteq C.$$

3. Έστω I ένα μη κενό σύνολο. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $i \in I$ διαθέτουμε ένα σύνολο A_i και ότι J και K είναι δυο μη κενά υποσύνολα τού I. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:
(i) για οιονδήποτε παγιωμένο δείκτη $i_0 \in I$,

$$\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}, \;\; A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

(ii) $\bigcup_{i \in J} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i, \;\; \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in J} A_i$,
(iii) $\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in K} A_i\right) = \bigcup_{i \in J \cup K} A_i$,
(iv) $\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i \in K} A_i\right) = \bigcap_{i \in J \cup K} A_i$.

4. Έστω I ένα μη κενό σύνολο. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε $i \in I$ διαθέτουμε ένα σύνολο A_i και ότι το B είναι ένα τυχόν σύνολο. Να αποδειχθεί η ισχύς των ισοτήτων

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B)\,, \;\; \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B)\,.$$

5. Έστω ότι τα A, B, C και D είναι τυχόντα σύνολα. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες:
(i) $A \smallsetminus B \subseteq A$,
(ii) $(A \smallsetminus B) \cap B = \varnothing$,
(iii) $(A \smallsetminus B) \cup B = A \cup B$,
(iv) $A \smallsetminus (B \cap C) = (A \smallsetminus B) \cup (A \smallsetminus C)\,$,
(v) $A \smallsetminus (B \cup C) = (A \smallsetminus B) \cap (A \smallsetminus C)\,$,
(vi) $A \subseteq B$ και $C \subseteq D \Longrightarrow A \smallsetminus D \subseteq B \smallsetminus C$.

6. Έστω ότι τα A, B και C είναι τυχόντα σύνολα. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες:
(i) $(A \cup B) \smallsetminus C = (A \smallsetminus C) \cup (B \smallsetminus C)\,$,
(ii) $(A \cap B) \smallsetminus C = (A \smallsetminus C) \cap (B \smallsetminus C)\,$,
(iii) $(A \cup B) \smallsetminus B = A \smallsetminus B = A \smallsetminus (A \cap B)\,$,
(iv) $A \smallsetminus B = A \Longleftrightarrow A \cap B = \varnothing, \;\; A \smallsetminus B = B \smallsetminus A \Longleftrightarrow A = B$,
(v) $(A \smallsetminus B) \smallsetminus C = A \smallsetminus (B \cup C)\,, \;\; A \smallsetminus (B \smallsetminus C) = A \smallsetminus B \cup (A \cap C)\,$,
(vi) $A \smallsetminus (A \smallsetminus B) = A \cap B$.

7. Έστω ότι τα A, B, C και D είναι τυχόντα σύνολα. Να αποδειχθεί ότι το **καρτεσιανό γινόμενο** έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $A \subseteq B$ και $C \subseteq D \Longrightarrow A \times C \subseteq B \times D$,

(ii) $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$,

(iii) $A \neq \varnothing$ και $B \neq \varnothing \Longrightarrow (A \times B = B \times A \Longleftrightarrow A = B)$,

(iv) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,

(v) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,

(vi) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$, με την ισότητα ισχύουσα εάν και μόνον εάν τα εν λόγω σύνολα πληρούν τουλάχιστον μία εκ των ακολούθων συνθηκών:

a) $A = C$,
b) $B = D$,
c) $A \subseteq C$ και $B \subseteq D$,
d) $C \subseteq A$ και $D \subseteq B$,

(vii) $(A \times B) \smallsetminus (C \times D) = ((A \smallsetminus C) \times B) \cup (C \times (B \smallsetminus D))$.

8. Ως **συμμετρική διαφορά** $A \triangle B$ δυο συνόλων A, B ορίζεται το σύνολο

$$A \triangle B := (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A).$$

Εάν τα A, B, C είναι τυχόντα σύνολα, να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες τής συμμετρικής διαφοράς:

(i) $A \triangle \varnothing = A$ και $A \triangle B = B \triangle A$,

(ii) $A \triangle B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B) = (A \smallsetminus B) \triangle (B \smallsetminus A)$,

(iii) $A \triangle B = \varnothing \Longleftrightarrow A = B$,

(iv) $A \triangle C = B \triangle C \Longrightarrow A = B$,

(v) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$,

(vi) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$,

(vii) $A \triangle B \triangle (A \cap B) = A \cup B$,

(viii) $(A \cup B \cup C) \smallsetminus ((A \cap B) \cup (A \cap C)) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$.

9. Εάν τα A, B είναι δυο τυχόντα σύνολα, να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες τού **δυναμοσυνόλου**:

(i) $A \subseteq B \Longleftrightarrow \mathfrak{P}(A) \subseteq \mathfrak{P}(B)$,

(ii) $\mathfrak{P}(A \cap B) = \mathfrak{P}(A) \cap \mathfrak{P}(B)$,

(iii) $\mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B) \subseteq \mathfrak{P}(A \cup B)$,

(iv) $\mathfrak{P}(A) \cup \mathfrak{P}(B) = \mathfrak{P}(A \cup B) \Longleftrightarrow (A \subseteq B$ ή $B \subseteq A)$,

(v) $\mathfrak{P}(A \smallsetminus B) = (\mathfrak{P}(A) \smallsetminus \mathfrak{P}(B)) \cup \{\varnothing\}$.

10. Έστω οτι η $f : A \longrightarrow B$ είναι μια απεικόνιση, τα C, D υποσύνολα τού A, η $(C_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια υποσυνόλων τού A, τα E, F υποσύνολα τού B, και η $(E_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια υποσυνόλων τού B. Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) $f(\varnothing) = \varnothing = f^{-1}(\varnothing)$.

(ii) $C \subseteq D \Longrightarrow f(C) \subseteq f(D)$. Και αντιστοίχως, $E \subseteq F \Longrightarrow f^{-1}(E) \subseteq f^{-1}(F)$.

(iii) $C \subseteq f^{-1}(f(C))$ και $f\left(f^{-1}(E)\right) \subseteq E$.

(iv) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$ και $f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F)$.

(v) $f\,(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$, ενώ $f^{-1}\,(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$.

(vi) $f(C) \smallsetminus f(D) \subseteq f(C \smallsetminus D)$.

(vii) $F \subseteq E \Longrightarrow f^{-1}\,(E \smallsetminus F) = f^{-1}(E) \smallsetminus f^{-1}(F)$.

Γενικότερα:

(viii) $f(\bigcup\limits_{i\in I} C_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f(C_i)$ και $f^{-1}(\bigcup\limits_{j\in J} E_j) = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(E_j)$.

(ix) $f(\bigcap\limits_{i\in I} C_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f(C_i)$, ενώ $f^{-1}(\bigcap\limits_{j\in J} E_j) = \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}(E_j)$.

11. Έστω $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ η απεικόνιση

$$f(x) = x + \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,$$

όπου $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Να αποδειχθεί ότι η f δεν είναι ούτε ενριπτική ούτε επιρριπτική.

12. Να εξετασθεί το ποιες εκ των ακολούθων απεικονίσεων $f : A \longrightarrow B$ είναι ενριπτικές και ποιες επιρριπτικές:

(i) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x + 1$,

(ii) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(x) = (x - 1, 1)$,

(iii) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$,

(iv) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, όπου με το $|x|$ συμβολίζουμε (ως συνήθως) την απόλυτη τιμή τού πραγματικού αριθμού x, και

(v) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

13. Έστω a ένας παγιωμένος πραγματικός αριθμός και $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ η απεικόνιση που ορίζεται μεσω τού τύπου

$$f(x, y) := (ax + 4y, x + 2y),\ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) η f είναι επιρριπτική,

(ii) η f είναι ενριπτική,

(iii) $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{2\}$.

14. Έστω $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ η απεικόνιση $f(x) = x \cdot |x|\,, \forall x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι μια αμφίρριψη και να προσδιορισθεί η αντίστροφός της f^{-1}.

15. Έστω $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ η απεικόνιση $f(n) := n^2$ και έστω $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ η απεικόνιση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(k) := \begin{cases} \sqrt{k}, & \text{όταν ο } k \text{ είναι τέλειο τετράγωνο,} \\ 1, & \text{όταν ο } k \text{ δεν είναι τέλειο τετράγωνο.} \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι οι f, g δεν αντιστρέφονται παρότι η σύνθεση $g \circ f$ αντιστρέφεται.