Θεωρία Τομών Επίπεδων Καμπυλών

Εργασία στο πλαίσιο τού μαθήματος
"Αλγεβρικές Καμπύλες" (με κωδ. αριθμό Α 19)
Χειμερινό Εξάμηνο 2008 - 2009

Μιχαήλ Γκίκας

1 Αριθμός τομής δυο συσχετικών επίπεδων καμπυλών

Έστω ότι το $\mathbb{K}$ είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα και τα $F, G \in \mathbb{K}[x, y]$ δυο πολυώνυμα. Αυτά ορίζουν τις επίπεδες καμπύλες $\mathbb{V}(F), \mathbb{V}(G) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$, τις οποίες, για λόγους ευκολίας, θα τις συμβολίζουμε απλώς ως F, G. Ως $m_P(F)$ θα συμβολίζουμε την πολλαπλότητα τού F στο σημείο P. Οποιαδήποτε παραπομπή φέρει τριπλή αρίθμηση αναφέρεται στις σημειώσεις παραδόσεων [4].

Σκοπός τής παρούσας ενότητας είναι να ορισθεί ο λεγόμενος "αριθμός τομής" $I(P, F \cap G)$ των F και G σε ένα σημείο $P \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. Προς τούτο ακολουθούμε την αξιωματική μέθοδο τού Fulton [1].

Ορισμός 1.1. Λέμε ότι δυο καμπύλες F και G **τέμνονται εμπρεπώς** στο σημείο P όταν αυτές δεν διαθέτουν καμία κοινή ανάγωγη συνιστώσα διερχόμενη από το P.

Ακόμη λέμε ότι οι F και G **τέμνονται εγκαρσίως** στο $P \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ όταν το P αποτελεί ομαλό σημείο τόσον τής F όσον και τής G και επιπροσθέτως ισχύει $T_P(F) \neq T_P(G)$.

Παραθέτουμε τα αξιώματα τού αριθμού τομής :

Αξίωμα (A1) : Εάν οι καμπύλες F και G τέμνονται εμπρεπώς στο σημείο P, τότε $I(P, F \cap G) \in \mathbb{N}_0$. Στην αντίθετη περίπτωση, $I(P, F \cap G) = \infty$.

Αξίωμα (A2) : Ισχύει η διπλή συνεπαγωγή :

$$I(P, F \cap G) = 0 \Leftrightarrow P \notin F \cap G.$$

Εκτός τούτου, ο αριθμός τομής $I(P, F \cap G)$ εξαρτάται μόνον από εκείνες τις α-νάγωγες συνιστώσες των F και G που διέχονται από το σημείο P.

Αξίωμα (A3) : Εάν η απεικόνιση T είναι μια συσχετική αλλαγή συντεταγμένων με $T(P) = Q$, τότε

$$I(Q, F^T \cap G^T) = I(P, F \cap G).$$

Αξίωμα (A4) : $I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$.

Αξίωμα (A5) : $I(P, F \cap G) \geq m_P(F) \cdot m_P(G)$.
Επιπροσθέτως,

$$I(P, F \cap G) = m_P(F) \cdot m_P(G) \Leftrightarrow T_P(F) \neq T_P(G).$$

Αξίωμα (A6) : Εάν $F = \prod F_i^{r_i}$ και $G = \prod G_i^{s_i}$, τότε

$$I(P, F \cap G) = \sum r_i s_j \, I(P, F_i \cap G_j).$$

Αξίωμα (A7) : Για κάθε $A \in \mathbb{K}[x, y]$ έχουμε

$$I(P, F \cap G) = I(P, F \cap (G + AF)).$$

Παρατήρηση 1.2. (i) Άμεση απόρροια τού αξιώματος (A5) και τού ορισμού 1.1 είναι ότι οι F και G τέμνονται εγκαρσίως στο σημείο P εάν και μόνον εάν $I(P, F \cap G) = 1$.

(ii) Στην ειδική περίπτωση όπου το πολυώνυμο F είναι ανάγωγο, το αξίωμα (A7) μας πληροφορεί ότι ο αριθμός τομής $I(P, F \cap G)$ δεν εξαρτάται ουσιαστικώς από το ίδιο το πολυώνυμο G αλλά από την εικόνα του εντός τού δακτυλίου συντεταγμένων $\Gamma(F) = \mathbb{K}[x, y] \,/\, \langle F \rangle$ τής F.

(iii) Το αξίωμα (A6) εμφανίζεται συνήθως στην απλούστερη μορφή :

$$I(P, F \cap GH) = I(P, F \cap G) + I(P, F \cap H).$$

(iv) Το ότι ο αριθμός τομής $I(P, F \cap G)$ εξαρτάται μόνον από τις ανάγωγες συνιστώσες των F και G που διέχονται από το P είναι άμεση απόρροια τής ισοδυναμίας τού αξιώματος (A2) και τού αξιώματος (A6).

Εν συνεχεία θα αποδείξουμε μέσω τού θεωρήματος 1.5 την ύπαρξη και τη μοναδικότητα τού αριθμού τομής $I(P, F \cap G)$. Για την απόδειξη τού εν λόγω θεωρήματος θα μας φανούν χρήσιμα τα ακόλουθα λήμματα :

Λήμμα 1.3. *(i) Εάν η $\phi : V \to W$ είναι μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ δυο $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διαστάσεως, τότε ισχύει*

$$\dim_{\mathbb{K}} (\ker(\phi)) + \dim_{\mathbb{K}} (Im(\phi)) = \dim_{\mathbb{K}}(V).$$

(ii) Εάν η ακολουθία $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διαστάσεως

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\phi_1} V_2 \xrightarrow{\phi_2} V_3 \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής, τότε

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_1) + \dim_{\mathbb{K}}(V_3) = \dim_{\mathbb{K}}(V_2).$$

(iii) Εάν η ακολουθία $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διαστάσεως

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\phi_1} V_2 \xrightarrow{\phi_2} V_3 \xrightarrow{\phi_3} V_4 \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής, τότε

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_4) = \dim_{\mathbb{K}}(V_3) - \dim_{\mathbb{K}}(V_2) + \dim_{\mathbb{K}}(V_1).$$

Απόδειξη. (*i*) Βλ. συγγράμμα [3], θεώρημα 2.8, σελ 59.
(*ii*) Επειδή $\ker(\phi_2) = \mathrm{Im}(\phi_1) \cong V_1$ και $\mathrm{Im}(\phi_2) = V_3$, αρκεί να εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα τού (*i*) για την απεικόνιση $\phi_2 : V_2 \to V_3$.
(*iii*) Θεωρούμε τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\phi_1} V_2 \xrightarrow{\phi_2} \mathrm{Im}(\phi_2) \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow \ker(\phi_3) \xhookrightarrow{i} V_3 \xrightarrow{\phi_3} V_4 \longrightarrow 0,$$

όπου $i : \ker(\phi_3) \hookrightarrow V_3$ είναι η ένθεση. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα τού (*ii*) στις ανωτέρω βραχείες ακριβείς ακολουθίες, λαμβάνουμε

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_1) + \dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Im}(\phi_2)) = \dim_{\mathbb{K}}(V_2)$$

και

$$\dim_{\mathbb{K}} (\ker(\phi_3)) + \dim_{\mathbb{K}}(V_4) = \dim_{\mathbb{K}}(V_3)$$

αντιστοίχως. Επειδή ισχύει $\mathrm{Im}(\phi_2) = \ker(\phi_3)$, αφαιρώντας κατά μέλη την πρώτη εκ των δύο ισοτήτων από την δεύτερη καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Λήμμα 1.4. *Έστω ότι οι $L_1, L_2, \dots$ και $M_1, M_2, \dots$ είναι δυο ακολουθίες ομογενών πρωτοβαθμίων πολυωνύμων, τέτοιες ώστε $L_i \neq \lambda M_j$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$. Για $i, j \geq 0$ ορίζουμε*

$$A_{ij} := L_1 L_2 \cdots L_i \, M_1 M_2 \cdots M_j \quad \text{και} \quad A_{00} = 1.$$

Τότε το σύνολο $\{A_{ij} \ : \ i + j = d\}$ αποτελεί μια βάση τού $\mathbb{K}[x, y]_d$, για κάθε $d \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Παγιώνουμε ένα $d \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε αρχικώς ότι τα στοιχεία τού συνόλου $\{A_{ij} \ : \ i + j = d\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ας θεωρήσουμε $\lambda_{i,j} \in \mathbb{K}$, τέτοια ώστε

$$\sum_{i+j=d} \lambda_{i,j} A_{ij} = 0.$$

Τότε

$$\lambda_{0,d}(M_1 \cdots M_d) + \lambda_{1,d-1}(L_1 M_1 \cdots M_{d-1}) + \cdots + \lambda_{d,0}(L_1 \cdots L_d) = 0,$$

οπότε

$$L_1\big(\lambda_{1,d-1}(M_1 \cdots M_{d-1}) + \cdots + \lambda_{d,0}(L_2 \cdots L_d)\big) = -\lambda_{0,d}(M_1 \cdots M_d). \tag{1}$$

Ως γνωστόν, ο δακτύλιος $\mathbb{K}[x, y]$ είναι Π.Μ.Π. και τα $M_1, \dots, M_d$ (προφανώς) ανάγωγα στοιχεία του. Επειδή εξ υποθέσεως το πολυώνυμο L_1 δεν διαιρεί κανένα εκ των πολυωνύμων $M_1, \dots, M_d$, η σχέση (1) μας δίδει

$$-\lambda_{0,d} M_1 \dots M_d = 0 \Rightarrow \lambda_{0,d} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Κατ' επέκτασιν,

$$\lambda_{1,d-1}(M_1 \cdots M_{d-1}) + \cdots + \lambda_{d,0}(L_2 \cdots L_d) = 0. \tag{2}$$

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για την ισότητα (2) και εξάγοντας τώρα το πολυώνυμο L_2 ως κοινό παράγοντα, καταλήγουμε στο ότι $\lambda_{1,d-1} = 0_{\mathbb{K}}$. Ως εκ τούτου, κατόπιν $(d-1)$ βημάτων λαμβάνουμε

$$\lambda_{0,d} = \lambda_{1,d-1} = \cdots = \lambda_{d,0} = 0_{\mathbb{K}}.$$

Τέλος, επειδή $\operatorname{card}\{A_{ij} \ : \ i + j = d\} = d + 1$ και $\dim_{\mathbb{K}}\left(\mathbb{K}[x, y]_d\right) = d + 1$ (βλ. παράδειγμα 3.2.3 (α)) ο ισχυρισμός τού λήμματος είναι αληθής. □

Θεώρημα 1.5. *Έστω ότι οι F, G είναι δυο συσχετικές επίπεδες καμπύλες και $P \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ ένα τυχόν σημείο. Τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός τομής*

$$I(P, F \cap G) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\},$$

ο οποίος πληροί τα αξιώματα (A1)-(A7). Συγκεκριμένα, αυτός δίδεται από τον τύπο :

$$\boxed{I(P, F \cap G) := \dim_{\mathbb{K}}\left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},P} \ / \ \langle F, G\rangle \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},P}\right)}\,.$$

Απόδειξη. **Μοναδικότητα** : Αποδεικνύουμε τη μοναδικότητα παρέχοντας μια κατασκευαστική διαδικασία υπολογισμού τού αριθμού $I(P, F \cap G)$, κατά την οποία γίνεται αποκλειστική χρήση των αξιωμάτων (A1)-(A7). Κατ' αρχάς, βάσει τού αξιώματος (A3) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P = (0, 0) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$. Επιπροσθέτως, κατά το αξίωμα (A1), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I(P, F \cap G) < \infty$, ήτοι ότι τα F και G τέμνονται εμπρεπώς στο σημείο P. Σύμφωνα με το αξίωμα (A2) ο αριθμός τομής $I(P, F \cap G)$ είναι μηδέν ακριβώς όταν τα F και G δεν τέμνονται στο P. Μπορούμε λοιπόν εφεξής να υποθέτουμε ότι $P = (0, 0) \in F \cap G$ και κατ' επέκτασιν ότι $I(P, F \cap G) = n$, για κάποιον φυσικό αριθμό $n > 0$.

Εργαζόμαστε επαγωγικώς· ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός $I(P, A \cap B)$ μπορεί να υπολογισθεί οσάκις $I(P, A \cap B) < n$. Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$\widetilde{F}(x) := F(x, 0) \quad \text{και} \quad \widetilde{G}(x) := G(x, 0)$$

και ορίζουμε

$$\deg \widetilde{F} := r \quad , \quad \deg \widetilde{G} := s \; .$$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι λόγω τού αξιώματος (A4) μπορούμε, δίχως βλάβη τής γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $r \leq s$. Διακρίνουμε περιπτώσεις :

► Περίπτωση $r = 0$: Εν προκειμένω ισχύει $\deg \widetilde{F} = \deg F(x, 0) = 0$, οπότε το πολυώνυμο F αποτελείται αποκλειστικώς από δυνάμεις τού y, ήτοι $F \in \mathbb{K}[y]$. Επιπροσθέτως, επειδή εξ υποθέσεως $F(P) = F(0, 0) = 0$, το F δεν διαθέτει σταθερό όρο. Ως εκ τούτου, $y|F$, οπότε $F = yH$ για κάποιο πολυώνυμο $H \in \mathbb{K}[y]$. Επομένως, βάσει τού αξιώματος (A6) έχουμε

$$I(P, F \cap G) = I(P, yH \cap G) = I(P, y \cap G) + I(P, H \cap G). \tag{3}$$

Επειδή $G(P) = G(0, 0) = 0$, και το G δεν διαθέτει σταθερό όρο. Επομένως υπάρχουν $m > 0$ και $a_0, a_1, \ldots, a_{s-m} \in \mathbb{K}$, $a_0 \neq 0$, ούτως ώστε

$$\widetilde{G} := G(x, 0) = x^m(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{s-m} x^{s-m}). \tag{4}$$

Θα υπολογίσουμε εν πρώτοις τον αριθμό $I(P, y \cap G)$. Προς τούτο ορίζουμε το πολυώνυμο $M(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_{s-m} x^{s-m}$ καθώς και την αντίστοιχη καμπύλη (συμβολιζόμενη, και πάλι καταχρηστικώς, με το ίδιο σύμβολο) $M(= \mathbb{V}(M))$. Τότε $\widetilde{G}(x) = x^m M(x)$ και $M(P) \neq 0$ (διότι $a_0 \neq 0$). Εξάλλου, είναι προφανές ότι $G = \widetilde{G} + yA$ για κάποιο (ενδεχομένως μηδενικό) $A \in \mathbb{K}[x, y]$. Σύμφωνα λοιπόν με το αξίωμα (A7) λαμβάνουμε το εξής :

$$I(P, y \cap G) = I(P, y \cap (\widetilde{G} + yA)) = I(P, y \cap \widetilde{G}). \tag{5}$$

Χρησιμοποιώντας επιπλέον τα αξιώματα (A2), (A5) και (A6) έχουμε[1]:

$$\begin{aligned} I(P, y \cap G) &\overset{(5)}{=} I(P, y \cap \widetilde{G}) \overset{(4)}{=} I(P, y \cap x^m M) \\ &\overset{(A6)}{=} I(P, y \cap x^m) + I(P, y \cap M) \\ &\overset{(A2)}{=} I(P, y \cap x^m) \overset{(A5)}{=} m_P(y) \cdot m_P(x^m) \\ &= 1 \cdot m = m. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, $I(P, y \cap G) = m$, οπότε η σχέση (3) διαμορφώνεται ως εξής :

$$I(P, F \cap G) = m + I(P, H \cap G).$$

Όμως $m > 0$ και (εξ υποθέσεως) $I(P, F \cap G) = n$. Επομένως ισχύει η ανισότητα $I(P, H \cap G) = n - m < n$, οπότε (βάσει τής επαγωγικής υποθέσεως) ο αριθμός τομής $I(P, H \cap G)$ μπορεί να υπολογισθεί. Κατ' επέκτασιν το ίδιο ισχύει και για τον αριθμό $I(P, F \cap G)$.

► Περίπτωση $r > 0$: Δίχως βλάβη τής γενικότητας υποθέτουμε ότι τα πολυώνυμα $\widetilde{F}$ και $\widetilde{G}$ είναι μονικά (ειδάλλως πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλες σταθερές) και επομένως

$$\text{μεγ. όρος } (\widetilde{F}) = x^r \quad \text{και} \quad \text{μεγ. όρος } (\widetilde{G}) = x^s.$$

Ορίζουμε το πολυώνυμο $M(x, y) := G - x^{s-r}F$, καθώς και το πολυώνυμο

$$\widetilde{M} := M(x, 0) \in \mathbb{K}[x].$$

Κατ' αρχάς, βάσει τού αξιώματος (A7), έχουμε

$$I(P, F \cap G) = I(P, F \cap M).$$

Επειδή ο μεγιστοβάθμιος όρος τού πολυωνύμου $x^{s-r}\widetilde{F}$ είναι ο ίδιος με τον μεγιστοβάθμιο όρο τού $\widetilde{G}$, συνάγουμε ότι

$$t := \deg(\widetilde{M}) < s =: \deg(\widetilde{G}).$$

Ως εκ τούτου, εάν επαναλάβουμε την ανωτέρω διαδικασία (εναλλάσσοντας ενδεχομένως τη σειρά των F και G στην περίπτωση όπου $t < r$, πράγμα το οποίο δεν επηρεάζει τον αριθμό τομής κατά το αξίωμα (A4)) θα καταλήξουμε ύστερα από πεπερασμένο αριθμό βημάτων σε κάποιο ζεύγος καμπυλών A, B το οποίο θα εμπίπτει στην προηγούμενη περίπτωση και θα ισχύει $I(P, F \cap G) = I(P, A \cap B)$.

[1] Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιούμε το ότι ισχύει $P \notin M$, ενώ στην πέμπτη το γεγονός ότι $T_P(x) \neq T_p(y)$.

Ύπαρξη : Για λόγους συντομίας χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},P}$ και ορίζουμε

$$I(P, F \cap G) := \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O} \;/\; \langle F, G \rangle \mathcal{O}).$$

Επαληθεύουμε τα αξιώματα (A1)-(A7) :

Αξίωμα (A1) : Ας υποθέσουμε ότι τα F και G τέμνονται εμπρεπώς στο σημείο P (δηλαδή ότι αυτά δεν διαθέτουν κοινές ανάγωγες συνιστώσες διερχόμενες από το P). Βάσει τής προτάσεως 1.7.1 το σύνολο $\mathbb{V}(F, G)$ είναι πεπερασμένο, ας πούμε το $\mathbb{V}(F, G) = \{P_1, \ldots, P_m\}$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 2.4.14, και επειδή $P \in \mathbb{V}(F, G)$, έχουμε

$$\begin{aligned} I(P, F \cap G) &:= \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O} \;/\; \langle F, G \rangle \mathcal{O}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \dim_{\mathbb{K}} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},P_j} \;/\; \langle F, G \rangle \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},P_j} \right) \\ &= \dim_{\mathbb{K}} (\mathbb{K}[x, y] \;/\; \langle F, G \rangle). \end{aligned}$$

Βάσει τού θεωρήματος 1.8.8 έχουμε $\dim_{\mathbb{K}} (\mathbb{K}[x, y] \;/\; \langle F, G \rangle) < \infty$, οπότε τελικώς $I(P, F \cap G) < \infty$.

Ας υποθέσουμε, εν συνεχεία, ότι τα F και G διαθέτουν κάποια κοινή ανάγωγη συνιστώσα H η οποία διέρχεται από το P. Τότε $\langle F, G \rangle \subseteq \langle H \rangle$ και κατ' επέκτασιν $\langle F, G \rangle \mathcal{O} \subseteq \langle H \rangle \mathcal{O}$. Ως εκ τούτου,

$$I(P, F \cap G) := \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O} \;/\; \langle F, G \rangle \mathcal{O}) \geq \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O} \;/\; \langle H \rangle \mathcal{O}). \tag{6}$$

Από την άλλη μεριά, η άσκηση A.2.28 μας πληροφορεί ότι $\mathcal{O} \;/\; \langle H \rangle \mathcal{O} \cong \mathcal{O}_{H,P}$, οπότε η σχέση (6) μας δίδει την ανισοϊσότητα

$$I(P, F \cap G) \geq \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O}_{H,P}). \tag{7}$$

Βάσει τής ασκήσεως A.1.14 έχουμε $|\mathbb{V}(H)| = \infty$. Αυτό, σε συνδυασμό με την πρόταση 1.8.8 και τον εγκλεισμό $\Gamma(H) \subseteq \mathcal{O}_{H,P}$, μας παρέχει το εξής :

$$\dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O}_{H,P}) \geq \dim_{\mathbb{K}} (\Gamma(H)) = \dim_{\mathbb{K}} (\mathbb{K}[x, y] \;/\; \langle H \rangle) = \infty.$$

Έτσι, από την σχέση (7) έπεται ότι $I(P, F \cap G) = \infty$.

Αξίωμα (A2) : Αποδεικνύουμε την ισοδυναμία $I(P, F \cap G) = 0 \Leftrightarrow P \notin F \cap G$.

($\Leftarrow$) Ας υποθέσουμε ότι $P \notin F \cap G$. Εάν $P \notin F$, τότε $F(P) \neq 0$, οπότε (εντός τού δακτυλίου $\mathcal{O}$) το F είναι αντιστρέψιμο. Ομοίως το G είναι αντιστρέψιμο όταν $P \notin G$. Σε κάθε περίπτωση $\langle F, G \rangle \mathcal{O} = \mathcal{O}$, απ' όπου έπεται ότι

$$I(P, F \cap G) := \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O} \;/\; \langle F, G \rangle \mathcal{O}) = 0.$$

($\Rightarrow$) Εστω ότι $I(P, F \cap G) = 0$. Ας υποθέσουμε ότι $P \in F \cap G$. Θεωρούμε το (μοναδικό) μεγιστοτικό ιδεώδες τού τοπικού δακτυλίου $\mathcal{O}$:

$$\mathfrak{M} := \{f \in \mathcal{O} \ : \ f(P) = 0_{\mathbb{K}}\}.$$

Επειδή $F(P) = G(P) = 0_{\mathbb{K}}$, έχουμε $F, G \in \mathfrak{M}$, οπότε $\langle F, G\rangle\mathcal{O} \subseteq \mathfrak{M}$. Επομένως,

$$I(P, F \cap G) := \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O} \ / \ \langle F, G\rangle\mathcal{O}) \geq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O} \ / \ \mathfrak{M}).$$

Το θεώρημα 2.4.10(b) μας πληροφορεί ότι $\mathcal{O} \ / \ \mathfrak{M} \cong \mathbb{K}$. Ως εκ τούτου,

$$I(P, F \cap G) \geq \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1,$$

πράγμα άτοπο.

Αξίωμα (A3) : Έστω $T : \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ μια συσχετική αλλάγη συντεταγμένων με $T(P) := Q$. Βάσει τής ασκήσεως A.2.31(α), μέσω τής T επάγεται ένας ισομορφισμός τοπικών δακτυλίων

$$\widehat{T}_P : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},Q} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},P}$$

και μάλιστα τέτοιος, ώστε $\widehat{T}_P\Big(\langle F^T, G^T\rangle\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},Q}\Big) = \langle F, G\rangle\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},P}$. Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} I(Q, F^T \cap G^T) &:= \dim_{\mathbb{K}} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},Q} \ / \ \langle F^T, G^T\rangle\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},Q}\right) \\ &= \dim_{\mathbb{K}} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},P} \ / \ \langle F, G\rangle\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}},P}\right) \\ &=: I(P, F \cap G). \end{aligned}$$

Αξίωμα (A4) : Τούτο είναι εξ ορισμού προφανές.

Αξίωμα (A5) : Έστω $m := m_P(F)$ και έστω $n := m_P(G)$. Για λόγους συντομίας χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $R := \mathbb{K}[x, y]$. Θεωρούμε το ιδεώδες $I := \langle x, y\rangle$ τού R. Επειδή ισχύουν οι εγκλεισμοί

$$I^{m+n} \subseteq \langle I^{m+n}, F, G\rangle \quad \text{και} \quad \langle F, G\rangle\mathcal{O} \subseteq \langle I^{m+n}, F, G\rangle\mathcal{O} \ ,$$

εξασφαλίζεται η ύπαρξη επιμορφισμών

$$\phi : R \ / \ I^{m+n} \to R \ / \ \langle I^{m+n}, F, G\rangle$$

και

$$\pi : \mathcal{O} \ / \ \langle F, G\rangle\mathcal{O} \to \mathcal{O} \ / \ \langle I^{m+n}, F, G\rangle\mathcal{O}.$$

Επιπροσθέτως, επειδή

$$\mathbb{V}(I^{m+n}, F, G) \subseteq \mathbb{V}(I^{m+n}) = \{P\},$$

το θεώρημα 2.4.14 μας πληροφορεί ότι υπάρχει ισομορφισμός

$$\alpha : R \mathbin{/} \langle I^{m+n}, F, G\rangle \to \mathcal{O} \mathbin{/} \langle I^{m+n}, F, G\rangle\mathcal{O}.$$

Ειδικότερα ισχύει

$$\dim_{\mathbb{K}}(R \mathbin{/} \langle I^{m+n}, F, G\rangle) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O} \mathbin{/} \langle I^{m+n}, F, G\rangle\mathcal{O}). \tag{8}$$

Ακόμη, ορίζουμε απεικόνιση

$$\psi : R \mathbin{/} I^n \times R \mathbin{/} I^m \to R \mathbin{/} I^{m+n},$$

μέσω τού τύπου $\psi(A + I^n, B + I^m) := (AF + BG) + I^{m+n}$, για κάθε $A, B \in R$. Θεωρούμε την κάτωθι ακολουθία διανυσματικών χώρων :

$$R/I^n \times R/I^m \xrightarrow{\psi} R/I^{m+n} \xrightarrow{\phi} R/\langle I^{m+n}, F, G\rangle \longrightarrow 0.$$

Τούτη είναι ακριβής. Πράγματι·

► Η ϕ είναι εκ κατασκευής επιμορφισμός.

► Ισχύει η ισότητα $\ker(\phi) = \mathrm{Im}(\psi)$:

"$\supseteq$" Παρατηρούμε ότι για κάθε $A, B \in R$ έχουμε

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi(A + I^n, B + I^m) &= \phi((AF + BG) + I^{m+n}) \\ &= (AF + BG) + \langle I^{m+n}, F, G\rangle \\ &= \langle I^{m+n}, F, G\rangle \\ &= 0_{R/\langle I^{m+n}, F, G\rangle}. \end{aligned}$$

Επομένως, $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \ker(\phi)$.

"$\subseteq$" Έστω $M \in R$, τέτοιο ώστε $M + I^{m+n} \in \ker(\phi)$. Τότε

$$M + \langle I^{m+n}, F, G\rangle = \langle I^{m+n}, F, G\rangle \Rightarrow M \in \langle I^{m+n}, F, G\rangle.$$

Ως εκ τούτου, υπάρχουν πολυώνυμα $C, D \in R$, καθώς και ένα σύνολο πολυωνύμων $\{E_{ij} \ : \ i + j = m + n\} \subseteq R$, ούτως ώστε να ισχύει η ισότητα

$$M = \sum_{i+j=m+n} (E_{ij}x^i y^j) + CF + DG.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \psi(C + I^n, D + I^m) &= CF + DG + I^{m+n} \\ &= M - \sum_{i+j=m+n} (E_{ij}x^i y^j) + I^{m+n} \\ &= M + I^{m+n}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $M + I^{m+n} \in \mathrm{Im}(\psi)$.

Από την ακρίβεια τής ανωτέρω ακολουθίας έπεται άμεσα το εξής :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}(R/I^n) + \dim_{\mathbb{K}}(R/I^m) &= \dim_{\mathbb{K}}(R/I^n \times R/I^m) \\ &\geq \dim_{\mathbb{K}}\left(\mathrm{Im}(\psi)\right) \\ &= \dim_{\mathbb{K}}\left(\ker(\phi)\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Επιπροσθέτως, εάν θεωρήσουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία που επάγεται μέσω τού επιμορφισμού ϕ :

$$0 \longrightarrow \ker(\phi) \longrightarrow R/I^{m+n} \xrightarrow{\phi} R/\langle I^{m+n}, F, G\rangle \longrightarrow 0,$$

και εφαρμόσουμε το λήμμα 1.3(ii) λαμβάνουμε

$$dim_{\mathbb{K}}(R/\langle I^{m+n}, F, G\rangle) = \dim_{\mathbb{K}}(R/I^{m+n}) - \dim_{\mathbb{K}}\left(\ker(\phi)\right). \tag{10}$$

Εξάλλου, από την επιρριπτικότητα τού ομομορφισμού π προκύπτει η ανισοϊσότητα

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}/\langle F, G\rangle\mathcal{O}) \geq \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}/\langle I^{m+n}, F, G\rangle\mathcal{O}). \tag{11}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (8), (9), (10) και (11), καθώς και την άσκηση Α.1.35(β), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} I(P, F \cap G) &:= \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}/\langle F, G\rangle\mathcal{O}) \\ &\overset{(11)}{\geq} \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}/\langle I^{m+n}, F, G\rangle\mathcal{O}) \\ &\overset{(8)}{=} \dim_{\mathbb{K}}(R/\langle I^{m+n}, F, G\rangle) \\ &\overset{(10)}{=} \dim_{\mathbb{K}}(R/I^{m+n}) - \dim_{\mathbb{K}}(\ker(\phi)) \\ &\overset{(9)}{\geq} \dim_{\mathbb{K}}(R/I^{m+n}) - \dim_{\mathbb{K}}(R/I^n) - \dim_{\mathbb{K}}(R/I^m) \\ &\overset{A.1.35(b)}{=} \binom{m+n+1}{2} - \binom{n+1}{2} - \binom{m+1}{2} = m \cdot n. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, $I(P, F \cap G) \geq m_P(F) \cdot m_P(G)$. Απομένει να δειχθεί ότι

$$I(P, F \cap G) = m_P(F) \cdot m_P(G) \Leftrightarrow T_P(F) \neq T_P(G).$$

Σημειωτέον ότι η ανωτέρω σειρά ανισοϊσοτήτων ισχύει ως ισότητα ακριβώς όταν ισχύουν ως ισότητες οι σχέσεις (9) και (11). Από τη μια μεριά είναι προφανές ότι η σχέση (9) ισχύει ως ισότητα εάν και μόνον εάν η απεικόνιση ψ είναι ενριπτική. Από την άλλη, μια συνθήκη που καθιστά τη σχέση (11) ισότητα, είναι ο επιμορφισμός π να είναι ισομορφισμός. Για να πληρούται αυτή η συνθήκη είναι αρκετό να ισχύει ο εγκλεισμός $I^{m+n} \subseteq \langle F, G\rangle\mathcal{O}$. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη σε δύο βήματα.

Βήμα 1 : Η απεικόνιση ψ είναι ενριπτική εάν και μόνον εάν $T_P(F) \neq T_P(G)$.

($\Leftarrow$) : Εάν $A, B \in R$, τέτοια ώστε $\psi(A + I^n, B + I^m) = I^{m+n}$, τότε $AF + BG \in I^{m+n}$ και, ως εκ τούτου, το πολυώνυμο $AF + BG$ περιέχει εξ ολοκλήρου όρους βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου τού $m+n$. Εάν λοιπόν τα πολυώνυμα A, F, B και G γραφούν ως

$$A = A_\mu + (\text{όρους μεγαλύτερου βαθμού}),$$

$$B = B_\nu + (\text{όρους μεγαλύτερου βαθμού}),$$

$$F = F_m + F_{m+1} + \dots ,$$

$$G = G_n + G_{n+1} + \dots ,$$

τότε $AF + BG = A_\mu F_m + B_\nu G_n + \dots$. Κατ' ανάγκην λοιπόν $\mu + m = \nu + n$ και $A_\mu F_m = -B_\nu G_n$. Επειδή εξ υποθέσεως τα F_m και G_n δεν διαθέτουν κοινούς παράγοντες, $F_m | B_\nu$ και $G_n | A_\mu$. Ως εκ τούτου, $\nu \geq m$, $\mu \geq n$ και

$$(A + I^n, B + I^m) = I^{m+n},$$

οπότε η ψ είναι ενριπτική.

($\Rightarrow$) : Ας υποθέσουμε ότι η L είναι μια κοινή εφαπτόμενη των G και F. Τότε $G_n = LG'_{n-1}$ και $F_m = LF'_{m-1}$, όπου τα G'_{n-1} , F'_{m-1} είναι ομογενή βαθμών $n-1$ και $m-1$ αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι ισχύει το ακόλουθο :

$$\begin{aligned} & \psi(G'_{n-1} + I^n, F'_{m-1} + I^m) = (G'_{n-1}F + F'_{m-1}G) + I^{m+n} \\ = \quad & G'_{n-1}(F_m + F_{m+1} + \dots) + F'_{m-1}(G_n + G_{n+1} + \dots) + I^{m+n} \\ = \quad & (G'_{n-1}LF'_{m-1}) + (F'_{m-1}LG_{n-1}) + (\text{όροι βαθμού} \geq m+n) + I^{m+n} \\ = \quad & I^{m+n}. \end{aligned}$$

Όμως $G'_{n-1} \notin I^n$ και $F'_{m-1} \notin I^m$, οπότε η ψ δεν είναι ενριπτική.

Βήμα 2 : Εάν $T_P(F) \neq T_P(G)$ τότε $I^t \subseteq \langle F, G \rangle \mathcal{O}$, για κάθε $t \geq m + n - 1$.

Ας υποθέσουμε ότι οι $L_1, \dots, L_m$ είναι οι εφαπτόμενες ευθείες τής F στο σημείο P και οι $M_1, \dots, M_n$ οι εφαπτόμενες τής G στο P. Ορίζουμε

$$L_i := L_m, \text{ για κάθε } i > m,$$

$$M_j := M_n, \text{ για κάθε } j > n,$$

καθώς και

$$A_{ij} := L_1 \dots L_i \, M_1 \dots M_j \text{ , για οιαδήποτε } i, j \geq 0 \ (\text{με } A_{00} := 1).$$

Σύμφωνα με το λήμμα 1.4, το σύνολο $\{A_{ij} \ : \ i+j=t\}$ αποτελεί μια βάση τού διανυσματικού χώρου $\mathbb{K}[x,y]_t$. Ως εκ τούτου, αρκεί να δειχθεί ότι $A_{ij} \in \langle F, G\rangle$, για κάθε i,j τέτοια ώστε $i+j \geq m+n-1$. Έστω λοιπόν $i+j \geq m+n-1$. Τότε είτε $i \geq m$ είτε $j \geq n$. Ας υποθέσουμε, δίχως βλάβη τής γενικότητας, ότι $i \geq m$. Τότε υπάρχει κάποιο ομογενές πολυώνυμο B βαθμού $s := i+j-m$, ούτως ώστε $A_{ij} = A_{m0}B$. Εάν το πολυώνυμο F γράφεται ως

$$F = A_{m0} + F',$$

για κάποιο πολώνυμο F' το οποίο διαθέτει αποκλειστικά όρους βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου τού $m+1$, τότε

$$BF = BA_{m0} + BF' = A_{ij} + BF',$$

οπότε $A_{ij} = BF - BF'$, όπου κάθε όρος τού BF' διαθέτει βαθμό $\geq i+j+1$. Ως εκ τούτου, αρκεί να δειχθεί ότι $I^s \subseteq \langle F, G\rangle \mathcal{O}$, για όλα τα $s \geq n-1$ (διότι τότε $B \in \langle F, G\rangle\mathcal{O}$ και $i+j-m \geq n-1 \Rightarrow i+j \geq m+n-1$).

Επειδή βάσει τής προτάσεως 1.7.1 το σύνολο $\mathbb{V}(F,G)$ είναι πεπερασμένο, ας πούμε το $\mathbb{V}(F,G) = \{P, Q_1, \ldots, Q_r\}$, η άσκηση A.1.17(α) (εφαρμοζόμενη για το αλγεβρικό σύνολο $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_r\}$) μας δίδει τη δυνατότητα επιλογής ενός πολυωνύμου M για το οποίο να ισχύει $M(Q_\ell) = 0$ για κάθε $\ell \in \{1,2,\ldots,r\}$ και $M(P) \neq 0$. Τότε $Mx, My \in \mathbb{I}(\mathbb{V}(F,G))$ και επομένως, κατά το θεώρημα των θέσεων μηδενισμού τού Hilbert 1.8.2, $(Mx)^N, (My)^N \in \langle F, G\rangle$ για κάποιο μεγάλο φυσικό αριθμό N (ας πούμε $N \geq \frac{n-1}{2}$). Επειδή $M(P) \neq 0$, το στοιχείο M^N είναι αντιστρέψιμο εντός τού τοπικού δακτυλίου $\mathcal{O}$. Επομένως $x^N, y^N \in \langle F, G\rangle\mathcal{O}$ και κατ' επέκτασιν $I^{2N} \subseteq \langle F, G\rangle\mathcal{O}$.

Αξίωμα (A6) : Έστω $H \in \mathbb{K}[x,y]$ ένα πολυώνυμο και έστω (καταχρηστικώς) $H \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ η αντίστοιχη (επίπεδη) συσχετική καμπύλη που ορίζεται μέσω αυτού. Είναι προφανές ότι αρκεί να δειχθεί το εξής :

$$I(P, F \cap GH) = I(P, F \cap G) + I(P, F \cap H). \tag{12}$$

Στην περίπτωση όπου τα F και GH διαθέτουν κάποια κοινή ανάγωγη συνιστώσα (διερχόμενη από το σημείο P) η σχέση (12) ισχύει κατά τρόπο προφανή (βάσει τού αξιώματος (A1)). Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι αυτά δεν διαθέτουν κοινές συνιστώσες. Επειδή ισχύει ο εγκλεισμός $\langle F, GH\rangle \subseteq \langle F, G\rangle$, έχουμε τη δυνατότητα θεωρήσεως ενός επιμορφισμού

$$\phi : \mathcal{O}/\langle F, GH\rangle\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\langle F, G\rangle\mathcal{O}.$$

Ορίζουμε ακόμη μια $\mathbb{K}$-γραμμική απεικόνιση

$$\psi : \mathcal{O}/\langle F, H\rangle\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\langle F, GH\rangle\mathcal{O}$$

με τύπο $\psi(z+\langle F,H\rangle\mathcal{O}) := Gz+\langle F,GH\rangle\mathcal{O}$, για κάθε $z\in\mathcal{O}$.
Θεωρούμε την ακολουθία πεπερασμένων διανυσματικών χώρων :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}/\langle F,H\rangle\mathcal{O} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}/\langle F,GH\rangle\mathcal{O} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}/\langle F,G\rangle\mathcal{O} \longrightarrow 0.$$

Εξ ορισμού τού αριθμού τομής και βάσει τού λήμματος 1.3(*ii*) αρκεί να δειχθεί ότι η ανωτέρω ακολουθία είναι ακριβής.

► Η ϕ είναι επιμορφισμός εκ κατασκευής.

► Ισχύει η ισότητα $\ker(\phi)=\operatorname{Im}(\psi)$:

"$\supseteq$" Παρατηρούμε ότι για κάθε $z\in\mathcal{O}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\phi\circ\psi(z+\langle F,H\rangle\mathcal{O}) &= \phi(Gz+\langle F,GH\rangle\mathcal{O}) = Gz+\langle F,G\rangle\mathcal{O}\\ &= \langle F,G\rangle\mathcal{O} = 0_{\mathcal{O}/\langle F,G\rangle\mathcal{O}}.\end{aligned}$$

Επομένως, $\operatorname{Im}(\psi)\subseteq\ker(\phi)$.

"$\subseteq$" Έστω $z+\langle F,GH\rangle\mathcal{O}\in\ker(\phi)$. Τότε

$$z+\langle F,G\rangle\mathcal{O} = \langle F,G\rangle\mathcal{O} \Rightarrow z\in\langle F,G\rangle\mathcal{O}$$

οπότε $z=aF+bG$ για κάποια $a,b\in\mathcal{O}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\psi(b+\langle F,H\rangle\mathcal{O}) &= bG+\langle F,GH\rangle\mathcal{O} = z-aF+\langle F,GH\rangle\mathcal{O}\\ &= z+\langle F,GH\rangle\mathcal{O}.\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, $z+\langle F,GH\rangle\mathcal{O}\in\operatorname{Im}(\psi)$.

► Η ψ είναι ενριπτική :

Έστω $z+\langle F,H\rangle\mathcal{O}\in\ker(\psi)$. Τότε

$$Gz+\langle F,GH\rangle\mathcal{O} = \langle F,GH\rangle\mathcal{O} \Rightarrow Gz\in\langle F,GH\rangle\mathcal{O}.$$

Συνεπώς,

$$Gz = cF+dGH, \quad \text{για κάποια } c,d\in\mathcal{O}. \tag{13}$$

Ας υποθέσουμε ότι τα $z,c,d\in\mathcal{O}$ γράφονται ως εξής :

$$z=\frac{D_1}{E_1}\ ,\ c=\frac{D_2}{E_2}\ \text{ και }\ d=\frac{D_3}{E_3},$$

για κάποια $D_i,E_i\in\mathbb{K}[x,y]$ με $E_i(P)\neq 0$, $i\in\{1,2,3\}$.

Τότε υπάρχει πολυώνυμο $S\in\mathbb{K}[x,y]$, τέτοιο ώστε $S(P)\neq 0$ και

$$Sc=A\ ,\ Sd=B \quad\text{και}\quad Sz=C, \quad \text{για κάποια } A,B,C\in\mathbb{K}[x,y].$$

(Πράγματι· αρκεί κανείς να ορίσει τα πολυώνυμα $S:=E_1E_2E_3$, $A:=E_1E_3D_2$, $B:=E_1E_2D_3$ και $C:=E_2E_3D_1$).

Ως εκ τούτου, εντός τού δακτυλίου $\mathbb{K}[x,y]$ η σχέση (13) μας δίδει

$$G(C-BH)=AF\ \in\mathbb{K}[x,y].$$

Εξ υποθέσεως τα πολυώνυμα F και G δεν διαθέτουν κοινούς παράγοντες. Επομένως $F \mid C - BH$, οπότε $C = BH + MF$ για κάποιο $M \in \mathbb{K}[x,y]$. Κατά συνέπειαν, εντός τού τοπικού δακτυλίου $\mathcal{O}$ έχουμε

$$z = \frac{C}{S} = \Big(\frac{B}{S}\Big) H + \Big(\frac{M}{S}\Big) F, \qquad S(P) \neq 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι $z \in \langle F, H\rangle \mathcal{O} = 0_{\mathcal{O}/\langle F,H\rangle \mathcal{O}}$.

Αξίωμα (A7) : Τούτο είναι εξ ορισμού προφανές. □

Πρόταση 1.6. *Εάν τα F και G δεν διαθέτουν κοινές ανάγωγες συνιστώσες, τότε*

$$\sum_{P \in \mathbb{V}(F,G)} I(P, F \cap G) = \dim_{\mathbb{K}} \Big(\mathbb{K}[x,y] \; / \; \langle F, G\rangle \Big).$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, βάσει τής προτάσεως 1.7.1 το σύνολο $\mathbb{V}(F,G)$ είναι πεπερασμένο, ας πούμε το $\mathbb{V}(F,G) = \{P_1, \ldots, P_m\}$. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 2.4.14, έχουμε

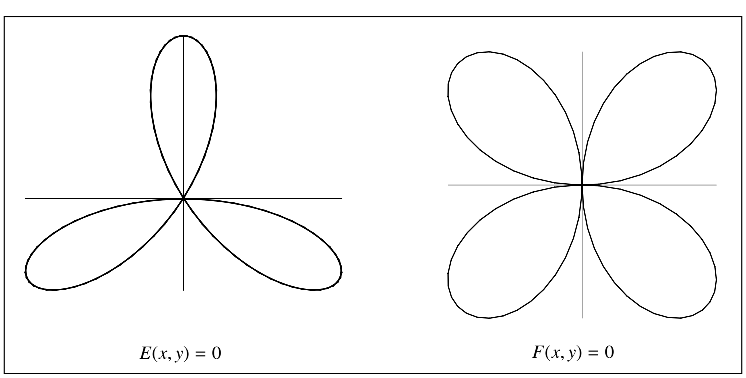
$$\begin{aligned}
\sum_{P \in \mathbb{V}(F,G)} I(P, F \cap G) &= \sum_{j=1}^{m} I(P j, F \cap G) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \dim_{\mathbb{K}} \Big(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}, P_j} \; / \; \langle F, G\rangle \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}, P_j} \Big) \\
&= \dim_{\mathbb{K}} \Big(\mathbb{K}[x,y] \; / \; \langle F, G\rangle \Big).
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 1.7. Θα υπολογίσουμε τον αριθμό τομής των συσχετικών καμπυλών που ορίζονται από τα πολυώνυμα :

$$E = (x^2 + y^2)^2 + 3x^2 y - y^3 \quad \text{και} \quad F = (x^2 + y^2)^3 - 4x^2 y^2$$

στο σημείο $P := (0,0) \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$.



Κατ' αρχάς ορίζουμε το πολυώνυμο $F_1 := F - (x^2 + y^2)E$. Επομένως,

$$\begin{aligned} F_1 &= -4x^2y^2 - (3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) \\ &= y\,(\,-4x^2y + (y^2 - 3x^2)(x^2 + y^2)). \end{aligned}$$

Εάν ορίσουμε $G := -4x^2y + (y^2 - 3x^2)(x^2 + y^2)$, τότε $F_1 = yG$.
Χρησιμοποιώντας τά αξιώματα (A6) και (A7) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} I(P, E \cap F) &\overset{(A7)}{=} I(P, E \cap F_1) = I(P, E \cap yG) \\ &\overset{(A6)}{=} I(P, E \cap y) + I(P, E \cap G). \end{aligned} \tag{14}$$

Θα υπολογίσουμε εν πρώτοις τον αριθμό $I(P, E \cap G)$. Επειδή

$$G(x, 0) = -3x^4 \quad \text{και} \quad E(x, 0) = x^4,$$

ορίζουμε το πολυώνυμο $G_1 := G + 3E$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} G_1 &= 4x^2y^2 + 4y^4 + 5x^2y - 3y^3 \\ &= y(4x^2y + 4y^3 + 5x^2 - 3y^2). \end{aligned}$$

Εάν ορίσουμε $H := 4x^2y + 4y^3 + 5x^2 - 3y^2$, τότε $G_1 = yH$.
Εκ νέου χρήση των αξιωμάτων (A6) και (A7) διαμορφώνει τη σχέση (14) ως εξής:

$$\begin{aligned} I(P, E \cap F) &= I(P, E \cap y) + I(P, E \cap G) \\ &\overset{(A7)}{=} I(P, E \cap y) + I(P, E \cap G_1) \\ &= I(P, E \cap y) + I(P, E \cap yH) \\ &\overset{(A6)}{=} 2 \cdot I(P, E \cap y) + I(P, E \cap H). \end{aligned} \tag{15}$$

Παρατηρούμε ότι

$$x^4 = E - y\,(y^3 + 2x^2y + 3x^2 - y^2).$$

Τούτο, σε συνδυασμό με το αξίωμα (A7), με το αξίωμα (A5), καθώς και με το ότι (προφανώς) ισχύει $T_P(x^4) \neq T_P(y)$, μας δίδει

$$I(P, E \cap y) \overset{(A7)}{=} I(P, x^4 \cap y) \overset{(A5)}{=} m_p(x^4) \cdot m_P(y) = 4 \cdot 1 = 4.$$

Επιπροσθέτως, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι $T_P(E) \neq T_P(H)$, οπότε σύμφωνα με το αξίωμα (A5) λαμβάνουμε

$$I(P, E \cap H) = m_P(E) \cdot m_P(H) = 3 \cdot 2 = 6.$$

Ως εκ τούτου, βάσει τής σχέσεως (15), έχουμε τελικώς :

$$I(P, E \cap F) = 2 \cdot 4 + 6 = 14.$$

2 Αριθμός τομής δυο προβολικών επίπεδων καμπυλών

Έστω ότι το $\mathbb{K}$ είναι ένα αλγεβρικώς κλειστό σώμα και τα $F, G \in \mathbb{K}[x, y, z]$ δυο ομογενή πολυώνυμα. Έστω ακόμη ότι οι $\mathbb{V}_+(F), \mathbb{V}_+(G) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ είναι οι αντίστοιχες προβολικές επίπεδες καμπύλες που ορίζονται μέσω αυτών. Και πάλι για λόγους ευκολίας θα συμβολίζουμε τις $\mathbb{V}_+(F), \mathbb{V}_+(G)$ απλώς ως F, G.
Στην περίπτωση όπου τα F και G δεν διαθέτουν κοινές συνιστώσες το σύνολο $\mathbb{V}_+(F, G) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ είναι πεπερασμένο. Ως εκ τούτου, σύμφωνα με την άσκηση A.3.44(b), υπάρχει κάποια ευθεία $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, ούτως ώστε $F \cap G \cap \mathbb{L} = \emptyset$. Ειδικότερα, με ενδεχόμενη προβολική αλλαγή συντεταγμένων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbb{L} = \mathbb{V}_+(z)$. Βάσει αυτών των συμβάσεων, σε ό,τι ακολουθεί θα αποομογενοποιούμε πάντοτε ως προς την μεταβλητή z, ήτοι για κάθε $F \in \mathbb{K}[x, y, z]$ θα θέτουμε

$$F_*(x, y) = F(x, y, 1).$$

Ορίζουμε τον αριθμό τομής των καμπυλών F και G σε ένα σημείο $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ ως εξής:

$$I(P, F \cap G) := I(P, F_* \cap G_*) = \dim_{\mathbb{K}} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}, P} \;/\; \langle F_*, G_* \rangle \right).$$

Πολύ εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι ο αριθμός αυτός ικανοποιεί όλα τα αξιώματα (A1) - (A7) τής ενότητας 1, αρκεί στο αξίωμα (A3) η αλλαγή συντεταγμένων να είναι προβολική και στο αξίωμα (A7) το πολυώνυμο $A \in \mathbb{K}[x, y, z]$ να είναι ομογενές βαθμού $\deg(G) - \deg(F)$.

3 Το Θεώρημα τού Bézout

Θεώρημα 3.1. *Έστω ότι οι $F, G \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ είναι δυο προβολικές επίπεδες καμπύλες βαθμών m και n, αντιστοίχως. Ας υποθέσουμε ότι αυτές δεν διαθέτουν κοινές ανάγωγες συνιστώσες. Τότε*

$$\boxed{\sum_P I(P, F \cap G) = m \cdot n}\ .$$

Απόδειξη. Όπως και στην αρχή τής ενότητας 2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει $F \cap G \cap \mathbb{V}_+(z) = \emptyset$. Για λόγους συντομίας χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς

$$\Gamma := \mathbb{K}[x, y, z] \;/\; \langle F, G \rangle \quad \text{και} \quad R := \mathbb{K}[x, y, z].$$

Ως Γ_d και R_d θα συμβολίζουμε τα ομογενή τμήματα βαθμού d των (βαθμολογημένων) δακτυλίων Γ και R, αντιστοίχως.

Βήμα 1 : Εάν $d \geq m + n$, τότε $\dim_{\mathbb{K}}(\Gamma_d) = m \cdot n$.
Ας υποθέσουμε ότι $d \geq m + n$. Θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό

$$\pi : R \to \Gamma := R \;/\; \langle F, G \rangle\ ,$$

καθώς και τις απεικονίσεις

$$\begin{array}{cccc} \phi : & R \times R & \to & R \\ & (A, B) & \mapsto & AF + BG \end{array}\ , \qquad \begin{array}{cccc} \psi : & R & \to & R \times R \\ & M & \mapsto & (GM, -FM) \end{array}.$$

Η κατωτέρω ακολουθία είναι ακριβής :

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\psi} R \times R \xrightarrow{\phi} R \xrightarrow{\pi} \Gamma \longrightarrow 0. \qquad (*)$$

► Η π είναι εκ κατασκευής επιμορφισμός.
► Η ψ είναι προφανώς ενριπτική.
► $\mathrm{Im}(\phi) = \ker(\pi)$: Πράγματι,

$$z \in \mathrm{Im}(\phi) \Leftrightarrow \exists\, A, B \in R \;:\; z = AF + BG \Leftrightarrow z \in \langle F, G \rangle = \ker(\pi).$$

► $\mathrm{Im}(\psi) = \ker(\phi)$: Πράγματι,
"$\subseteq$" Εάν $z \in \mathrm{Im}(\psi)$, τότε $z = (GM, -FM)$ για κάποιο $M \in R$. Συνεπώς,

$$\phi(z) = \phi(GM, -FM) = GMF - GMF = \mathbf{0}_R,$$

οπότε $z \in \ker(\phi)$.
"$\supseteq$" Έστω $z := (A, B) \in R \times R$ με $z \in \ker(\phi)$. Τότε $AF + BG = \mathbf{0}_R$ και, ως εκ τούτου, $AF = -BG$. Ειδικότερα, $G \mid AF$ και επειδή εξ υποθέσεως τα F και G

δεν διαθέτουν κοινούς παράγοντες, έχουμε $G \mid A$. Έστω λοιπόν $A = GE$ για κάποιο $E \in R$. Τότε

$$-BG = AF \Rightarrow -BG = EFG \Rightarrow B = -EF.$$

Άρα

$$\psi(E) = (GE, -FE) = (A, B),$$

οπότε $z := (A, B) \in \mathrm{Im}(\psi)$.

Γνωρίζοντας ότι η $(*)$ είναι ακριβής και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι εξ υποθέσεως ισχύει $d - m - n \geq 0$, μπορούμε να περιορίσουμε την απεικόνιση ψ επί τού R_{d-m-n} και να καταλήξουμε στην εξής ακριβή ακολουθία ($\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διαστάσεως) :

$$0 \longrightarrow R_{d-m-n} \longrightarrow R_{d-m} \times R_{d-n} \longrightarrow R_d \longrightarrow \Gamma_d \longrightarrow 0. \qquad (**)$$

Επειδή, ως γνωστόν, ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος R_ν , $\nu \in \mathbb{N}_0$, διαθέτει διάσταση

$$\dim_{\mathbb{K}}(R_\nu) = \binom{\nu+2}{2} = \frac{(\nu+1)\cdot(\nu+2)}{2} \ ,$$

(βλ. παράδειγμα 3.2.3(α)), το λήμμα 1.3(iii) μας πληροφορεί ότι

$$\dim_{\mathbb{K}}(\Gamma_d) = \dim_{\mathbb{K}}(R_{d-m-n}) - \Big(\dim_{\mathbb{K}}(R_{d-m}) + \dim_{\mathbb{K}}(R_{d-n})\Big) + \dim_{\mathbb{K}}(R_d).$$

Εκτελώντας τις πράξεις διαπιστώνουμε τελικώς ότι $\dim_{\mathbb{K}}(\Gamma_d) = m \cdot n$.

Βήμα 2 : Η απεικόνιση

$$\begin{array}{cccc} \alpha : & \Gamma & \longrightarrow & \Gamma \\ & M + \langle F, G\rangle & \mapsto & zM + \langle F, G\rangle \end{array}$$

είναι ενριπτική. Επιπροσθέτως, ο περιορισμός $\widetilde{\alpha}_d : \Gamma_d \to \Gamma_{d+1}$ είναι ισομορφισμός, για κάθε $d \geq m + n$.

Επειδή εξ υποθέσεως $F \cap G \cap \mathbb{V}_+(z) = \emptyset$, το πόρισμα 3.6.17 μας πληροφορεί ότι το ιδεώδες $\langle F, G\rangle$ είναι $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό (βλ. ορισμό 3.6.12). Όμως, βάσει τού θεωρήματος 3.6.14, τούτο σημαίνει ότι ο δακτύλιος $\Gamma := \mathbb{K}[x, y, z] \ / \ \langle F, G\rangle$ ως $\mathbb{K}[x, y, z]$-μόδιος είναι ελεύθερος στρέψεως ως προς την μεταβλητή z, δηλαδή ότι ισχύει η συνεπαγωγή

$$zM \in \langle F, G\rangle \Rightarrow M \in \langle F, G\rangle.$$

Με άλλα λόγια, η απεικόνιση α είναι ενριπτική. Στην περίπτωση όπου $d \geq m+n$ γνωρίζουμε (από το βήμα 1) ότι

$$\dim_{\mathbb{K}}(\Gamma_d) = \dim_{\mathbb{K}}(\Gamma_{d+1}) = m \cdot n.$$

Άρα ο περιορισμός $\widetilde{a}_d : \Gamma_d \to \Gamma_{d+1}$ είναι ένας μονομορφισμός μεταξύ ισοδιάστατων $\mathbb{K}$-διανυσματικών χώρων και, ως εκ τούτου, ένας ισομορφισμός.

Βήμα 3 : Έαν οι F_* και G_* είναι οι αποομογενοποιήσεις των πολυωνύμων F, G ως προς την μεταβλητή z, αντιστοίχως, τότε $\dim_{\mathbb{K}}(\Gamma_*) = m \cdot n$, όπου

$$\Gamma_* := \mathbb{K}[x, y] \;/\; \langle F_*, G_* \rangle.$$

Ας παγιώσουμε κάποιον $d \geq m + n$. Θεωρούμε ομογενή πολυώνυμα $A_1, \ldots, A_{mn}$ εντός τού $\mathbb{K}[x, y, z]_d$, τέτοια ώστε το σύνολο

$$\Big\{A_1 + \langle F, G \rangle, \ldots, A_{mn} + \langle F, G \rangle\Big\}$$

να αποτελεί μια βάση τού $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου Γ_d (σύμφωνα με το βήμα 1). Θεωρούμε ακόμη τις αντίστοιχες αποομογενοποιήσεις $A_{i*}, \ldots, A_{mn*} \in \mathbb{K}[x, y]$, καθώς και τον φυσικό επιμορφισμό

$$\widetilde{\pi} : \mathbb{K}[x, y] \to \mathbb{K}[x, y] \;/\; \langle F_*, G_* \rangle =: \Gamma_*.$$

Για κάθε $i \in \{1, \ldots, mn\}$ ορίζουμε $a_i := \widetilde{\pi}(A_{i*}) = A_{i*} + \langle F_*, G_* \rangle \in \Gamma_*$. Προφανώς αρκεί να δειχθεί ότι το σύνολο $\{a_1, \ldots, a_{mn}\}$ αποτελεί μια βάση τού $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου Γ_* . Το κάτωθι θα μας φανεί ιδιαιτέρως χρήσιμο κατά την αποδεικτική μας πορεία :

> Το σύνολο $\{z^r A_i + \langle F, G \rangle \;:\; 1 \leq i \leq mn\}$ αποτελεί μια βάση τού διανυσματικού χώρου Γ_{d+r}, για κάθε ακέραιο αριθμό $r \geq 0$.

Με επαγωγή ως προς το r : Για $r = 0$ η πρόταση είναι αληθής λόγω των όσων υποθέσαμε προηγουμένως. Ας υποθέσουμε, εν συνεχεία, ότι το σύνολο

$$\{z^r A_i + \langle F, G \rangle \;:\; 1 \leq i \leq mn\}$$

αποτελεί μια βάση τού Γ_{d+r} για κάποιο $r > 0$. Επειδή $d + r > d \geq m + n$, κατά το βήμα 2 έχουμε τη δυνατότητα θεωρήσεως τού ισομορφισμού

$$\widetilde{\alpha}_{d+r} : \Gamma_{d+r} \xrightarrow{\cong} \Gamma_{d+r+1}.$$

Επιπροσθέτως, για κάθε $i \in \{1, \ldots, mn\}$ έχουμε

$$\widetilde{\alpha}_{d+r}(z^r A_i + \langle F, G \rangle) = z^{r+1} A_i + \langle F, G \rangle.$$

Ως εκ τούτου, το σύνολο $\{z^{r+1} A_i + \langle F, G \rangle \;:\; 1 \leq i \leq mn\}$ αποτελεί βάση τού χώρου Γ_{d+r+1}.

Τα $a_1, \ldots, a_{mn}$ παράγουν τον Γ_* : Έστω τυχόν $M + \langle F_*, G_* \rangle \in \Gamma_*$, για κάποιο $M \in \mathbb{K}[x, y]$. Θεωρούμε τυχόντα ακέραιο αριθμό $r \geq 0$. Τότε για κάποιον (αρκετά μεγάλο) φυσικό αριθμό N θα έχουμε $z^N M^* \in \mathbb{K}[x, y, z]_{d+r}$. Κατ' επέκτασιν,

$$z^N M^* + \langle F, G \rangle \in \Gamma_{d+r}.$$

Συμφωνα λοιπόν με τα προηγηθέντα υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, mn$, όχι όλα μηδενικά, έτσι ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} & z^N M^* + \langle F, G \rangle = \sum_{i=1}^{mn} \Big(\lambda_i (z^r A_i + \langle F, G \rangle) \Big) \\ \Rightarrow \quad & z^N M^* - \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i z^r A_i \in \langle F, G \rangle \\ \Rightarrow \quad & z^N M^* = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i z^r A_i + BF + CG, \text{ για κάποια } B, C \in \mathbb{K}[x, y, z]. \end{aligned} \tag{16}$$

Αποομογενοποιώντας τη σχέση (16) (βλ. πρόταση 3.6.3(c)) λαμβάνουμε εντός τού δακτυλίου $\mathbb{K}[x, y]$:

$$M = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i A_{i*} + B_* F_* + C_* G_*$$

Μεταβαίνοντας στον δακτύλιο Γ_* μέσω τού φυσικού επιμορφισμού $\widetilde{\pi}$ λαμβάνουμε

$$M + \langle F_*, G_* \rangle = \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i a_i.$$

Τα $a_1, \ldots, a_{mn}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα : Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν στοιχεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn} \in \mathbb{K}$, τέτοια ώστε (εντός τού Γ_*) να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{mn} \lambda_i a_i = 0.$$

Τούτο σημαίνει ότι εντός τού δακτυλίου $\mathbb{K}[x, y]$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{mn} \lambda_i A_{i*} \in \langle F_*, G_* \rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i A_{i*} = BF_* + CG_*,$$

για κάποια $B, C \in \mathbb{K}[x, y]$. Επειδή το ιδεώδες $\langle F, G \rangle$ είναι $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό, ομογενοποιώντας τήν τελευταία ισότητα λαμβάνουμε

$$z^{r_1} \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i A_i = z^{r_2} B^* F + z^{r_3} C^* G, \quad \text{για κάποια } r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{N}.$$

Ειδικότερα,

$$\sum_{i=1}^{mn} \lambda_i z^{r_1} A_i = z^{r_1} \sum_{i=1}^{mn} \lambda_i A_i \in \langle F, G \rangle.$$

Ως εκ τούτου, εντός τού δακτυλίου Γ_{d+r_1} έχουμε

$$\sum_{i=1}^{mn} \lambda_i (z^{r_1} A_i + \langle F, G \rangle) = \mathbf{0}_{\Gamma_{d+r_1}}.$$

Επειδή $r_1 \geq 0$, το σύνολο $\left\{ z^{r_1} A_i + \langle F, G \rangle \ : \ 1 \leq i \leq mn \right\}$ αποτελεί βάση τού χώρου Γ_{d+r_1}. Συνεπώς, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{mn} = 0_{\mathbb{K}}$.

Βήμα 4 : Ύστερα από συνδυασμό τού αποτελέσματος τού βήματος 3 και τής προτάσεως 1.6 συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_P I(P, F \cap G) &= \sum_P I(P, F_* \cap G_*) = \dim_{\mathbb{K}} \left(\mathbb{K}[x, y] \ / \ \langle F_*, G_* \rangle \right) \\ &= \dim_{\mathbb{K}} (\Gamma_*) = m \cdot n \ . \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 3.2. *Εάν οι F και G είναι δυο προβολικές επίπεδες καμπύλες οι οποίες δεν διαθέτουν κοινές συνιστώσες, τότε*

$$\boxed{\sum_{P \in F \cap G} m_P(F) \cdot m_P(G) \leq \deg(F) \cdot \deg(G)} \ .$$

Απόδειξη. Βάσει τού αξιώματος (A5) και τού θεωρήματος τού Bézout ισχύει

$$\sum_P m_P(F) \cdot m_P(G) \leq \sum_P I(P, F \cap G) = \deg(F) \cdot \deg(G) \ .$$ □

Πόρισμα 3.3. *Έστω ότι οι F και G είναι δυο προβολικές επίπεδες καμπύλες βαθμών m και n, αντιστοίχως, οι οποίες δεν διαθέτουν κοινές συνιστώσες. Εάν $|F \cap G| = m \cdot n$, τότε οι καμπύλες F και G τέμνονται εγκαρσίως σε όλα τα σημεία τής τομής. Ιδιαιτέρως, όλα αυτά είναι ομαλά σημεία τόσον τής F όσον και τής G.*

Απόδειξη. Δυνάμει τού θεωρήματος τού Bézout έχουμε

$$\sum_{P \in F \cap G} I(P, F \cap G) = m \cdot n = |F \cap G| \ .$$

Επειδή, σύμφωνα με το αξίωμα (A2), $I(P, F \cap G) \geq 1$ για κάθε $P \in F \cap G$, η ανωτέρω ισότητα είναι εφικτή μόνον όταν $I(P, F \cap G) = 1$, για κάθε $P \in F \cap G$. Τούτο, βάσει τής παρατηρήσεως 1.2(i), ισοδυναμεί με το ότι οι F και G τέμνονται εγκάρσιως σε κάθε σημείο τής τομής. □

Πόρισμα 3.4. *Έστω ότι οι F και G είναι δυο προβολικές επίπεδες καμπύλες βαθμών m και n, αντιστοίχως, οι οποίες τέμνονται σε περισσότερα από $m \cdot n$ το πλήθος σημεία. Τότε αυτές οφείλουν να διαθέτουν κάποια κοινή συνιστώσα.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι οι F και G δεν διαθέτουν κοινές συνιστώσες. Τότε κατά το θεώρημα τού Bézout θα είχαμε

$$\sum_P I(P, F \cap G) = m \cdot n < |F \cap G| \ ,$$

πράγμα (προφανώς) άτοπο. □

4 Το Θεώρημα τού Max Noether και εφαρμογές αυτού

Ορισμός 4.1. Έστω ότι το $P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ είναι ένα σημείο και ότι οι F, G, H είναι τρεις προβολικές επίπεδες καμπύλες. Ας υποθέσουμε ότι οι F και G δεν διαθέτουν κοινές συνιστώσες διερχόμενες από το P. Λέμε ότι η τριάδα (F, G, H) **ικανοποιεί τις συνθήκες τού Noether στο** P όταν

$$H_* \in \langle F_*, G_* \rangle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}, P}.$$

Θεώρημα 4.2 (Θεμελιώδες Θεώρημα τού Max Noether). *Εάν οι F, G και H είναι τρεις προβολικές επίπεδες καμπύλες και οι F και G δεν διαθέτουν κοινές συνιστώσες, τότε υφίσταται μια εξίσωση τής μορφής*

$$H = AF + BG$$

(όπου τα A, B είναι ομογενή βαθμών $\deg(H) - \deg(F)$ και $\deg(H) - \deg(G)$, αντιστοίχως) εάν και μόνον εάν η τριάδα (F, G, H) ικανοποιεί τις συνθήκες τού Noether σε κάθε $P \in F \cap G$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αρχικώς ότι υπάρχει εξίσωση τής μορφής

$$H = AF + BG,$$

για κάποια ομογενή πολυώνυμα A και B όπως στην εκφώνηση. Τότε είναι σαφές ότι αποομογενοποιώντας λαμβάνουμε

$$H_* = A_* F_* + B_* G_* \in \langle F_*, G_* \rangle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}, P} \ ,$$

για κάθε σημείο P. Και αντιστρόφως· ας υποθέσουμε ότι η τριάδα (F, G, H) ικανοποιεί τις συνθήκες τού Noether σε κάθε σημείο τής τομής $F \cap G$. Όπως και στην ενότητα 2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $F \cap G \cap \mathbb{V}_+(z) = \emptyset$ και κατ' επέκτασιν ότι το ιδεώδες $\langle F, G \rangle$ είναι $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό. Εξ υποθέσεως έχουμε

$$H_* \in \langle F_*, G_* \rangle \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{K}^2, P}} \ , \quad \text{για κάθε } \ P \in F \cap G. \tag{17}$$

Επειδή η σχέση (17) ισχύει για κάθε σημείο τής τομής, ο ισομορφισμός τού θεωρήματος 2.4.14 μας εξασφαλίζει ότι

$$H_* \in \langle F_*, G_* \rangle \quad (\text{εντός τού } \mathbb{K}[x,y]).$$

Επομένως, $H_* = a F_* + b G_*$ για κάποια $a, b \in \mathbb{K}[x,y]$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το ιδεώδες $\langle F, G \rangle$ είναι $(\mathrm{j}_*)^*$-κλειστό και ομογενοποιώντας (ως προς τη μεταβλητή z) έχουμε

$$z^\nu H = A'F + B'G,$$

για κάποια ομογενή πολυώνυμα $A', B' \in \mathbb{K}[x,y,z]$ και κάποιον $\nu \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα ισχύει $z^\nu H \in \langle F, G \rangle$. Εξάλλου, βάσει τού θεωρήματος 3.6.14 ο δακτύλιος $\mathbb{K}[x,y,z] \,/\, \langle F, G \rangle$, ως $\mathbb{K}[x,y,z]$-μόδιος, είναι ελεύθερος στρέψεως ως προς τη μεταβλητή z. Ως εκ τούτου, $H \in \langle F, G \rangle$, και κατά συνέπειαν υπάρχουν πολυώνυμα $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathbb{K}[x,y,z]$, τέτοια ώστε

$$H = \widetilde{A}F + \widetilde{B}G.$$

Ιδιαιτέρως, ορίζοντας $s := \deg(H) - \deg(F)$, $t := \deg(H) - \deg(G)$ και $A := \widetilde{A}_s$, $B := \widetilde{B}_t$, συνάγουμε ότι $H = AF + BG$, όπου τα πολυώνυμα A, B είναι ομογενή κατάλληλων βαθμών. □

Ας δούμε εν συνεχεία κάποια εύχρηστα κριτήρια που μας εξασφαλίζουν το ότι μια τριάδα καμπυλών ικανοποιεί τις συνθήκες τού Noether.

Πρόταση 4.3. *Εάν οι F, G, H είναι τρεις προβολικές επίπεδες καμπύλες και $P \in F \cap G$, η τριάδα (F, G, H) ικανοποιεί τις συνθήκες τού Noether στο σημείο P εάν ισχύει κάποιο από τα κατωτέρω:*

(i) Οι F και G τέμνονται εγκαρσίως στο P, και επιπροσθέτως, $P \in H$.

(ii) Το P αποτελεί ομαλό σημείο τής F και $I(P, H \cap F) \geq I(P, G \cap F)$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση στην περίπτωση (*ii*), διότι τούτη έπεται άμεσα από την συνθήκη (*i*). Πράγματι· εάν οι F και G τέμνονται εγκαρσίως στο P, το P είναι εξ' ορισμού ομαλό σημείο τής F. Επιπροσθέτως, βάσει τής παρατηρήσεως 1.2(*i*) και τού αξιώματος (A2), καθώς και τού ότι εξ υποθέσεως $P \in H \cap F$, συμπεραίνουμε ότι

$$I(P, H \cap F) \geq 1 = I(P, G \cap F).$$

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η συνθήκη (*ii*) ικανοποιείται.

Ισχυρισμός : Έστω $\pi : \mathbb{K}[x,y] \to \Gamma(F_*)$ ο φυσικός επιμορφισμός και

$$g := \pi(G_*) = G_* + \langle F_* \rangle \ , \ \ h := \pi(H_*) = H_* + \langle F_* \rangle.$$

Τότε ισχύουν οι ισότητες

$$I(P, G_* \cap F_*) = \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O}_{F_*,P} \ / \ \langle g \rangle \mathcal{O}_{F_*,P}),$$

$$I(P, H_* \cap F_*) = \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O}_{F_*,P} \ / \ \langle h \rangle \mathcal{O}_{F_*,P}).$$

Πράγματι· εάν εφαρμόσουμε την άσκηση A.2.28 (για τα $J := \langle F_*, G_* \rangle, V := F_*$, $\mathbb{I}(V) := \langle F_* \rangle$ και $J' := \pi(J) = \langle g \rangle$) λαμβάνουμε

$$\mathcal{O} \ / \ \langle F_*, G_* \rangle \mathcal{O} \cong \mathcal{O}_{F_*,P} \ / \ \langle g \rangle \mathcal{O}_{F_*,P}, \tag{18}$$

οπότε

$$I(P, G_* \cap F_*) := \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O} \ / \ \langle F_*, G_* \rangle \mathcal{O}) = \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O}_{F_*,P} \ / \ \langle g \rangle \mathcal{O}_{F_*,P}).$$

Εκ νέου εφαρμογή τής ίδιας ασκήσεως (για $J := \langle F_*, H_* \rangle, V := F_*, \mathbb{I}(V) := \langle F_* \rangle$ και $J' := \pi(J) = \langle h \rangle$) μας παρέχει και τη δεύτερη από τις ζητούμενες ισότητες.

Εξ υποθέσεως ισχύει η ανισοϊσότητα $I(P, H_* \cap F_*) \geq I(P, G_* \cap F_*)$, οπότε βάσει των προηγουμένων έχουμε

$$\dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O}_{F_*,P} \ / \ \langle h \rangle \mathcal{O}_{F_*,P}) \geq \dim_{\mathbb{K}} (\mathcal{O}_{F_*,P} \ / \ \langle g \rangle \mathcal{O}_{F_*,P}).$$

Ειδικότερα $H_* + \langle F_* \rangle =: h \in \langle g \rangle \mathcal{O}_{F_*,P}$ και επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (18), $H_* \in \langle F_*, G_* \rangle \mathcal{O}$. Ως εκ τούτου, η τριάδα (F, G, H) ικανοποιεί τις συνθήκες τού Noether στο σημείο P. □

Εν συνεχεία θα προχωρήσουμε σε ορισμένες χρήσιμες εφαρμογές τού θεωρήματος τού Noether.

Ορισμός 4.4. Ορίζουμε ως **κύκλημα** τού προβολικού χώρου $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ κάθε τυπικό άθροισμα τής μορφής

$$\sum_{P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}} n_P P \ , \quad n_P \in \mathbb{Z} \ ,$$

όπου μόνον πεπερασμένου πλήθους συντελεστές n_P είναι μη μηδενικοί. Το σύνολο των κυκλημάτων αποτελεί μια αβελιανή ομάδα, ήτοι την ελεύθερη ομάδα με το σύνολο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ ως βάση της. Ορίζουμε τον **βαθμό** ενός τέτοιου κυκλήματος ως εξής:

$$\deg \big(\sum_P n_P P \big) := \sum_P n_P \in \mathbb{Z}.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου όλοι οι εμφανιζόμενοι συντελεστές είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι τού μηδενός καλούμε το κύκλημα **θετικό**. Γενικότερα, ορίζουμε μια σχέση διατάξεως μεταξύ κυκλημάτων :

$$\sum_P n_P P \succ \sum_P m_P P \Leftrightarrow n_P \geq m_P \text{ , για κάθε } \ P.$$

Μια ειδική περίπτωση κυκλήματος είναι το λεγόμενο **κύκλημα τομής**. Εάν οι F και G είναι δυο προβολικές επίπεδες καμπύλες χωρίς κοινές συνιστώσες, τότε ορίζουμε

$$\boxed{F * G := \sum_{P \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}} I(P, F \cap G) P} \,.$$

Παρατήρηση 4.5. Πολλά από τα ήδη γνωστά μας αποτελέσματα μπορούν εύκολα να αναδιατυπωθούν συναρτήσει κυκλημάτων τομής. Παραδείγματος χάριν, εάν οι καμπύλες F και G διαθέτουν βαθμούς m και n, αντιστοίχως, το θεώρημα τού Bézout μας πληροφορεί ότι το κύκλημα $F * G$ είναι (προφανώς) θετικό, βαθμού $m \cdot n$. Ακόμη, τα αξιώματα (A4) , (A6) και (A7) τού αριθμού τομής αναδιατυπώνονται ως ακολούθως :
Αξίωμα (A4) : $F * G = G * F$.
Αξίωμα (A6) : $F * GH = F * G + F * H$.
Αξίωμα (A7) : $F * (G + AF) = F * G$, για κάθε ομογενές πολυώνυμο A βαθμού $\deg(G) - \deg(F)$.

Λήμμα 4.6. *Εάν οι F, G, H είναι τρεις προβολικές επίπεδες καμπύλες και η τριάδα (F, G, H) ικανοποιεί τις συνθήκες τού Noether σε κάθε σημείο τής τομής $F \cap G$, τότε υπάρχει καμπύλη B (βαθμού $\deg(H) - \deg(G)$), ούτως ώστε να ισχύει*

$$B * F = H * F - G * F.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα τού Max Noether υπάρχουν ομογενή πολυώνυμα A και B (με το B βαθμού $\deg(H) - \deg(G)$), τέτοια ώστε

$$H = AF + BG.$$

Εάν συμβολίσουμε εκ νέου (καταχρηστικώς) τα $\mathbb{V}_+(A)$ και $\mathbb{V}_+(B)$ ως A και B, αντιστοίχως, τότε σε επίπεδο κυκλημάτων τομής έχουμε

$$H * F = (AF) * F + (BG) * F \overset{(A7)}{=} (BG) * F \overset{(A6)}{=} B * F + G * F. \qquad \square$$

Πρόταση 4.7. *Ας υποθέσουμε ότι οι F, G και H είναι τρεις προβολικές επίπεδες καμπύλες. Εάν ισχύει κάποιο από τα κατωτέρω :*

(i) οι F και G τέμνονται ακριβώς σε $\deg(F) \cdot \deg(G)$ το πλήθος σημεία και η H διέρχεται από όλα τα σημεία τής τομής,

(ii) όλα τα σημεία τής τομής $F \cap G$ είναι ομαλά στην F και $H * F \succ G * F$,

τότε υπάρχει καμπύλη B (βαθμού $\deg(H) - \deg(G)$, ούτως ώστε να ισχύει

$$B * F = H * F - G * F.$$

Απόδειξη. Βάσει τού λήμματος 4.6 αρκεί να δείξουμε ότι (σε κάθε περίπτωση) η τριάδα (F, G, H) ικανοποιεί τις συνθήκες τού Noether σε κάθε σημείο τής τομής $F \cap G$. Θεωρούμε λοιπόν τυχόν σημείο $P \in F \cap G$ και υποθέτουμε ότι ισχύει το (i). Βάσει τού πορίσματος 3.3 οι F και G τέμνονται εγκαρσίως στο P και εξ υποθέσεως $P \in H$. Σύμφωνα λοιπόν με την πρόταση 4.3 η τριάδα (F, G, H) ικανοποιεί τις συνθήκες τού Noether στο P. Ας υποθέσουμε, εν συνεχεία, ότι ισχύει το (ii). Κάθε $P \in F \cap G$ είναι εξ υποθέσεως ομαλό σημείο τής F και επειδή $H * F \succ G * F$ έχουμε

$$I(P, H \cap F) \geq I(P, G \cap F).$$

Ως εκ τούτου, η πρόταση 4.3 μας πληροφορεί εκ νέου ότι η τριάδα (F, G, H) ικανοποιεί τις συνθήκες τού Noether. $\square$

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα με κάποιες (αμιγώς) γεωμετρικές εφαρμογές τού θεωρήματος 4.2.

Πρόταση 4.8. *Έστω ότι οι C_1 και C_2 είναι δυο κυβικές προβολικές καμπύλες και ότι η Q είναι κάποια κωνική τομή. Ας υποθέσουμε ότι*

$$C_2 * C_1 = \sum_{i=1}^{9} P_i \quad \textit{και} \quad Q * C_1 = \sum_{i=1}^{6} P_i$$

και ότι τα $P_1, \ldots, P_6$ είναι ομαλά σημεία τής C_1. Τότε τα σημεία P_7, P_8 και P_9 είναι συνευθειακά.

Απόδειξη. Εξ υποθέσεως, $C_2 * C_1 \succ Q * C_1$, και όλα τα σημεία τής τομής $C_1 \cap Q$ είναι ομαλά σημεία τής C_1. Ως εκ τούτου, η πρόταση 4.7 μας πληροφορεί ότι υπάρχει καμπύλη B, τέτοια ώστε να ισχύει

$$B * C_1 = C_2 * C_1 - Q * C_1 = \sum_{i=7}^{9} P_i.$$

Σημειωτέον ότι $\deg(B) = \deg(C_2) - \deg(Q) = 3 - 2 = 1$. Επομένως η καμπύλη B είναι μια ευθεία και ο αρχικός ισχυρισμός αληθής. $\square$

Πόρισμα 4.9 (Θεώρημα Pascal). *Έστω Q μια ανάγωγη κωνική καμπύλη και έστω E ένα εξάγωνο (όχι κατ' ανάγκην κυρτό), το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε αυτήν. Τότε οι αντικείμενες ακμές τού E τέμνονται σε συνευθειακά σημεία.*

Απόδειξη. Ας συμβολίσουμε ως $P_1, \ldots, P_6$ τις έξι κορυφές τού εξαγώνου. Τα ακόλουθα ζεύγη αποτελούν τις αντικείμενες ακμές τού E :

$$(P_1P_2, P_4P_5)\ ,\ (P_3P_4, P_6P_1)\ ,\ (P_2P_3, P_5P_6).$$

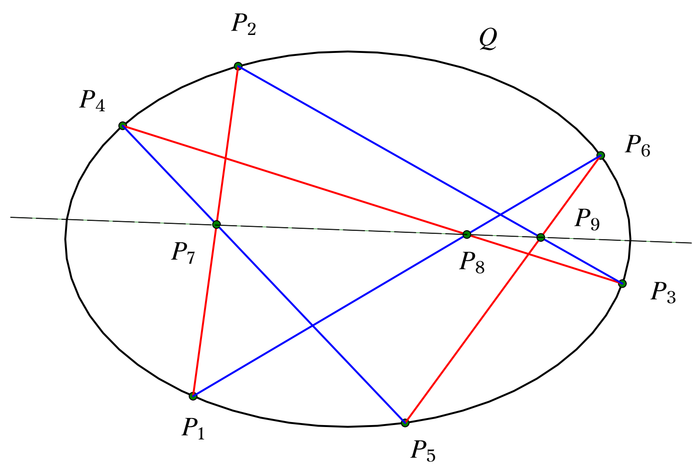
Εάν ονομάσουμε P_7, P_8, P_9 τα σημεία τομής (αντιστοίχως) των ανωτέρω ζευγών και θεωρήσουμε τις κυβικές καμπύλες

$$C_1 := P_1P_2 \cup P_3P_4 \cup P_5P_6 \quad \text{και} \quad C_2 := P_2P_3 \cup P_4P_5 \cup P_6P_1,$$

τότε συνάγουμε ότι

$$C_2 * C_1 = \sum_{i=1}^{9} P_i \quad \text{και} \quad Q * C_1 = \sum_{i=1}^{6} P_i.$$

Επιπροσθέτως, τα $P_1, \ldots, P_6$ είναι προφανώς ομαλά σημεία τής C_1. Ως εκ τούτου, η πρόταση 4.8 μας πληροφορεί ότι τα σημεία P_7, P_8 και P_9 κείνται πράγματι επ' ευθείας.



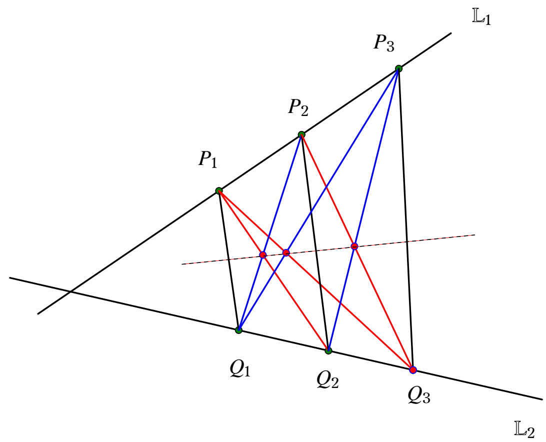
□

Πόρισμα 4.10 (Θεώρημα Πάππου). *Έστω ότι οι $\mathbb{L}_1$ και $\mathbb{L}_2$ είναι δυο ευθείες εντός τού προβολικού επιπέδου. Έστω ακόμη P_1, P_2, P_3 τρία σημεία επί τής $\mathbb{L}_1$ και Q_1, Q_2, Q_3 τρία σημεία επί τής $\mathbb{L}_2$, τέτοια ώστε $P_i, Q_i \notin \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$, για κάθε $i \in \{1, 2, 3\}$. Για οιαδήποτε $i, j \in \{1, 2, 3\}$ θεωρούμε τις ευθείες $\mathbb{L}_{ij}$, οι οποίες διέρχονται από τα σημεία P_i και Q_j. Τότε τα σημεία*

$$R_1 := \mathbb{L}_{12} \cap \mathbb{L}_{21} \ , \ R_2 := \mathbb{L}_{13} \cap \mathbb{L}_{31} \ , \ R_3 := \mathbb{L}_{23} \cap \mathbb{L}_{32}$$

είναι συνευθειακά.

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι εντός τού προβολικού επιπέδου δυο ευθείες συνιστούν μια κωνική τομή και να ακολουθήσουμε όμοια αποδεικτική μέθοδο με αυτήν τής αποδείξεως τού πορίσματος 4.9.



□

Αναφορές

[1] W. FULTON: *Algebraic Curves*, Benjamin Inc., 1969.

[2] E. KUNZ: *Introduction to Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, 2005.

[3] S. ROMAN: *Advanced Linear Algebra, second edt.*, GTM, Springer, 2005.

[4] ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ: *Σημειώσεις από τις παραδόσεις τού ομώνυμου μεταπτυχιακού μαθήματος με κωδ. αριθμό Α13*, Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης, Εαρινό Εξάμηνο 2008.