Ιορδάνη Τσελεπίδη

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΕΚΔΟΧΕΣ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ MAYER-VIETORIS ΚΑΙ KÜNNETH ΚΑΙ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΑΥΤΩΝ

Πτυχιακή Εργασία

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ, 2020

Ημερομηνία παρουσιάσεως τής εργασίας: 28/09/2020

Επιτροπή Αξιολογήσεως:

1) Κουβιδάκης Αλέξανδρος [Καθηγητής, Τομέας Γεωμετρίας και Άλγεβρας]

2) Μήτσης Θεμιστοκλής [Αν. Καθηγητής, Τομέας Αναλύσεως]

3) Νταής Δημήτριος [Αν. Καθηγητής, Τομέας Γεωμετρίας και Άλγεβρας] (επιβλέψας)

Αφιερώνεται στους γονείς μου
για την πολύπλευρη υποστήριξη που μου παρείχαν
καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου

Περιεχόμενα

Πρόλογος

▸ **Στόχευση.** Η ανά χείρας πτυχιακή εργασία απευθύνεται σε αναγνωστικό κοινό ευαισθητοποιημένο σε *ειδική αλγεβρική και* (ταυτοχρόνως) *αλγεβροτοπολογική θεματική*. Στοχεύει δε στο να αναλύσει εις βάθος (αλλά με τα όσο το δυνατόν *στοιχειωδέστερα* τεχνικά μέσα) τις αλγεβρικές εκδοχές τού λεγομένου *θεωρήματος των Mayer και Vietoris* (εν συντομία, *MV-θεωρήματος*) και τού λεγομένου *θεωρήματος τού Künneth*, μη ξεχνώντας, εκ παραλλήλου, *τις τοπολογικές τους καταβολές*, πραγματευόμενη, συν τοις άλλοις, και μια σειρά *κλασικών τοπολογικών εφαρμογών* αυτών.

▸ **Ιστορικά δεδομένα.** Ας υποθέσουμε προς στιγμήν, νοερώς, ότι γυρνούμε τον χρόνο πίσω, στις αρχές τής δεκαετίας τού 1910, ήτοι ακόμη στη Belle Époque· κανείς κοινός θνητός στην Ευρώπη δεν είχε προϊδεασθεί για τη φρίκη που θα επακολουθούσε τόσο με το ξέσπασμα τού καταστροφικού Α′ Παγκοσμίου Πολέμου το 1914 (που στοίχισε τη ζωή σε περίπου 10 εκατομμύρια ανθρώπους στα διάφορα πεδία των μαχών, καθώς και σε άλλα 10 εκατ. αμάχους πολίτες που πέθαναν από την κατοχή, τους βομβαρδισμούς, την πείνα, τις κακουχίες και τις ασθένειες) όσον και με τη μετέπειτα άνοδο τού φασιστικού «άξονος» και τον φονικότερο όλων Β′ Παγκόσμιο Πόλεμο το 1939 (με νεκρούς που υπερέβησαν μέχρι το 1945 τα 55 εκατομμύρια). Οι νέες τεχνολογίες βελτίωναν το βιοτικό επίπεδο και επικρατούσε μια σχετική ευημερία. Οι φτηνές τιμές στην αγορά άνθρακα και το φτηνό εργατικό δυναμικό συνέβαλαν στην περαιτέρω ανάπτυξη τής βιομηχανίας. Επίσης, όλες οι επιστήμες άνθιζαν, τα Πανεπιστήμια (κατά κύριο λόγο στην Κεντρική Ευρώπη και στη Βρετανία) εργάζοντο πυρετωδώς, ενώ νέα ιδρύοντο με γοργούς ρυθμούς. Μεταξύ των θετικών επιστημών, τα Μαθηματικά, έχοντας ως παρακαταθήκη την πληθώρα των θεωρητικών θεμελιώσεων και κατακτήσεων από τον «υπερπαραγωγικό» 19ο αιώνα, εξελίσσοντο ραγδαίως. Μεταξύ των νεοφυών κλάδων συγκαταλέγετο και αυτός τής Τοπολογίας, ως μετεξέλιξη τής λεγομένης Analysis Situs. Μετά τον θάνατο τού Poincaré[1] (το 1912), τη «σκυτάλη» έλαβαν οι H. Tietze[2] (1845-1931) στο Brünn (Mähren), M.W. Dehn[3] (1878-1952) στο Münster και στο Breslau, L.E.J. Brouwer[4]

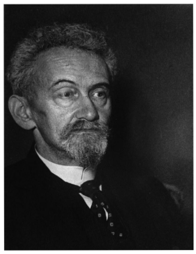
[1] Για ένα σύντομο βιογραφικό σημείωμα που αφορά στον Henri Poincaré (1854-1912) βλ. την υποσημείωση τής σε-λίδας 662.

[2] Βλ. D. Beck: *Der Mathematiker Heinrich Tietze, 1880-1964*, Rauner, Augsburg, 2011.

[3] Βλ. J. Stillwell: *Max Dehn*, in *History of Topology*, edited by I.M. James, North-Holland, 1999, σελ. 965-978.

[4] Βλ. D. Van Dalen: *Luitzen Egbertus Jan Brouwer*, in *History of Topology*, edited by I.M. James, North-Holland, 1999, σελ. 947-964.

(1881-1966) στο Amsterdam και O. Veblen[5] (1880-1960) στο Princeton, προσπαθώντας να διευρύνουν καταλλήλως το υπάρχον θεωρητικό υπόβαθρο. Σημειωτέον ότι ο σύγχρονος ορισμός τού *τοπολογικού χώρου* (μέσω *γειτονιών*) εισήχθη στο περίφημο βιβλίο *Grundzüge der Mengenlehre* τού Felix Hausdorff[6], εκδοθέν μόλις τρεις μήνες προ τής κηρύξεως τού Α′ Παγκοσμίου Πολέμου.



Felix Hausdorff.

Grundzüge der Mengenlehre.

Ο κλονισμός που επέφερε (ύστερα από την επικράτηση τού λαϊκίστικου μιλιταρισμού με επένδυση κακώς εννοούμενου πατριωτισμού) στον επιστημονικό κόσμο η αναγκαστική συμμετοχή του σε εχθροπραξίες πρωτόγνωρης αγριότητας (είτε σε παραγγέλματα για εφ' όπλου λόγχη, είτε σε επιτήδειους χειρισμούς μηχανών θανάτου, είτε ακόμη και με εφαρμογή άλλων μεθόδων στα μετώπισθεν) άφησε ανεξίτηλα τα κατάλοιπά του. Πέραν των σωματικών και ψυχικών τραυμάτων, υπήρχαν και οι σοβαρές υλικές καταστροφές και τα εγκαταλειφθέντα εκπαιδευτικά ιδρύματα, έστω και εάν, εν προκειμένω, τα Μαθηματικά ήταν τα «ολιγότερο πληττόμενα»[7].

Μετά την παρέλευση των τεσσάρων ετών τής παράνοιας και αφότου είχε στεγνώσει το μελάνι των (ταπεινωτικών για τους ηττημένους) άρθρων τής Συνθήκης των Βερσαλλιών, είχαν κορεσθεί οι διεκδικήσεις των νικητών και είχε επέλθει μετάβαση στην τόσο εύθραυστη Δημοκρατία τής Βαϊμάρης[8], η επάνοδος των επιστη-

---

[5]Βλ. S. Mac Lane: *Oswald Veblen 1880-1960*. A biographical memoir. National Academy of Sciences, Washington D.C., 1964, σελ. 324-341.

[6]Hausdorff, *Felix* (8/11/1868-26/1/1942). Ανακηρύχθηκε διδάκτωρ τού Πανεπιστημίου τής Λειψίας το 1891. Κατόπιν διετέλεσε καθηγητής των Πανεπιστημίων Greifswald (1914-1920) και Βόννης (1921-1942). Πολύπλευρο ταλέντο, όχι μόνον στα Μαθηματικά (όπου έγινε γνωστός με εργασίες του επί τής Συνολοθεωρίας, τής Πιθανοθεωρίας και τής Θεωρίας Μέτρου), αλλά και στην ποίηση και στο θέατρο που υπέγραφε με το ψευδώνυμο P. Mongré. Βρήκε τραγικό τέλος μαζί με τη σύζυγό του και την κουνιάδα του όταν εξαναγκάσθηκαν να αυτοκτονήσουν (λαμβάνοντας ισχυρές δόσεις Veronal) για να αποφύγουν την ταπείνωση και τη μεταφορά τους σε στρατόπεδο συγκεντρώσεως από τους Nazi (λόγω τής εβραϊκής τους καταγωγής). Σήμερα μια κεντρική οδός τής Βόννης φέρει το όνομά του. Βλ. και E. Brieskorn (ed.): *Felix Hausdorff zum Gedächtnis. Aspekte seines Werkes.* Vieweg, Braunschweig, 1996. Επιπροσθέτως, στη Βόννη λειτουργεί (από το 2006) και το Hausdorff Research Institute for Mathematics.

[7]Εν αντιδιαστολή προς άλλες θετικές επιστήμες, για τις οποίες ήταν απαραίτητη η παρουσία βαρέος εξοπλισμού (όργανα μετρήσεως, εργαστήρια κ.ά.), τα Μαθηματικά δεν απαιτούσαν παρά ολίγιστα μέσα (ορισμένες δε φορές ούτε καν μολύβι και χαρτί). Υπήρχαν πολλές μαρτυρίες στρατευμένων μαθηματικών, οι οποίοι αισθάνοντο ως λύτρωση (π.χ., σε ατελείωτες ώρες αναμονής σε χαρακώματα ή ακόμη και υπό συνθήκες φυλακίσεως/κρατήσεως) την αυτοσυγκέντρωση για τη εύρεση τρόπων επιλύσεως κάποιου ερευνητικού προβλήματος που τους απασχολούσε.

[8]Για τους λόγους για τους οποίους απέβη αδύνατη η επικράτηση μετριοπαθών πολιτικών δυνάμεων σε εποχές πολυεπίπεδων κοινωνικοοικονομικών κρίσεων στη συνθηκολογήσασα Γερμανία βλ. (δειγματοληπτικώς) τα κάτωθι:

(i) H.A. Winkler: *Βαϊμάρη. Η ανάπηρη Δημοκρατία* (1918-1933), σε μετ. Α. Σαλταμπάση, εκδόσεις Πόλις, 2013.

(ii) B.C. Hett: *Ο θάνατος τής Δημοκρατίας. Η πτώση τής Βαϊμάρης και η άνοδος τού ναζισμού*, σε μετ. Φ. Πίπη, εκδόσεις Διόπτρα, 2019.

(iii) A. Braune & M. Dreyer (Herausgeber): *Weimar und die Neuordnung der Welt. Politik, Wirtschaft, Völkerrecht nach 1918*, Franz Steiner Verlag, Stuttgart 2020.

μονικών κοινοτήτων στην ομαλότητα έγινε ταχύτατα και κατά τρόπο εντυπωσιακό. (Εξίσου εντυπωσιακή ήταν εκείνην την εποχή και η άνθηση των τεχνών: Λογοτεχνίας, θεάτρου, ζωγραφικής, αρχιτεκτονικής, μουσικής, κινηματογράφου κ.ά.)

Εις ό,τι αφορά ειδικότερα στην Τοπολογία: Έχοντας ως αφετηρία τους τα έργα τού Poincaré επί των *αριθμών ομολογίας*[9], κυκλοφόρησαν κατά τη δωδεκαετία 1922-1934 τα βιβλία των Veblen [51], Lefschetz [46] και Reidemeister [49] επί τής Συνδυαστικής Τοπολογίας, καθώς και τα βιβλία των Kerékjártó [45] και Seifert & Threlfall [50] που εστίαζαν περισσότερο στη μελέτη των τοπολογικών επιφανειών.

Εκ παραλλήλου, κατά τον Μεσοπόλεμο (1918-1939) σχηματίσθηκαν (κυρίως στην Κεντρική Ευρώπη) ομάδες ή ακόμη και ολόκληρες σχολές μαθηματικών ειδικευόμενες κατεξοχήν στην επονομαζόμενη *Γενική* (ή *Συνολοθεωρητική*) Τοπολογία.

Η εισαγωγή *αλγεβρικών εννοιών* στην Τοπολογία ήταν καθοριστική για την περαιτέρω ανάπτυξή της. Οδήγησε στη διατύπωση νέων αποτελεσμάτων και επέτρεψε την εγκαθίδρυση υπολογιστικών διαδικασιών για τον προσδιορισμό τοπολογικών αναλλοιώτων. Εν συνεχεία, τούτο είχε ως επακόλουθο, μεταξύ άλλων, και τη δημιουργία (ιδίως κατά την εικοσαετία 1935-1955) ενός νέου κλάδου: εκείνου τής *Ομολογικής Άλγεβρας*[10]. Επιπροσθέτως, η αλγεβροποίηση τής Τοπολογίας συμβάδισε με τη γένεση τής λεγόμενης *Σύγχρονης Άλγεβρας*. Εξαιτίας αυτού και μόνον τού γεγονότος αξίζει να θεωρείται ως μία εκ των ουσιωδέστερων εξελίξεων στο πλαίσιο των Μαθηματικών κατά τον εικοστό αιώνα. Γενικότερα δε, σηματοδοτεί ένα κομβικό σημείο, το οποίο χαρακτηρίζεται από τη μεταφορά εννοιών μεταξύ παραδοσιακώς χωρισμένων περιοχών, όπως είχε, επί παραδείγματι, συμβεί με την αλγεβροποίηση τής Κλασικής Γεωμετρίας από τον Καρτέσιο. Κατά συνέπειαν, παρουσιάζεται ως ένα εξέχον ιστορικό φαινόμενο μαθηματικής τέχνης, κάτι που εξηγεί το γιατί ο Γάλλος μαθηματικός και ιστορικός J. Dieudonné (1906-1992) έχει αφιερώσει το έργο του [116] στην [Αλγεβρική και Διαφορική] Τοπολογία. Βάσει τού [116] τούτο το φαινόμενο είναι θεμελιώδες και από μια αμιγώς στρουκτουραλιστική οπτική γωνία:

- Σύγκλιση ερευνητικών μεθόδων και ενοποίηση Θεωρίας Ομάδων και Τοπολογίας μέσω μεταφοράς ενορατικών μηχανισμών μεταξύ αυτών.

- Εμφάνιση αφηρημένων δομών που αντικαθιστούν τις αρχικές μεθόδους, χαρακτηριστικό των οποίων υπήρξε η προσφυγή στη διαίσθηση.

• *Εύλογο ερώτημα*: Ποιοι ήταν οι *πρωτοπόροι* τής εν λόγω αλγεβροποιήσεως τής Τοπολογίας (μετά τον θάνατο τού Poincaré και μετά την έναρξη τής περιόδου τού Μεσοπολέμου);

Μια συνοπτική απάντηση που θα μπορούσε να δοθεί είναι η εξής: Η στόχευση τής αλγεβροποιήσεως υπήρξε διττή. Αποσκοπούσε (α) στην εξαπλούστευση και στη συστηματική παρουσίαση τού απαιτούμενου θεωρητικού οικοδομήματος και (β) στη διασφάλιση τής απρόσκοπτης γενικεύσεως, ήτοι τής συμπεριλήψεως των ευρύτερων δυνατών τοπολογικών εφαρμογών. Το (α) εδραιώθηκε μέσω εργασιών τού Heinz

[9] Για την προεργασία που είχε προηγηθεί τού Poincaré εκ μέρους των Schläfli (1852), Riemann (1857), Betti (1871) και von Dyck (1888) (γενικεύσεις τού πολυεδρικού τύπου τού Euler, χαρακτηριστική τού von Dyck, αριθμοί Betti, αριθμοί στρέψεως κ.ά.) βλ. το άρθρο [114] τής M. Bollinger.

[10] Βλ. C. A. Weibel: *History of Homological Algebra*, in *History of Topology*, edited by I.M. James, North-Holland, 1999, σελ. 797-836. (Μετά το 1960 η *Ομολογική Άλγεβρα* αναδείχθηκε σε *αυτοδύναμο* κλάδο τής (*Σύγχρονης*) *Αφηρημένης Άλγεβρας*.)

Hopf ύστερα από τήρηση των υποδείξεων και οδηγιών τής Emmy Noether[11]. [Ορθή μεταγραφή[12] στα ελληνικά: Έμμυ Ναίτερ.] Το (β) υλοποιήθηκε (σχεδόν δύο χρόνια ενωρίτερα) από τον Leopold Vietoris (ενώ αργότερα υπήρξε συνεισφορά τού Walther Mayer σε μια ειδική περίπτωση, καθώς και μια ισοδύναμη περιγραφή οφειλόμενη στον Eduard Čech). Για κάποιους λόγους ο ρόλος τού (β) είχε (επί σχεδόν μισόν αιώνα) υποτιμηθεί[13] και έπρεπε να υπάρξει αφύπνιση των «παροικούντων την Ιερουσαλήμ» προκειμένου να αποκατασταθεί η αρμόζουσα σημασία του.

Το 1935 κυκλοφόρησε το περιώνυμο βιβλίο [44] τής Τοπολογίας των P. Alexandroff και H. Hopf[14] το οποίο εγκαινιάζει (διατηρώντας, παραλλήλως, τη συνήθη γεωμετρική και συνδυαστική γωνία θεάσεως) μια αλγεβρική εκφραστική δεινότητα, περιέχον, μεταξύ άλλων, και ένα ολόκληρο παράρτημα περί τής Θεωρίας Ομάδων. Στην εισαγωγή του διαβάζουμε τα ακόλουθα: «Η ολομερής μαθηματική διορατικότητα τής Emmy Noether δεν περιοριζόταν μόνον στον ειδικό τομέα δραστηριότητάς της, ήτοι στην Άλγεβρα, αλλά ασκούσε μια ζωηρή επιρροή και σε πληθώρα άλλων σχετιζόμενων κλάδων. Για εμάς, η εν λόγω επιρροή είχε βαρύνουσα σημασία και αντικατοπτρίζεται και σε αυτό το βιβλίο. Η τάση τής ισχυρής αλγεβροποιήσεως τής Τοπολογίας επί ομαδοθεωρητικών θεμελίων, στην οποία στηρίζουμε την παρουσίασή μας, ανάγεται το δίχως άλλο στην Emmy Noether· μπορεί τούτο πλέον σήμερα να φαντάζει αυτονόητο, αλλά δεν ίσχυε μέχρι προ οκτώ ετών, διότι (προ)απαιτείτο η ενεργητικότητα και η ιδιοσυγκρασία της προκειμένου να γίνει κοινό κτήμα των

---

[11] Noether, *Emmy* (23/3/1882-14/4/1935). Γερμανίδα μαθηματικός εβραϊκής καταγωγής. Κόρη τού γεωμέτρη Max Noether. Θεωρείται ως μία εκ των κύριων αναδιαμορφωτών τής (Σύγχρονης) Άλγεβρας κατά τον 20ο αιώνα, έχουσα σημαντική συνεισφορά και σε άλλους κλάδους, ακόμη και σε ορισμένους ανήκοντες στη Μαθηματική Φυσική. Για τη βιογραφία και για σχολιασμούς επί τού ερευνητικού της έργου βλ. τα ακόλουθα:

(i) A. Dick: *Emmy Noether, 1882-1935*, Birkhäuser, 1981.

(ii) J.W. Brewer & M.K. Smith (editors): *Emmy Noether: A Tribute to Her Life and Work*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. **69**, Marcel Dekker, 1982.

(iii) M. Teicher (editor): *The Heritage of Emmy Noether*, Israel Mathematical Conference Proceedings, Bar-Ilan University, American Mathematical Society, 1999.

(iv) F. Lemmermeyer & P. Roquette: *Helmut Hasse und Emmy Noether. Die Korrespondenz 1925-1935*, Universitätsverlag Göttingen, 2006.

(v) M.B.W. Tent: *Emmy Noether. The Mother of Modern Algebra*, A.K. Peters, Ltd., Massachusetts, 2008. [Υπάρχει και στα ελληνικά, σε μετάφραση Ν. Κυριαζόπουλου και επ. επιμέλεια Θ. Γραμμένου, υπό τον τίτλο: *Εμι Νέδερ. Η κυρία τής Άλγεβρας*, εκδοτικός οίκος Τραυλός, 2009.]

(vi) M. Koreuber: *Emmy Noether, die Noether-Schule und die moderne Algebra. Zur Geschichte einer kulturellen Bewegung*, Mathematik im Kontext, Spektrum, Springer-Verlag, 2015.

[12] Για λόγους συνέπειας ο ίδιος ο Εμμανουήλ Τριανταφυλλίδης (1883-1959) δέχεται για την ορθογραφία τής μεταγραφής ξένων ονομάτων/επωνύμων να εφαρμόζεται η *αρχή τής αντιστρεψιμότητας*. Την *αρχή τής απλογραφήσεως* την αποφεύγει και τη χρησιμοποιεί μόνον κατ' εξαίρεση όπου βοηθάει. Έτσι, για τη μεταγραφή τού Goethe εξακολουθούμε να γράφουμε Γκαίτε (αντί τού απλογραφημένου Γκέτε), για τη μεταγραφή τού Goebbels εξακολουθούμε να γράφουμε Γκαίμπελς (αντί Γκέμπελς) κ.ο.κ. Εν προκειμένω, η δίφθογγος oe επέχει τη θέση ενός ö («ο Umlaut», προερχόμενου από συναίρεση των o και e) και προφέρεται ως «κλειστό ε» (όπως στα γαλλικά η λέξη neuf). Από την άλλη μεριά, αξίζει να σημειωθεί ότι το «th» στα γερμανικά προφέρεται ως ταυ και όχι, όπως στην αγγλική γλώσσα, ως δέλτα ή θήτα. Στην Ελλάδα, πολλοί αγγλοτραφείς μη γερμανομαθείς αρέσκονται να χρησιμοποιούν ως μεταγραφή τού επωνύμου Noether τα Ναίδερ/Ναίθερ (ή τις απλογραφήσεις Νέδερ/Νέθερ), κάτι που μάλλον δεν θα το ενέκρινε ούτε η ίδια η Έμμυ: Διαφέρει, όπως είναι φυσικό, η εξαναγκαστική εξορία λόγω πολιτικής καταδιώξεως και κινδύνου (υφιστάμενου για την ίδια σου η ζωή) από την πλήρη ενσωμάτωση (ύστερα από μόλις ενάμισι χρόνο στις Η.Π.Α.)!

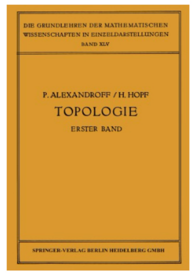
[13] Ο Leopold Vietoris (στη βιογραφία τού οποίου θα εστιάσω παρευθύς από τη σελίδα xx) ήταν ένας μετριοπαθής και εν πολλοίς μοναχικός ερευνητής χωρίς έφεση στην καλλιέργεια δημοσίων σχέσεων. Αντ' αυτών προτιμούσε να κάνει σκι (με επιλεγμένους σύντροφους-ορειβάτες) στις πλαγιές των αγαπημένων του Αυστριακών Άλπεων.

[14] Για σύντομα βιογραφικά στοιχεία που αφορούν στους P. Alexandroff (1896-1982) και H. Hopf (1894-1971) βλ. τις υποσημειώσεις των σελίδων 708 και 697, αντιστοίχως.

τοπολόγων και να λάβουν οι συναφείς μέθοδοί του τη σημερινή του μορφή.»

Ο J. Dieudonné προσθέτει στο [115] τα εξής: «Η Noether συνέτεινε στην πλήρη αναδιαμόρφωση τής Άλγεβρας, ήτοι σε ό,τι έγινε γνωστό λίγα χρόνια αργότερα μέσω τού βιβλίου τού van der Waerden υπό τον τίτλο *Moderne Algebra*. Αυτό παρείχε συστηματική προτεραιότητα σε αφηρημένες έννοιες έναντι τής εκτελέσεως υπολογισμών. Ιδιαιτέρως, η Γραμμική Άλγεβρα απελευθερώθηκε από τη μάστιγα των πινάκων και των οριζουσών, από την οποία καταταλαιπωρείτο για έναν αιώνα, αντικαθιστώντας αυτά τα βραδυκίνητα και γεωμετρικώς άσκοπα εργαλεία με τις εγγενείς ιδέες των μοδίων (modules) και των ομομορφισμών.»

Emmy Noether.



Το βιβλίο των Alexandroff και Hopf (1935).

Ο S. Mac Lane[15] [121] ασκεί κριτική σε ένα άλλο σημείο τού [115], αναφέροντας τα ακόλουθα: «Στο άρθρο [115] τού Dieudonné περιγράφεται το πώς η Emmy Noether έπεισε τον Heinz Hopf για το ότι μερικά από τα επιχειρήματά του από τη Συνδυαστική Τοπολογία θα μπορούσαν να είναι περισσότερο ευκρινή στην περίπτωση κατά την οποία η παραδοσιακή χρήση των αριθμών Betti και των συντελεστών στρέψεως αντικαθίστατο από ομάδες ομολογίας. Επειδή αυτές οι ομάδες είναι πεπερασμένως παραγόμενες, αποτελούν ευθέα αθροίσματα κυκλικών ομάδων. Σε αυτήν την αποσύνθεση το πλήθος των άπειρων κυκλικών ομάδων δίδει τους αντίστοιχους αριθμούς Betti, με τους συντελεστές στρέψεως καθοριζόμενους κατ' αναλογίαν[16]. […] Ο Heinz Hopf είχε επισκεφθεί μαζί με τον Paul Alexandroff το Πανεπιστήμιο τού Princeton κατά το ακαδημαϊκό έτος 1927-1928. Τότε (όπως και τώρα) τα θεωρήματα περί σταθερών σημείων μονοπωλούσαν το ενδιαφέρον. Το πασίγνωστο θεώρημα τού σταθερού σημείου τού Brouwer για ένα n-κύτταρο είχε γενικευθεί από τον Lefschetz σε έναν τύπο περί σταθερών σημείων για απεικονίσεις από ένα πολύπτυγμα (manifold) στον εαυτό του. Ο Hopf επεξέτεινε περαιτέρω αυτόν τον τύπο από n-πολυπλύγματα σε n-συμπλέγματα και δημοσίευσε μια ανακοίνωση (announcement) τού αποτελέσματός του, υποβληθείσα την 9η Ιανουαρίου 1928, στα Proceedings[17]. Μια λεπτομερέστερη απόδειξη, υποβληθείσα τη 10η Απριλίου 1928, δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Mathematische Zeitschrift[18] το 1929. Εκεί προσετέθη η επισύναψη: "Χάρη στην συμβουλή τής δεσποινίδος E. Noether είμαι στη

[15] Για ένα σύντομο βιογραφικό σημείωμα που αφορά στον Mac Lane (1909-2005) βλ. την υποσημείωση τής σελ. 344.

[16] Βλ. θεώρημα 2.6.32.

[17] H. Hopf: *A new proof of the Lefschetz formula on invariant points*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. **14** (1928), 149-153.

[18] H. Hopf: *Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten*, Mathematische Zeitschrift **29** (1929), 493-524.

θέση να απλοποιήσω κατά τρόπο ουσιαστικό την απόδειξη τού κύριου θεωρήματος I (§3) τού παρόντος άρθρου…" […] Ο Dieudonné συνεχίζει ισχυριζόμενος ότι ο W. Mayer χρησιμοποίησε ουσιωδώς το ανωτέρω στο δημοσιευθέν άρθρο του[19] τού 1929 και υπογραμμίζει το εξής: "Παρότι αυτός ευρίσκετο τότε στη Βιέννη, δεν έκανε σε κανένα σημείο τού άρθρου του μνεία τής Emmy Noether. Εντούτοις, εκείνην την εποχή το πνεύμα τής "Σύγχρονης Άλγεβρας" είχε εξαπλωθεί σε πολλά γερμανικά πανεπιστήμια." Αυτό συμφωνεί με μια διαδεδομένη άποψη ότι οι μαθηματικές ιδέες προήρχοντο από το Göttingen και στη συνέχεια εξαπλώνοντο σε μικρότερα μέρη. Όμως αυτή η άποψη δεν εκφράζει πάντοτε την πλήρη αλήθεια. Η Συνδυαστική Τοπολογία ήταν από μακρού ενεργή στη Βιέννη, όπως μαρτυρά ήδη ένα άρθρο τού Tietze[20] από το 1908. Το 1926 ο Leopold Vietoris, όντας Privatdozent στη Βιέννη, ενδιαφέρθηκε για το πρόβλημα τής περιγραφής τής ομολογίας όχι μόνον για πολυπτύγματα ή για συμπλέγματα, αλλά γενικότερα για συμπαγείς μετρικούς χώρους. Εντέλει κατόρθωσε να επινοήσει μια τέτοια θεωρία, γνωστή σήμερα ως *ομολογία Vietoris*. Για την υλοποίησή της δεν έπρεπε να αρκεσθεί σε αριθμούς Betti και συντελεστές στρέψεως, καθώς τέτοιοι (γενικότεροι) χώροι ενδέχεται να φέρουν *απειροπληθείς τρύπες*. Προς τούτο απαιτείτο η χρήση ομάδων ομολογίας, κάτι που συνέβη σε ένα άρθρο του[21] που παρουσιάσθηκε από τον ίδιον τον L.E.J. Brouwer στην Ολλανδική Ακαδημία Επιστημών στη συνάντηση τής 29ης Μαΐου 1926. Εκεί, *τουλάχιστον 19 μήνες προ* τού Hopf, γινόταν λόγος για *ομάδες ομολογίας* (με ακέραιους συντελεστές) και *ομάδες συνεκτικότητας* (με συντελεστές modulo 2) για τους χώρους αναφοράς. Λεπτομερέστερη παρουσίαση, υποβληθείσα την 28η Ιουνίου 1926, δημοσιεύθηκε στα Mathematische Annalen[22], όπου επεξηγείτο επακριβώς το πώς οι αριθμοί Betti κατά Poincaré και οι συντελεστές στρέψεως μπορούν να αποκτηθούν (μέσω μεθόδων χρησιμοποιηθεισών από τον Tietze για τη θεμελιώδη ομάδα) από τις εν λόγω ομάδες ομολογίας. Σχετική εκ μέρους του κοινοποίηση υπήρξε και κατά τη διάρκεια μιας συνεδριάσεως τής Γερμανικής Ενώσεως Μαθηματικών[23] την 24η Σεπτεμβρίου 1926, στην οποία προΐστατο ο Paul Alexandroff που ευρίσκετο σε στενή επαφή τόσο με την E. Noether όσον και με τον H. Hopf. Επειδή αμφότεροι οι Vietoris και Mayer ήταν στη Βιέννη κατά τη διετία 1925-1927, φαίνεται πιθανό ότι ο Mayer είχε λάβει γνώση για την ομολογία Vietoris πριν τη συγγραφή τού άρθρου του τού 1929, στο οποίο καθορίζεται η ομολογία αφηρημένων αλυσωτών συμπλόκων. Η Βιέννη αποτελούσε εκείνην την εποχή ένα πολύ ζωντανό πνευματικό κέντρο (H. Hahn, K. Menger, S. Freud, λογικοί θετικιστές, πολλοί οικονομολόγοι κ.ά.). Ως εκ τούτου, ενδέχεται να λάμβαναν χώρα αμφίδρομες μεταβιβάσεις ιδεών μεταξύ Βιέννης και Göttingen (ή και μέσω Βερολίνου, Μόσχας ή Παρισίων).»

[19] W. Mayer, *Über abstrakte Topologie*, Monatshefte für Mathematik und Physik **36** (1929), 1-42 und 219-258.

[20] H. Tietze: *Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten*, Monatshefte für Mathematik und Physik **19** (1908) 1-118.

[21] L. Vietoris: *Über den höheren Zusammenhang von kompakten Räumen und eine Klasse von Abbildungen, welche ihn ungeändert läßt*, Proc. Acad. Amsterdam **29** (1926), 1008-1013.

[22] L. Vietoris: *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Mathematische Annalen **27** (1927), 454-472.

[23] L. Vietoris: *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **36** (1927), 28-29.

Η διάλεξη [120], η οποία εδόθη από τον F. Hirzebruch[24] τον Δεκέμβριο τού 1996 στο πλαίσιο μιας συναντήσεως διοργανωθείσας (στο Πανεπιστήμιο Bar-Ilan τού Tel Aviv) προς τιμήν τής Emmy Noether υπό τον τίτλο «Η κληρονομιά τής Emmy Noether» (δημοσιευθείσα το 1999 στα πρακτικά τού φερώνυμου συνεδρίου), κινήθηκε στο ίδιο μοτίβο. Παρά το γεγονός ότι ο ομιλητής ήταν μαθητής των Heinz Hopf και Beno Eckmann στο E.T.H. τής Ζυρίχης κατά το ακαδημαϊκό έτος 1949-1950 και παρά το ότι υπήρξε ένθερμος υποστηρικτής τής ιδρύσεως (από το 1992) τού Ερευνητικού Ινστιτούτου Μαθηματικών «Emmy Noether» στο Ισραήλ και διατελέσας, μάλιστα, πρόεδρος τού πρώτου του συμβουλίου (1992-2003), φαίνεται ότι επιθυμούσε διακαώς να συμβάλει στην αποκατάσταση τής αληθείας και στην αποφυγή παρερμηνειών σε ό,τι αφορά στους «σκαπανείς τής αλγεβροποιήσεως», επισημαίνοντας, μεταξύ άλλων, τα εξής:

«Το 1964 εξεδόθησαν από τον εκδοτικό οίκο Springer τα Selecta τού Heinz Hopf με την ευκαιρία των εβδομηκοστών γενεθλίων του. Στο δεύτερο άρθρο αυτών[25], ο Hopf προσέθεσε μια νέα υποσημείωση:

"Το ανωτέρω συνοπτικό άρθρο αποτέλεσε αναμφιβόλως την *πρώτη* δημοσίευση, στην οποία εμφανίζεται η σημερινή, γνώριμη, από την Emmy Noether προερχόμενη ομαδοθεωρητική εποπτεία τής Τοπολογίας."

Πρόκειται για την πρώτη εργασία τού Hopf στην οποία αυτός χρησιμοποιεί πλήρως τις ιδέες τής Emmy Noether. Ωστόσο, η έννοια τής ομάδας ομολογίας *ενεφανίσθη ενωρίτερα* και *ανεξάρτητως* τής Emmy Noether στη βιβλιογραφία. Όταν ετοίμαζα αυτήν τη διάλεξη, ήθελα να έχω και κάποια άλλα πρώιμα τοπολογικά άρθρα πέραν των άρθρων τού Künneth. Επέλεξα προς τούτο το σημαντικό και συχνά χρησιμοποιούμενο θεώρημα των Mayer και Vietoris που συσχετίζει (μεταξύ τους) τις ομάδες ομολογίας των $A \cup B, A, B$ και $A \cap B$ (υπό κατάλληλες συνθήκες). [...] Κοίταξα τις αυθεντικές πηγές. Ξεκίνησα με το άρθρο[26] τού Walter Mayer, το οποίο υπεβλήθη για δημοσίευση την 16η Νοεμβρίου 1927. Σε αυτό ο Mayer εισάγει κατ' ουσίαν την αφηρημένη έννοια τού αλυσωτού συμπλόκου και τις αντίστοιχες ομάδες ομολογίας και αποκτά ως εφαρμογή τούς τύπους Mayer-Vietoris για τους αριθμούς[27] Betti. Ο Mayer αναφέρει ότι έμαθε Τοπολογία από τις παραδόσεις τού Leopold Vietoris στη Βιέννη κατά τη διετία 1926-1927. Έγραψα στον Vietoris την 9η Σεπτεμβρίου 1996. Την τελευταία φορά που τον είχα συναντήσει ήταν κατά τον εορτασμό των εκατοστών γενεθλίων του στο Innsbruck (4/6/1991). Γι' αυτό, όπως ήταν φυσικό, ήμουν κατά τι διστακτικός να γράψω σε κάποιον που ευρίσκετο στην ηλικία

[24] Hirzebruch, *Friedrich* (17/10/1927-27/5/2012). Γερμανός αλγεβροτοπολόγος και αλγεβρογεωμέτρης. Για τη βιογραφία του και για σχολιασμούς επί τού ερευνητικού του έργου βλ. τα ακόλουθα:

(i) M.F. Atiyah & D. Zagier (coordinating editors): *Friedrich Hirzebruch (1927-2012)*. Notices of the American Mathematical Society **61** (2014), 2-23.

(ii) D. Zagier: *Life and Work of Friedrich Hirzebruch*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Band **117** (2015), 93-132.

(iii) W. Scharlau: *Das Glück, Mathematiker zu sein. Friedrich Hirzebruch und seine Zeit*, Springer-Verlag, 2016.

[25] H. Hopf: *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1928), 127-136.

[26] W. Mayer: *Über abstrakte Topologie*, Monatshefte für Mathematik und Physik **36** (1929), 1–42.

[27] Πρβλ. L. Vietoris: *Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe*, Monatshefte für Mathematik und Physik **37** (1930), 159–162.

των 105 ετών. Απήντησε με ένα πεντασέλιδο γράμμα την 25η Σεπτεμβρίου 1996 και αποκρίθηκε λεπτομερώς σε ό,τι ερωτήματα τού είχα υποβάλει. Στις παραδόσεις του στη Βιέννη είχε εισαγάγει ομάδες ομολογίας χωρίς να έχει ασκηθεί η παραμικρή επιρροή εκ μέρους τής Emmy Noether. Το άρθρο του στα Proc. Acad. Amsterdam (1926) είναι το πρώτο άρθρο στο οποίο ορίζονται οι έννοιες των ομάδων συνεκτικότητας (ήτοι ομάδων ομολογίας με συντελεστές ειλημμένους από το $\mathbb{Z}_2$) και των ομάδων ομολογίας με συντελεστές από τους ακεραίους. Ο Vietoris διατείνεται ότι όταν ο Hopf έγραφε το άρθρο *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel* δεν γνώριζε την ύπαρξη τού δικού του στα Proc. Acad. Amsterdam ούτε και τη λεπτομερέστερη παρουσίασή του στα Mathematische Annalen. [...]»

Ο Hirzebruch παραθέτει επιπροσθέτως (από τη σελ. 39 τού [116]) ένα είδος μερικής ανασκευής των ισχυρισμών τού [115]. Εκεί, ο Dieudonné, αφού αναφέρεται στο άρθρο τού Hopf [τού 1928], γράφει επί λέξει τα εξής: «[...] *Ανεξαρτήτως αυτού, το 1926* ο Vietoris χρειάσθηκε ωσαύτως να απαλλαγεί από τους πίνακες για να ορίσει ομολογία για χώρους γενικότερους των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων, χρησιμοποιώντας τον ορισμό των ομολογικών ομάδων [ακόμη και] για ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα χωρίς να τον διασυνδέσει με γενικές έννοιες τής Γραμμικής Άλγεβρας.»

Ο Nicolas Basbois (που ανήκει στη νέα γενιά ιστορικών) προέβη στο πολυσέλιδο άρθρο του [113] σε μια ενδελεχή διερεύνηση των ιστορικών και μαθηματικών πηγών περί «τής ταυτότητας των πρωτοπόρων». Στην ενότητα 7 (που αφορά στο μέρος των συμπερασμάτων) αναφέρει τα ακόλουθα: «Το άρθρο τού Mayer [τού 1929] δείχνει το πόσο πολύ απέχει από τις ιδέες τής Noether, καθώς και από την ερμηνεία τους την παρατιθέμενη από τον Hopf. Το κύριο αντικείμενό του είναι να διατυπώσει την πρώτη αξιωματικοποίηση των ομάδων ομολογίας και να επιβεβαιώσει την σπουδαιότητα αυτής τής εννοίας. Εντούτοις, μέσω ορισμένων πτυχών του, αυτό το άρθρο οπισθοδρομεί συγκρινόμενο με τις προόδους τού Vietoris. Οι εκ μέρους τού Mayer οριζόμενες ομάδες ομολογίας είναι ολιγότερο γενικές εκείνων που εισήγαγε ο Vietoris, διότι ο πρώτος θεώρησε μόνον [μονοπλεκτικά] συμπλέγματα *πεπερασμένης* διαστάσεως. Ο λογισμός με πίνακες εγκαταλείπεται εξ ανάγκης από τον Vietoris, ενώ για τον Mayer είναι ουσιαστικός. Άλλωστε, η χρήση μεθόδων τής Θεωρίας Ομάδων *είναι σχεδόν εξ ολοκλήρου απούσα*.

Τα κίνητρα τού Vietoris διαφέρουν αισθητά από εκείνα των Hopf και Noether. Η Noether προχωρά σε επαναξιολόγηση τής δομήσεως τής ορολογίας και πιστεύει ότι η Θεωρία Ομάδων θα πρέπει να συμπεριληφθεί στα θεμέλια τής Θεωρίας Συμπλεγμάτων και να καταστεί εκείνο το διαθέσιμο μέσο που θα επιτρέψει κατά τους υπολογισμούς την αντικατάσταση των ολιγότερο πρακτικών πινάκων συμπτώσεως (incidence matrices)[28]. Είναι μάλλον φυσιολογικό το ότι η Noether πρότεινε μια τέτοιου είδους εννοιολογική προσέγγιση χωρίς να την υποστηρίζει με κάποιο απτό παράδειγμα εφαρμογής. Κατ' αρχάς, δεν ήταν τοπολόγος. Από την άλλη μεριά, η εκ μέρους της τονισθείσα σημασία των ομάδων στην Τοπολογία δεν αποτελεί παρά έκφραση μιας γενικότερης, καθοδηγητικής αρχής, βάσει τής οποίας οι θεωρητικές θεμελιώσεις θα όφειλαν να είναι όσο το δυνατόν πιο γενικές και αφηρημένες.

[28] Πρβλ. E. Noether: *Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie*, Mitteilungen und Nachrichten, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **34** (1926), S. 104.

(Τούτο σημαίνει, ιδιαιτέρως, ότι αναπτύσσει αφαιρετικώς μόνον εκείνες τις ιδιότητες που είναι βασικές και απαραίτητες για τον ορισμό των υπό μελέτη ευρισκομένων αντικειμένων.) Στην περίπτωση τής Τοπολογίας φαίνεται ότι τα υπό μελέτη ευρισκόμενα κύρια αντικείμενα θα έπρεπε να είναι οι ομάδες αντί των γραμμικών μορφών, των αριθμών Betti ή των αριθμών στρέψεως. Υπάρχει και άλλο ένα, παρόμοιο παράδειγμα: Κάποια χρόνια αργότερα αυτή δημιούργησε κατ' αναλογίαν μια συσχέτιση μεταξύ τής Θεωρίας Αναπαραστάσεων και των προσεταιριστικών αλγεβρών μέσω τής μελέτης μη μεταθετικών δακτυλίων[29]. Ο Hopf συγκεκριμενοποιεί τις ιδέες τής Noether στο άρθρο *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel*: Απομονώνει ορισμούς και ιδιότητες που είναι κατάλληλοι για τη Θεωρία Ομάδων και τον εξυπηρετούν, και ορίζει τα συμπλέγματα κατά τέτοιον τρόπο, ώστε οι εισαγόμενες έννοιες να είναι εύκολα εφαρμόσιμες. Έτσι, καταδεικνύει το πρακτικό ενδιαφέρον για την εισαγωγή τής Θεωρίας Ομάδων στην Τοπολογία, καθόσον μέχρι τότε η πρώτη θεωρείτο μόνον ως μια αισθητική ή φιλοσοφική επιλογή.

Μολαταύτα, η πρώτη απόδειξη τού ουσιαστικού νοήματος τής Θεωρίας Ομάδων στην Τοπολογία δεν οφείλεται στον Hopf αλλά στον Vietoris. Εξάλλου, τα επιτεύγματα των Hopf και Vietoris είναι σαφώς διαφορετικά και, αν μη τι άλλο, συμπληρωματικά. Στο άρθρο του *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel*, ο Hopf επιτυγχάνει μια εξαπλούστευση μιας αποδείξεως εφαρμόζοντας τη Θεωρία των Ελευθέρων Αβελιανών Ομάδων και αφήνει τον αναγνώστη να προαισθάνεται ότι, εν γένει, μια απλοποιημένη πρόσβαση στην Ομολογία καθίσταται εφικτή με [μόνον] μέσο τη Θεωρία Ομάδων. Παραμένει όμως στο πολύ κλασικό πλαίσιο των συνδυαστικών συμπλεγμάτων και δεν δείχνει ούτε ένα νέο συναφές αποτέλεσμα. Αντιθέτως, ο Vietoris εγκαταλείπει το εν λόγω κλασικό πλαίσιο και αποφασίζει να μελετήσει την ομολογία χώρων, οι οποίοι ήταν μέχρι τότε απρόσιτοι, κάτι που τον οδηγεί στην εισαγωγή τής εννοίας τής *ομάδας ομολογίας*. Αυτές οι ομάδες ομολογίας τού επιβάλλονται κατά τη μελέτη του ως κάτι το αναγκαίο και επιτρέπουν την επέκταση τής χρησιμοποιούμενης ερευνητικής περιοχής στην [αμιγή] Τοπολογία. Δηλαδή, ακόμη και εάν οι ομάδες προκύπτουν κατά φυσικό τρόπο στην εργασία τού Vietoris, δεν γίνονται σε τέτοιο βαθμό δεκτές όπως θα συνέβαινε από τον Hopf και την Noether. Στην πραγματικότητα, εν αντιθέσει προς ό,τι συμβαίνει με τον Hopf, ο Vietoris δεν εξοπλίζεται με μια θεωρητική βάση υπό τη μορφή σύντομων επαναλήψεων από τη Θεωρία Ομάδων. Επί παραδείγματι, όπως έχουμε ήδη προαναφέρει, σε αυτόν η χρήση τής εννοίας τής πηλικοομάδας φαίνεται να αντιμετωπίζεται με μια κάποια δυσπιστία.»

Εν συνεχεία, συμπληρώνει: «Φαίνεται πως για τους Alexandroff και Hopf η πραγματική εννοιολογική εξέλιξη ήταν η αναδιαμόρφωση τής Τοπολογίας με έρεισμά της τη *Θεωρία Ομάδων*, ενώ ο ορισμός τής εννοίας τής *ομάδας ομολογίας* και η εκ μέρους τού Vietoris συμπερίληψη αντικειμένων όπως οι μετρικοί χώροι, οι οποίοι υπερέβαιναν το τότε σύνηθες πλαίσιο αναφοράς, φάνταζαν, και εάν κρίνουμε εκ των υστέρων, *αδίκως*, ως κάτι το οποίο είχε υποδεέστερη σημασία.»

Ο Βρετανός τοπολόγος P. Hilton (1923-2010) πηγαίνει στο [119] ένα βήμα πιο κάτω: «Ο Vietoris ήταν [χρονολογικώς] ο πρώτος εκ των δύο μαθηματικών στους

[29] E. Noether: *Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie*, Mathematische Zeitschrift **30** (1929), 641-692.

οποίους αποδίδεται ο ορισμός *ομάδων ομολογίας* για χώρους όχι απαραιτήτως υποκείμενους σε πολύεδρα. Με δεδομένη μόνον την έννοια τού τοπολογικού χώρου εγγενώς καθορισμένη, ο Vietoris όρισε ομάδες ομολογίας (αναγνωρίζων, μάλιστα, *ανεξαρτήτως* τής Emmy Noether, τη σπουδαιότητα τής χρήσεως τής αφηρημένης εννοίας τής ομάδας). Στον εν λόγω ορισμό αυτών των ομάδων (για αυθαίρετους χώρους) υπεισέρχονται καλύμματα από ανοικτά σύνολα. Ο δεύτερος μαθηματικός, στον οποίο αναφερόμαστε, ήταν ο Čech[30] (1893-1960). Οι δύο ορισμοί έγιναν με διαφορετικούς τρόπους (παρότι αμφότεροι χρησιμοποιούν ανοικτά καλύμματα). Τα ανοικτά σύνολα στον ορισμό τού Čech συμπεριφέροντο ως κορυφές ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος (simplicial complex). Κατά τον Čech, ένας πεπερασμένος αριθμός ανοικτών συνόλων σχηματίζει ένα μονόπλοκο (simplex) εάν και μόνον εάν αυτά διαθέτουν μη κενή τομή. Άρα θεωρούνται όντως ως κορυφές ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος και, υπό τη σημερινή οπτική γωνία, μελετώνται το νεύρο ενός ανοικτού καλύμματος και κατόπιν τούτου οι αντίστοιχες ομάδες ομολογίας. Ο Vietoris έκανε κάτι διαφορετικό. Θεώρησε τα ανοικτά σύνολα και είπε ότι μια συλλογή σημείων τού χώρου αναφοράς συνιστά (υπό κάποια έννοια) ένα μονόπλοκο όταν όλα κείνται επί ενός των ανοικτών συνόλων τού καλύμματος. Μεταξύ των ανωτέρω διαφορετικών ορισμών υφίσταται, τρόπον τινά, ένας δυϊσμός, ο οποίος αποσαφηνίστηκε αργότερα[31] από τον Καναδό μαθηματικό Clifford Hugh Dowker (1912-1982).»

• *Η «επαναστατική τεσσαρακονταετία 1940-1980»*: Ήδη από τις απαρχές τού Β′ Παγκοσμίου Πολέμου η κινητικότητα στη μαθηματική κοινότητα για την περαιτέρω «μετάπλαση» τής *Αλγεβρικής Τοπολογίας* υπήρξε κάτι περισσότερο από αισθητή. Επί παραδείγματι, από τη μια πλευρά τού Ατλαντικού εισάγονται στην τριετία 1942-1945 οι *κατηγορίες* (categories) και οι *συναρτητές* (functors)[32] από τους Eilenberg και Mac Lane, ενώ από την άλλη πλευρά του εισάγονται τα *δράγματα* (sheaves), η *συνομολογία δραγμάτων* (sheaf cohomology) και οι *φασματικές ακολουθίες* (spectral sequences) από τον J. Leray[33] υπό το καθεστώς (ιδιότυπης) αιχμαλωσίας[34]. Έτσι, ξεκίνησαν επαναστατικές αλλαγές (για ό,τι θα ακολουθούσε)

[30] Για ένα σύντομο βιογραφικό σημείωμα που αφορά στον Čech βλ. την υποσημείωση τής σελίδας 751.

[31] Στη σελίδα 273 τού βιβλίου [47] τού Lefschetz προσδιορίζεται για οιονδήποτε *συμπαγή μετρικό χώρο* ένας φυσικός ισομορφισμός μεταξύ των ομάδων ομολογίας τού Čech και των ομάδων ομολογίας τού Vietoris. Αργότερα, κατάλληλες παραλλαγές τής ταυτίσεως αυτού τού είδους μπόρεσαν να επεκταθούν και για ακόμη πιο γενικούς χώρους. Ο ορισμός τής ομολογίας Vietoris επεκτάθηκε ταυτοχρόνως για *όλους τους συμπαγείς χώρους* από τον Spanier. (Βλ. E. Spanier: *Cohomology theory for general spaces*, Annals of Mathematics **49** (1948), 407-427.) Κατόπιν τούτου επεκτάθηκε και για *όλους τους τοπολογικούς χώρους*. (Βλ. W. Hurewicz, J. Dugundji & C.H. Dowker: *Connectivity groups in terms of limit groups*, Annals of Mathematics **49** (1948), 391-406.) Τέλος, κάνοντας χρήση ενός μεγαλοφυούς επιχειρήματος, ο C.H. Dowker ήταν σε θέση να αποδείξει το 1952 ότι (για *οιονδήποτε* τοπολογικό χώρο) υπάρχει ανάλογη ταύτιση, αφ' ενός μεν μεταξύ των *ομολογιών Vietoris και Čech*, αφ' ετέρου δε *μεταξύ των συνομολογιών Alexander-Spanier και Čech* βασισμένων επί αυθαιρέτων ανοικτών καλυμμάτων. (Βλ. C.H. Dowker: *Homology groups of relations*, Annals of Mathematics **56** (1952), 84-95, καθώς και τα σχόλια στο [116] , σελ. 105-107.)

[32] Βλ. R. Krömer: *Tool and Object. A History and Philosophy of Category Theory*, Science Networks, Historical Studies, Vol. **32**, Birkhäuser, 2007.

[33] Για τη βιογραφία του και για σχολιασμούς επί τού ερευνητικού του έργου βλ. τα ακόλουθα:

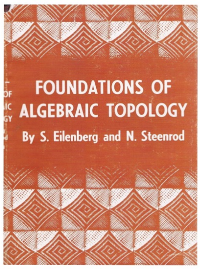
(i) J. Mawhin: *In memoriam J. Leray (1906-1998)*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Juliusz Schauder Center **12**, 1998, 199-206.

(ii) A. Borel, G.M. Henkin & P.D. Lax: *Jean Leray (1906-1998)*. Notices of the American Mathematical Society **47** (2000) no 3, 350-359.

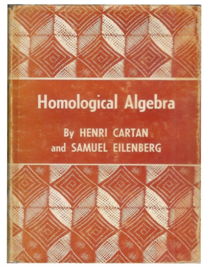
[34] Το 1940 συνελήφθη (ως αξιωματικός) και εστάλη σε στρατόπεδο για αιχμάλωτους αξιωματικούς στην Αυστρία, ό-

στο ερευνητικό πεδίο.

Κατά τη δεκαετία τού 1950, εξεδόθησαν δύο *πολύ σημαντικά* βιβλία τού Samuel Eilenberg (1913-1998) από τις εκδόσεις Princeton University Press, τα οποία έμελλε να καθορίσουν σε μεγάλο βαθμό τη μετέπειτα πορεία ολοκλήρου τού κλάδου τής *Αλγεβρικής Τοπολογίας* (τόσο σε επίπεδο περιεχομένου όσον και σε επίπεδο τρόπου διδακτικής προσεγγίσεως).



Το βιβλίο των Eilenberg & Steenrod (1952)



Το βιβλίο των Cartan & Eilenberg (1956)

Το πρώτο εξ αυτών, σε συνεργασία με τον N. Steenrod, το οποίο αποτελούσε τρόπον τινά τον *γεωμετρικό πυλώνα* τού οικοδομήματος, ενσωμάτωνε τις τότε νέες τεχνικές αντιμετωπίσεως των (συνήθων) θεωριών (συν)ομολογίας[35], συμπληρούμενο αργότερα, στο διάστημα 1960-1980, από πολλά επεξηγηματικά και λεπτομερέστερα συγγράμματα (όπως αυτά των Agoston [52], Artin & Braun [56], Croom [53], Godbillon [66], Hilton & Wylie [69], Hocking & Young [70], Hu [71], [72], [73], Spanier [86], Switzer [88], Teleman [89] κ.ά.).

Το δεύτερο, σε συνεργασία με τον H. Cartan, είχε ως στόχο την εξοικείωση των αναγνωστών με τον *αλγεβρικό πυλώνα*. (Προσθετικοί συναρτητές, διατήρηση ακριβείας, αλλαγή δακτυλίου, δορυφόροι, κλασική ομολογία, συναρτητές συμπλόκων, Ext, Tor, προσεταιριστικές άλγεβρες, ποικίλα εξώτερα και εσώτερα γινόμενα, (συν)ομολογία ομάδων, (συν)ομολογία αλγεβρών Lie, επεκτάσεις, φασματικές ακολουθίες, υπερσυνομολογία κ.λπ.) *Και εδώ*, εν είδει συμπληρώματος, απαιτήθηκε (στο διάστημα 1965-1975) η συγγραφή στοιχειωδέστερων βοηθημάτων (όπως εκείνων των Brunner [19], Hu [21], Northcott [23], Rotman [25], Hilton & Stammbach [32], Mac Lane [33] κ.ά.).

Ένα σημαντικό τμήμα τής ιστορίας τής Αλγεβρικής Τοπολογίας κατά την εικοσαετία 1940-1960 είναι συστηματικώς αποτυπωμένο στη μονογραφία [116] τού J. Dieudonné. Για τις μετέπειτα εξελίξεις κατά την εικοσαετία 1960-1980, οι ενδιαφερόμενοι καλούνται να ανατρέξουν στους προλόγους και στα λοιπά εισαγωγικά

που έμεινε έως το τέλος τού πολέμου (το 1945). Εκεί δημιούργησε μαζί με κάποιους συναδέλφους του ένα «αυτοσχέδιο» πανεπιστήμιο. Φοβούμενος ότι, αν η αρμοδιότητά του στη Ρευστοδυναμική και στη Μηχανική γινόταν γνωστή στους Γερμανούς, ίσως να έπρεπε να εργαστεί για αυτούς, έστρεψε το ενδιαφέρον στην Τοπολογία και παρουσιάσθηκε ως τοπολόγος. Πράγματι, κατά τη διάρκεια αυτών των πέντε χρόνων έκανε έρευνα μόνον στην Τοπολογία. (Αργότερα, οι *φασματικές ακολουθίες* έτυχαν περαιτέρω επεξεργασίας από τους R. Lyndon, J.-L. Koszul και H. Cartan.)

[35] Ανάλογο ρόλο για τη *Θεωρία Ομοτοπίας* έπαιξαν και τα βιβλία των P.J. Hilton: *An Introduction to Homotopy Theory*, Cambridge University Press, 1953; *Homotopy Theory and Duality*, Notes on Mathematics and its Applications, Gordon and Breach, 1965, και G.W. Whitehead: *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **61**, Springer-Verlag, 1978.

σχόλια τόσον των διδακτικών βιβλίων τής εποχής (κυρίως μεταπτυχιακού επιπέδου) όσον και των πρακτικών των σχετικών οργανωθέντων ερευνητικών συνεδρίων.

• *Η «χρυσή τεσσαρακονταετία 1980-2020»*: Σε αυτήν την τεσσαρακονταετία άλλαξαν πολλά (ολομερή) δεδομένα (παγκοσμίως). Ιδρύθηκε πληθώρα νέων Τμημάτων Μαθηματικών και Ερευνητικών Ινστιτούτων σε διάφορες χώρες, διοργανώθηκαν περισσότερα συνέδρια, προωθήθηκε σε μεγαλύτερο βαθμό η ανταλλαγή απόψεων/ιδεών/σχεδιασμών με ηλεκτρονικά μέσα, αναμορφώθηκε η τυπογραφία (μεταβαίνοντας στην εποχή των TeX και LaTex) με αποτέλεσμα τη γρηγορότερη (και οικονομικότερη) συγγραφή και παραγωγή επιστημονικών βιβλίων, και την καλύτερη οργάνωση συγγραφής συλλογικών πολυσέλιδων έργων, παρατηρήθηκε αλματώδης αύξηση των εφαρμογών ως αποτέλεσμα των συνεχών βελτιώσεων των υπολογιστικών μηχανών κ.ά. Στην Αλγεβρική Τοπολογία εξακολουθούν να γράφονται πολύ ενδιαφέροντα συγγράμματα (τόσο διδακτικά όσον και ερευνητικά) και να διοργανώνονται (άλλοτε δια ζώσης και άλλοτε διαδικτυακές) συναντήσεις για συζητήσεις επί ανοικτών προβλημάτων, ενώ υπήρξε σταδιακή κατάργηση των νησίδων μονοθεματικότητας. Ήδη το 1988 ο P. Hilton, ερωτώμενος στο [119] (στην question-and-answer session) για την πορεία της, επεσήμανε το πόσο η Θεωρία Συνομολογίας έχει υπεισέλθει σε άλλους κλάδους:

«Ερώτημα: Είναι πλέον συνήθης η χρήση τεχνικών ενός κλάδου των Μαθηματικών με στόχο τη λύση προβλημάτων σε έναν άλλο. Ήταν η Αλγεβρική Τοπολογία η πρώτη περίπτωση όπου αυτό συνέβη;

Απάντηση: Με συστηματικό τρόπο, ναι. Ενδεχομένως με εξαίρεση την Αναλυτική Θεωρία Αριθμών (που είχε προηγηθεί). Εκεί χρησιμοποιούνται μέθοδοι τής Κλασικής Αναλύσεως για τη λήψη αποτελεσμάτων στη Θεωρία Αριθμών. Υπάρχει όμως η αίσθηση ότι, εν προκειμένω, δεν απομακρύνεται κανείς πέραν τής Αναλύσεως. Αντιθέτως, στην Τοπολογία υφίσταται μια ταυτόχρονη ζεύξη δύο μεθόδων, δίχως να εγκαταλείπεται η μία για την άλλη. Πρόκειται για την καθιέρωση διασυνδέσεων μεταξύ των δύο και πλέον -κατά μία έννοια- με αυξανόμενη προσέγγιση, καθόσον κανείς οδηγείται από την Τοπολογία στην κατασκευή νέων αλγεβρικών δομών και τανάπαλιν, από αλγεβρικά αποτελέσματα σε τοπολογικά συμπεράσματα. Με τη χρήση χώρων επικαλύψεως (covering spaces) είναι δυνατόν να αποκτηθούν θεωρήματα από τη Συνδυαστική Θεωρία Ομάδων που είναι άκρως δύσκολα χωρίς τη διαμεσολάβηση τοπολογικών μεθόδων. Επομένως προκύπτουν αμφίδρομες εφαρμογές. Η Θεωρία Συνομολογίας έχει ήδη εξαπλωθεί σε πλείστους μαθηματικούς κλάδους, όπως στις Διαφορικές Εξισώσεις, στους Διαφορικούς Τελεστές κ.ά. Αλλά ακόμη και στην Αλγεβρική Γεωμετρία, η Θεωρία Συνομολογίας έχει μετατραπεί σε θεμελιακό τεχνικό μέσο.»

Για το τι κληροδότησε (για την Αλγεβρική Τοπολογία) ο 20ος αιώνας στις αρχές τού 21ου ας μου επιτραπεί να σταθώ σε δύο χρησιμότατες πηγές: Η πρώτη είναι ο συγκεντρωτικός τόμος *History of Topology*, North Holland, 1999 [I.M. James (editor)], στον οποίο κανείς εντοπίζει ένα πλουσιότατο απόθεμα πληροφοριών[36].

[36] Αντίστοιχο ρόλο για τη *Γενική Τοπολογία* παίζει το τρίτομο έργο: C.E. Aull & R. Lowen (editors): *Handbook of the History of General Topology*, Volume **1**, Springer-Science, 1997; Volume **2**, Kluwer Academic Publishers, 1998; Volume **3**, Springer-Science, 2001.

Η δεύτερη είναι το άρθρο ενός εκ των εκπροσώπων τής ρωσικής σχολής, τού Sergei Petrovich Novikov: *Topology in the 20th century: a view from the inside*, Russian Mathematical Surveys **59** (2004) no 5, 803-829. (Μετάφραση: Miles Reid.) Σε αυτό περιγράφεται σωρεία εσώτερων σύγχρονων προβλημάτων, δίδονται τα ονόματα προεξαρχόντων αλγεβροτοπολόγων ερευνητών και κατονομάζονται σχολές και ειδικές κατευθύνσεις και εφαρμογές (όπως, π.χ., στη Θεωρητική Φυσική).

Η τεσσαρακονταετία 1980-2020 θα μπορούσε τω όντι να χρισθεί *χρυσή* (για την Αλγεβρική Τοπολογία) παρότι σε αυτήν παρατηρείται η συμπόρευση δύο ετερόκλητων τάσεων, με τη μία επιδιώκουσα τη σύζευξη (φαινομενικώς απομακρυσμένων) υποκλάδων και με την άλλη επιτρέπουσα την πολυδιάσπαση υποπεριοχών με τομές και αλληλοεπικαλύψεις περιορισμένου εύρους. Ποτέ άλλοτε δεν έχουν παραχθεί τόσα πολλά *θεωρητικά αποτελέσματα* και ποτέ άλλοτε δεν έχουν σημειωθεί *ανάλογες πρόοδοι*, κάτι το οποίο μόνον ευφορία θα μπορούσε να προκαλέσει και προσδοκίες για το τι μας επιφυλάσσει το μέλλον.

▸ **Βιογραφικά στοιχεία.** Θα αποτελούσε σοβαρή παράλειψη εάν στην παρούσα εργασία δεν προετάσσοντο κάποια βιογραφικά στοιχεία[37] των *πρωταγωνιστών*, ήτοι των *δημιουργών* των δύο θεωρημάτων, τα οποία αυτή πραγματεύεται (έστω και στην πιο σύγχρονη μορφή τους).

• Mayer, *Walther* (11/3/1887-10/9/1948). Αυστριακός μαθηματικός εβραϊκής καταγωγής. Σπούδασε Μαθηματικά στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο τής Ζυρίχης (E.T.H., 1907-1909) και στο Πανεπιστήμιο τής Βιέννης (1909-1912), έχοντας εκ παραλλήλου παρακολουθήσει παραδόσεις και σεμινάρια τόσο στο Göttingen όσον και στο Παρίσι. Διδακτορική διατριβή (με τον τίτλο: *Anwendung der Fredholmschen Funktionalgleichung auf einige spezielle Randwertaufgaben des logarithmischen Potentials*) το 1912 στο Πανεπιστήμιο τής Βιέννης. Κατά τη συμμετοχή του στον Α′ Παγκόσμιο Πόλεμο (με τον στρατό τής Αυστρουγγαρίας) υπέστη σοβαρό τραυματισμό σε μάχη τού Ανατολικού Μετώπου (στη Ρωσία). Μετά τη λήξη του, στηριζόμενος σε κάποια κληρονομιά που είχε λάβει, καθώς και στα έσοδα από ένα καφεζαχαροπλαστείο που τού ανήκε, είχε τη δυνατότητα να αφοσιωθεί εκ νέου στη μαθηματική έρευνα και να εκπονήσει εργασία επί υφηγεσία στο Πανεπιστήμιο τής Βιέννης (1926). Τα έργα του που αφορούσαν στη Διαφορική Γεωμετρία άρχισαν, με την πάροδο τού χρόνου, να γίνονται ευρέως γνωστά, ούτως ώστε να παρακινήσουν ακόμη και τον Albert Einstein (1879-1955) να επιδιώξει να συνεργασθεί μαζί του. Οι γνώσεις και οι τεχνικές τού Mayer βοήθησαν εν πολλοίς τον Einstein στην αυστηρή «μαθηματικοποίηση» αρκετών φυσικών ιδεών και θεωριών του. Αξιομνημόνευτο αποτέλεσμα αυτής τής συνεργασίας (που ξεκίνησε στο Βερολίνο και συνεχίσθηκε στο Princeton, καθώς ο Mayer ακολούθησε το 1933 τον Einstein μετά την επικράτηση των εθνικοσοσιαλιστών στην αναγκαστική του εξορία) υπήρξε μια σειρά οκτώ κοινών άρθρων από το 1930 έως το 1934, κυρίως επί θεμάτων απτομένων τής ενοποιημένης θεωρί-

[37] Πηγές: Εκτός των άρθρων στη Wikipedia (Die freie Enzyklopädie, στα γερμανικά) και στο Mac Tutor History of Mathematics Archive χρησιμοποιήθηκαν το Österreichisches Biographisches Lexikon και το Wien Geschichte Wiki για τον W. Mayer, τα άρθρα των Helmberg-Sigmund [118] και Reitberger [123], [124] για τον L. Vietoris, και το άρθρο [117] τού O. Haupt για τον H. Künneth. Όλες οι φωτογραφίες τους (καθώς και των λοιπών μαθηματικών στην παρούσα εργασία) είναι ελευθέρως προσβάσιμες στο διαδίκτυο (και όσες εξ αυτών ήταν δυνατόν να ελεγχθούν, ήταν δημόσιας κυριότητας/κοινό κτήμα [public domain]).

ας πεδίων βαρύτητας και ηλεκτρισμού, και τής γενικής θεωρίας τής σχετικότητας, με γνωστότερο εξ αυτών το τελευταίο, το δημοσιευθέν στο Annals of Mathematics [Vol. **35**, (1934), no 1, σελ. 104-110]. Παρά το γεγονός ότι ο Einstein επιθυμούσε τη συνέχιση τής συνεργασίας τους (έχοντάς τον βοηθήσει να λάβει μια αξιοζήλευτη θέση στο I.A.S.), ο Mayer προτίμησε μετά το 1935 να στραφεί εκ νέου σε ερωτήματα σχετιζόμενα περισσότερο με τα Καθαρά Μαθηματικά. Έτσι, μέχρι τον θάνατό του (το 1948 στο Princeton) οι (λοιπές) εργασίες του αφορούσαν σε ομάδες Lie, τοπολογικές ομάδες, Λογισμό Μεταβολών και ποικίλα αλγεβροτοπολογικά προβλήματα.

W. Mayer.

W. Mayer και A. Einstein.

• Vietoris, *Leopold* (4/6/1891-9/4/2002). Ίσως το πρώτο πράγμα που πρέπει να σημειωθεί είναι ότι *δεν* υπάρχει κανένα λάθος στις ημερομηνίες γεννήσεως και θανάτου του. Γεννήθηκε στα τέλη τού 19ου αιώνα και απεβίωσε (δύο μήνες πριν τα 111α γενέθλιά του και δεκαέξι ημέρες μετά τον θάνατο τής δεύτερης συζύγου του) στις αρχές τού 21ου, έχοντας αποκτήσει 6 τέκνα, 17 εγγόνια και 30 δισέγγονα. Και το κυριότερο: Με αξιοθαύμαστη πνευματική διαύγεια μέχρι το τέλος. Γι' αυτό, εξάλλου, έχει δικαίως θεωρηθεί ως *ο Νέστωρ* ή ως *ο Μαθουσάλας των Μαθηματικών*[38]. Γονείς του ήταν ο Hugo Vietoris, μηχανικός σιδηροδρόμων, και η Anna Diller. Αργότερα στη ζωή του, ο Hugo Vietoris έγινε επικεφαλής σχεδιασμού στην πόλη τής Βιέννης και συμμετείχε στην κατασκευή γεφυρών κατά τη διετία 1913-15. Όταν ο Leopold ήταν έξι ετών (1897), ενεγράφη σε γνωστό Δημοτικό Σχολείο στη Βιέννη. Το αποπεράτωσε τον Ιούλιο τού 1902. Σε αυτό ήρθε για πρώτη φορά σε επαφή με τα Στοιχειώδη Μαθηματικά, μαθαίνοντας (κατά κύριο λόγο) τις βασικές λειτουργίες τής Αριθμητικής. Η δευτεροβάθμια εκπαίδευση τού Leopold Vietoris διήρκεσε από το 1902 έως το 1910, στο Stiftsgymnasium των Βενεδικτίνων στο Melk. Εκεί έλαβε καλή μαθηματική εκπαίδευση αλλά ήταν εξοικειωμένος με την ιδέα (σύμφωνη με τις επιθυμίες τού πατέρα του) ότι θα ακολουθήσει σταδιοδρομία μηχανικού/μηχανολόγου.

[38] Για μια συνέντευξη που παραχώρησε ο Leopold Vietoris την 9η Ιουνίου 1994 (όταν ήταν 103 ετών) στον καθηγητή τού Τμήματος Μαθηματικών τού Πανεπιστημίου τού Innsbruck, Gilbert Helmberg (1929-2019), διοργανωθείσα υπό την αιγίδα τής Αυστριακής Μαθηματικής Εταιρείας, βλ. εδώ: http://www.oemg.ac.at/Gespraeche/Portrait Vietoris.html.

Μάλιστα, όταν εισήχθη το 1910 στο Πολυτεχνείο τής Βιέννης, αυτό σκόπευε να πράξει. Εντούτοις, ύστερα από σύντομο χρονικό διάστημα, αποφάσισε ότι ήθελε να γίνει μαθηματικός και ήδη από τα Χριστούγεννα τού 1910 κατέβαλε προσπάθειες για να μελετήσει Μαθηματικά και, ιδιαιτέρως, την Περιγραφική (αργότερα γνωστή ως Παραστατική) Γεωμετρία. Έλαβε υποδειγματική διδασκαλία στα Μαθηματικά και στη Φυσική από τον Hermann Rothe (1882-1923), στην Περιγραφική Γεωμετρία από τον Emil Müller (1861-1927) και στην Προβολική Γεωμετρία από τον Theodor Schmid (1859-1937). Οι διαλέξεις δε επί τής Προβολικής Γεωμετρίας τον ενθουσίασαν σε τέτοιον βαθμό, ώστε να διατηρήσει για αυτόν τον κλάδο μια διά βίου αγάπη.

Από το ακαδημαϊκό έτος 1911-12, εκτός από τα μαθήματα στο Πολυτεχνείο, παρακολουθούσε μαθήματα *και* στο Πανεπιστήμιο τής Βιέννης. Στους διδάσκοντες τού Πανεπιστημίου τής Βιέννης περιλαμβάνοντο τότε οι Gustav von Escherich (1849-1935), Wilhelm Wirtinger (1865-1945), Philipp Furtwängler (1869-1940), Gustav Kohn (1859-1921), Wilhelm Gross (1886-1918) και ο φιλόσοφος Adolf Stöhr (1855-1921).

Κεντρικό κτήριο τού Πανεπιστημίου τής Βιέννης.

Ήταν το έτος 1912 όταν ο Vietoris παρακολούθησε παραδόσεις τού Wilhelm Gross που αφορούσαν στον (ακόμη διαμορφούμενο) κλάδο τής Τοπολογίας. Ο Gross (που υπήρξε φοιτητής τού Wirtinger στη Βιέννη) ήταν τότε μεταδιδακτορικός φοιτητής στο Göttingen (πριν επιστρέψει στη Βιέννη ως Privatdozent). Σε αυτές τις παραδόσεις ο Gross παρουσίασε την προσωπική του εργασία, η οποία ήταν επέκταση ιδεών τού Frigyes Riesz (1880-1956). Ο τελευταίος είχε ορίσει την έννοια τού *μαθηματικού συνεχούς* στηριζόμενος σε ιδιότητες των *σημείων συσσωρεύσεως*[39]. Ο Gross περιέγραψε ένα σύστημα αξιωμάτων που καθορίζουν τις έννοιες τής *γειτονιάς* και τού *σημείου συσσωρεύσεως*. (Τρία από αυτά τα αξιώματα οφείλοντο στον Frigyes Riesz και το τέταρτο στον ίδιον.) Περίπου την ίδια εποχή, ο Vietoris είχε παρακολουθήσει διαλέξεις τού Hermann Rothe (1882-1923) στο Πολυτεχνείο, στις οποίες εγένετο μια πρώτη χρήση τής εννοίας τού *πολυπτύγματος* (Mannigfaltigkeit). Αυτό ήταν για τον Vietoris η αφορμή για τη χρησιμοποίηση μιας αμιγώς *τοπολογικής θεωρήσεως* προκειμένου να προσδώσει στο *πολύπτυγμα* μια *γεωμετρική ερμηνεία*[40]. Εργαζόμενος επ' αυτών των ιδεών, συμβουλευόταν τους

[39] Βλ. L.-R. Rodríguez-Hernández: *Riesz' Beiträge zur Herausbildung des modernen mathematischen Konzepts abstrakter Räume. Synthesen intellektueller Kulturen in Ungarn, Frankreich und Deutschland*, Dissertation, Universität Mainz, 2006, §5.2.2, σελ. 154-161.

[40] Η οριστικοποίηση τής εννοίας τού *πολυπτύγματος* (manifold/Mannigfaltigkeit) ακολούθησε αργότερα, στις αρχές

Gustav von Escherich και Wilhelm Wirtinger, όταν αίφνης ξέσπασε ο Α′ Παγκόσμιος Πόλεμος.

Η Αυστρουγγαρία κήρυξε τον πόλεμο στη Σερβία την 28η Ιουλίου 1914 και ο Vietoris κατετάγη εθελοντής στην υπηρεσία τού στρατού τον Αύγουστο τού 1914. Τον επόμενο μήνα τραυματίσθηκε σοβαρά και για μεγάλο χρονικό διάστημα δεν ήταν σε θέση να συμμετάσχει στον πόλεμο, καθώς οι πληγές του έπρεπε να επουλωθούν. Μετά την ανάρρωσή του εστάλη στο ιταλικό μέτωπο.

Στο μέτωπο.

Η Ιταλία (η οποία είχε υπογράψει συμφωνία με την Αγγλία, τη Γαλλία και τη Ρωσία την 26η Απριλίου 1915 και είχε ταχθεί στο πλευρό τής Αντάντ) κήρυξε τον πόλεμο στην Αυστρουγγαρία την 23η Μαΐου 1915. Οι Αυστριακοί κατείχαν τα βουνά και η Ιταλία, παρότι είχε αριθμητική ανωτερότητα σε στρατό, αντιμετώπιζε δυσκολίες στο να επιτεθεί στους Αυστριακούς σε ορεινό έδαφος. Ο Vietoris, ο οποίος υπεραγαπούσε τα βουνά, είχε το καθήκον να δρα ως οδηγός βουνού τού στρατού[41]. Στα τέλη τού 1915 τραυματίσθηκε ξανά. Υπηρέτησε αυτήν την περίοδο ως δόκιμος εν εφεδρεία (στον 17ο Λόχο τού 49ου Συντάγματος Πεζικού). Τον Μάρτιο τού 1916 προήχθη σε ανθυπολοχαγό εν εφεδρεία. Παρά τις πολύ δύσκολες συνθήκες τού πολέμου, ο Vietoris εξακολουθούσε να σκέπτεται τα ερευνητικά του προβλήματα και ήταν το 1916 που, κατά την ανάρρωσή του από τον τραυματισμό του, ήταν σε θέση να δημοσιεύσει την πρώτη του εργασία[42].

Επέστρεψε στη Βιέννη για το Εαρινό Εξάμηνο τού 1918 και κατά τη διάρκεια αυτών των τριών μηνών κατόρθωσε να σημειώσει ακόμη μεγαλύτερη πρόοδο στην έρευνά του, και να μελετήσει, συν τοις άλλοις, το *Grundzüge der Mengenlehre* τού Felix Hausdorff (το δημοσιευθέν το 1914). Τον Οκτώβριο τού 1918 οι Αυστροούγγροι ηττήθηκαν αποφασιστικά στην πόλη Vittorio Veneto και την 4η Νοεμβρίου ο Vietoris αιχμαλωτίσθηκε από τους Ιταλούς. Αν και οι εχθροπραξίες τελείωσαν λίγο αργότερα, ο Vietoris κρατήθηκε σε αιχμαλωσία από τους Ιταλούς μέχρι την 7η Αυγούστου 1919.

Επειδή οι συνθήκες κρατήσεώς του στη φυλακή (αυτούς τους εννέα μήνες) ήταν αρκετά καλές, ήταν σε θέση να ολοκληρώσει τη συγγραφή τής διδακτορικής του διατριβής. Μετά την απελευθέρωσή του και την επιστροφή του στη Βιέννη, διορίσθηκε καθηγητής Μαθηματικών και Περιγραφικής Γεωμετρίας σε Γυμνάσιο τον Οκτώβριο τού 1919, ενώ υπέβαλε τη διατριβή του στο Πανεπιστήμιο τής Βιέννης τον Δεκέμβριο τού 1919. Ο τίτλος τού διδάκτορος τού απενεμήθη τον Ιούλιο τού

τής δεκαετίας τού 1930. Ο αμερικανός γεωμέτρης O. Veblen (1880-1960), καθηγητής στο Princeton, θαυμαστής των εκπροσώπων τής κλασικής σχολής τού Göttingen και στενός συνεργάτης τού H. Weyl (1885-1955), από κοινού με τον Άγγλο μαθητή του J.H.C. Whitehead (1904-1960) χρησιμοποίησαν κάποιες ιδέες τού D. Hilbert (1862-1943) περί τού ορθού χειρισμού των συστημάτων συντεταγμένων σε συνδυασμό με τις τοπολογικές θεμελιώσεις τού F. Hausdorff και κατόρθωσαν να παρουσιάσουν (αρχικώς στο ερευνητικό τους άρθρο υπό τον τίτλο *A set of axioms of differential geometry*, Proceedings of National Academy of Sciences, Vol. **17** (1931), 551-561, και κατόπιν -κατά τι διασκευασμένον- στο βιβλίο τους *The Foundations of Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press, 1932, τον *αξιωματικό ορισμό* τής εννοίας τού πολυπτύγματος. Ο ορισμός αυτός (ή -τουλάχιστον- κάποιος ισοδύναμός του) παραμένει εν χρήσει μέχρι των ημερών μας. (Για περισσότερες λεπτομέρειες για την ιστορική διαδρομή τής εννοίας τού *πολυπτύγματος* μέχρι την οριστικοποίησή της βλ. Scholz [125] και [126].)

[41] Σημειωτέον ότι τον Αύγουστο τού 1915 τού απενεμήθη *το τιμητικό μετάλλιο ανδρείας*.

[42] *Eine besondere Erzeugungsweise der Raumkurven vierter Ordnung zweiter Art*, Wien. Berichte **125** (1916), 259-283.

1920, και η διατριβή του, η οποία δημοσιεύθηκε στα Monatshefte[43] το 1921, θεωρείται από πολλούς ως μία εκ των καλυτέρων εργασιών του. Ενόσω δίδασκε στο Γυμνάσιο έλαβε μια καρτ ποστάλ από τον Gustav von Escherich, ο οποίος τού μεταβίβαζε τα συγχαρητήριά του για την εξαιρετικής ποιότητας διατριβή του και τού προσέφερε μια θέση βοηθού στο Πολυτεχνείο τού Graz. Ο Vietoris εδέχθη με χαρά την προσφορά και άρχισε να διδάσκει εκεί το 1920. Στο Graz ήταν βοηθός τού Roland Weitzenböck (1885-1955), ο οποίος δίδασκε Θεωρία Αριθμών και Θεωρία Αναλλοιώτων. Το 1922 ο Vietoris μεταπήδησε στο Πανεπιστήμιο τής Βιέννης. Το 1922 και το 1923 δημοσιεύθηκαν διάφορες εργασίες του, δύο από τις οποίες είναι οι: *Bereiche zweiter Ordnung*[44] και *Kontinua zweiter Ordnung*[45]. Η πρώτη εξ αυτών υπεβλήθη ως εργασία επί υφηγεσία.

Το 1925 ο Vietoris επεσκέφθη για τρία εξάμηνα το Τμήμα Μαθηματικών στο Άμστερνταμ έχοντας λάβει υποτροφία από το Ίδρυμα Rockefeller. Εκεί έλαβε μέρος σε ένα σεμινάριο με επικεφαλής τον L.E.J. Brouwer (1881-1966) και συμμετέχοντες, μεταξύ άλλων, τους Pavel Sergeevich Alexandroff (1896-1982), Karl Menger (1902-1985), David van Dantzig (1900-1959) και Witold Hurewicz (1904-1956). Επηρεασμένος από τις αλγεβρικές ιδέες που συζητήθηκαν σε αυτό το σεμινάριο, ο Vietoris ξεκίνησε να διεξαγάγει έρευνα στην Αλγεβρική Τοπολογία. Επιστρέφοντας στη Βιέννη άρχισε να δίδει διαλέξεις για ομάδες ομολογίας και συνομολογίας που είναι αλγεβρικές αναλλοίωτοι των τοπολογικών χώρων. Μεταξύ αυτών που τις παρακολούθησαν συγκαταλέγετο ο Walther Mayer.

Το 1927 ο Vietoris έφυγε από τη Βιέννη για να αναλάβει μια θέση αναπληρωτή καθηγητή στο Πανεπιστήμιο τού Innsbruck. Ήταν πολύ ευτυχής που θα άφηνε την ταραχώδη ζωή στη Βιέννη για να είναι κοντά στις υψηλές Άλπεις που αγαπούσε. Ωστόσο, έναν χρόνο αργότερα επέστρεψε εκ νέου στη Βιέννη για να γίνει τακτικός καθηγητής στο Πολυτεχνείο της. Το φθινόπωρο εκείνης τής χρονιάς παντρεύτηκε την Klara von Riccabona, την κόρη τού αντιπροέδρου τού περιφερειακού δικαστηρίου Rudolf von Riccabona. (Το ζεύγος απέκτησε τα επόμενα έτη έξι κόρες που ονομάστηκαν Maria, Anna, Amalia, Magdalena, Elisabeth και Christine.) Τελικώς, το 1930 επέστρεψε στο Πανεπιστήμιο τού Innsbruck ως τακτικός καθηγητής και παρέμεινε εκεί για το υπόλοιπο τής σταδιοδρομίας του.

Η σύζυγός του απεβίωσε σε ηλικία 32 ετών, την 29η Νοεμβρίου 1935, λίγο μετά τη γέννηση τής έκτης κόρης τους. Κατόπιν τούτου, ο Leopold Vietoris παντρεύτηκε την κουνιάδα του Maria, η οποία μεγάλωσε τα παιδιά σαν να ήταν δικά της. (Ο γάμος αυτός κράτησε 66 συναπτά έτη.)

Στο Innsbruck ο Vietoris αποσυρόταν συχνά στα βουνά. Ωστόσο, συνδύαζε την ευχαρίστηση με την επιστημονική εργασία: Αναμίχθηκε στα άδυτα τής τοπικής σχολής των glaciologists (όσων ασχολούνται με παγετώνες), με επικεφαλής τον διακεκριμένο Finsterwalder. Στον ρόλο ενός Gletscherknecht (επιτετραμμένου για την παρακολούθηση τής καταστάσεως στην οποία βρίσκονται συγκεκριμένοι παγετώνες), έφερε βαριά όργανα για γεωλογικές μετρήσεις και δημιούργησε πειράματα

[43] *Stetige Mengen*, Monatshefte für Mathematik und Physik **31** (1921), 173-204.

[44] Monatshefte für Mathematik und Physik **32** (1922), 258-280.

[45] Monatshefte für Mathematik und Physik **33** (1923), 48-62.

Κεντρικό κτήριο τού Πανεπιστημίου τού Innsbruck.

σε αμέτρητες επιστημονικές αλπικές διαδρομές. Εν ευθέτω χρόνω, ο Vietoris άρχισε να δημοσιεύει για τον «ρέοντα ογκόλιθο», έναν σχηματισμό που ομοιάζει με συσσώρευση θραυσμάτων βράχου επικολλημένων σε παγετώνα, τον οποίο γνώριζε όσο κανείς άλλος. Έγραψε, επίσης, για το πώς κανείς οφείλει να χρησιμοποιεί την πυξίδα ως αλπινιστής (και όχι ως ναύτης), για τη «Γεωμετρία στην υπηρεσία τού ορειβάτη» και για τη «Φυσική τού σκι» και ήταν κάτοχος τού διπλώματος ευρεσιτεχνίας υπ. αριθ. 100832 για μια μέθοδο χρήσεως αεροφωτογραφιών στη Χαρτογραφία.

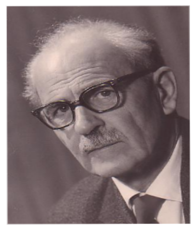
Τον Μάρτιο τού 1938 η Γερμανία προσάρτησε την Αυστρία. Έτσι, μετά την εισβολή στην Πολωνία τον Σεπτέμβριο τού 1939, η Αυστρία εισήλθε και πάλι σε πόλεμο. Ο Vietoris προσεφέρθη (εκ νέου εθελοντικώς) να υπηρετήσει (όπως είχε κάνει και στον Α′ Παγκόσμιο Πόλεμο) αλλά τώρα ήταν ήδη 48 ετών. Εστάλη στο μέτωπο τής Πολωνίας ως ανθυπολοχαγός τής Γερμανικής Wehrmacht και, ύστερα από νέο τραυματισμό του, μπόρεσε να πολεμήσει μόνον μέχρι τον Ιούνιο τού 1941 όταν έφτασε στην ηλικία των 50 ετών. Σε αυτό το στάδιο, τού *επετράπη*(!) να εγκαταλείψει τη στρατιωτική θητεία και να συνεχίσει να ασκεί τα καθήκοντά του στο Πανεπιστήμιο τού Innsbruck.

Ακόμη και πριν από τον Β′ Παγκόσμιο Πόλεμο, ο Vietoris είχε αρχίσει να ερευνά σε τομείς διαφορετικούς από την αρχική του εργασία στην Τοπολογία. Επί παραδείγματι, δημοσίευσε ένα άρθρο (σε τρία μέρη) υπό τον τίτλο *Über die Integration gewöhnlicher Differalgleichungen durch Iteration* (μέρος 1 το 1932, μέρος 2 το 1934, μέρος 3 το 1939). Κατά τη διάρκεια τού Β′ Παγκοσμίου Πολέμου δημοσίευσε το *Zur Theorie der Integraphen* (1942). Ο William Edward Milne, ο οποίος το ανασκόπησε, γράφει: «Ο συγγραφέας κάνει μια αρμονική ανάλυση τής διαφοράς μεταξύ τής πραγματικής καμπύλης και τής καμπύλης που ακολουθεί με το ιχνικό σημείο τού οργάνου και, αφού έχει υιοθετήσει κατάλληλες προϋποθέσεις, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι το προκύπτον σφάλμα είναι *πρακτικώς μηδενικό*.» (Στο θέμα αυτό επανήλθε και μετά τον πόλεμο.)

Ένα άλλο άρθρο του που δημοσιεύθηκε κατά τη διάρκεια τού πολέμου ήταν το *Zur Kennzeichnung des Sinus und verwandter Funktionen durch Funktionalgleichungen* (J. Reine Angew. Math. **186** ,1944), στο οποίο ανέπτυξε μια μέθοδο για να εισαγάγει το ημίτονο μέσω μιας συναρτησιακής εξισώσεως. Μετά τον πόλεμο εργάσθηκε σε διάφορους τομείς, συμπεριλαμβανομένης τής Στατιστικής, δημοσιεύοντας μια σειρά τεσσάρων εργασιών υπό τον τίτλο *Vergleich unkannter Mittelwerte auf Grund von Versuchsreihen* (μεταξύ των ετών 1979 και 1982). Συνέχισε δε τη συγγραφή άρθρων, με το τελευταίο του (το τρίτο σε μια σειρά άρθρων υπό τον τίτλο *Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen)* να δημοσιεύεται το 1994, όταν αυτός ήταν 103 ετών. (Από τα εν συνόλω 72 μαθηματικά του άρθρα, μόνον το ένα εγράφη με συσ-συγγραφέα, κάτι το οποίο επαληθεύει τον χαρακτηρισμό τού *μοναχικού μαχητή* που τού απεδίδετο, ενώ τα 31 εγράφησαν *μετά τη συμπλήρωση τού εξηκοστού* έτους τής ηλικίας του.)

Οι εκπονήσαντες διδακτορική διατριβή υπό την επίβλεψή του ήταν οι: K. Hellmich (1939), M. Petschacher (1946), H. Jochum (1952), J. Leicht (1952), W. Dürk (1953), H. Grömer (1954), E. Ambach (1957), G. Riege (1957), F. Pescolderung (1958) και E. Steuer (1960).

L. Vietoris (νέος)



L. Vietoris (70 ετών)

L. Vietoris (100 ετών)

L. Vietoris (110 ετών)

Για τα εξαιρετικά επιτεύγματά του ο Vietoris έλαβε πολυάριθμα βραβεία και διακρίσεις: Εξελέγη αντεπιστέλλον μέλος τής Αυστριακής Ακαδημίας Επιστημών το 1935 και πλήρες μέλος το 1960. Ανηγορεύθη επίτιμος διδάκτωρ τού Πολυτεχνείου τής Βιέννης (1984) και τού Πανεπιστημίου τού Innsbruck (1994), καθώς και επίτιμο μέλος τής Αυστριακής Μαθηματικής Εταιρείας (από το 1965) και τής Γερμανικής Μαθηματικής Εταιρείας (από το 1990).

Από τις τοπολογικές του εργασίες άξια ειδικής μνείας θεωρούνται (από σύγχρονους μελετητές) κυρίως τα ακόλουθα[46]:

(α) Το ότι εισήγαγε στη διδακτορική του διατριβή[47] (μεγάλο μέρος τής οποίας συνε-

[46]Πρβλ. [122], [123] και [124].

[47] L. Vietoris : *Stetige Mengen*, Monatshefte für Mathematik und Physik **31** (1921), 173-204.

τάχθη κατά τη διάρκεια τού πολέμου) τις έννοιες που σήμερα ονομάζονται[48] *δίκτυα* (nets) και *βάσεις φίλτρου* (filter bases) *προ* των Moore και Smith[49] και (φυσικά) *προ* τού Cartan[50]. (Το όνομά του ούτε καν αναφέρεται στο σχετικό εδάφιο των ιστορικών σημειώσεων τής Τοπολογίας των Bourbaki!)

(β) Τα αποτελέσματά του περί τής *συμπάγειας* ενός τοπολογικού χώρου. [Το 1937 ο Cartan[51] επεσήμανε ότι οδηγήθηκε από τους Chevalley και Weil να παρατηρήσει ότι ο ορισμός τής συμπάγειας ενός τοπολογικού χώρου μέσω τής ιδιότητας των Heine, Borel και Lebesgue ισοδυναμεί με το ότι *κάθε φίλτρο του διαθέτει τουλάχιστον ένα σημείο προσφύσεως* (adherence point). Ο Vietoris είχε παρατηρήσει το ίδιο (ήδη στη διατριβή του το 1921) αλλά υπό την πλεονάζουσα προϋπόθεση ότι ο υποκείμενος χώρος είναι κανονικός (regular)[52]. Επίσης, μεταξύ άλλων (βλ. Satz 37) απέδειξε (με τη σημερινή ορολογία) ότι *κάθε συμπαγής χώρος Hausdorff είναι φυσιολογικός*[53] (normal).]

(γ) Η συμμετοχή του (μαζί με τον Tietze) στη συγγραφή τού άρθρου επισκοπήσεως υπό τον τίτλο «Συσχετίσεις μεταξύ διαφορετικών κλάδων τής Τοπολογίας»[54].

(δ) Ο ορισμός *ομάδων ομολογίας* για συμπαγείς μετρικούς χώρους.

(ε) Το *θεώρημα Mayer-Vietoris*.

(στ) Το λεγόμενο *θεώρημα απεικονίσεως κατά Vietoris και Begle* (εδώ στη διατύπωση τού Stephen Smale , ο οποίος το γενίκευσε το 1957 για ομάδες ομοτοπίας[55]): *Έστω ότι X, Y είναι δυο συμπαγείς μετρικοί χώροι και $f : X \longrightarrow Y$ μια επιρριπτική, συνεχής απεικόνιση. Εάν υποτεθεί ότι για κάθε $r \in \{0, ..., n-1\}$ και για κάθε $y \in Y$ η $H_r(f^{-1}(\{y\}); \mathbb{Z}_2)$ είναι τετριμμένη, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός ομάδων*

$$f_* : H_r(X; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_r(Y; \mathbb{Z}_2)$$

είναι ισομορφισμός όταν $r \leqslant n-1$ και επιμορφισμός όταν $r = n$.

[Το 1950 ο Begle[56] απέδειξε ότι αυτό το θεώρημα ισχύει ακόμη και για αυθαίρετους συμπαγείς χώρους Hausdorff[57].]

[48] Στη δική του ορολογία χρησιμοποιούντο οι όροι *Kranz* (στεφάνη) και *orientierte Menge* (προσανατολισμένο σύνολο).

[49] E.H. Moore & H.L. Smith: *A general theory of limits*, American Journal of Mathematics **44** (1922), 102-121.

[50] H. Cartan: *Théorie des filtres*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris **205** (1937), 595-598.

[51] H. Cartan: *Filtres et ultrafiltres*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris **205** (1937), 777-779.

[52] Ονόμαζε τέτοιους χώρους *lückenlose Mengen* (σύνολα χωρίς διάκενα).

[53] Βλ., π.χ., [41], Theorem 32.3, σελ. 202.

[54] H. Tietze & L. Vietoris: *Beziehungen zwischen den verschiedenen Zweigen der Topologie*, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band III (Geometrie), 1. Teil, 2. Hälfte, No.13, Leipzig, Teubner, 1931.

[55] S. Smale: *A Vietoris mapping theorem for homotopy*, Proceedings of the American Math. Society **8** (1957), 604-610.

[56] E.G. Begle: *The Vietoris mapping theorem for bicompact spaces*, Annals of Mathematics (2) **51** (1950), 534-543.

[57] Για τις σχετιζόμενες χρονολογικές μετεξελίξεις του, ειδικότερα σε ό,τι αφορά στην εφαρμογή τού θεωρήματος για την απόκτηση περίτεχνων θεωρημάτων περί σταθερών σημείων, βλ. H. Reitberger: *Vietoris-Beglesches Abbildungstheorem, Vietoris-Lefschetz-Eilenberg-Montgomery-Beglescher Fixpunktsatz und Wirtschaftsnobelpreise*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **103** (2001), no. 3, 67-73.

• Künneth, *Hermann Lorenz* (6/7/1892-7/5/1975). Γερμανός μαθηματικός. *Και* αυτός ανήκε σε εκείνην τη γενιά, τα καλύτερα χρόνια τής οποίας εχάθησαν στη δίνη τού Α′ Παγκοσμίου Πολέμου. Ήδη από το 1914, ως οπλίτης τού γερμανικού στρατού, πολέμησε σε διάφορα πεδία μαχών, τραυματισθείς δύο φορές, επέστρεψε δε στην πατρίδα του ύστερα από μακρά φυλάκισή του από τους Άγγλους το 1919. Γι' αυτόν τον λόγο μπόρεσε να συνεχίσει τις (διακοπείσες) σπουδές του στα Μαθηματικά και στη Φυσική (στο Πανεπιστήμιο τού Erlangen) μόλις το 1920.

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg.

Στο Erlangen παρακολούθησε παραδόσεις των Max Noether (1844-1921), Ernst Fischer (1875-1954), Ehrhard Schmidt (1876-1959) κ.ά., και εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό την επίβλεψη τού Heinrich Tietze (1880-1964).

H. Künneth

Κατόπιν τούτου, και παρά το ότι δεν ήταν στο Erlangen λίγοι εκείνοι που τον παρότρυναν να επιδιώξει την ακαδημαϊκή σταδιοδρομία μέσω τής συγγραφής μιας εργασίας επί υφηγεσία, ο Künneth προτίμησε να εργασθεί ως καθηγητής σε Ουμανιστικό Γυμνάσιο τής περιοχής μέχρι τη συνταξιοδότησή του (το 1957), αφήνοντας, βάσει μαρτυριών, τις κάλλιστες των εντυπώσεων σε μαθητές και συναδέλφους. Μολαταύτα, εξακολούθησε να δημοσιεύει (και από αυτήν τη θέση) ερευνητικές μαθηματικές εργασίες μέχρι και το 1974: Αρχικώς (μέχρι το 1960) εργασίες που αφορούσαν σε διαφοροτοπολογικά προβλήματα περί των καμπυλών σε ευκλείδειους χώρους και μετέπειτα (κατά τα έτη 1960-1974), σε συνεργασία με τον Otto Haupt (1887-1988), περί τις 10 εργασίες και ένα βιβλίο επί των λεγομένων *γεωμετρικών διατάξεων*. Είναι, μάλιστα, αξιοσημείωτο, το ότι το 1942 *έγινε τελικώς* υφηγητής και μέλος τού μαθηματικού σεμιναρίου τού Πανεπιστημίου τού Erlangen, και το ότι μετά το 1957 (πλέον ως *εξηνταπεντάχρονος*) επέδειξε μιαν απροσδόκητη επιστημονική δραστηριότητα παρά τα προβλήματα που είχε με τη σε μεγάλο βαθμό απώλεια τής οράσεώς του. (Πρβλ. Haupt [117].) Τη 2α/3/1964 τού απενεμήθη το παράσημο Bundesverdienstkreuz (τού Τάγματος τής Αξίας τής Ομοσπονδιακής Δημοκρατίας τής Γερμανίας) για «την προσωπικότητά του, την ξεκάθαρη κρίση του, την ανθρώπινη καλοσύνη του και το πνευματώδες χιούμορ του».

▸ **Τα δύο κομβικής σημασίας προβλήματα.** (i) Δοθέντων δυο υποχώρων A και B ενός τοπολογικού χώρου X, *πώς συσχετίζονται* (και *υπό ποίες επιπρόσθετες προϋποθέσεις*) οι ομάδες (ή, γενικότερα, οι R-μόδιοι [R-modules], όπου R τυχών μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος) ομολογίας ή συνομολογίας (π.χ., ως προς μία κατάλληλη εκ των *συνήθων θεωριών* ομολογίας ή συνομολογίας) των X, A, B και $A \cap B$; (Το αντίστοιχο ερώτημα, τεθέν για τις *θεμελιώδεις ομάδες* στη θέση των ομάδων (συν)ομολογίας, στην περίπτωση όπου $X = A \cup B$ και αμφότεροι οι A και B είναι ανοικτοί και δρομοσυνεκτικοί, οδήγησε στο λεγόμενο *θεώρημα των Seifert και van Kampen*.)

(ii) Δοθέντων δυο τοπολογικών χώρων X και Y *πώς συσχετίζονται* (και *υπό ποίες επιπρόσθετες προϋποθέσεις*) οι ομάδες (ή, γενικότερα, οι R-μόδιοι [R-modules], όπου R τυχών μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος) ομολογίας ή συνομολογίας (π.χ., ως προς μία κατάλληλη εκ των *συνήθων θεωριών* ομολογίας ή συνομολογίας) τού *καρτεσιανού γινομένου* $X \times Y$ με εκείνες εκάστου των παραγόντων X και Y;

Αμφότερα τα (i) και (ii) είναι απολύτως *φυσικά* και *πρωταρχικής σπουδαιότητας* ερωτήματα, οι δε απαντήσεις αυτών (σε διάφορες εκδοχές, παραλλαγές και γενικεύσεις) κατέστησαν προϊόντος τού χρόνου *μέθοδοι* για την επίλυση πληθώρας περίπλοκων αλγεβροτοπολογικών προβλημάτων και *κύριοι συμπράττοντες παράγοντες* τόσων ενδιαφερουσών εφαρμογών ων ουκ εστίν αριθμός.

▸ **Το θεώρημα των Mayer και Vietoris.** Έστω X ένας πεπερασμένως τριγωνίσιμος τοπολογικός χώρος και έστω $h : |K| \xrightarrow{\approx} X$ ένας ομοιομορφισμός, όπου K ένα πεπερασμένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (finite simplicial complex). (Βλ. εδ. D.1.15, D.1.18 και D.1.21.) Ας υποτεθεί ότι K_1, K_2 είναι δυο υποσυμπλέγματα τού K (υπό την έννοια τού ορισμού D.1.26) με $K = K_1 \cup K_2$ και $A := h(|K_1|)$, $B := h(|K_2|)$. Τόσον η n-οστή ομάδα μονοπλεκτικής ομολογίας $H_n^{\text{simpl.}}(X;\mathbb{Z})$ τού $X = A \cup B$ (βλ. D.1.55), όσον και οι n-οστές ομάδες μονοπλεκτικής ομολογίας $H_n^{\text{simpl.}}(A;\mathbb{Z})$, $H_n^{\text{simpl.}}(B;\mathbb{Z})$ των A και B είναι πεπερασμένως παραγόμενες αβελιανές ομάδες για κάθε $n \geqslant 0$. (Βλ. [84], Theorem 7.14 (i), σελ. 145.) Ας υποτεθεί, επιπροσθέτως, ότι

$$H_n^{\text{simpl.}}(A \cap B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{f_n} H_n^{\text{simpl.}}(A;\mathbb{Z}) \oplus H_n^{\text{simpl.}}(B;\mathbb{Z})$$

είναι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων ο επαγόμενος από τις συνήθεις ενθέσεις $A \cap B \hookrightarrow A$ και $A \cap B \hookrightarrow B$, και ότι

$$H_n^{\text{simpl.}}(A;\mathbb{Z}) \oplus H_n^{\text{simpl.}}(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{g_n} H_n^{\text{simpl.}}(X;\mathbb{Z})$$

είναι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων ο επαγόμενος από τις συνήθεις ενθέσεις $A \hookrightarrow X$ και $B \hookrightarrow X$. Σε ένα άρθρο[58] του (τού 1929) ο Mayer απέδειξε ότι η εικόνα $\mathrm{Im}(g_n)$ τού g_n αποτελεί ευθύ προσθετέο τής $H_n^{\text{simpl.}}(X;\mathbb{Z})$ και μελέτησε τον αλληλοσυσχετισμό των αριθμών Betti των X, A, B και $A \cap B$. Από αυτόν προκύπτει, ιδιαιτέρως, ο ακόλουθος τύπος αλληλοσυσχετισμού των αριθμών Euler:

$$\boxed{\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)}$$

[58] W. Mayer: *Über abstrakte Topologie*, Monatshefte für Mathematik und Physik **36** (1929), 1–42.

(με τον $\chi(X)$ συμπεριφερόμενο όπως ο πληθικός αριθμός τής ενώσεως δύο πεπερασμένων συνόλων εν συγκρίσει προς τους πληθικούς αριθμούς ενός εκάστου και προς τον πληθικό αριθμό τής τομής αυτών). Στο εν λόγω άρθρο διαβάζουμε τα εξής: «Στην Τοπολογία εισήχθην από τον συνάδελφο Vietoris, τις παραδόσεις τού οποίου παρακολούθησα στο τοπικό πανεπιστήμιο το 1926/27. Στις πολλές συζητήσεις που είχαμε διεξαγάγει εν σχέσει προς αυτόν τον κλάδο, ο κύριος Vietoris μού έδωσε πληθώρα προτροπών, για τις οποίες θα επιθυμούσα να εκφράσω τις καλύτερες ευχαριστίες μου.» Το 1930 ο Vietoris έλυσε πλήρως το πρόβλημα[59] *σε επίπεδο ομάδων ομολογίας* αναφέροντας τα ακόλουθα: «Ο W. Mayer, στον οποίο είχα γνωστοποιήσει το πρόβλημα, ενδεχομένως μαζί με πληροφορίες σχετιζόμενες με έναν τρόπο αντιμετωπίσεώς του, το έλυσε, εις ό,τι αφορά [μόνον] τους αριθμούς Betti, με έναν εν μέρει διαφορετικό τρόπο σε αυτά τα Monatshefte [Μηνιαία Τεύχη]. Εν συνεχεία, σκοπεύω να επαναφέρω τον τότε ειρμό των σκέψεών μου επ’ αυτού και να τον εφαρμόσω προκειμένου να δώσω τη γενική λύση.» (Πρβλ. με τα σχόλια τού Dieudonné [116], σελ. 39.) Κατά τον Vietoris, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υφίσταται ισομορφισμός (αβελιανών) ομάδων:

$$\boxed{\mathrm{Im}(g_n) \cong (H_n^{\text{simpl.}}(A;\mathbb{Z}) \oplus H_n^{\text{simpl.}}(B;\mathbb{Z}))/\,\mathrm{Im}(f_n).}$$

Σε πιο σύγχρονη ορολογία (προερχόμενη από την Ομολογική Άλγεβρα) και στο πλαίσιο τής ιδιάζουσας θεωρίας ομολογίας $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$ επί τής (ευρύτερης δυνατής) κατηγορίας $\mathfrak{Top}^{[2]}$ (πρβλ. εδάφια D.1.61, D.2.27, D.2.37 και 7.2.12), το θεώρημα των Mayer και Vietoris μπορεί να γενικευθεί ως εξής: Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και A, B δυο υπόχωροί του, τέτοιοι ώστε η τοπολογική τριάδα (X, A, B) να είναι *εκτμητική* (υπό την έννοια τού ορισμού 7.2.1, ως προς την $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$), τότε υφίσταται μια ακριβής ακολουθία («ακριβής MV-ακολουθία») τής μορφής:

$$\cdots \xrightarrow{\mathfrak{D}_{n+1}} H_n^{\text{sing.}}(A \cap B; R) \longrightarrow H_n^{\text{sing.}}(A; R) \oplus H_n^{\text{sing.}}(B; R) \longrightarrow H_n^{\text{sing.}}(X; R) \xrightarrow[\mathfrak{D}_n]{} H_{n-1}^{\text{sing.}}(A \cap B; R) \longrightarrow \cdots$$

(Βλ. εδ. 7.2.4 (i).) Στην παρούσα εργασία, τόσον αυτό το θεώρημα όσον και πολυειδείς παραλλαγές και διευρυμένες τοπολογικές εκδοχές του θα προκύψουν από προσήκουσες *αλγεβρικές* εκδοχές του. Οι τελευταίες θα περιλαμβάνουν κατάλληλες αλληλοεμπλεκόμενες ακριβείς ακολουθίες, χωρίς -όμως- να επεκτείνονται *και* σε τμήματα τής *Θεωρίας Φασματικών Ακολουθιών* (καθώς *δεν* θα χρειασθούν[60]). Σημειωτέον ότι οι συνήθεις ακριβείς MV-ακολουθίες χρησιμοποιούνται ακόμη και

[59] L. Vietoris: *Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe*, Monatshefte für Mathematik und Physik **37** (1930), 159–162.

[60] Για μια σχετικώς εύληπτη περιγραφή τής αντίστοιχης φασματικής ακολουθίας βλ.
M. Stafa: *The Mayer-Vietoris spectral sequence*, expository notes, Department of Mathematics, Tulane University, New Orleans, LA, 2015.

σήμερα για την απάντηση *κλασικών* τοπολογικών ερωτημάτων[61].

• *Περαιτέρω γενικεύσεις*. (α) Εάν κανείς αρκεσθεί να εργάζεται με λεία πολυπτύγματα (smooth manifolds), τότε υφίσταται μια φυσική ισοδυναμία μεταξύ των (λείων) θεωριών συνομολογίας τού de Rham και (τού αντιστοίχου περιορισμού) τής $(H^{\bullet}_{\text{sing.}}, \partial^{\bullet}_{\text{sing.}})$, και, ιδιαιτέρως, ένας (απτώς κατατασκευάσιμος) ισομορφισμός πραγματικών διανυσματικών χώρων[62]

$$\boxed{H^n_{\text{dRh}}(X) \xrightarrow{\cong} H^n_{\text{sing.}}(X;\mathbb{R})}$$

για κάθε λείο πολύπτυγμα X και για οιονδήποτε $n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. Lück [76], Kapitel 15, σελ. 236-243, και Bredon [57], Chapter V, §9, σελ. 286-293.) Για αυτόν τον λόγο το θεώρημα Mayer-Vietoris εξακολουθεί να ισχύει *και* για τη συνομολογία de Rham. Φυσικά, υπάρχει η δυνατότητα αποδείξεώς του *και απευθείας*, κάνοντας χρήση μόνον διαφορικών μορφών. (Βλ. Bott & Tu [58], σελ. 22-24, Dieudonné [60], §24.3, σελ. 14-18, και §24.37, σελ. 227-232, και Lück [76], Satz 14.8, σελ. 232-233.)

(β) Επειδή για την ύπαρξη τής ακριβούς MV-ακολουθίας ως προς μια θεωρία ομολογίας ή συνομολογίας δεν απαιτείται η χρήση τού αξιώματος τής διαστάσεως (από τα αξιώματα των Eilenberg και Steenrod, βλ. εδ. C.1.6, C.1.8, C.7.1, 7.2.3 και 7.2.5), αυτή υφίσταται ακόμη και για ορισμένες «ασυνήθεις» θεωρίες (συν)ομολογίας. Επί παραδείγματι, στο πλαίσιο τής (κλασικής) *K-Θεωρίας*, για δυο *κλειστούς* υπόχωρους X_1 και X_2 ενός τοπικώς συμπαγούς τοπολογικού χώρου Hausdorff X με $X = X_1 \cup X_2$ αποδεικνύεται η ύπαρξη μιας ακριβούς ακολουθίας («τύπου MV»):

$$\begin{array}{ccccc}
K^0(X) & \longrightarrow & K^0(X_1)\oplus K^0(X_2) & \longrightarrow & K^0(X_1\cap X_2)\\
\big\downarrow & & & & \big\downarrow\\
K^{-1}(X_1\cap X_2) & \longleftarrow & K^{-1}(X_1)\oplus K^{-1}(X_2) & \longleftarrow & K^{-1}(X)
\end{array}$$

(Βλ. Park [81], Theorem 3.1.2, σελ. 113. Για το τι συμβαίνει με τις *αλγεβρικές* K-ομάδες (κατ' απόλυτη τιμή) υψηλότερου βαθμού πρβλ. Ranicki [83], σελ. 473-479.)

Στο πλαίσιο τής *(Συν)ομολογικής Θεωρίας Τομών* (Intersection Homology Theory[63]), τής αναπτυχθείσας στις αρχές τής δεκαετίας τού 1980 από τους M. Goresky,

Για μια ενδιαφέρουσα πρόσφατη εφαρμογή της βλ., π.χ.,

S. Naarmann: *A Mayer-Vietoris Spectral Sequence for C^*-Algebras and Coarse Geometry*, Dissertation, Universität Göttingen, 2018.

[61] Βλ., π.χ., R. Frigerio & A. Maffei: *A remark on the complex of a covering for singular cohomology*, preprint arxiv: 1912.07736, December 2019; to appear in Homology, Homotopy and Applications.

[62] Η *n-οστή ομάδα συνομολογίας $H^n_{\text{dRh}}(X)$ (τού) de Rham* ενός λείου πολυπτύγματος X είναι ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός πηλικόχωρος $\{$κλειστές διαφορικές n-μορφές επί τού $X\}$ / $\{$ακριβείς διαφορικές n-μορφές επί τού $X\}$.

[63] Για μια εισαγωγή σε αυτήν βλ. Kirwan & Woolf [75] . Η Ομολογική Θεωρία Τομών συμπίπτει με τη «συνήθη» (π.χ., με την ιδιάζουσα) θεωρία ομολογίας όταν περιοριζόμαστε στην κλάση των *τοπολογικών πολυπτυγμάτων* αλλά υπερέχει αυτής (ως προς μια σειρά ιδιοτήτων) όταν μελετούμε γενικότερης φύσεως χώρους, όπως *τοπολογικά ψευδοπολυπτύγματα* (pseudomanifolds), ήτοι παρασυμπαγείς τοπολογικούς χώρους Hausdorff που επιδέχονται κάποια ειδική (τοπολογική) διαστρωμάτωση (stratification). (Εν τοιαύτη περιπτώσει, «περισώζεται» *και* για αυτούς τους χώρους, και *υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις*, ο δυϊσμός κατά Poincaré, τα κατά Lefschetz θεωρήματα τού υπερεπιπέδου και των σταθερών σημείων, το «σκληρό» θεώρημα τού Lefschetz, η διάσπαση τού Hodge κ.ά.)

R. MacPherson κ.ά., αποδεικνύεται το εξής θεώρημα «τύπου Mayer-Vietoris»: Εάν υποτεθεί ότι X είναι ένα τοπολογικό ψευδοπολύπτυγμα και A, B δυο *ανοικτοί* υπόχωροί του με $X = A \cup B$, τότε υφίσταται ακριβής ακολουθία:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\mathfrak{D}_{n+1}"] & IH_n(A\cap B) \arrow[r] & IH_n(A)\oplus IH_n(B) \arrow[dll, out=0, in=180] \\
IH_n(X) \arrow[r, "\mathfrak{D}_n"'] & IH_{n-1}(A\cap B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(γ) Από την άλλη μεριά, *και* στη *Θεωρία Συνομολογίας Ομάδων*[64] εμφανίζεται ένα άμεσο ανάλογο τού θεωρήματος των Mayer και Vietoris. Πράγματι· εάν υποθέσουμε ότι G είναι μια ομάδα, $\mathbb{Z}G$ ο αντίστοιχος ομαδοδακτύλιος (τα στοιχεία τού οποίου είναι επίτυποι ακέραιοι γραμμικοί συνδυασμοί στοιχείων τής G) και M ένας G-μόδιος (G-module), θεωρούμενος και ως $\mathbb{Z}G$-μόδιος, τότε η *n-οστή ομάδα συνομολογίας* (και αντιστοίχως, *ομολογίας*) τής G *με συντελεστές από τον* M ορίζεται ως εξής:

$$H^n(G;M) := \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M), \qquad H_n(G;M) := \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}G}_n(\mathbb{Z}, M).$$

Εάν G_1, G_2, L είναι τρεις ομάδες και $\alpha_1 : L \hookrightarrow G_1$, $\alpha_2 : L \hookrightarrow G_2$ μονομορφισμοί ομάδων (ούτως ώστε η L να μπορεί να θεωρείται κοινή υποομάδα των G_1 και G_2), τότε μια ομάδα G ορίζεται ως *ελεύθερο γινόμενο των* G_1, G_2 *με αμαλγαματοποιημένη υποομάδα την* L όταν συμπληρώνει μεταθετικώς το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & G_2 \arrow[d, "\beta_2"] \\
G_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & G
\end{tikzcd}$$

(με τους β_1, β_2 ομομορφισμούς) και πληροί την εξής *καθολική συνθήκη*: Για κάθε ομάδα H και για οιουσδήποτε ομομορφισμούς $\gamma_1 : G_1 \longrightarrow H$, $\gamma_2 : G_2 \longrightarrow H$ με $\gamma_1 \circ \alpha_1 = \gamma_2 \circ \alpha_2$ υπάρχει μονοσημάντως ορισμένη απεικόνιση $\varphi : G \longrightarrow H$, τέτοια ώστε να ισχύει $\varphi \circ \beta_1 = \gamma_1$ και $\varphi \circ \beta_2 = \gamma_2$. Χρησιμοποιούμενος συμβολισμός[65]: $G = G_1 \star_L G_2$. Θεωρώντας τό μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}(G/L) \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "\iota''"'] & \mathbb{Z}(G/G_1) \arrow[d, "\varepsilon'"] \\
\mathbb{Z}(G/G_2) \arrow[r, "\varepsilon''"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

και προϋποθέτοντας την ακρίβεια τής

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}(G/L) \xrightarrow{\ \iota\ } \mathbb{Z}(G/G_1) \oplus \mathbb{Z}(G/G_2) \xrightarrow{\ \kappa\ } \mathbb{Z} \longrightarrow \{0\},$$

[64] Κατάλληλα για μια πρώτη επαφή με τη *Θεωρία Συνομολογίας Ομάδων* (η οποία *δεν* μελετάται στην παρούσα εργασία) είναι τα βιβλία των Weiss [112] και Brown [108], καθώς και οι σημειώσεις παραδόσεων των Lassueur [110] και Löh [111].

[65] Εν τοιαύτη περιπτώσει, η G είναι μονοσημάντως ορισμένη *μέχρις ισομορφισμού (ομάδων)*.

όπου $\iota(x) := (\iota'(x), -\iota''(x))$ και $\kappa(x', x'') := \varepsilon'(x') + \varepsilon''(x'')$, δημιουργείται κατόπιν εφαρμογής ενός λήμματος των B. Eckmann και A. Shapiro μια ακριβής MV-ακολουθία:

$$\cdots \to H^n(G;M) \longrightarrow H^n(G_1;M) \oplus H^n(G_2;M) \longrightarrow H^n(L;M) \longrightarrow H^{n+1}(G;M) \to \cdots$$

(Βλ. Hilton & Stammbach [32], σελ. 221, και Evens [109], σελ. 38.) Χρησιμοποιώντας διαφορετικές (γεωμετρικές-τοπολογικές) μεθόδους είναι δυνατόν να καταλήξει κανείς σε μια *ανάλογη* ακριβή MV-ακολουθία *σε επίπεδο ομολογίας ομάδων*. (Βλ. Brown [108], Corollary 7.7, σελ. 51.)

(δ) Άλλη μία (αμιγώς αλγεβρικής φύσεως) ακριβής MV-ακολουθία προκύπτει στη λεγομένη *Θεωρία Τοπικής Συνομολογίας*: Εάν J είναι ένα πεπερασμένως παραγόμενο ιδεώδες ενός μεταθετικού δακτυλίου R, M ένας R-μόδιος (R-module) και $H^n_J(M)$ η *n-οστή τοπική συνομολογία*[66] *τού M ως προς το J*, τότε για οιαδήποτε ιδεώδη J_1, J_2 αυτού τού είδους κατασκευάζεται (κατά τρόπο φυσικό και ύστερα από χρήση τού λήμματος Artin-Rees, βλ. [13], Prop. 10.9, σελ. 107, και [36], Ex. 4.6.2, σελ. 115) μια ακριβής ακολουθία:

$$\cdots \to H^n_{J_1+J_2}(M) \longrightarrow H^n_{J_1}(M) \oplus H^n_{J_2}(M) \longrightarrow H^n_{J_1\cap J_2}(M) \longrightarrow H^{n+1}_{J_1+J_2}(M) \to \cdots$$

(ε) Τέλος, στη *Θεωρία Δραγμάτων*[67] (Sheaf Theory) το *θεώρημα των Mayer και Vietoris για ομάδες συνομολογίας με συντελεστές ειλημμένους από ένα δράγμα $\mathscr{G}$ ορισμένο υπεράνω ενός τοπολογικού χώρου X* είναι το εξής: Εάν X_1, X_2 είναι δυο *κλειστοί* υπόχωροι τού X και $X = X_1 \cup X_2$, τότε υπάρχει ακριβής ακολουθία τής μορφής:

$$\cdots \longrightarrow H^n_\Phi(X;\mathscr{G}) \longrightarrow H^n_{\Phi\cap X_1}(X_1;\mathscr{G}) \oplus H^n_{\Phi\cap X_2}(X_2;\mathscr{G}) \longrightarrow H^n_{\Phi\cap(X_1\cap X_2)}(X_1\cap X_2;\mathscr{G}) \longrightarrow H^{n+1}_\Phi(X;\mathscr{G}) \to \cdots$$

όπου Φ τυχούσα οικογένεια στηρίξεων τού X. Στην περίπτωση κατά την οποία το δράγμα $\mathscr{G}$ είναι *στοιχειώδες* (υπό την έννοια τού ορσ. 3.6. τής σελ. 295 τού [101])

[66] Εξ ορισμού, $H^n_J(M) := \varinjlim_{k\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Ext}^n_R(R/J^k, M)$.

[67] Τα συγγράμματα [101], [102], [103], [104], [105], [106], [107] είναι κατάλληλα για την εισαγωγή των αναγνωστών στη *Θεωρία Δραγμάτων*. (Από πλευράς πληρότητας ξεχωρίζουν τα πρώτα τρία.)

προκύπτει μια ακριβής MV-ακολουθία *σε επίπεδο ομολογίας των Borel και Moore*:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n^{\Phi|_{X_1\cap X_2}}(X_1\cap X_2;\mathscr{G}) \arrow[r] & H_n^{\Phi|_{X_1}}(X_1;\mathscr{G}) \oplus H_n^{\Phi|_{X_2}}(X_2;\mathscr{G}) \arrow[dll] & \\
H_n^{\Phi}(X;\mathscr{G}) \arrow[r] & H_{n-1}^{\Phi|_{X_1\cap X_2}}(X_1\cap X_2;\mathscr{G}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

(Για τις αποδείξεις αυτών, καθώς και παραλλαγών αυτών ισχυουσών στην περίπτωση όπου τα X_1, X_2 είναι *ανοικτά*, βλ. Bredon [101], σελ. 94 και σελ. 412.)

Φυσικά, είναι εντυπωσιακό (αν και εν πολλοίς αναμενόμενο) το ότι εισάγοντας τον *όρο* «Mayer-Vietoris» στην τράπεζα βάσεων δεδομένων zbMath Open (και αντιστοίχως, στην τράπεζα βάσεων δεδομένων MathSciNet) εισπράττουμε εγγραφές (ήτοι εργασίες που χρησιμοποιούν ή γενικεύουν το φερώνυμο θεώρημα στα πλαίσια νέων ερευνών) *υπερβαίνουσες* τις 460 (και αντιστοίχως, τις 590).

▸ **Το θεώρημα τού Künneth.** Εάν X, Y είναι δυο πεπερασμένως τριγωνίσιμοι τοπολογικοί χώροι, πώς εκφράζονται (μέχρις ισομορφισμού) οι ομάδες μονοπλεκτικής ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$ συναρτήσει εκείνων ενός εκάστου των παραγόντων του; Στη διδακτορική του διατριβή[68] ο H. Künneth έκανε χρήση των τότε διαθέσιμων πενιχρών τεχνικών μέσων (από την Analysis Situs και την πρώιμη Συνδυαστική Τοπολογία) και απέδειξε (για συμπαγείς και συνεκτικούς X, Y) ότι οι αριθμοί Betti των X, Y και $X \times Y$ συσχετίζονται μέσω τού τύπου[69]:

$$\boxed{b_n(X \times Y) = \sum_{p+q=n} b_p(X) b_q(Y),}$$

ενώ λίγο αργότερα ήταν σε θέση να υπολογίσει και τις αντίστοιχες σχέσεις για τους συντελεστές στρέψεως[70]. (Πρβλ. Dieudonné [116], σελ. 55-56.) Ο Tietze αναφέρει, μεταξύ άλλων, στην έκθεση αξιολογήσεως τής εν λόγω διατριβής τα ακόλουθα: «Μέσω μιας σαφούς διαδικασίας οφειλόμενης στον Steinitz[71] (και, ανεξαρτήτως αυτού, στον Fréchet, περίπου την ίδια εποχή), επιτυγχάνεται η με κατάλληλο τρόπο περιγραφή τής δομήσεως τού καρτεσιανού γινομένου, ήτοι τού πώς κανείς από δοθέντα πολυπτύγματα (Mannigfaltigkeiten) δημιουργεί ένα νέο, η διάσταση τού οποίου ισούται με το άθροισμα των διαστάσεων των παραγόντων. Περί των νόμων που διέπουν τα τοπολογικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα τού καρτεσιανού γινομένου πολυπτυγμάτων εν σχέσει προς τα αντίστοιχα καθενός των παραγόντων του,

[68] H. Künneth: *Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit*, Mathematische Annalen **90** (1923), 65-85.

[69] Με τα μετέπειτα τεχνικά αλγεβρικά μέσα των δεκαετιών τού 1940 και τού 1950, και με τη χρήση τής *ιδιάζουσας ομολογίας* (στη θέση τής μονοπλεκτικής, πρβλ. D.2.37) είναι δυνατόν να αποδειχθεί η ανωτέρω ισότητα με μεγάλη ευκολία και σε πλήρη γενικότητα. (Βλ. πόρισμα 8.3.2.)

[70] H. Künneth: *Über die Torsionszahlen von Produktmannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen **91** (1924), 125-134.

[71] E. Steinitz: *Beiträge zur Analysis Situs*, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft **7** (1908), 29-49.

δεν υπήρχε μέχρι τώρα καμία πληροφορία. Η δυσκολία σε ό,τι αφορά σε μια πρώτη εκτίμηση τού προβλήματος ενέκειτο στο ότι, ακόμη και οι απλούστερες των περιπτώσεων, εξαιρουμένων εκείνων που παραείναι εύκολες για κάποιου είδους βαθύτερη διορατικότητα, ήτοι τα καρτεσιανά γινόμενα δύο διδιάστατων πολυπτυγμάτων, οδηγούν ήδη σε τετραδιάστατα κατασκευάσματα. Ο κύριος Künneth κατόρθωσε να ανακαλύψει τους ζητούμενους συσχετισμούς, ιδιαιτέρως δε εκείνους που αναφέρονται στους αριθμούς Betti, και μάλιστα σε πλήρη γενικότητα, για οσοδήποτε μεγάλες διαστάσεις και για οιοδήποτε πλήθος παραγόντων.» Τα αποτελέσματα τού Künneth παρουσιάσθηκαν σε επεξεργασμένη (και κατά τι γενικευμένη) μορφή στο βιβλίο τής Τοπολογίας [44] των Alexandroff & Hopf (βλ. σελ. 299-309) και έκτοτε κατέστησαν ευρέως γνωστά.

Σε πιο σύγχρονη ορολογία και στο πλαίσιο τής ιδιάζουσας θεωρίας ομολογίας $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$ επί ολόκληρης τής κατηγορίας $\mathfrak{Top}$[2] (βλ. εδάφια D.1.61, D.2.27 και D.2.37), *μία* από τις *τοπολογικές* εκδοχές τού θεωρήματος τού Künneth έπεται από την *αλγεβρική* του μορφή 6.2.8 και από το θεώρημα 8.2.5 των Eilenberg και Zilber, και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Εάν οι X, Y είναι τυχόντες τοπολογικοί χώροι και ο δακτύλιος αναφοράς R μια Π.Κ.Ι., τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υφίσταται διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow (H_\bullet^{\text{sing.}}(X;R) \otimes_R H_\bullet^{\text{sing.}}(Y;R))_n \hookrightarrow H_n^{\text{sing.}}(X \times Y; R) \twoheadrightarrow \operatorname{Tor}_1^R(H_\bullet^{\text{sing.}}(X;R), H_\bullet^{\text{sing.}}(Y;R))_{n-1} \longrightarrow \{0\},$$

οπότε συνάγεται η ύπαρξη ισομορφισμού R-μοδίων

$$\boxed{\begin{aligned} H_n^{\text{sing.}}(X \times Y; R) \cong & \left(\bigoplus_{p+q=n} (H_p^{\text{sing.}}(X;R) \otimes_R H_q^{\text{sing.}}(Y;R)) \right) \\ & \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^R(H_p^{\text{sing.}}(X;R), H_q^{\text{sing.}}(Y;R)) \right). \end{aligned}}$$

Στην παρούσα εργασία μελετάται λεπτομερώς (αλλά από τη *στοιχειωδέστερη δυνατή* σκοπιά) τόσον αυτό το θεώρημα και οι ποικίλες παραλλαγές του (που αφορούν σε διαφοροποιήσεις των προϋποθέσεών του) όσον και ορισμένες διευρυμένες εκδοχές του (π.χ., για τοπολογικά ζεύγη) και συγκεκριμένες χρήσιμες εφαρμογές του.

• *Περαιτέρω γενικεύσεις*. (α) Εάν περιορισθούμε στην κλάση των λείων πολυπτυγμάτων, τότε το θεώρημα τού Künneth ισχύει *και* για τη συνομολογία de Rham. (Βλ. Dieudonné [60], §24.5, σελ. 20-29, για μια *απευθείας* απόδειξη μέσω διαφορικών μορφών και διαφορικών αλγεβρών, και Bott & Tu [58], σελ. 47 και σελ. 170-171, για μια απόδειξη μέσω κατάλληλης φασματικής ακολουθίας.)

(β) Εκδοχές τού θεωρήματος τού Künneth συναντά κανείς και σε ορισμένες «ασυνήθεις» θεωρίες (συν)ομολογίας. Επί παραδείγματι, ο M. Atiyah (1929-2019) απέδειξε το[72] 1962 στο πλαίσιο τής (κλασικής) K-*Θεωρίας* ότι για τον δακτύλιο $K^\bullet(X)$

[72] M. Atiyah: *Vector bundles and the Künneth formula*, Topology **1** (1962), 245-248.

(τον εκτενώς μελετηθέντα στις αρχές τής δεκαετίας τού[73] 1960) ισχύει το εξής: Εάν τα X, Y είναι δυο πεπερασμένα CW-συμπλέγματα (CW-χώροι), τότε υφίσταται μια $\mathbb{Z}_2$-διαβαθμισμένη (φυσική) βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\boxed{\{0\} \to K^\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} K^\bullet(Y) \xrightarrow{\alpha} K^\bullet(X \times Y) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(K^\bullet(X), K^\bullet(Y)) \to \{0\},}$$

όπου η απεικόνιση α είναι η φυσικώς επαγομένη μέσω τού γινομένου εντός τού $K^\bullet$ και έχει βαθμό $\deg(\alpha) = 0$, ενώ $\deg(\beta) = 1$. (Αργότερα ο H. Minami[74] έδωσε μια γενίκευση για την *Ισομεταβλητή K-Θεωρία.*)

Στο πλαίσιο τής *Συνομολογικής Θεωρίας Τομών* οι Cohen, Goresky & Ji[75] κατέληξαν στον τύπο τού Künneth για δυο *συμπαγή* τοπολογικά ψευδοπολυπτύγματα X, Y μέσω τής διασπώμενης βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \bigoplus\limits_{i+j=n} (IH^i(X) \otimes_R IH^j(Y)) \arrow[r, hook] & IH^n(X \times Y) \arrow[dll, two heads] \\
\bigoplus\limits_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(IH^i(X), IH^j(Y)) \arrow[rr] & & \{0\},
\end{tikzcd}$$

όπου ο δακτύλιος αναφοράς R είναι μια Π.Κ.Ι., *μόνον υπό την προϋπόθεση* ότι χρησιμοποιείται ως *εκτροπή* (perversity) $\overline{p}$ (ήτοι $IH^i(\ldots) = I^{\overline{p}}H^i(\ldots)$) μια συνάρτηση $\overline{p} = (\ldots, p(i), \ldots)$ που πληροί κάποια εκ των συνθηκών

(I) $p(i)+ p(j) \leqslant p(i + j) \leqslant p(i)+ p(j) + 1$ για όλα τα i, j.

(II) $p(i)+ p(j) \leqslant p(i + j) \leqslant p(i)+ p(j) + 2$ για όλα τα i, j, με τουλάχιστον ένα εκ των X, Y στερούμενο $\overline{p}$-στρέψεως.

Αλλά και προσφάτως, στο πλαίσιο τής λεγομένης *Θεωρίας Συνομολογίας των Chen και Ruan*[76] (ή *Συνομολογίας Τροχιοπτυγμάτων* [Orbifold Cohomology][77]) $(H^\bullet_{\mathrm{CR}}, \partial^\bullet_{\mathrm{CR}})$, ο R. Hepworth[78] απέδειξε το εξής: Εάν X, Y είναι δυο τροχιοπτύγματα εφοδιασμένα με *σχεδόν μιγαδική δομή* και έχοντα το πολύ SL-*ιδιώματα* (SL-singularities), και εάν υποτεθεί ότι οι $H^\bullet_{\mathrm{CR}}(X)$ και $H^\bullet_{\mathrm{CR}}(Y)$ είναι συγκεντρωμένοι σε *ακεραίους* βαθμούς, τότε σχηματίζεται ένας διαβαθμισμένος δακτύλιος

[73]Βλ. M. Atiyah & F. Hirzebruch: *Vector bundles and homogeneous spaces*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, American Mathematical Society, Vol. **III**, 1960, pp. 7-38.

[74]H. Minami: *A Künneth formula for equivariant K-theory*, Osaka Journal of Mathematics **6** (1969), 143-146.

[75]D.C. Cohen, M. Goresky & L. Ji: *On the Künneth formula for intersection cohomology*, Transactions of the American Mathematical Society **333** (1992), no. 1, 63-69. Για περαιτέρω γενικεύσεις βλ.

G. Friedman: *Intersection homology Künneth theorems*, Mathematische Annalen **343** (2009), 371-395.

[76]W. Chen & Y. Ruan: *A new cohomology theory of orbifold*, Communications in Math. Physics **248** (2004), 1-31.

[77]Για μια εισαγωγή σε αυτήν βλ. A. Adem, J. Leida & Y. Ruan: *Orbifolds and stringy topology*, Cambridge Tracts in Mathematics **171**, Cambridge University Press, 2007.

[78]Βλ. R. Hepworth: *The age grading and the Chen-Ruan cup product*, Bulletin of the London Mathematical Society **42** (2010), 868-878.

$(H^\bullet_{\mathrm{CR}}(X) \otimes H^\bullet_{\mathrm{CR}}(Y))^\bullet$ και υφίσταται ισομορφισμός διαβαθμισμένων δακτυλίων:

$$\boxed{(H^\bullet_{\mathrm{CR}}(X) \otimes H^\bullet_{\mathrm{CR}}(Y))^\bullet \xrightarrow{\cong} H^\bullet_{\mathrm{CR}}(X \times Y).}$$

(γ) Στη *Θεωρία (Συν)ομολογίας Ομάδων* το *θεώρημα τού Künneth* έπεται κατόπιν εφαρμογής τής αλγεβρικής του εκδοχής 6.2.6: Για οιεσδήποτε ομάδες G, H και για οιαδήποτε Π.Κ.Ι. R (με τετριμμένη G- και H-δράση) υφίσταται διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \bigoplus\limits_{p+q=n} (H_p(G;R) \otimes_R H_q(H;R)) \arrow[r, hook] & H_n(G \times H;R) \arrow[dll, twoheadrightarrow, rounded corners] \\
& \bigoplus\limits_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(G;R), H_q(H;R)) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. Löh [111], Corollary 3.2.23, σελ. 136, και Weibel [36], Ex. 6.1.8, σελ. 166, για μια παραλλαγή σε επίπεδο συνομολογίας όταν $R = \mathbb{Z}$.)

(δ) Άλλος ένας (αμιγώς αλγεβρικής φύσεως) *τύπος Künneth* προκύπτει στη *Θεωρία Τοπικής Συνομολογίας*: Έστω $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ ένας διαβαθμισμένος μεταθετικός ναιτεριανός δακτύλιος (όπου $R_i \cdot R_j \subseteq R_{i+j}$ για οιουσδήποτε $i, j \in \mathbb{Z}$) και έστω $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ ένας διαβαθμισμένος R-μόδιος (graded R-module, με $R_i \cdot M_j \subseteq M_{i+j}$ για οιουσδήποτε $i, j \in \mathbb{Z}$). Ένα στοιχείο $m \in M$ καλείται *ομογενές* όταν $m \in M_i$ για κάποιον $i \in \mathbb{Z}$. Εάν ένα τέτοιο στοιχείο m είναι $\neq 0_M$, τότε ο δείκτης i είναι μονοσημάντως ορισμένος, καλείται *βαθμός τού* m και σημειώνεται ως $\deg(m)$. Ο M είναι ναιτεριανός R-μόδιος εάν και μόνον εάν είναι πεπερασμένως παραγόμενος από ομογενή στοιχεία. Για κάθε $l \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ο $M(l) := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M(l)_i$, όπου οι $M(l)_i := M_{i+l}$ δημιουργούνται ύστερα από μετακίνηση των δεικτών κατά l. Στην περίπτωση όπου ο R είναι μια k-*άλγεβρα* (όπου k σώμα, ήτοι $R_i = \{0\}$ για $i < 0$ και $R_0 = k$), ο R διαθέτει ως μοναδικό του μεγιστικό ιδεώδες το $\mathfrak{m}_R := \bigoplus_{i\geqslant 1} R_i$. Εάν υποτεθεί ότι $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ και $N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N_i$ είναι δυο διαβαθμισμένοι R-μόδιοι, όπου R μια k-άλγεβρα, και $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ ο k-διανυσματικός χώρος όλων των R-ομομορφισμών με $f(M_i) \subseteq N_i$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$, τότε ορίζεται αφ' ενός μεν ο διαβαθμισμένος R-μόδιος

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(M,N)_i, \;\; \mathrm{Hom}_R(M,N)_i := \mathrm{Hom}_R(M, N(i)) \cong \mathrm{Hom}_R(M(-i), N),$$

αφ' ετέρου δε ο διαβαθμισμένος R-μόδιος

$$\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^n_R(M,N)_i, \;\; \mathrm{Ext}^n_R(M,N)_i := \mathrm{Ext}^n_R(M, N(i)) \cong \mathrm{Ext}^n_R(M(-i), N),$$

όπου το $\mathrm{Ext}^n_R(-,-)$ (και αντιστοίχως, το $\underline{\mathrm{Ext}}^n_R(-,-)$) συμβολίζει τον n-*οστό δεξιό παράγωγο συναρτητή*[79] τού (εξ αριστερών ακριβούς, ανταλλοιώτου ως προς την

[79] Ορίζεται κατόπιν ευνόητης τροποποιήσεως τής μεθόδου εισαγωγής τέτοιων συναρτητών στη *μη διαβαθμισμένη* περίπτωση. (Πρβλ. εδ. A.3.30, A.3.31, A.3.32, A.3.33 και A.3.34.)

πρώτη και συναλλοιώτου ως προς τη δεύτερη μεταβλητή) συναρτητή[80]

$$\mathrm{Hom}_R(-,-) : \mathfrak{Mod}_R^{\mathrm{grad.}_0} \times \mathfrak{Mod}_R^{\mathrm{grad.}_0} \rightsquigarrow \mathfrak{Vect}_k$$

(και αντιστοίχως, τού $\underline{\mathrm{Hom}}_R(-,-) : \mathfrak{Mod}_R^{\mathrm{grad.}_0} \times \mathfrak{Mod}_R^{\mathrm{grad.}_0} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R^{\mathrm{grad.}}$). Ως *$n$-οστός διαβαθμισμένος R-μόδιος τοπικής συνομολογίας* ενός διαβαθμισμένου R-μοδίου M, όπου R μια k-άλγεβρα, ορίζεται (για κάθε $n \in \mathbb{Z}$) το ευθύ όριο

$$\boxed{\underline{H}^n_{\mathfrak{m}_R}(M) := \varinjlim_{\nu \in \mathbb{N}_0} \underline{\mathrm{Ext}}^n_R(R/\mathfrak{m}_R^{\nu}, M).}$$

Εάν $R = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} R_i$ και $S = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} S_i$ είναι δυο k-άλγεβρες, τότε ορίζεται μονοσημάντως (ήτοι μέχρις ισομορφισμού) *το γινόμενο Segre* $R\sharp S$ των R και S ως η k-άλγεβρα $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(R_i \otimes_k S_i)$. Και εάν $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ είναι ένας διαβαθμισμένος R-μόδιος και $N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} N_i$ είναι ένας διαβαθμισμένος S-μόδιος, τότε ορίζεται μονοσημάντως (ήτοι μέχρις ισομορφισμού) *το γινόμενο Segre* $M\sharp N$ των M και N ως ο διαβαθμισμένος $(R\sharp S)$-μόδιος $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}(M_i \otimes_k N_i)$. Στην περίπτωση κατά την οποία αμφότεροι οι $\underline{H}^n_{\mathfrak{m}_R}(M)$ και $\underline{H}^n_{\mathfrak{m}_S}(N)$ είναι τετριμμένοι για $n = 0, 1$, για κάθε $n \geqslant 0$ λαμβάνουμε[81]:

$$\boxed{\underline{H}^n_{\mathfrak{m}_{R\sharp S}}(M\sharp N) \cong \left(M\sharp \underline{H}^n_{\mathfrak{m}_S}(N)\right) \oplus \left(\underline{H}^n_{\mathfrak{m}_R}(M)\sharp N\right) \oplus \left(\bigoplus_{i+j=n+1} \left(\underline{H}^i_{\mathfrak{m}_R}(M)\sharp \underline{H}^j_{\mathfrak{m}_S}(N)\right)\right).}$$

(ε) Τέλος, στη *Θεωρία Δραγμάτων* το *θεώρημα τού Künneth* σε επίπεδο συνομολογίας (με συμπαγή στηρίγματα) είναι το εξής: Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, $\mathscr{F}$ ένα δράγμα (R-μοδίων) επί τού X και $\mathscr{G}$ ένα (ομοειδές) δράγμα επί τού Y, τότε επί τού καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$ ορίζονται τα δράγματα

$$\mathscr{F}\widehat{\otimes}\mathscr{G} := (\mathrm{pr}_X^* \mathscr{F})\otimes(\mathrm{pr}_Y^* \mathscr{G}), \quad \mathscr{F}\,\widehat{*}\,\mathscr{G} := \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{pr}_X^* \mathscr{F}, \mathrm{pr}_Y^* \mathscr{G}),$$

όπου $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ είναι οι προβολές. Υποθέτοντας ότι ο R είναι Π.Κ.Ι. και ότι αμφότεροι οι X, Y είναι τοπικώς συμπαγείς χώροι Hausdorff με $\mathscr{F}\,\widehat{*}\,\mathscr{G} = 0$, υφίσταται μια (φυσική) βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & (H_c^\bullet(X;\mathscr{F}) \otimes H_c^\bullet(Y;\mathscr{G}))^n \arrow[r, hook] & H_c^n(X \times Y; \mathscr{F}\widehat{\otimes}\mathscr{G}) \arrow[dll, two heads] \\
\mathrm{Tor}_1^R(H_c^\bullet(X;\mathscr{F}), H_c^\bullet(Y;\mathscr{G}))^{n+1} \arrow[rr] & & \{0\}
\end{tikzcd}$$

[80] Ως $\mathfrak{Mod}_R^{\mathrm{grad.}}$ συμβολίζεται η κατηγορία των διαβαθμισμένων R-μοδίων, ως $\mathfrak{Mod}_R^{\mathrm{grad.}_0}$ η κατηγορία των διαβαθμισμένων R-μοδίων με μορφισμούς της τους R-ομομορφισμούς $f : M \to N$ με την ιδιότητα $f(M_i) \subseteq N_i$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ και ως $\mathfrak{Vect}_k$ η κατηγορία των k-διανυσματικών χώρων.

[81] Βλ. Theorem 4.1.5 (σελ. 199-200) στο άρθρο των S. Goto & K. Watanabe: *On graded rings I*, Journal of the Mathematical Society of Japan **30** (1978), no. 2, 179-213, καθώς και την §0.2.5, σελ. 40-45, τού συγγράμματος των J. Stückrad & W. Vogel: *Buchsbaum Rings and Applications. An Interaction Between Algebra, Geometry and Topology*, Springer-Verlag, 1986.

που είναι (μη φυσικώς) διασπώμενη. (Για την απόδειξη αυτού, καθώς και χρήσιμων παραλλαγών αυτού, βλ. Bredon [101], Theorem 5.2, σελ. 108-109, Theorem 7.6, σελ. 231-232, formula (58), σελ. 339, Theorem 14.1, σελ. 365, Theorem 14.4, σελ. 366-367.) Σημειωτέον ότι σε ειδικές περιπτώσεις, όπως όταν τα X, Y είναι *αλγεβρικές ποικιλότητες* ορισμένες υπεράνω ενός αλγεβρικώς κλειστού σώματος k και τα $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ *συνενωτικά αλγεβρικά δράγματα* (coherent algebraic sheaves), προκύπτει ένας *ισομορφισμός*[82] από τον $(H^{\bullet}(X;\mathscr{F})\otimes_k H^{\bullet}(Y;\mathscr{G}))^n$ επί τού $H^n(X\times Y;\mathscr{F}\widehat{\otimes}\mathscr{G})$, όπου το τελευταίο τανυστικό γινόμενο είναι ειλημμένο υπεράνω τού δράγματος των τοπικών δακτυλίων επί τού $X \times Y$. Αντίστοιχο συμπέρασμα εξάγεται και όταν τα X, Y είναι *αναλυτικοί-μιγαδικοί χώροι* (όπως ορίσθηκαν από τους H. Grauert και R. Remmert[83]). Εν τοιαύτη περιπτώσει, εάν τα $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ είναι *συνενωτικά αναλυτικά δράγματα* (coherent analytic sheaves) και οι $H^i(X;\mathscr{F})$, $H^j(Y;\mathscr{G})$, εφοδιασμένοι με την τοπολογία Fréchet, χώροι Hausdorff, τότε υφίσταται *κανονιστικός ισομορφισμός τοπολογικών* $\mathbb{C}$*-διανυσματικών χώρων*[84] από τον $(H^{\bullet}(X;\mathscr{F})\otimes_{\mathbb{C}} H^{\bullet}(Y;\mathscr{G}))^n$ επί τού $H^n(X\times Y;\mathscr{F}\widehat{\otimes}\mathscr{G})$. Παρόμοιο συμπέρασμα εξάγεται *και* για τις *ομάδες υπερσυνομολογίας* μιγαδικών ποικιλοτήτων με συντελεστές ειλημμένους από σύμπλοκα *κατασκευάσιμων δραγμάτων*. Βλ. Dimca [102], Theorem 4.3.14, σελ. 117-118.

Είναι εντυπωσιακό (αν και εν πολλοίς αναμενόμενο) το ότι εισάγοντας τον *όρο* «Künneth» στην τράπεζα βάσεων δεδομένων zbMath Open (και αντιστοίχως, στην τράπεζα βάσεων δεδομένων MathSciNet) εισπράττουμε εγγραφές (ήτοι εργασίες που χρησιμοποιούν ή γενικεύουν το φερώνυμο θεώρημα στα πλαίσια νέων ερευνών), *υπερβαίνουσες* τις 1460 (και αντιστοίχως, τις 650).

▸ **Συμβάσεις και περιορισμοί.** Όπως είναι φυσικό, κάποιοι περιορισμοί στην παρουσίαση τής εργασίας είναι απαραίτητοι (κυρίως για λόγους ευελιξίας και τηρήσεως σχετικής «οικονομίας»).

(α) Κατ' αρχάς, σε ό,τι αφορά στο συνολοθεωρητικό σύστημα αξιωμάτων στο οποίο βασίζεται: Αυτό είναι ως επί το πλείστον το σύστημα[85] ZF+AC των Zermelo και Fraenkel, *οπωσδήποτε μαζί* με το *αξίωμα τής επιλογής* (ή με το ισοδύναμό του *λήμμα τού Zorn*) που υπεισέρχεται σε μεγάλο αριθμό αποδείξεων λημμάτων, προτάσεων και θεωρημάτων[86]. Εξαίρεση αποτελεί η μετάβαση στο αξιωματικό σύστημα NBG των von Neumann, Bernays και Gödel (+AC) όταν τούτο καθίσταται επιβεβλημένο από κατηγορικές συγκυρίες ή από ανάγκη χρησιμοποιήσεως NBG-κλάσεων αντί συνόλων (για να μην εμφανίζονται αντινομίες[87]).

(β) Οι δακτύλιοι σε αυτήν *διαθέτουν πάντοτε* μοναδιαίο στοιχείο.

---

[82] Βλ. J.H. Samson & G. Washnitzer: *A Künneth formula for coherent algebraic sheaves*, Illinois Journal of Mathematics **3** (1959), 389-402.

[83] H. Grauert & R. Remmert: *Komplexe Räume*, Mathematische Annalen **136** (1958), 245-318.

[84] Βλ. L. Kaup: *Eine Künnethformel für kohärente analytische Garben*, Dissertation, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 1965.

[85] Για μια πρώτη εισαγωγή σε αυτού τού είδους τη Συνολοθεωρία βλ. το βιβλίο [1] τού P.R. Halmos.

[86] Βλ. τις αποδείξεις των θεωρημάτων 1.3.23 και 1.4.47, τής προτάσεως 2.2.19, τού λήμματος 2.2.22, τού θεωρήματος 2.5.25, τού λήμματος 2.5.45, τού θεωρήματος 2.5.47 και τού λήμματος 2.6.24. Στο κεφάλαιο 4 τού [2] ο H. Herrlich περιγράφει το πώς υποτιθέμενοι «οικείοι» μαθηματικοί κόσμοι *καταρρέουν* όταν τους αφαιρεθεί το αξίωμα τής επιλογής (ή κάποιο ισοδύναμό του).

[87] Για την Αξιωματική Θεωρία Συνόλων των J. von Neumann (1925-27), P. Bernays (1937-54) και K. Gödel (1940) βλ. [3], σελ. 237-242.

(γ) Χρησιμοποιούνται *μόνον* μόδιοι (modules) οι οποίοι ορίζονται υπεράνω (μη τετριμμένων) *μεταθετικών* δακτυλίων. Πρώτον, για τους ελεύθερους μοδίους τους οριζόμενους υπεράνω *μη μεταθετικών* δακτυλίων *παύει* (εν γένει) να ισχύει το θεώρημα[88] 2.5.38. Δεύτερον, εάν επεκτείναμε κάποια αποτελέσματα και για μοδίους υπεράνω μη μεταθετικών δακτυλίων R (ειδικότερα δε, στο πλαίσιο τής Ομολογικής Άλγεβρας), πέραν τού ότι θα έπρεπε να ομιλούμε για δεξιούς ή αριστερούς R-μοδίους (προσδιορίζοντας κάθε φορά το είδος τής δράσεως τού R που θα υπονοούσαμε), θα έπρεπε να λαμβάναμε υπ' όψιν και το ότι τα τανυστικά γινόμενα, τα Hom, Tor και τα Ext θα ήταν (εν γένει) εφοδιασμένα μόνον με τη δομή τής αβελιανής ομάδας (και όχι κατ' ανάγκην με εκείνην τού R-μοδίου), οπότε θα έπρεπε να εργαζόμασταν με την κατηγορία $\mathfrak{Abgroups}$ των αβελιανών ομάδων στη θέση τής $\mathfrak{Mod}_R$ (εξηγώντας, εκ παραλλήλου, το τι θα συνέβαινε στην ειδική περίπτωση όπου ο δακτύλιος αναφοράς μας θα τύχαινε να είναι μεταθετικός). Τρίτον, οι μόδιοι οι οριζόμενοι υπεράνω *μεταθετικών* δακτυλίων (ήτοι εκείνοι που συναντούμε στη Μεταθετική Άλγεβρα [Commutative Algebra]) είναι αρκούντως γενικοί (καθώς περιλαμβάνουν ταυτοχρόνως τόσον τις αβελιανές ομάδες [ως $\mathbb{Z}$-μοδίους] όσον και τους διανυσματικούς χώρους ως υποπεριπτώσεις) και σίγουρα υπεραρκετοί για τις εφαρμογές μας στην κλασική Αλγεβρική Τοπολογία.

(δ) Η γνώση βασικών εννοιών από τη Θεωρία Κατηγοριών ναι μεν θεωρείται ευκταία (βλ. στις πρώτες τρεις ενότητες τού παραρτήματος A) αλλά όχι per se: Μόνον για τη συστηματοποίηση τής παρουσιάσεως και μόνον για τη μελέτη συγκεκριμένου είδους συναρτητών μεταξύ κατηγοριών ειδικού σκοπού.

(ε) Οι προαπαιτούμενες τοπολογικές γνώσεις περιορίζονται μόνον σε ό,τι κανείς μαθαίνει παρακολουθώντας ένα εισαγωγικό προπτυχιακό εξαμηνιαίο μάθημα Γενικής Τοπολογίας. (Η συνέχεια στο παράρτημα B.)

▸ **Δόμηση τής εργασίας.** Τα πρώτα δύο κεφάλαια είναι προπαρασκευαστικά και περιλαμβάνουν σύντομες υπομνήσεις εννοιών και αποτελεσμάτων από τη Θεωρία Δακτυλίων και Μοδίων. (Κατά τα προαναφερθέντα, όλοι οι θεωρούμενοι μόδιοι ορίζονται υπεράνω μη τετριμμένων *μεταθετικών* δακτυλίων.)

Μέσω τού κεφαλαίου 3 οι αναγνώστες εξοικειώνονται με τις *ακριβείς ακολουθίες*, με μια σειρά διαγραμμάτων (από απλών έως περιπεπλεγμένων ή αλληλοεμπλεκομένων) που περιέχουν ακριβείς ακολουθίες, δύο εκ των οποίων αποτελούν τις αλγεβρικές εκδοχές τού θεωρήματος των Mayer και Vietoris, με (συν)αλυσωτά σύμπλοκα και μοδίους (συν)ομολογίας, με την (αλγεβρική) χαρακτηριστική Euler πεπερασμένων αλυσωτών συμπλόκων, καθώς και με την (αλγεβρική) (συν)αλυσωτή ομοτοπία.

Η «αλγεβρική προπαίδεια» τού κεφαλαίου 3 συμπληρώνεται με τις ιδιότητες σημαντικών τεχνικών εργαλείων (όπως είναι *ο μόδιος ομομορφισμών, το τανυστικό γινόμενο* και τα *γινόμενα επεκτάσεως* και *στρέψεως*) στα κεφάλαια 4 και 5.

Στο κεφάλαιο 6 παρατίθενται οι αλγεβρικές εκδοχές τού θεωρήματος καθολικών συντελεστών και τού θεωρήματος τού Künneth. Για το πρώτο δίδονται λεπτομερείς αποδείξεις, καθώς και παραδείγματα τα οποία καταδεικνύουν ότι στον συ-

[88] Υπάρχουν ελεύθεροι μόδιοι οριζόμενοι υπεράνω *μη μεταθετικών* δακτυλίων που διαθέτουν *βάσεις διαφορετικής πληθικότητας*.

σχετισμό των $H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$ και $H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$ υπεισέρχεται ο «αναμενόμενος» διορθωτικός μόδιος *μόνον υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις*. Για το δεύτερο, ναι μεν δίδονται οι διατυπώσεις όλων των δυνατών εκδοχών αλλά κάποια τεχνικά τμήματα αποδείξεων και κατηγορικές γενικεύσεις έχουν τοποθετηθεί (μαζί με εισαγωγικά σχόλια περί παράγωγων συναρτητών) στο παράρτημα A (προκειμένου να καταστούν αντικείμενο μιας δεύτερης αναγνώσεως). Επιπροσθέτως, παρατίθενται και ορισμένες εφαρμογές ομαδοθεωρητικής φύσεως.

Τα τελευταία δύο κεφάλαια (7 και 8) τού κυρίως κειμένου έχουν ως αντικείμενό τους βασικές τοπολογικές εφαρμογές τού θεωρήματος των Mayer και Vietoris και τού θεωρήματος τού Künneth.

Στο κεφάλαιο 7, εκτός τής εισαγωγής των MV-ακολουθιών (για εκτμητικές τριάδες, ως προς οιαδήποτε θεωρία ομολογίας), των εξωθήσεων και των αναρτήσεων, γίνονται διεξοδικοί υπολογισμοί των μοδίων ομολογίας τής σφαίρας, τού τόρου, κάποιων προβολικών χώρων (οιασδήποτε διαστάσεως) και όλων των κλειστών συνεκτικών επιφανειών. Επιπλέον, δίδεται μια απόδειξη τού θεωρήματος διαχωρισμού των Jordan και Brouwer, η οποία βασίζεται ουσιωδώς σε επαναληπτικές εφαρμογές κατάλληλων ακριβών ακολουθιών Mayer-Vietoris.

Στην πρώτη ενότητα τού κεφαλαίου 8 παρουσιάζεται το τοπολογικό θεώρημα καθολικών συντελεστών (τόσον για μοδίους ομολογίας όσον και για μοδίους συνομολογίας) και εξηγείται το πώς αποκτώνται οι ομομορφισμοί Bockstein μέσω αυτού. Στην §8.2 δίδεται διεξοδική απόδειξη τού θεωρήματος των Eilenberg και Zilber, καθώς και κάποιες γενικεύσεις του σε επίπεδο τοπολογικών ζευγών. Στην ενότητα 8.3 παρατίθενται (υπό γενικές συνθήκες και με αποδείξεις στηριζόμενες εν μέρει και σε προεργασία που έχει λάβει χώρα στο κεφάλαιο 6) διάφορες αμιγώς τοπολογικές εκδοχές τού θεωρήματος τού Künneth (ως προς την ιδιάζουσα θεωρία ομολογίας επί τής ευρύτερης δυνατής κατηγορίας όλων των τοπολογικών ζευγών), ενώ η §8.4 περιέχει πληθώρα συγκεκριμένων παραδειγμάτων, απτών υπολογισμών και εφαρμογών που έχουν ως στόχο να αναδείξουν τη χρησιμότητα τού θεωρήματος τού Künneth στο πλέον κλασικό του περιβάλλον.

Στο παράρτημα A παρουσιάζονται *εν συνόψει* βασικοί ορισμοί από τη Θεωρία Κατηγοριών (κατηγορίες, υποκατηγορίες, πλήρεις κατηγορίες, συναλλοίωτοι και ανταλλοίωτοι συναρτητές, ποικίλα παραδείγματα συναρτητών, διπλοί συναρτητές, φυσικοί μετασχηματισμοί κ.ά.) και *εν εκτάσει* οι φυσικές ισοδυναμίες οι δημιουργούμενες μέσω παραγώγων συναρτητών, οι κατηγορικές εκδοχές τού θεωρήματος τού Künneth (ακολουθώντας εν μέρει το σύγγραμμα [29] των Cartan και Eilenberg, και με ενσωμάτωση αποτελεσμάτων τού Kelly σε αυτό το εργασιακό πλαίσιο), καθώς και η μέθοδος των «ακυκληματικών μοντέλων» κατά Eilenberg και Mac Lane.

Το παράρτημα B θα μπορούσε να ιδωθεί ως crash course σε ό,τι διασυνδέει τις γνώσεις τις αποκομιζόμενες από ένα εξαμηνιαίο μάθημα Γενικής Τοπολογίας με τα προαπαιτούμενα για μια ομαλή μετάβαση στη Συνδυαστική και στην Αλγεβρική Τοπολογία.

Ενδεικτικά για το πόσο σημαντικό καθίσταται το σύστημα των αξιωμάτων των Eilenberg και Steenrod για τον τονισμό πρωταρχικών *κοινών* ιδιοτήτων *οιασδήποτε* (συνήθους) θεωρίας (συν)ομολογίας είναι τα τρία παραδείγματα εφαρμογής του στο παράρτημα C: Ο υπολογισμός των μοδίων (συν)ομολογίας τής σφαίρας, η απόδειξη τού θεωρήματος τού σταθερού σημείου τού Brouwer και η απόδειξη τού θεμελιώδους θεωρήματος τής Άλγεβρας μέσω τής επιλογής κατάλληλης ομοτοπίας.

Οι συνηθέστερες των θεωριών (συν)ομολογίας (μονοπλεκτική, ιδιάζουσα και κυτταρική) παρουσιάζονται εν συντομία στο παράρτημα D, μαζί με κάποια χαρακτηριστικά γνωρίσματα καθεμιάς εξ αυτών. Μεγαλύτερη έμφαση δίδεται στην *ιδιάζουσα* (καθόσον ορίζεται επί τής *ευρύτερης δυνατής* ομολογικώς επιτρεπτής κατηγορίας $\mathfrak{Top}^{[2]}$ *όλων* των τοπολογικών ζευγών) και, ιδιαιτέρως, στα δύο (μέσω αυτής) οριζόμενα γινόμενα: Το *κυαθώδες γινόμενο* που καθιστά το $H^*_{\text{sing.}}(X;R)$ διαβαθμισμένο δακτύλιο και το *σκεπώδες γινόμενο* το οποίο συζευγνύει κατά τρόπο φυσικό μοδίους συνομολογίας και ομολογίας.

Στις πρώτες τρεις ενότητες τού παραρτήματος E εισάγεται η έννοια τού *πολυπτύγματος* (τοπολογικού, $\mathscr{C}^k$-, λείου, μιγαδικού/ χωρίς ή με σύνορο κ.ά.), καθώς και η έννοια τού *προσανατολισμού*, και εξηγείται το πώς για τα R-προσανατολίσιμα συμπαγή τοπολογικά πολυπτύγματα υφίστανται συσχετισμοί των μοδίων (ιδιάζουσας) ομολογίας και συνομολογίας παρεπόμενοι κάποιων φαινομένων «εσώτερου δυϊσμού». (Δυϊσμός κατά Poincaré και κατά Lefschetz.) Τέλος, στην §E.4 υπενθυμίζονται οι *ταξινομήσεις* όλων των τοπολογικών πολυπτυγμάτων διαστάσεως $\leqslant 2$ (μέχρις ομοιομορφισμού) και δίδεται βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη *μερικών ταξινομήσεων* τοπολογικών πολυπτυγμάτων (λοιπών) «χαμηλών» διαστάσεων.

▸ **Παρατηρήσεις επί τής χρησιμοποιούμενης ορολογίας.** Για να εξαλειφθούν ακαλαίσθητοι ή άνευ νοήματος αγγλελληνισμοί ή και (σκέτοι) αγγλισμοί στην ορολογία, καθώς και η χρήση αποδεδειγμένα κακοποιημένων αποδόσεων, ούτως ώστε να μπορέσω να εκφράσω απρόσκοπτα τις απαραίτητες μαθηματικές έννοιες *στη μητρική μου γλώσσα*, υιοθέτησα όσες σχετικές εισηγήσεις και διορθωτικές παρεμβάσεις εκρίθησαν σκόπιμο να γίνουν για την αντιμετώπιση περιορισμένου αριθμού ετυμολογικών (και άλλων) προβλημάτων εκ μέρους τού επιβλέψαντος:

(i) *injection/surjection/bijection*. Αυτή η τριάδα όρων αποδίδεται ως *ένριψη* (ή *έρριψη*)/*επίρριψη*/*αμφίρριψη*, αντιστοίχως. (Το αρχαιοελληνικό ρήμα *ενίημι* σήμαινε -μεταξύ άλλων- «ενρίπτω, εγχέω, εμβάλλω», εξ ου και το λατινικό *iniectio*.) Κατ' αναλογίαν, τα *injective/surjective/bijective map* αποδίδονται ως *ενριπτική/επιρριπτική/αμφιρριπτική απεικόνιση*.

(ii) *inclusion/embedding/immersion/submersion*. Ο όρος *inclusion* αποδίδεται ως *ένθεση* (με την έννοια ότι κάτι τοποθετείται σε κάτι άλλο, εγκλειόμενο/συμπεριλαμβανόμενο σε αυτό), ο όρος *embedding* ως *εμφύτευση* (με την έννοια τού εμπήγω, σφηνώνω, φυτεύω κάτι εντός ενός άλλου[89]) ή *εναγωγή*, ο όρος *immersion* ως *εμβάπτιση* ή *εμβύθιση* ή *πόντιση*[90] και ο όρος *submersion* ως *κατάδυση* ή *καταβύθιση*[91].

(iii) *commutative/anticommutative* και *commute/permute*. Το ρήμα *commute* (από το λατινικό *commutare*) χρησιμοποιείται στην αγγλική γλώσσα υπό την έννοια «exchange, put in place of another» ήδη από τη δεκαετία τού 1630. Το ρήμα *permute* (από το λατινικό *permutare*) βρίσκεται εν χρήσει ήδη από τα τέλη τού 14ου αιώνα υπό

[89] Π.χ., The bullet embedded itself in the wall.

[90] Π.χ., The immersion brine solution also includes microbiological starter cultures.

[91] Π.χ., Lanterns shall be resistant to temporary submersion.

την έννοια «to change thoroughly», ενώ το ουσιαστικό *permutation* εμφανίζεται στη μαθηματική βιβλιογραφία περί το 1878. Όπως είναι φυσικό, απαιτείται διαφοροποίηση στην απόδοσή τους στη γλώσσα μας[92]. Εδώ το *permute* αποδίδεται ως *μετατάσσω*, το *permutation* ως *μετάταξη* (ή *αναδιευθέτηση*) και το *commute* ως *μεταθέτω αμοιβαίως* (δύο πράγματα). Η αντ' αυτού χρήση τού *αντιμεταθέτω* (με την πρόθεση «αντί» να υπονοεί τη σημασιολογική επίταση τής επερχόμενης αμοιβαίας αλλαγής θέσεως, τής αντι-καταστάσεως τού ενός με το άλλο) δέον είναι να αποφεύγεται στη μαθηματική ελληνική ορολογία, διότι οφείλουμε να προτάσσουμε τη *μαθηματική ακρίβεια* (στο δίπολο επιθέτων *commutative*/*anticommutative*) κάνοντας χρήση τής προθέσεως «αντί» για την έκφραση τού αρνητικού, αντι-θέτου προσήμου[93]. Έτσι, το μεν *commutative* μεταφράζεται ως *μεταθετικός*, το δε *anticommutative* ως *αντιμεταθετικός*[94].

(iv) *degree*/*order*/*rank*/*dimension*. Γίνεται σαφής διάκριση μεταξύ αυτών των όρων, οι οποίοι μεταφράζονται ως *βαθμός*/(*τάξη*, *διάταξη*)/*βαθμίδα*/*διάσταση*, αντιστοίχως.

(v) *regular*/*canonical*/*normal*. Από αυτά τα επίθετα μόνον το πρώτο μπορεί να αποδοθεί ως *κανονικός*[95]. (Π.χ., regular topological space = κανονικός τοπολογικός χώρος.) Για το δεύτερο χρησιμοποιείται το *κανονιστικός* (υπό την έννοια τού: ρυθμιστικός, θεσμικός, εκείνος που σχετίζεται με την επιβολή ή την τήρηση ενός κανόνα/κανονισμού ή θεσμού), δεδομένου ότι το επίθετο canonical προέρχεται από την εκκλησιαστική ορολογία (κανονικό δίκαιο, κανονικά βιβλία) και επέχει θέση συνωνύμου τού *νομοκανονικός*. (Π.χ., canonical isomorphism = κανονιστικός ισομορφισμός.) Το τρίτο αποδίδεται, κατά περίπτωση, άλλοτε ως *ορθόθετος* άλλοτε ως *διακανονισμένος* άλλοτε ως *διευθετών*/*διευθετημένος* και άλλοτε ως *φυσιολογικός*.

(vi) *primary*/*primitive*/*principal*. Γίνεται σαφής διάκριση μεταξύ αυτών, μεταφράζοντας το επίθετο *primary* ως *πρωτεύων*/*ουσα*/*ον* (ή *πρωταίος*/*α*/*ον*) [κατ' αντιδιαστολή προς το *secondary*, ήτοι προς το επίθετο *δευτερεύων*/*ουσα*/*ον* (ή *δευτεροταγής*/*ής*/*ές*)], το επίθετο *primitive* ως *πρωταρχικός*/*ή*/*ό* (ή *πρωτογενής*/*ής*/*ές*) και το επίθετο *principal* ως *κύριος*/*α*/*ο* (ή *κεφαλαιώδης*/*ης*/*ες*).

(vii) *invariant*/*invariance*. Στα αγγλικά η λέξη *invariant* άλλοτε επέχει θέση ουσιαστικού και άλλοτε επιθέτου. Ωστόσο, το πότε συμβαίνει το πρώτο ή το δεύτερο είναι πάντοτε σαφές από τα συμφραζόμενα. Στα γαλλικά (invariant-) και στα γερμανικά (invariant-, Invariante) δεν υφίσταται βεβαίως κανένα πρόβλημα και οι κλίσεις υποβοηθούν στον άμεσο διαχωρισμό. Στα ελληνικά, από την άλλη μεριά, θα πρέπει να

[92] Επί παραδείγματι, the group of permutations in n symbols is *noncommutative* for $n > 2$.

[93] Εκτρωματικοί νεολογισμοί τής μορφής *αντι-αντιμεταθετικός*/*η*/*ο* (με επανάληψη τής ίδιας προθέσεως) δεν είναι δυνατόν να γίνουν δεκτοί. Αλλά και σχηματισμοί με προσθήκη στερητικού α(ν) δηλούν άρνηση, όχι αντιθετικότητα.

[94] Π.χ., το κυαθώδες γινόμενο (cup product) άλλοτε είναι μεταθετικό και άλλοτε αντιμεταθετικό στη διαβαθμισμένη άλγεβρα $H^{*}_{\text{sing.}}(X;R) := \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} H^{j}_{\text{sing.}}(X;R)$. (Βλ. θεώρημα D.2.47 (iii).) Από την άλλη μεριά, το *ουσιαστικό* transposition (βλ. λατ. transpositio) παράγεται από το ρήμα transponere [to place over, to set over], το οποίο σημαίνει τοποθετώ/μεταβιβάζω/καθορίζω υπεράνω [επάνω από], και είθισται να αποδίδεται ως *αντιμετάθεση* αντί τού *εναλλαγή*, καθόσον χρησιμοποιείται για να δηλοί *και* τη μεταφορά ενός όρου σε μια εξίσωση στην άλλη πλευρά *με συνακόλουθη αλλαγή προσήμου*. (The transfer of any term of an equation from one side over to the other side with a corresponding *change of the sign*.) Επίσης, εάν θεωρήσουμε τη σύνθεση $\tau \circ \sigma$ μιας τυχούσας μετατάξεως (permutation) σ και μιας transposition τ, λαμβάνουμε $\mathrm{sgn}(\tau\circ\sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$.

[95] Σημειωτέον ότι, πέραν τού *κανονικός*, το επίθετο regular (*σε ειδικές περιπτώσεις*, για χώρους, απεικονίσεις κ.ά., στο πλαίσιο τής Διαφορικής και τής Αλγεβρικής Γεωμετρίας) αποδίδεται και ως *ομαλός*.

δοθεί μια κάποια προσοχή στον *τρόπο* με τον οποίο οφείλει να γίνεται αυτός ο διαχωρισμός. Η λέξη *invariant*, ως επίθετο, μεταφράζεται ως *αναλλοίωτος-η-ο.* (Π.χ., invariant group = αναλλοίωτη ομάδα). Όμως η ορθή απόδοσή της στην περίπτωση που επέχει θέση ουσιαστικού είναι: «η αναλλοίωτος», ακολουθώντας τήν αρχαιόκλιτη μορφή[96]. Τέλος, όσον αφορά στη μετάφραση τού ουσιαστικού *invariance* (γαλ. *invariance*, γερμ. *Invarianz*), όσοι βρίσκουν τη λέξη *αναλλοιότητα* κακόηχη θα μπορούσαν να καταφύγουν στην περίφραση «ιδιότητα τού αναλλοιώτου» (δηλαδή τού να είναι κάποιος ή κάτι αναλλοίωτο(ς)).

(viii) *join/link/linkage/coupling*. Σε αυτήν την τετράδα όρων, ο πρώτος όρος αποδίδεται ως *συναρμογή*, ο δεύτερος ως *ζεύγμα*, *άρθρωμα* ή *θήλιασμα*, ο τρίτος ως *αγκυλίωση*, *κρίκωμα*, *διασύνδεση*, *συνάρθρωση* ή *συνδέσμωση* και ο τέταρτος ως *σύζευγμα* ή *σύζευξη*.

(ix) *module*. Το ρήμα *μέδω* προέρχεται από την απαθή ΙΕ ρίζα *med- και το συναντούμε όχι μόνον στα Ομηρικά Έπη αλλά και σε ύστερα Ορφικά[97] με τις εξής έννοιες:

1) *άρχω, κυβερνώ* («Αργείων, Φαιήκων ηγήτορες ηδέ μέδοντες», Ομ. Ιλ.), *προστατεύω*,

2) (το μέσ.) μέδομαι (μέλ. μεδήσομαι, μτχ. μέδων, -οντος, μέδουσα, όπως και το μεδέων, μεδέουσα)

(α) *προνοώ, φροντίζω, μεριμνώ, έχω την έγνοια για κάποιον ή κάτι,*

(β) (με γεν.) *έχω κάτι στον νου μου, ενθυμούμαι* («πολέμοιο μεδέσθω», Ομ. Ιλ.),

(γ) *μηχανεύομαι, επινοώ, σχεδιάζω κάτι κακό για κάποιον* («κακά δέ Τρώεσσι μεδέσθην», Ομ. Ιλ.)

Χαρακτηριστική είναι η σημασιολογική εξέλιξη τής εν λόγω ρίζας στις διάφορες γλώσσες. Στη λατ. το ουσιαστικό *modus*: «μέτρο, τρόπος», που ανάγεται στην ετεροιωμένη βαθμίδα τής ρίζας (πρβλ. λέξη «μόδα») και το ρήμα *meditor*: «σκέπτομαι, διαλογίζομαι» διατήρησαν τη γενική σημασία τής ρίζας. Τη σημασία αυτή διατήρησαν επίσης τα αρχ. ιρλδ. *midiur*: «κρίνω σκέπτομαι», *mess*: «κρίση», αρμ. *mit* (< *mēdi-*), που ανάγονται στην εκτεταμένη βαθμίδα τής ρίζας (πρβλ. λέξη «μήδομαι»), και γοτθ. *miton*: «λογίζομαι, φρονώ, εξετάζω». Από την έννοια ενός νου που ρυθμίζει, κανονίζει, λαμβάνει κατάλληλα μέτρα, κυβερνάει, προήλθε και το *μέδω* στην ελλ. καθώς και στην ιταλ. (πρβλ. οσκικό[98] *meddiss*: «αυτός που εκφράζει το δίκαιο»,

---

[96] Εδώ, το *αρχαιόκλιτος* είναι μόνον όρος γραμματικός και αναφέρεται στην καταγωγή τού τρόπου κλίσεως. Άλλωστε, στη *νέα* ελληνική συναντούμε πολύ συχνά τέτοιου είδους *χρηστικά* ουσιαστικά θηλυκού γένους λήγοντα σε -ος, όπως π.χ. οδός, διάμετρος, παράμετρος, διάμεσος, διχοτόμος, παράγωγος, άβυσσος κ.ά. Υπάρχουν, εξάλλου, πολλά παραδείγματα πιο οικείων φράσεων, όπου ο διαχωρισμός αυτός μεταξύ (θηλυκών) επιθέτων και ουσιαστικών είναι προφανής: *διάδοχη κατάσταση* αλλά *η διάδοχος τού θρόνου*. Επίσης, λέμε η *ανάδοχη εταιρεία* αλλά *η ανάδοχος* (ενός παιδιού) ή, ακόμη, κάνουμε λόγο για *εγκύκλια παιδεία* αλλά και για την *εγκύκλιο τού Υπουργείου*.

[97] Με τον όρο *Ορφικά* ονομάζουμε το σύνολο τής ιερής γραμματείας τού *ορφισμού*, μιας μυστικιστικής θρησκευτικής τάσεως, η οποία εμφανίσθηκε ως οργανωμένο κίνημα τον 6ο αι. π.Χ. και διαδόθηκε σε όλον τον τότε ελληνικό κόσμο, καλλιεργήθηκε όμως κατ' εξοχήν στην Αττική, στην Κάτω Ιταλία και στη Σικελία. Θεμελιωτής των βασικών δογμάτων τής θρησκευτικής αυτής τάσεως θεωρείτο ο Ορφέας, ένα πρόσωπο αμφισβητούμενης ιστορικότητας. Τα Ορφικά κυκλοφορούσαν από τον 6ο π.Χ. αιώνα, ενώ από τον 5ο π.Χ. αιώνα υπάρχουν μαρτυρίες ότι τα ποιήματα αυτά είχαν συνδεθεί με τη μυστηριακή λατρεία τού ορφισμού και περιείχαν δογματικά διατυπωμένες διδασκαλίες, ύμνους σε θεούς και σε προσωποποιημένες δυνάμεις τής φύσεως, όπως και έννοιες ηθικής τάξεως, θεογονίας και κοσμογονίας.

[98] Οι *Όσκοι* (Osci) ή *Οπικοί* ήταν αρχαία φυλή τής Ιταλίας, προκύψασα από επιμιξία Σαυνιτών και Ελλήνων αποίκων της περιοχής τής σημερινής Καμπανίας και τού Λατίου, ήταν δε μονίμως σε αντιπαράθεση με τους Ετρούσκους για την κατοχή τής περιοχής. Οι Όσκοι μιλούσαν την οσκάνικη γλώσσα και ήταν κυρίως γεωργοί. Με πόλεις ονομαστές, όπως η *Κύμη* (Cvmae), η *Παρθενόπη* (πόλη τού 9ου αιώνα π.Χ, γνωστή και ως *Παλαιά Πόλη*, σε αντιδιαστολή με την *Νέα Πόλη* ⟶*Νάπολη*, που εκτίσθη από τους Κυμαίους το 475 π.Χ.), οι δύο Ποσειδωνίες (η Positano και η Paestvm),

ομβρικό[99] *meřs*: «δίκαιο») με σιγμόληκτο θέμα, όπως και σε μερικά ελληνικά κύρια ονόματα (πρβλ. Πολυ-μήδης, Κλεο-μέδδεις). Σε άλλες γλώσσες, η ρίζα *med- έδωσε τύπους σχετικούς με την Ιατρική (πρβλ. λατ. *medeor*: «θεραπεύω», *medicus*: «ιατρικός», αβεστ. *vımad*: «φάρμακο»). Τέλος, στις γερμανικές γλώσσες η σημασία της περιορίστηκε στην έννοια τού «μετρώ, λαμβάνω τα κατάλληλα μέτρα» (πρβλ. γοτθ. *mitan*, αγγλοσαξ. *metan*, πρβλ. και λέξη «μέδιμνος»[100]).

Ως γνωστόν, ένα σημαντικό βήμα για την κοινωνική οργάνωση των ανθρώπων αποτέλεσε η εισαγωγή και η καθιέρωση ενιαίων μετρικών συστημάτων. (Ως *μετρικό σύστημα* χαρακτηρίζεται οιαδήποτε *σειρά από μονάδες μετρήσεως* μηκών, επιφανειών, όγκων, βαρών και νομισμάτων, κατά προτίμηση συμβιβαστών μεταξύ τους, ικανοποιητικών για την εξυπηρέτηση των απαιτήσεων όλων των τομέων δραστηριότητας μιας κοινωνίας.) Τα μετρικά συστήματα διευκόλυναν ανέκαθεν τις παντοειδείς συναλλαγές, καθώς και τον σχεδιασμό και την οργάνωση οικονομικών δοσοληψιών και υπήρξαν ερείσματα για την ανάπτυξη ποικίλων επιστημονικών κλάδων.

Το μετρικό σύστημα στην Αρχαία Ελλάδα (που αποτελούσε μετεξέλιξη τού αρχαϊκού και τού αιγυπτιακού) περιελάμβανε τις ακόλουθες μονάδες:

(α) Μονάδες μήκους: Στάδιον (184,89 μέτρα[101]) και τις υποδιαιρέσεις αυτού: πλέθρον, σχοινίον, άκαινα, οργυιά, βήμα, πήχυς, πους (πόδι), σπιθαμή, παλαιστή και δάκτυλος. [1 στάδιον = 6 πλέθρα = 8,4 σχοινία = 60 άκαινες = 100 οργυιές =240 βήματα = 400 πήχεις = 600 πόδες = 800 σπιθαμές = 2400 παλαιστές = 9600 δάκτυλοι.]

(β) Μονάδες επιφανείας: Πλέθρον (περίπου 950 τετραγωνικά μέτρα) και τις υποδιαιρέσεις αυτού: σχοινίον, άκαινα, οργυιά, βήμα, πήχυς και πους (πόδι). [1 πλέθρον = 100 άκαινες, 1 σχοινίον = 36 άκαινες = 100 οργυιές, 1 άκαινα = 16 πήχεις = 100 πόδες, 1 οργυιά = 9 βήματα = 16 πήχεις = 36 πόδες.]

(γ) Μονάδες χωρητικότητας (όγκου) υγρών: Μετρητής (39 λίτρα) και τις υποδιαιρέσεις αυτού: χους, ξέστης, κοτύλη, οξύβαθον, κύαθος, κόγχη, μύστρον, χήμη, κοχλιάριον (κουταλάκι). [1 μετρητής = 12 χόες = 72 ξέστες = 144 κοτύλες = 576 οξύβαθα, 1 κύαθος = 10 κοχλιάρια, 1 κόγχη = 5 κοχλιάρια, 1 μύστρον = 2,5 κοχλιάρια, 1 χήμη = 2 κοχλιάρια.]

(δ) Μονάδες χωρητικότητας (όγκου) στερεών: Μέδιμνος (52,4 λίτρα[102]) και τις υποδιαιρέ-

---

η Σύεσσα (το σημερινό Τσιλέντο), η Πομπηία (Pompeii) και η Ηράκλεια (Hercvlanevm, ιταλιστί Ercolano), ευδοκίμησαν για αρκετούς αιώνες, αν και συχνά ήταν υπόλογοι στα ηγεμονικά κράτη τής Ιταλικής Χερσονήσου, δηλαδή στην Ετρουσκική Δωδεκάπολη, κατόπιν στο Σάμνιο των ποιμένων-πολεμιστών, και, τέλος, στο Λάτιο, ως όχημα πλέον μιας Ρώμης κυρίαρχης (που τους υποδούλωσε τον 5ο αιώνα π.Χ. ύστερα από τη μάχη για τη διεκδίκηση τής περιοχής Ager Pomptinus).

[99] Οι *Ομβρικοί* ή *Ούμβροι* (από την ελληνική μεταγραφή τού *Umbri*) ήταν από τις αρχαιότερες ιθαγενείς φυλές τής Ιταλίας. Οι περισσότερες πόλεις τους ιδρύθηκαν μεταξύ τού 9ου και τού 4ου αιώνα π.Χ. Διατηρούσαν στενές εμπορικές σχέσεις με τους Ετρούσκους και τους Έλληνες. Τα όρια τής περιοχής, στην οποία κατοικούσαν, είχαν φυσικά σύνορα τον Τίβερη, τα Απέννινα μέχρι την Αδριατική. Η γλώσσα τους ήταν μέρος μιας γλωσσικής ομάδας που ονομάζεται οσκανο-ουμβριακή και είναι συγγενής προς την λατινική.

[100] Η εκ τής *med- παραγόμενη αρχαιοελληνική λέξη «(ο) μέδιμνος» εξέφραζε *μέτρο χωρητικότητας* που το χρησιμοποιούσαν για τη μέτρηση δημητριακών, ξηρών καρπών και ιδίως σιτηρών. (Την ίδια λέξη τη χρησιμοποιούσαν για κάθε αγγείο αυτής τής χωρητικότητας.) Μαρτυρίες περί «μεδίμνων» (και για τη χρήση τους *και* ως «αφαιρετικού μέτρου αξιολογήσεως») έχουμε σε αρκετά αρχαιοελληνικά κείμενα (π.χ., στον Ηρόδοτο, στον Ησίοδο, στον Λυσία, όπου διαβάζουμε «κατά μέδιμνον συνωνείσθαι», στον Ξενοφώντα, βλ. Ελλ. 3.2.27, «μεδίμνω απομετρείσθαι αργύριον», εξ ου και η αντιστοίχισή του με χρηματικό ποσό). Ο *σικελικός μέδιμνος* είναι (σύμφωνα με όσα αναφέρει ο ιστορικός Πολύβιος) κατά το 1/6 μικρότερος τού *αττικού μεδίμνου*. (Ένα μεγάλο τμήμα τής Σικελίας ανήκε, βεβαίως, στη Magna Graecia [750-270 π.Χ.], έως ότου ενσωματώθηκε καθ' ολοκληρίαν στο Ρωμαϊκό Κράτος.)

[101] Κατά τον Ηρόδοτο. (Το αττικόν στάδιον αντιστοιχούσε σε 185 μέτρα και το στάδιον τού Ερατοσθένους σε 157,5 μέτρα.)

[102] Συγκεκριμένα, πρόκειται για τον «μέδιμνο σιτηρό» (εισαχθέντα επί Σόλωνος). Μετά τον 3ο π.Χ. αιώνα αντιστοι-

σεις αυτού: εκτεύς, ημίεκτον, χοίνιξ, ξέστης, κοτύλη. [1 μέδιμνος = 6 εκτείς = 12 ημίεκτα = 48 χοίνικες = 96 ξέστες = 192 κοτύλες.]
(ε) Μονάδες μετρήσεως νομισμάτων: Τάλαντον και τις υποδιαιρέσεις αυτού: μνα, δεκάδραχμον, τετράδραχμον, δίδραχμον, δραχμή, οβολός, χαλκός. [1 τάλαντον = 60 μναι, 1 μνα = 100 δραχμαί, 1 οβολός = 1/6 τής δραχμής, 1 χαλκός = 1/8 τού οβολού.]

Το μετρικό σύστημα κατά τη Ρωμαϊκή εποχή περιελάμβανε τις εξής μονάδες:
(α) Μονάδες μήκους: mille (μίλιον) και τις υποδιαιρέσεις αυτού: stadium (στάδιον), actus (μονάδα παρόμοια τού σχοινίου), passus (διπλό βήμα), cubitus (ρωμαϊκός πήχυς), pes (ρωμαϊκός πους), digitus (ρωμαϊκός δάκτυλος). [1 mille = 1000 passi (περί τα 1,48 χιλιόμετρα), 1 stadium = 625 πόδες, 1 actus = 120 πόδες, 1 passus = 5 πόδες, 1 cubitus = 1,5 πόδες, 1 digitus = 1/16 τού ποδός.]
(β) Μονάδες επιφανείας: centuria (503645 τετραγωνικά μέτρα) και τις υποδιαιρέσεις: heredium, iugerum, actus (quadratus), pes. [1 centuria = 100 heredia = 200 iugera = 400 acti = 5760000 pedes (πόδες).]
(γ) Μονάδες χωρητικότητας (όγκου) υγρών: culeus (524 L [λίτρα]) και τις υποδιαιρέσεις: amphora quadrantal (26,2 L), urna (13,1 L), congius (3,27 L), sextarius (546 mL), hemina (273 mL), quartarius (136 mL), acetabulum (68 L), cyathus (45 mL) και ligula (11,4 mL).
(δ) Μονάδες χωρητικότητας (όγκου) στερεών: modius (8,73 L) και τις υποδιαιρέσεις: semimodius (4,36 L), sextarius (546 mL), hemina (273 mL), quartarius (136 mL), acetabulum (68 L), cyathus (45 mL) και ligula (11,4 mL).
(ε) Μονάδες μετρήσεως νομισμάτων (λ.χ., στο διάστημα από το 27 π.Χ. έως το 301 μ.Χ.): Aureus και τις υποδιαιρέσεις: denarius, quinarius, sesterius, dupondius, semis, quadrans κ.ά.

Ο *modius* (λέξη πιθανόν σχηματισθείσα από το υποκοριστικό modulus τού modus ή/και από το medimnus [εκλατινισμό τού *μέδιμνου*], καθόσον ισούτο με τον *σικελικό* μέδιμνο, ήτοι με το 1/6 τού *αττικού*) δεν ήταν τίποτε άλλο παρά ο *εκτεύς* τον οποίο συναντήσαμε στο αρχαιοελληνικό μετρικό σύστημα (ή περίπου το ένα τρίτο τού ρωμαϊκού iugerum). Ο Hultsch[103] αναφέρει τα εξής: «Οι αλεξανδρινοί μετρολόγοι χρησιμοποιούν την [εξελληνισμένη] ονομασία [τού modius] *μόδιος*. Ωστόσο, *και* ο *εκτεύς* παραμένει εν χρήσει τόσο στον πίνακα *περί μέτρων* όσον και σε κείμενα εκείνων που ασχολούνται με τη Γραμματική και τη Λεξικογραφία».

Στην Καινή Διαθήκη (Ματθ. 5:15, *ουδέ καίουσι λύχνον και τιθέασιν αυτόν υπό τον μόδιον*) συναντούμε τον *μόδιο* ως ένα είδος μετρικού κάδου, ο οποίος αποτελούσε μονάδα χωρητικότητας[104]. Ιδού μια φωτογραφία ενός αγάλματος τού Πλούτωνα (ως Σεράπιδος), με (τέτοιου είδους) *μόδιον* επί τής κεφαλής του, το οποίο χρονολογείται από τα μέσα τού 2ου μ.Χ. αιώνα και ευρέθη σε Ιερό στη Γόρτυνα. (Εκτίθεται στο Αρχαιολογικό Μουσείο Ηρακλείου.)

Στο κράτος τού Βυζαντίου (330-1453 μ.Χ.) ο *μόδιος* (συναντώμενος ενίοτε, εναλλακτικώς, από τον

χούσε σε 58 λίτρα. Σε μεταγενέστερους χρόνους, όταν ο μέδιμνος αναφέρεται σε διακρατικές συμφωνίες (ως μονάδα μετρήσεως μάζας), αντιστοιχεί σε 60 λίβρες (27,2155 χιλιόγραμμα) σιτάρι.

[103] Βλ. F. Hultsch: *Griechische und römische Metrologie*, Weidmannsche Buchhandlung, Berlin, 1882, σελ. 105.

[104] Είναι προφανές ότι εάν κάποιος τοποθετούσε το λυχνάρι κάτω από αναποδογυρισμένο κάδο, αυτό θα έσβηνε.

πρώιμο μεσαίωνα, και ως *μόδιο*, *ουδετέρου* γένους[105]) υπήρξε μια από τις *κυριότερες* μονάδες μετρήσεως, όχι μόνον χωρητικότητας (όγκου) αλλά και βάρους, μήκους και επιφάνειας (π.χ., εκτάσεως αρόσιμης γης), με ευρύτατη χρήση στην αγροτική οικονομία, στο εμπόριο, στις διακρατικές συμφωνίες[106] κ.ά. Μάλιστα, οι μόδιοι έφεραν και ειδικές ονομασίες για να διακρίνονται μεταξύ τους:

(α) Για τη μέτρηση βάρους: *Βασιλικός μόδιος* [12,8 κιλά], *μοναστηριακός μόδιος* [10,2 κιλά], *σταυρικός μόδιος* [8,5 κιλά], *μέγας μόδιος* [51,2 κιλά], *πολιτικός μόδιος* [230,4 κιλά] κ.ά.

(β) Για τη μέτρηση μήκους και επιφάνειας: *Θαλάσσιος μόδιος* [2,88 γεωμετρικά σχοινία ή 57,6 λογαρικές λίτρες] και υποδιαιρέσεις αυτού (σχοινίον, γεωμετρικόν σχοινίον [περίπου $678\ m^2$], εποπτικόν σχοινίον, λογαρική λίτρα [$22,2\ m^2$], οργυιά, σπιθαμή, δάκτυλος κ.ά.).

(γ) Για τη μέτρηση όγκου: Εν προκειμένω, ως *μόδιος* εννοείτο ο (προαναφερθείς) *μετρικός κάδος*. Παράγωγα/υποδιαιρέσεις αυτού: Χοινίκιν [1,25 μόδιοι], βυζαντινόν μέτρον, θαλάσσιον μέτρον, μοναστηριακόν μέτρον, μέτρον ελαίου, αννωνικόν μέτρον, μεγαρικόν, μίνα κ.ά.

Κατά την Τουρκοκρατία ο μόδιος (ως μέσον μετρήσεως εμβαδών) αντικαταστάθηκε σταδιακώς από το *στρέμμα* (εκ τού αρχαιοελληνικού ρήματος *στρέφω*, το αντίστοιχο τού τουρκικού *dönüm* και τού κυπριακού *δεκαρίου*).

Ο Άγιος Επιφάνιος (315-403 μ.Χ.), ο οποίος περί το 367 μ.Χ. εξελέγη «ψήφω κλήρου και λαού» Αρχιεπίσκοπος Κωνσταντίας (αρχαίας Σαλαμίνας) και πάσης Κύπρου, μαρτυρεί στο σύγγραμμά του *περί Μέτρων και Σταθμών* (392 μ.Χ.) ότι ο *μόδιος* και κατόπιν το *μόδιο* (σε *ουδέτερο* γένος) ήταν μονάδα μετρήσεως δημητριακών *και* στην Κύπρο ήδη από την αρχαιότητα. (Για τη μέτρηση σιτηρών εγένετο χρήση και τού *μεδίμνου* και τής *μνασίδος*. Ο *μέδιμνος* αντιστοιχούσε στους Σαλαμινίους προς 5 *μόδια*, ενώ στους Παφίους προς 4,5 *μόδια*.) Αλλά και αργότερα, κατά τα μεσαιωνικά και τα πρώτα μεταμεσαιωνικά έτη, το *μόδιο* (ή *μόδιν*) ήταν συνήθης μονάδα μετρήσεως. Επί παραδείγματι, αναφέρεται (από τον Φραγκίσκο Αττάρ[107]) ότι περί το 1540 η παραγωγή δημητριακών στην Κύπρο ανήρχετο σε 1,4 εκατομμύρια μόδια σιταριού και σε 1,6 εκατομμύρια μόδια κριθαριού. Επιπλέον, στην περιοχή μεταξύ Λιβερών και Κορμακίτη (τής επαρχίας Κερύνειας) υπάρχει τοποθεσία γνωστή με την ονομασία *Σιλιομοδούσα* (= χιλιομοδούσα). Την οφείλει στο ότι η παραγωγή της ανήρχετο σε χίλια μόδια. (Κατά τα νεότερα χρόνια, το *μόδιν* αντιστοιχούσε προς 8 *καφίζια* ή 128 *οκάδες*.) Επιπροσθέτως, σε μια εκ των κυπριακών παραλλαγών τού άσματος[108] «τού Διγενή και τού Χάρου» διαβάζουμε στον 89ο στίχο, «τζ' έκρατεν η πατούνα του εννιά μοδιών χωράφκια ...» (προκειμένου να τονισθεί το τεράστιο πόδι ενός Σαρακηνού τον οποίο εφόνευσε ο ήρωας). Τέτοια,

---

[105] Επί Βυζαντίου από τον *μόδιο* προέκυψαν οι παράγωγες λέξεις *μοδισμός* (ουσιαστικό) και *μοδιακός* (επίθετο).

[106] Για λεπτομερείς πληροφορίες περί τού ρόλου που διαδραμάτισαν οι μόδιοι κατά την περίοδο τού Βυζαντίου βλ.

(i) E. Schilbach: *Byzantinische metrologische Quellen*, Brücken-Verlag, Düsseldorf, 1970. Ανατύπωση με προσθήκες: Κέντρον Βυζαντινών Ερευνών, Βυζαντινά κείμενα και μελέται, τ. **19**, Θεσσαλονίκη, 1982.

(ii) Γ. Μπαντέκα: *Τα μετρικά συστήματα*, περιοδικό Αρχαιολογία, τεύχος **26**, Μάρτιος 1988, σελ. 36-44.

(iii) Κ.-Ε. Πλακογιαννάκη: *Δημόσιος και ιδιωτικός βίος και πολιτισμός των Βυζαντινών*. Εκδόσεις Κυρομάνος, Θεσσαλονίκη, 2002.

[107] Μέλος τής οικογένειας τού Ιωάννη Αττάρ. Έγραψε το έργο Relatione del Regno di Cipro, το οποίο δημοσιεύθηκε στη Βενετία το 1540. Σε αυτό δίδονται και στατιστικά στοιχεία για τα χωριά, τον πληθυσμό και τα προϊόντα τής Κύπρου, και χρησιμοποιήθηκε κατά κόρον από μεταγενέστερους συγγραφείς.

[108] Βλ. Ν.Γ. Πολίτου: *Ακριτικά Άσματα. Ο θάνατος τού Διγενή*, Δελτίον τής Ελληνικής Λαογραφικής Εταιρείας (κατά τριμηνίαν εκδιδόμενον), Τόμος Α. Τυπογραφείον Π.Δ. Σακελλαρίου, Αθήναι, 1909, σελ. 169-275, και ιδιαιτέρως στ. 89 στη σελ. 214.

λοιπόν, μετρική ορολογία εχρησιμοποιείτο ακόμη και για τον καθορισμό εκτάσεων αγρών: Δήλωνε την έκταση εκείνη που ήταν ικανή για να παραγάγει έναν συγκεκριμένο αριθμό μοδίων σιτηρών.

Στις ποικίλες αναφορές περί *μοδίων* στη λαϊκή παράδοση[109] προστίθεται και μια πληθώρα τοπωνυμίων τόσο στην ηπειρωτική όσον και στη νησιωτική Ελλάδα πιστοποιούσα την ευρύτατη χρήση τους και σημασία τους (μέχρι την εδραίωση των νεότερων μονάδων μετρήσεως επιφανειών και όγκων). Δειγματοληπτικώς παρατίθενται τα εξής: Υπάρχει ένα χωριό που ονομάζεται *Χιλιομόδι*(*ον*) στην παλαιά εθνική οδό Κορίνθου-Τριπόλεως. Την ίδια ονομασία (συνδεόμενη με την ένδειξη πλούσιας τοπικής γεωργικής παραγωγής) έχει και ένα νησάκι μεταξύ Πάτμου και Λειψών. Υπάρχει, επίσης, ένα μικρό, ορεινό χωριό ονόματι *Χιλιομουδού* που ανήκει στον Δήμο Αποκόρωνα και βρίσκεται 28 χιλιόμετρα νοτιοανατολικώς τής πόλεως των Χανίων. Το *Πενταμόδι* είναι άλλο ένα χωριό στην Κρήτη, στην κοιλάδα τού Γαζανού ποταμού, απέχον 17 χιλιόμετρα από το Ηράκλειο. Τα *Καλομόδια* είναι ένας μικρός οικισμός 9 χλμ. νοτιοδυτικώς τής Άρτας. Το *Μόδι* τού Νομού Φθιώτιδας είναι ένα χωριό κτισμένο σε υψόμετρο 440 μέτρων, στις πλαγιές τού όρους Καλλίδρομου. Η βραχονησίδα *Μόδι* (νοτίως τού Σαρωνικού Κόλπου και ανατολικώς τού Πόρου) έχει έκταση περίπου 940 τετραγωνικά μέτρα, με όσα ισούτο και ένα είδος μοδίου μετρήσεως εκτάσεων επί Βυζαντίου. Ένα άλλο *Μόδι* ανήκει στον Δήμο Βόλβης τής Περιφερειακής Ενότητας Θεσσαλονίκης που βρίσκεται στην Περιφέρεια Κεντρικής Μακεδονίας. Τέλος, ένα τέταρτο *Μόδι*, και πάλι στην Κρήτη, και συγκεκριμένα μεταξύ Κισάμου και Κυδωνίας στην περιοχή τού Πλατανιά, 15 χιλιόμετρα από το κέντρο των Χανίων, διαθέτει ενδιαφέρουσα ιστορία (και μάλλον ακόμη πιο ενδιαφέρουσα προϊστορία) υποδεικνύουσα ότι πανάρχαιες λέξεις και τοπωνύμια αρχόμενα με «Mod-/Μοδ-/Μωδ-» δεν θα έπρεπε να αναζητούνται *αποκλειστικώς* σε λαούς που κατοικούσαν τότε στην Ιταλική Χερσόνησο[110] (στους αρχαίους Λατίνους, στους Αίκουους, στους Αύσονες, στους Ιάπυγες, στους Ιρπίνους, στους Λουκανούς, στους Μεσσάπιους, στους Πευκέτιους, στους Ρούτουλους ή στους Σαβίνους, στους προαναφερθέντες Όσκους και Ομβρικούς ή στους επί αιώνες κραταιούς Ετρούσκους[111]), καθώς τα πράγματα είναι αρκούντως περίπλοκα (σκιαζόμενα, πέραν κάποιου σημείου, από τη ραγδαία μείωση στοιχείων και ενδεικτικών -ανασκαφικών ή

[109] Π.χ., το *μόδι* εχρησιμοποιείτο σε λαϊκή ευχή των επισκεπτών ή διαβατών προς τον ιδιοκτήτη αλωνιού. Κατά την παράδοση, όταν ο αλωνιστής ξεκουραζόταν στο αμπλήκι (ένα δέντρο που ήταν φυτεμένο κοντά στο αλώνι γι' αυτόν τον σκοπό), οι ξένοι που τυχαίνε να περνούν τού εύχονταν: «Ώρα καλή, χίλια μόδια» ή «Χίλια μόδια, και το αγώι χώρια».

[110] Οι πλέον επικρατούσες σύγχρονες θεωρίες είναι αυτές τής *συνθετικής* ερμηνείας: Η προέλευση των περισσοτέρων εξ αυτών των αρχαίων λαών αποδίδεται στη *μείξη* (παλαιότερων) αυτόχθονων στοιχείων και μετακινούμενων πληθυσμών. Υπάρχουν αποικισμοί τόσον από βορρά όσον και άπο τις θαλάσσιες οδούς. Από αυτές τις οδούς η κινητικότητα ήταν έντονη και διαρκής επί όλους τους αιώνες (ήδη από το 2000 π.Χ.). Υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις ότι οι μετακινήσεις αυτές εγένοντο κατά κύριο λόγο από εθνοτικοεπαγγελματικές ομάδες μεταλλουργών (άλλοτε από τον ελλαδικό χώρο [Ελλήνων ή Προελλήνων] και άλλοτε από λαούς ή φυλές που ζούσαν σε περιοχές τής Ασίας ή ακόμη και των Ινδιών, ενίοτε με ενδιάμεσους σταθμούς διάφορες μεσογειακές νήσους), με στόχο την εξεύρεση πλούσιων κοιτασμάτων μετάλλων. Κάθε μεταναστευτική ομάδα μετέφερε μαζί της στον εκάστοτε νέο τόπο εγκαταστάσεώς της πολιτιστικά και γλωσσικά στοιχεία από τον τόπο τής τελευταίας της κοιτίδας.

[111] Για τον πολιτισμό των Ετρούσκων (∼800-150 π.Χ.), την πιθανή καταγωγή τους και τη γλώσσα τους βλ.

(i) F. Prayon: *Οι Ετρούσκοι. Ιστορία, θρησκεία, τέχνη*, σε μετ. A. Fosvinkel, Μορφωτικό Ίδρυμα Εθν. Τραπέζης, 2004.

(ii) F. Bubenheimer-Erhart: *Die Etrusker*. Philipp von Zabern Verlag, Mainz, 2014.

(iii) Ι.-Α. Βλάχου, Ν. Δεληγιαννάκη, Θ. Κατσαρού, Χ. Κουτελάκη, Β. Πανταζή & Γ. Πολιτάκη: *Ετρούσκοι* (με υπότιτλο: *Σίντιες, Πελασγοί και Έλληνες*), εκδόσεις Καρδαμίτσα, 2015.

άλλων- ευρημάτων όσο κανείς οπισθοδρομεί στον χρόνο): Κοντά στο Μάλεμε ευρέθησαν πανάρχαια νομίσματα τα οποία, εκτός από παράσταση τού γενειοφόρου Διός, έφεραν την επιγραφή «ΜΩΔΑΙΩΝ». Ο Νικόλαος Σβορώνος (1911-1989) διατύπωσε την άποψη ότι ανήκουν σε αρχαία κρητική πόλη, το όνομα τής οποίας θα πρέπει να ήταν *Μώδα* ή *Μωδαία*, μη αναφερόμενη στις γνωστές πηγές, και ότι η θέση της θα πρέπει να ήταν στο εν λόγω χωριό. Την άποψη αυτή ήρθε να ενισχύσει ανασκαφική έρευνα το 1953, κοντά στο σημερινό Μόδι[112], στην οποία προΐστατο ο τότε έφορος αρχαιοτήτων Ν. Πλάτων, καθόσον εντοπίσθηκαν επτά πρωτογεωμετρικοί λαξευτοί τάφοι (από τους οποίους δύο είναι θαλαμωτοί), καθώς και αγγεία, όπλα σιδηρά, κρατήρες, σκύφοι, πυξίδες, πίθοι, αμφορείς κ.ά. που εκτίθενται σήμερα στο Αρχαιολογικό Μουσείο Χανίων. (Ομιλούμε για χρονολόγηση στην υπομινωική, πρωτογεωμετρική και ανατολίζουσα περίοδο [εποχή τού σιδήρου], για δε την αρχαία πόλη να μην αποκλείεται να είχε ακμάσει ακόμη πιο πριν, ενδεχομένως στην ανακτορική ή μετααανακτορική περίοδο [εποχή τού χαλκού].) Δικαιολογημένα, λοιπόν, υποστηρίζεται από ειδικούς ότι «γλωσσοπλαστικές» επιρροές (άλλοτε ινδοευρωπαϊκές και άλλοτε μη ινδοευρωπαϊκές) υπήρξαν συνήθεις και απότοκες τής δράσεως των τότε θαλασσοπόρων και των διαδοχικών αποικισμών, επιφυλάσσουσες ουκ ολίγες εκπλήξεις.

Εκτός ελλαδικού χώρου τώρα και μεταφερόμενοι σε πλησιέστερη (μ.Χ.) εποχή· ο *modius*/*μόδιος* εμφανίσθηκε (*και* μέσω επιρροών από τη γαλλική εκδοχή του) ως *module* στην αγγλική γλώσσα και σήμαινε (ήδη από το 1620) ένα καθιερωμένο μέτρο κατάλληλο για τη ρύθμιση ορθών αναλογιών. Κατά τον 20ο αιώνα έλαβε και άλλες σημασίες: «υποδειγματικό εξάρτημα ενός συγκροτήματος (οικοδομικού, επιπλώσεων κ.λπ.)» από το 1936, «ανταλλακτικό τμήμα» από το 1955 και «χωριστό τμήμα διαστημόπλοιου/άκατος/θαλαμίσκος» από το 1961. Επίσης, χρησιμοποιείται πλέον και ως «δομική μονάδα/δομομονάδα» (π.χ., ως μια αυτοτελής διδακτική ενότητα σε ένα πανεπιστημιακό πρόγραμμα σπουδών) και στην Πληροφορική και στη Μηχανολογία ως «δομοστοιχείο» (αναλογικής γραμμής, εικονικής εφαρμογής, συναγερμικής ειδοποιήσεως, προηγμένων επικοινωνιών, μεταχρονισμένης παραδόσεως, προορισμού, λογισμικού, σηματοδοσίας κ.ά.).

Στα Μαθηματικά οι όροι *modulo, modulus* (πληθ.*moduli*) συναντώνται στο Disquisitiones Arithmeticae[113] και σε κατοπινά έργα τού C.-F. Gauss (αλλά και σε προγενέστερούς του που έγραφαν ακόμη στα λατινικά). Στην αλγεβρική της εκδοχή η λέξη [der] Modul (γένους *αρσενικού*[114], στα γερμανικά) εισήχθη από τον R. Dedekind[115] αλλά με αρκετά περιοριστικό τρόπο. Έλαβε δε την οριστική της μορφή (έτσι όπως τη γνωρίζουμε μέχρι σήμερα, με τα αριθμητικά ή βαθμωτά μεγέθη ειλημμένα από τυχόντα δακτύλιο) σε ένα άρθρο[116] τής E. Noether και τού W. Schmeidler

[112] Βλ. Α.Θ. Βασιλάκη: *Οι 147 πόλεις τής Αρχαίας Κρήτης*, εκδόσεις Καίρατος, Ηράκλειο Κρήτης 2000, σελ. 130.

[113] Το πρώτο κεφάλαιο τού βιβλίου (τού πρωτοδημοσιευθέντος το 1801) ξεκινά ως εξής: «Si numerus a numerorum b, c differentiam metitur. b et c *secundum a congrui* dicuntur, sin minus, *incongrui*: ipsum a *modulum* appellamus.»

[114] Υπό τις προαναφερθείσες έννοιες «πρότυπο εξάρτημα ενός συγκροτήματος» και «ανταλλακτικό τμήμα» η αγγλική λέξη *module* ενετάχθη στα γερμανικά ως [das] Modul (γένους *ουδετέρου*). Βλ. σελίδα 1807 στο DUDEN, *Das große Wörterbuch der deutschen Sprache*, Band **4**, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, Dudenverlag, 1978.

[115] R. Dedekind: *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*, Vieweg, 1879. (Letzte Auflage mit einem Geleitwort von B. L. van der Waerden, Berlin 1964.)

[116] E. Noether & W. Schmeidler: *Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differenzial- und Differenz-*

το 1920, καθώς και σε ένα άρθρο[117] τής E. Noether το 1929, και ενσωματώθηκε στο έβδομο κεφάλαιο τού βιβλίου τής Άλγεβρας τού van der Waerden.

Εδώ υιοθετείται η πρόταση, βάσει τής οποίας στα ελληνικά, από μαθηματικής απόψεως, οι ανωτέρω όροι αντιμετωπίζονται ως ακολούθως:

1) Για την απόδοση τού *modulus of the complex number* z προτιμάται η χρησιμοποίηση τού όρου *απόλυτη τιμή* (αντί τού *μέτρου) τού μιγαδικού αριθμού* z.

2) Για την έκφραση $a \equiv b$ modulo m (ή «mod m») λέμε ότι το a είναι *ισότιμο τού* b *κατά* (*το*) *μόδιο* m (σε *ουδέτερο* γένος) ή *κατά μοδίολο* m (αποφεύγοντας τη χρήση τού *κατά το μέτρο* m ή τού *ως προς μέτρο* m για να μην επέρχεται σύγχυση με τον μαθηματικό όρο *measure*. Ενίοτε, στην Αναλυτική Θεωρία Αριθμών υπεισέρχονται και μέθοδοι προερχόμενες από τη λεγόμενη[118] Θεωρία Μέτρου [Measure Theory].)

3) Στην Άλγεβρα το *module* (γερμ. [der] Modul, πληθ. Moduln) αποδίδεται ως *μόδιος* (*αρσενικού* γένους, για ευκρινή διαχωρισμό με το 2), αφού, όπως προαναφέρθηκε, πρόκειται για λέξη *ευρέως* χρησιμοποιηθείσα *κατά τρόπο ουσιώδη* και *επί αιώνες* [ήδη από την ελληνιστική περίοδο]). Επισημαίνεται, ιδιαιτέρως, ότι

(α) δεν αποδίδεται ως *μέτρο* για να μην επέρχεται σύγχυση με το *measure* και

(β) δεν αποδίδεται ως *πρότυπο* (ήτοι ως προσχηματισμένος τύπος φυσικού ή τεχνητού πράγματος, αναπαραγόμενος συνήθως διά μιμήσεως, χρησιμοποιούμενος ως υπόδειγμα για την αναπαραγωγή άλλων, ομοίων προς αυτόν), διότι το *module*, ορισθέν ως μια μονάδα μετρήσεως, αποτελεί βεβαίως ένα «πρότυπο»· εντούτοις, αντιστρόφως, κάτι που μπορεί να θεωρηθεί ως *πρότυπο* εντάσσεται κατά κανόνα σε ένα πιο διευρυμένο εννοιολογικό πλαίσιο από εκείνο τού *module*. Αντιστοιχεί στη δημώδη λατ. λέξη *modellus* > ιτ. *modello* > *model* (*μοντέλο*) που ναι μεν είναι ομόρριζη τού *modus* αλλά διαφοροποιήθηκε αισθητά προϊόντος τού χρόνου. Τα *πρότυπα* (ή *μοντέλα*) χρησιμοποιούνται πρωτίστως στη Λογική και στη Θεωρία Συνόλων[119] αλλά και σε άλλους θεωρητικούς μαθηματικούς κλάδους.

4) Κατ' αναλογίαν, το επίθετο *modular* αποδίδεται ως *μοδιακός*. (Επί παραδείγματι, *modular forms* = *μοδιακές μορφές*, όχι *μετρομορφές*.)

5) Από την άλλη μεριά, η φράση *moduli space* (of curves/bundles/connections etc.) αποδίδεται (με εύστοχη διερμηνευτική προσέγγιση και χωρίς να υπάρχει κίνδυνος παρανοήσεως) ως *παραμετρικός χώρος* και η φράση *number of moduli* (of [families of] curves/surfaces/varieties etc.) ως *αριθμός* (ή *πλήθος*) *παραμέτρων*.

(x) *projective/injective resolution*. Σε αυτό το δίπολο επιθέτων, για την τήρηση συμμετρίας, προτιμάται η απόδοση *προβολικός/εμβολικός*. Σε ό,τι αφορά στο ουσιαστικό *resolution* (γαλλιστί *résolution*, γερμανιστί *Entschliessung(santrag)/Auflösung*), αυτό έχει *πολλές* και *διαφορετικές σημασίες*[120]. Μεταξύ αυτών πρέπει να επιλεγεί η κα-

---

ausdrücken, Mathematische Zeitschrift **8** (1920), 1-35. (Βλ., ιδιαιτέρως, σελ. 7.)

[117] E. Noether: *Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie*, Mathematische Zeitschrift **30** (1929), 641-692. (Βλ., ιδιαιτέρως, σελ. 646.)

[118] Βλ., π.χ., R.L. Jahn: *A Measure Theoretic Approach to Problems of Number Theory with Applications to the Proof of the Prime Number Theorem*, Master's Thesis, Minnesota State University, Mankato, 2016.

[119] Βλ., π.χ., *πρότυπα* (ή *μοντέλα*) αξιωματικών θεωριών στο Παράρτημα Β τού συγγράμματος τού Γ.Ν. Μοσχοβάκη: *Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία*, εκδόσεις Νεφέλη, 1993. Επίσης, βλ. τα *ακυκληματικά μοντέλα* (ή *ακυκληματικά πρότυπα*) των Eilenberg και Mac Lane στην παρούσα εργασία.

[120] Αποφασιστικότητα [he/she lacks resolution], απόφαση [he/she made a resolution never to do a job he/she didn't like again], ψήφισμα [resolution of condemnation/of protest], λύση [resolution of a problem], επίλυση [resolution of a triangle], ανάλυση [resolution of forces], διάλυση [resolution of singularities], ευκρίνεια εικόνας [high-resolution monitor], κερματισμός/διάσπαση/διαχωρισμός [separation of racemates into their component enantiomers is a process called resolution].

ταλληλότερη. Και αυτή *εδώ* σίγουρα δεν είναι ούτε η «ανάλυση» ούτε η «επίλυση». Ανατρέχοντας στον ορισμό 5.1.1 και στις αποδείξεις τής προτάσεως 5.1.3 και τού θεωρήματος 5.1.4 (και αντιστοίχως, στον ορισμό 5.1.7 και στις αποδείξεις τής προτάσεως 5.1.8 και τού θεωρήματος 5.1.9), παρατηρούμε ότι όντως επέρχεται *κερματισμός* τού R-μοδίου αναφοράς M. (Η πλησιέστερη, λοιπόν, σημασία, είναι εκείνη τού «a breaking into parts».)

(xi) *circle*/*cycle*/*acyclic*. Στα Μαθηματικά ο *κύκλος* συναντάται στις κύριες δυτικοευρωπαϊκές γλώσσες διπλομόρφως:

αγγλιστί	γαλλιστί	γερμανιστί
circle	cercle	Kreis
cycle	cycle	Zykel/Zyklus

Ο *συνήθης κύκλος* (ως σημειοσύνολο, ή η περιφέρεια τού κύκλου) αντιστοιχεί στους όρους τής δεύτερης γραμμής. Οι όροι τής τρίτης γραμμής (παρότι προέρχονται *απευθείας* από την αρχαιοελληνική λέξη *κύκλος*) έχουν λάβει κατά τι διαφορετικές εννοιοδοτήσεις: Σημαίνουν αφ' ενός μεν έναν κύκλο εφοδιασμένο με έναν συγκεκριμένο *προσανατολισμό* (έναν *προσανατολισμένον κύκλο*, είτε ωρολογιακώς είτε αντιωρολογιακώς), αφ' ετέρου δε έναν *κλειστό δρόμο* στη Θεωρία Γραφημάτων ή και (σε εντελώς αφηρημένο πλαίσιο) μια *κλειστή αλυσίδα*, ήτοι μια αλυσίδα *μηδενιζόμενη από τον* (αντίστοιχο) *συνοριακό τελεστή* (ως προς τη μονοπλεκτική θεωρία και, κατ' επέκταση, και ως προς τις λοιπές συνήθεις θεωρίες ομολογίας) στην Αλγεβρική Τοπολογία. Στην τελευταία, αυτή, περίπτωση, επειδή συχνά χρησιμοποιούνται *ταυτοχρόνως* και *γεωμετρικώς* αμφότεροι οι όροι circle και cycle (με διαφορετικές σημασίες), είμαστε υποχρεωμένοι να αποδίδουμε τον πρώτον (απλώς) ως *κύκλο* και τον δεύτερο μέσω ενός νεολογισμού (που έχει ως ρίζα του τον κύκλο): Έτσι, κατ' αναλογίαν τού σχηματισμού (ουσιαστικών μέσω τού ρήματος) *πατώ-πατώνω* $\longrightarrow$ *πάτωμα* και *πάτημα*, καταλήγουμε στον σχηματισμό *κυκλόω-κυκλώνω* $\longrightarrow$ *κύκλωμα* και *κύκλημα*. Απορρίπτοντας το κύκλωμα (που είναι δεσμευμένο για την απόδοση τού όρου *circuit*), προτιμούμε να αποδίδουμε τον όρο *cycle* (τουλάχιστον στην Αλγεβρική Τοπολογία) ως *κύκλημα* και τον όρο *acyclic* ως *ακυκληματικός*/*ή*/*ό*.

Είναι, μάλιστα, εντυπωσιακό ότι αυτή η διπλομορφία ενυπήρχε (εμμέσως πλην σαφώς) ήδη στην αρχαιοελληνική γραμματεία.

Καλαμόκιρκος (τής οικογένειας των ιερακιδών)

Πράγματι· τα circle/cercle/Kreis παράγονται από το λατινικό *circus*/*circulus*, το οποίο, με τη σειρά του, έχει ως αρχαιοελληνικό αντίστοιχο τη λέξη *κίρκος*[121]. Ο *κίρκος*

[121] Εξ ου και το όνομα τής μυθικής μάγισσας *Κίρκης*. Το δε *κρίκ-* προέρχεται από τον αναδιπλασιασμό θέματος στο *ki-*

ήταν είδος ιέρακος (γερακιού), που ονομάστηκε έτσι από τους κύκλους που έκανε όταν πετούσε. Πολλοί ειδικοί υποστηρίζουν την άποψη ότι τα *κύκλος*, *κύλινδρος*, *κυλώ*, *κυρτός*, *πόλος*, *πωλώ* κ.ά., ενδέχεται να είναι ομόρριζα τού *κίρκου*.

(xii) *contraction/contractible/deformation retract* και *retraction*. Ο (γεωμετρικός) όρος *contraction* σημαίνει *συστολή* και το *contractible*, *συσταλτός*. Από την άλλη μεριά, η καλύτερη απόδοση τού *retraction* είναι *σύμπτυξη* ή *εισέλκυση* [το κοινό «μάζεμα»]. Κατ' αναλογίαν, το ρήμα *retract* (εξ ου και το ουσιαστικό *retract* αντί τού *retraction*) θα μπορούσε να έχει πολλές άλλες σημασίες[122] (στην κοινή γλώσσα), οπότε καλύτερο είναι (στην περίπτωσή μας) να αποδοθεί ως[123] *συμπτύσσω/σσομαι*. Γι' αυτόν τον λόγο ετέθη στην ενότητα B.5: retraction map = απεικόνιση συμπτύξεως, deformation retract = παραμορφωτική σύμπτυξη.

(xiii) *simplex/ complex/simplicial complex*. Η ορθή μετάφραση τής λέξεως «simplex» είναι *μονόπλοκο*. Για το δεύτερο συνθετικό της δεν χρειάζεται, βεβαίως, καμιά ιδιαίτερη συζήτηση. (Πλέκω < *plēk- μηδενισμένος βαθμός τού ΙΕ *pel που σημαίνει «πτυχώνω», «διπλώνω».) Αναφορικά με το πρόθημά της «sim» κανείς οφείλει να είναι αρκετά προσεκτικός. Αυτό προέρχεται από την ΙΕ ρίζα *s..m.. απ' όπου λαμβάνονται οι σχηματισμοί: *sem-s > το αρχαιοελληνικό δασυνόμενο «εις», *sm-ia > «μία», *sm-pl-os > το αρχαιοελληνικό δασυνόμενο «απλούς», *sem > *s<u>m</u>-a > *sam-a > το αρχαιοελληνικό δασυνόμενο «άμα», *sem > το λατινικό sem-el (= μία φορά, άπαξ) > simplex (καθώς και το μεταγενέστερο simple τής αγγλικής γλώσσας).

Θα πρέπει να τονισθεί ότι η λέξη «απλούς» εχρησιμοποιείτο αρχικώς ως αντίθετο τής λέξεως «διπλούς» με τη σημασία «αυτός που συμβαίνει μία φορά». Στην Καινή Διαθήκη (Λουκ. 11:34) τη συναντούμε με τη σημασία «απέριττος». Η νεοελληνική λέξη «απλός» διατηρεί (εμμέσως πλην σαφώς) *και* τις δύο εννοιολογικές αποχρώσεις, σημαίνοντας «αυτός που αποτελείται από βασικά μόνο συστατικά», «αυτός που είναι μη σύνθετος», από τη μια μεριά, και «αυτός που αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο», από την άλλη. (Συναντούμε, επί παραδείγματι, την τελευταία αυτή εκδοχή ομιλώντας για *απλό εισιτήριο*, *απλή επιστολή*, *απλή μέθοδο των τριών*, *απλή αναλογική* κ.λπ.). Ως εκ τούτου, ως *μονόπλοκο* θα πρέπει να νοείται (εν προκειμένω) το μαθηματικό εκείνο αντικείμενο, το οποίο αφ' ενός μεν συνιστά ένα (καλώς, μονοσημάντως) ορισμένο όλον, αφ' ετέρου δε είναι κατασκευασμένο με τον απλούστερο δυνατό τρόπο πλοκής (πτυχώσεως). Η αντ' αυτού χρήση τής λέξεως «απλόπλεγμα» είναι προβληματική σε ό,τι αφορά στην εκφορά της στον προφορικό λόγο, εξαιτίας τής επαναλήψεως των συμφώνων π και λ. Η δε (ενίοτε) επιχειρηθείσα απόδοση τού «simplex» διά μέσου τής λέξεως «άπλοκο» (με το άλφα εδώ να επέχει θέση *στερητικού*) δεν ευσταθεί ούτε ετυμολογικώς ούτε σημασιολογικώς.

Για ευνόητους λόγους στον όρο *complex* προτιμάται να αντιστοιχίζονται *δύο* α-

---

kr-o-, μεταπτωτική βαθμίδα τού ΙΕ *(s)ker*, απ' όπου προκύπτει η λέξη *κρίκος* (= κυκλοειδές/δακτυλιοειδές αντικείμενο, κρικέλλι). Αμφότερες οι λέξεις *κύκλος* και *κίρκος* είναι ομηρικές.

[122] Π.χ., *ανακαλώ* [to take back or withdraw something one has said], *αναιρώ* [retract a promise/a statement], *αποκηρύσσω*, *αποσύρω* [to retract an amendment] κ.ά.

[123] Ρήματα, όπως τα «εισελκύω», «αποσύρω» κ.λπ. εστιάζουν σε μία *ειδικής φύσεως* ενέργεια (έλξη, απόσυρση). Αντιθέτως, το *συμπτύσσω/συμπτύσσομαι* αναφέρεται και σε γενικότερες ενέργειες. Παραδείγματα: The wheels retract after the aircraft takes off. [Οι τροχοί συμπτύσσονται μετά την απογείωση τού αεροσκάφους.] The pilot tried to retract the wheels. [Ο πιλότος προσπάθησε να πραγματοποιήσει σύμπτυξη τροχών.] The lung retracts, leaving the area for embolectomy clear. [Ο πνεύμονας συμπτύσσεται (αυτομάτως), αφήνοντας καθαρή την περιοχή για θωρακοτομή.]

ποδόσεις, μία *αλγεβρική* (π.χ., chain complex = αλυσωτό *σύμπλοκο*[124], βλ. εδ. 3.2.1) και μία *γεωμετρική/τοπολογική* (π.χ., simplicial complex = μονοπλεκτικό *σύμπλεγμα*[125], CW-complex = CW-*σύμπλεγμα*, βλ. εδ. D.1.15 και D.3.4).

(xiv) *triangular/triangularization/triangulation/triangulable/triangulated*. Στο μάθημα τής Γραμμικής Άλγεβρας μεταφράζουμε: triangular matrix = τριγωνικός πίνακας, triangularization of a matrix = τριγωνικοποίηση ενός πίνακα (διαδικασία, μέσω τής οποίας ένας πίνακας καθίσταται τριγωνικός) και triangulable matrix = τριγωνικοποιήσιμος πίνακας. Αντιθέτως, στη Συνδυαστική Τοπολογία, το *triangulation* αποδίδεται ως *τριγωνισμός* (ήτοι κατάτμηση σε τρίγωνα, βλ. εδ. D.1.21) από το ρήμα triangulate = τριγωνίζω[126], ο όρος *triangulable* ως *τριγωνίσιμος/η/ο* και ο όρος *triangulated* ως *τριγωνισμένος/η/ο*.

(xv) *manifold/variety/multiplicity*. Αυτή η τριάδα όρων συγκαταλέγεται αναμφιβόλως σε εκείνες που έχουν καταταλαιπωρηθεί στη σύγχρονη ελληνική μαθηματική βιβλιογραφία και αρθρογραφία· η δε χρήση τής λέξεως *πολλαπλότητα* για την απόδοση *και των τριών* (!) συνέτεινε σε μια σειρά λίαν επιζημίων παρανοήσεων, πολυσημιών και άκομψων μεταφραστικών επιλογών[127] εντός των τελευταίων εβδομήντα ετών[128]. Στην πραγματικότητα, η μόνη εξ αυτών των λέξεων που οφείλει να αποδίδεται ως *πολλαπλότητα* είναι η λέξη multiplicity. Οι άλλες δύο εισήχθησαν στην αγγλική *μαθηματική* βιβλιογραφία απλώς και μόνον ύστερα από μετάφραση τής γερμανικής λέξεως Mannigfaltigkeit και τής γαλλικής λέξεως variété, η χρήση των οποίων προηγείται επί τη βάσει των ιστορικών δεδομένων. Η ακριβής απόδοση αυτών έχει αποσαφηνισθεί προ πολλού μέσω τής ετυμολογίας τους, η οποία οδήγησε *και* στην ορθή στόχευση τής μαθηματικής διερμηνευτικής καταλήξεώς τους[129]: Εν προκειμένω, η λέξη Mannigfaltigkeit (manifold) σημαίνει *πολύπτυγμα* και η λέξη variété (variety) σημαίνει *ποικιλότητα*.

(xvi) *cup/cap product*. Η λέξη *cup* σημαίνει (στην καθομιλουμένη) κύπελλο ή φλιτζάνι και προέρχεται από τη λατινική *cupa* και την αρχαιοελληνική *κύπη*[130]. Βάσει μαρ-

[124] Προσοχή! Δεν χρησιμοποιείται ποτέ η λέξη *σύμπλοκο* ως μετάφραση τής λέξεως *coset*. Το *coset* αποδίδεται ως *πλευρική κλάση* κατά τον αντίστοιχο γερμανικό όρο *Nebenklasse*. (Η εμμονή σε πεπαλαιωμένη ορολογία (βλ. παραδόσεις τού Dedekind στο Χειμερινό Εξάμηνο τού 1855/56 στο Πανεπιστήμιο τού Göttingen) σαφώς βλάπτει. Ο ίδιος ο van der Waerden (ενδεχομένως και άθελά του) ήταν αυτός που έδωσε τέλος στη χαοτική πολυσημία των αρχών τού εικοστού αιώνα, διότι χρησιμοποίησε *και* τον όρο Nebenklasse, ο οποίος τελικώς και επεβλήθη έναντι όλων των άλλων που ήταν τότε διαθέσιμοι. (Βλ. Algebra I, Springer, 1936, σελ. 25.))

[125] Από καθαρώς γλωσσολογική άποψη, ως *μονοπλεκτικό σύμπλεγμα* νοείται ένα (μαθηματικό) αντικείμενο, το οποίο μπορεί να παρουσιασθεί ως πολύπλοκη ένωση ή συναρμολόγηση συνδεδεμένων πραγμάτων ή μερών, καθένα των οποίων αποτελεί ένα μονόπλοκο.

[126] Κατ' αναλογίαν τού *τετραγωνίζω*.

[127] Πώς θα μετέφραζαν άραγε οι αυτόκλητοι τοποτηρητές για τη διατήρηση κακοποιημένων αποδόσεων όρων το ακόλουθο; Let X be the affine hypersurface $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \,|\, z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\}$, having as unique singularity the origin with *multiplicity* 2. X can be viewed as a complex *variety* of dimension 2. Blowing up X at the origin, we obtain a resolution $Y \longrightarrow X$ of its singularity. Thus, Y is a two-dimensional complex *manifold*.

[128] Ένα είδος χαοτικής πολυσημίας γι' αυτούς τους όρους είχε επικρατήσει *και* στη διεθνή βιβλιογραφία και αρθρογραφία, αλλά *μόνον για όσο διάστημα* οι μαθηματικοί κλάδοι που τους χρησιμοποιούσαν βρίσκονταν «εν τη γενέσει» τους ή -τουλάχιστον- όταν έκαναν τα πρώτα τους βήματα. Εντούτοις, καθένας από τους εν λόγω όρους έχει πλέον λάβει ένα *οριστικό*, *μονοσήμαντο* και *ευδιάκριτο* νόημα ήδη από τις αρχές τής δεκαετίας τού 1940 (κι αυτό αφορά τώρα πια σε όλα τα σύγχρονα ξενόγλωσσα μαθηματικά άρθρα και βιβλία).

[129] Βλ. τον σχετικό εκτενή σχολιασμό τού Δ. Νταή στις σελ. xiv-xviii τού προλόγου τής μεταφράσεως τού βιβλίου τού M. Do Carmo: *Differential Forms and Applications*, Leaderbooks, Αθήνα, 2010.

[130] Ομόρριζα με το ρήμα κύπτω (= σκύβω) είναι, μεταξύ άλλων, και τα ουσιαστικά *κύμβος* (= ποτήρι), *κύπη* (= κοί-

τυριών και ευρημάτων (επί παραδείγματι, από τον λυρικό Ανακρέοντα, περί το 540 π.Χ., από τον Ξενοφώντα στην «Κύρου Παιδεία», περί το 401 π.Χ., κ.ά., μέχρι και τον ρήτορα Θεμίστιο, περί το 335 μ.Χ., και τον Φώτιο, περί το 850 μ.Χ.) γνωρίζουμε ότι ήδη από την αρχαιότητα για το κύπελλο/ποτήρι (συνήθως με καμπύλη λαβή, για την άντληση τού οίνου από τον κρατήρα και ως μέτρο αναμείξεως) εχρησιμοποιείτο κατά κύριο λόγο *ο κύαθος* [προερχόμενος από το ρήμα *κυέω* (= κυοφορώ, εγκυμονώ), όπως και οι λέξεις *κύλιξ*, *κοίλος*, *κύημα*, *κύμα* κ.ά.] ή το υποκοριστικό του *κυάθιον* (ποτηράκι, φλιτζανάκι).

Εδώ το *cup product* αποδίδεται ως *κυαθώδες γινόμενο*, καθόσον το επίθετο *κυαθώδης* (= εν είδει κυάθου, κάτι που ομοιάζει με κύαθον) ευρίσκετο εν χρήσει τουλάχιστον από την εποχή τού Αθήναιου[131] (τού Ναυκρατίτη, τέλη 2ου - αρχές 3ου μ.Χ. αιώνα). Στο ίδρυμα Παύλου και Αλεξάνδρας Κανελλοπούλου (στην Πλάκα) εκτίθεται ο παράπλευρος μελανόμορφος κύαθος (με παράσταση τού Διονύσου εντός του και ζεύγη Σατύρων και Μαινάδων στο εξωτερικό του περίβλημα). [Περίπου τού 500 π.Χ.]

Από την άλλη μεριά, το ρήμα *cap* σημαίνει *σκέπω*[132] (= σκεπάζω, εξ ου και το σκέπασμα, σκέπαστρον κ.ά.), καλύπτω (εξ ου και τα καλύπτρα, καλυπτήρ, κάλυψη κ.ά.) ή πωματίζω. Το ουσιαστικό *cap* συνήθως χρησιμοποιείται στην καθομιλουμένη ως ένα είδος *καλύμματος κεφαλής*, ως καπέλο (εκ τού λατ. cappellum), σκούφος, κασκέτο, πηλήκιο, τραγιάσκα ή κουκούλα (εκ τού cappa[133]). Εδώ το *cap product* αποδίδεται (κατ' αναλογίαν προς το *κυαθώδες γινόμενο*) ως *σκεπώδες γινόμενο*.

(xvii) *bundle/pencil/sheaf*. Ως γνωστόν, bundle = δέσμη. (Επί παραδείγματι, tangent bundle = εφαπτόμενη δέσμη, fiber bundle = ινική δέσμη.) Ο *γεωμετρικός* όρος *pencil* (γερμανιστί, *Büschel*[134]) αποδίδεται ως *δεσμίδα* ή ως *δέσμημα*. (Π.χ., pencil of conics = δεσμίδα κωνικών [τομών], pencil of curves = δεσμίδα καμπυλών, pencil of planes = δέσμημα επιπέδων, pencil of complexes = δέσμημα συμπλεγμάτων κ.ά.) Τέλος, ο όρος *sheaf* (γαλλιστί *faisceau*, γερμανιστί *Garbe*) αποδίδεται ως *δράγμα* (εκ τού ρήματος *δράττομαι/δράσσομαι*, το κοι-

λωμα) και *κύπελλον*, καθώς και τα *κύμβη* (= κοίλο αγγείο // λέμβος, πλοιάριο) και *κύμβαλον* (είδος μουσικού οργάνου, αποτελούμενου από δύο μεταλλικά κοίλα ημισφαίρια που τα χτυπούσαν μεταξύ τους στις εορτές τού Βάκχου και τής Κυβέλης).

[131] Πρβλ. H.G. Liddell & R. Scott: Μέγα Λεξικόν τής Ελληνικής Γλώσσης, σε μετάφραση Ξ.Π. Μόσχου, Εκδοτικός οίκος «Ι. Σιδέρης», Αθήναι, 1907, Τόμος ΙΙ, σελ. 788.

[132] Παραδείγματα: cloud-capped = νεφοσκεπής, snow-capped = χιονοσκεπής, το *καπό* είναι το «σκέπαστρο τής μηχανής τού αυτοκινήτου» (από το γαλλικό capot) κ.ά.

[133] Την ονομασία *Καπουτσίνοι* (Cappuccini) έλαβαν εξαιτίας τής μακράς κουκούλας τους οι Φραγκισκανοί μοναχοί τού τάγματος που ίδρυσε ο Matteo da Bascio τον 16ο αιώνα. Η σημασία «είδος καφέ» εξηγείται από την ομοιότητα τού χρώματος τού καφέ με το χρώμα τής κουκούλας αυτών των μοναχών.

[134] Στην καθομιλουμένη το *Büschel* σημαίνει *μάτσο/ματσάκι* ή [για μαλλιά] *τούφα*.

νώς λεγόμενο *χερόβολο* στην αγροτική ορολογία) και σημαίνει (στα Μαθηματικά) *κάτι προσομοιάζον* με δεμάτι ή σώρευμα [συνήθως σταχυών (όπως το άνωθι εικονιζόμενο) ή στελεχών άλλων ομοειδών φυτών].

▸ **Γλώσσα και σύστημα τονισμού.** Κατεβλήθη προσπάθεια, ούτως ώστε να αποφευχθούν ακρότητες ένθεν κακείθεν: Ούτε επανάκαμψη σε μία «ξύλινη» γλώσσα ούτε -εκ διαμέτρου αντίθετος- εξοβελισμός απολύτως απαραίτητων λόγιων λέξεων και εκφράσεων στο όνομα μιας κακώς εννοούμενης νεολογικής, δήθεν μεταρρυθμιστικής πρακτικής. Ως προς το σύστημα τονισμού των λέξεων, χρησιμοποιείται το μονοτονικό με κάποιες ελαφρές τροποποιήσεις (εξαιτίας των γνωστών λειτουργικών προβλημάτων τού «καθιερωμένου»)[135]. Τα μονοσύλλαβα *του*/*της*/*του* τονίζονται *αυτομάτως* όταν επέχουν θέση γενικής τού οριστικού άρθρου για να διαχωρίζονται ευχερέστερα από τα αντίστοιχα κτητικά και να διευκολύνεται τόσον η εργασία τού εκάστοτε γράφοντος όσον και η ροή τής αναγνώσεως. (Η λέξη «*των*» θα επέχει πάντοτε θέση άρθρου και, ως εκ τούτου, δεν κρίνεται ως αναγκαία η τονοδότησή της.) Στις λοιπές περιπτώσεις εμφανίσεως διφορούμενων μονοσύλλαβων προσωπικών αντωνυμιών (εννοείται εν σχέσει προς τις όμορές τους λέξεις εντός τού κειμένου) ο τόνος σημειώνεται σύμφωνα με τον (από πολλούς σπανίως εφαρμοζόμενο) «κανόνα» 2 (γ) τού «επίσημου» μονοτονικού[136].

▸ **Τρόπος αριθμήσεως εδαφίων, σχέσεων κ.ά.** Για την κατάταξη των εδαφίων (λημμάτων, προτάσεων, θεωρημάτων, πορισμάτων, σημειώσεων, παρατηρήσεων κ.ά.) χρησιμοποιείται τριπλή αρίθμηση (με παρεμβολή δύο τελειών): Στο κυρίως κείμενο, ο πρώτος αριθμός δηλοί τον αριθμό τού κεφαλαίου, ο δεύτερος τον αριθμό τής ενότητας και ο τρίτος τον αριθμό τού εδαφίου. Στα παραρτήματα, τη θέση τού πρώτου αριθμού καταλαμβάνουν τα λατινικά κεφαλαία γράμματα (A, B, C, D και E, μέσω των οποίων έχει γίνει η αντίστοιχη απαρίθμηση). Για την κατάταξη των σχέσεων (εξισώσεων, διαγραμμάτων κ.ά.) ακολουθείται διπλή αρίθμηση εντός παρενθέσεων. (Και εδώ, ο πρώτος αριθμός ή, αντιστοίχως, το πρώτο λατινικό κεφαλαίο γράμμα, δηλοί το κεφάλαιο ή το παράρτημα και ο δεύτερος τον αριθμό τής εκάστοτε σχέσεως.) Για την κατάταξη των υποσημειώσεων χρησιμοποιείται (ξεχωριστά για το κάθε κεφάλαιο) μονή αρίθμηση εν είδει εκθέτη.

▸ **Παραπομπές και ευρετήρια.** Κατ' αρχάς παρατίθεται ο κατάλογος των *κυριότερων συμβόλων* που χρησιμοποιούνται στην εργασία. (Βλ. σελίδα lvii. Σημειωτέον ότι για την ανάγνωση τού κεφαλαίου 6 απαιτείται να υπάρχει εξοικείωση με τα κύρια σύμβολα τα εισαχθέντα στην ενότητα A.4. Κατ' αναλογίαν, στα κεφάλαια 7 και 8 χρησιμοποιούνται ελευθέρως τα σύμβολα τα εισαχθέντα στα παραρτήματα B, C, D και E.) Αριθμοί εντός αγκυλών παραπέμπουν σε εγγραφές τού *βιβλιογραφικού καταλόγου* (που ξεκινά από τη σελίδα 803). Άλλες, ειδικής φύσεως παραπομπές, σε άρθρα ή ειδικότερα συγγράμματα συναντώνται και στις υποσημειώσεις (και προς το τέλος κάποιων ενοτήτων). Τα *ευρετήρια των όρων* και *των ονομάτων* είναι τοποθετημένα μετά το πέρας των πέντε παραρτημάτων. Στην ηλεκτρονική εκδοχή,

---

[135] Πρόκειται για σύστημα τονισμού σχεδόν πανομοιότυπο εκείνου, το οποίο εφαρμόζεται (ως «συμβιβαστική λύση») σε πολλά έργα των Χ. Κλαίρη, Γ. Μπαμπινιώτη και άλλων.

[136] Βλ. *Νεοελληνική Γραμματική*. (Αναπροσαρμογή τής Νεοελληνικής Γραμματικής τού Μ. Τριανταφυλλίδη), Ο.Ε.Δ.-Β., Εκδ. Θ′, 1986, σελ. 24.

υπάρχει αφ' ενός μεν η δυνατότητα εμφανίσεως σελιδοδεικτών (bookmarks), αφ' ετέρου δε η δυνατότητα πλοηγήσεως (με οποιοδήποτε πρόγραμμα αναγνώσεως αρχείων pdf, πατώντας στα σημειούμενα με μπλε χρώμα[137]), καθώς και επανόδου[138] και εναλλαγής μεταξύ περιττών και αρτίων σελίδων[139].

▸ **Λοιπά τεχνικά δεδομένα.** Το κείμενο εγράφη στον συντάκτη ανοικτού κώδικα TeXstudio (των Benito van der Zander, Jan Sundermeyer, Daniel Braun και Tim Hoffmann) με το πρόγραμμα ηλεκτρονικής στοιχειοθεσίας[140] XeLaTeX (το γνωστό LaTeX τού Frank Mittelbach, μαζί με τη δυνατότητα επεξεργασίας αρχείων που ακολουθούν την κωδικοποίηση UTF-8 τού Unicode), συνεπικουρούμενο (κυρίως) από τα πακέτα εντολών amsmath, amssymb, amsthm, mdframed και hyperref, τα δε (μεταθετικά ή μη) διαγράμματα και οι σχηματικές αποτυπώσεις των ακριβών ακολουθιών δημιουργήθηκαν (στο σύνολό τους) με τη βοήθεια τού ελευθέρως προσβάσιμου λογισμικού προγράμματος XY-pic (των Kristoffer Rose και Ross Moore), σε περιβάλλον Windows 10.

▸ **Ευχαριστίες.** (i) Στο σημείο αυτό επιθυμώ να απευθύνω τις θερμότατες ευχαριστίες μου σε δύο καθηγητές που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση τού τρόπου μελέτης μου και στην εν γένει μαθηματική μου κατάρτιση κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών μου σπουδών:

(α) Στον κύριο Δημήτριο Νταή για τη διδασκαλία τεσσάρων (αλγεβρικών και αλγεβροτοπολογικών) μαθημάτων[141], για το ότι υπήρξε ο επιβλέψας τής παρούσας εργασίας (έχοντας επιλέξει αυτήν την τόσο ενδιαφέρουσα θεματική, έχοντάς με κατευθύνει καταλλήλως μέσω τής αντίστοιχης βιβλιογραφίας και αρθρογραφίας, τής μαθηματικής ιστοριογραφίας συμπεριλαμβανομένης, και έχοντάς μου διαθέσει όλες τις προσωπικές σημειώσεις των ανά καιρούς σχετικών παραδόσεών του), για τον χρόνο που μου αφιέρωνε για την απάντηση αποριών και ερωτημάτων (που αφορούσαν σε πληθώρα τεχνικών αποδείξεων και διευκρινιστικών λεπτομερειών), καθώς και για τη συνεχή παρουσία του κατά την επίπονη και πολλάκις επαναλαμβανόμενη διαδικασία διορθώσεων των (αρχικών και κατοπινών, φυσικών και ηλεκτρονικών) δοκιμίων. Ο ενθουσιασμός του για τα Μαθηματικά αποτέλεσαν για εμένα πηγή εμπνεύσεως και ενθαρρύνσεως.

(β) Στον κύριο Ulrich Görtz. Κατά το Εαρινό Εξάμηνο τού 2018 είχα την τύχη να διδαχθώ από αυτόν στο Τμήμα Μαθηματικών τού Πανεπιστημίου τού Essen τής

[137] Για καλύτερο «πάτημα» συνιστάται η χρήση τού «select tool» που επιλέγεται (συνήθως) με δεξί κλικ.

[138] Π.χ., εάν κανείς εργάζεται με τον Adobe Acrobat Reader DC, αρκεί να πατήσει προς τούτο (ταυτοχρόνως) τα πλήκτρα Alt + Left Arrow (ή, εναλλακτικώς, το κουμπί με την ένδειξη Previous View). Ανάλογες εντολές υφίστανται και για άλλους pdf readers, όπως τους Pdfexchange Viewer, Sumatra PDF, Foxit PDF Reader, Gaaiho Reader κ.ά.

[139] Με check ή uncheck στο τέλος των ενεργειών: view → page display → show cover page in two page view (Adobe Acrobat Reader DC), view → page layout → show cover page in facing mode (Pdfexchange Viewer), προβολή → αντικριστές σελίδες (Sumatra PDF), view → separate cover page (Foxit PDF Reader), separate cover page (Gaaiho Reader, στην κάτω μπάρα), κ.λπ.

[140] Βλ. Α. Συρόπουλου: *Ψηφιακή τυπογραφία με το* XeLaTeX, εκδόσεις «Επίκεντρο», 2010, και Α. Δήμου & Α. Συρόπουλου: *Το* XeLaTeX *για αρχάριους*, εκδόσεις «Κλειδάριθμος», 2020.

[141] Αυτά ήταν τα κατ' επιλογήν προπτυχιακά μαθήματα «Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ» (με κωδικό αρ. ΜΕΜ 223) [Χειμερινό Εξάμηνο 2018-2019], «Θεωρία Δακτυλίων και Μοδίων» (ΜΕΜ 226) [Εαρινό Εξάμηνο 2019], και «Θέματα Άλγεβρας: Ομολογική Άλγεβρα» (ΜΕΜ-Θ.2 02) [Εαρινό Εξάμηνο 2020], καθώς και το μεταπτυχιακό μάθημα «Αλγεβρική Τοπολογία-Ομολογία» (Γ 3) [Εαρινό Εξάμηνο 2020].

Γερμανίας (στο οποίο είχα βρεθεί μέσω τού Προγράμματος Erasmus). Εκείνο το Ακαδημαϊκό Εξάμηνο αποτέλεσε κομβικό σημείο για την κλίση μου σε αλγεβρικά μαθήματα και την περαιτέρω πορεία μου, και υπήρξε ένα από τα ομορφότερα των προπτυχιακών μου σπουδών. Επιθυμώ να τού εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου για τα συναρπαστικά Μαθηματικά που μου δίδαξε, καθώς και για το σεμινάριο στο οποίο με άφησε να λάβω μέρος.

(ii) Επιθυμώ, επιπροσθέτως, να απευθύνω τις ευχαριστίες μου στον κύριο Αλέξανδρο Κουβιδάκη και στον κύριο Θεμιστοκλή Μήτση που (μαζί με τον κύριο Νταή) αποτέλεσαν τα μέλη τής Επιτροπής Αξιολογήσεως τής παρούσας εργασίας.

(iii) Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω σε όλους μου τους φίλους και συναδέλφους. Ιδιαιτέρως, ευχαριστώ τους: Ανδρέα Μουντάκη, Γιάννη Νιράκη, Λεωνίδα Δασκαλάκη (για όλα τα χρόνια που μοιραστήκαμε στο Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών τού Πανεπιστημίου Κρήτης) και τον Χρήστο Λυπιρίδη (για τη φιλία μας που μετράει σχεδόν 15 χρόνια).

(iv) Ευχαριστώ, επίσης, τη σύντροφό μου Μαρία Τσαλκιτζίδου, στο πρόσωπο τής οποίας βλέπω έναν άνθρωπο που με ακούει και με υποστηρίζει. Τέλος, θέλω να αποταθώ στην οικογένειά μου και ιδιαιτέρως στον αδερφό μου Ραφαήλ και στους γονείς μου Ελένη και Στέργιο. Χωρίς την δική τους οικονομική, ψυχολογική και πνευματική συμπαράσταση, αυτή η πτυχιακή εργασία δεν θα υπήρχε. Οτιδήποτε έχω καταφέρει, το οφείλω σε αυτούς. Τους ευχαριστώ πολύ για όλα όσα έχουν κάνει, συνεχίζουν να κάνουν και θα κάνουν και στο μέλλον για εμένα.

Ι. Τσελεπίδης

E-mail: iord.tsele@gmail.com

Κατάλογος κυριότερων συμβόλων

Πρόκειται για τον κατάλογο μόνον των *κυριότερων* συμβόλων (και όχι των ενίοτε *περιστασιακώς* χρησιμοποιούμενων εντός αποδείξεων και επεξηγηματικών σχολίων). Οι παρατιθέμενες σελίδες (στη δεξιά στήλη) είναι αυτές τού ορισμού τής σημασίας τους.

Κεφάλαιο 1

Κεφάλαιο 2

Κεφάλαιο 3

$Z_n(\mathbf{M}_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n)$	το σύνολο των n-οστών κυκλημάτων τού $\mathbf{M}_\bullet$	172
$B_n(\mathbf{M}_\bullet) := \mathrm{Im}(d_{n+1})$	το σύνολο των n-οστών συνόρων τού $\mathbf{M}_\bullet$	172
$H_n(\mathbf{M}_\bullet)$	ο n-οστός μόδιος ομολογίας $Z_n(\mathbf{M}_\bullet)/B_n(\mathbf{M}_\bullet)$ τού $\mathbf{M}_\bullet$	172
$H_n(f_\bullet)$	ο μοναδικός ομομορφισμός R-μοδίων (από τον $H_n(\mathbf{M}_\bullet)$ στον $H_n(\mathbf{M}'_\bullet)$) ο επαγόμενος μέσω ενός αλυσωτού μετασχηματισμού $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$	173
$\bigoplus_{j\in J} \mathbf{M}_{j,\bullet}$	το ευθύ άθροισμα των μελών μιας οικογενείας αλυσωτών συμπλόκων $(\mathbf{M}_{j,\bullet})_{j\in J}$	175
$\prod_{j\in J} \mathbf{M}_{j,\bullet}$	το ευθύ γινόμενο μελών μιας οικογενείας αλυσωτών συμπλόκων $(\mathbf{M}_{j,\bullet})_{j\in J}$	175
∂_n	ο συνδετικός ομομορφισμός (από τον $H_n(\mathbf{M}''_\bullet)$ στον $H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)$) για την (3.17))	177
$\mathbf{M}_\bullet/\mathbf{M}'_\bullet$	πηλικοσύμπλοκο τού $\mathbf{M}_\bullet$ ως προς το $\mathbf{M}'_\bullet$	182
$\mathbf{M}^\bullet$ $(= (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}})$	συμβολισμός για ένα συναλυσωτό σύμπλοκο	186
$d^n_{\mathbf{M}^\bullet} := d^n,\ n \in \mathbb{Z}$	συσσυνοριακοί τελεστές (ή συνδιαφορικά) τού $\mathbf{M}^\bullet$	186
$Z^n(\mathbf{M}^\bullet) := \mathrm{Ker}(d^n)$	το σύνολο των n-οστών συγκυκλημάτων τού $\mathbf{M}^\bullet$	186
$B^n(\mathbf{M}^\bullet) := \mathrm{Im}(d^{n-1})$	το σύνολο των n-οστών συσσυνόρων τού $\mathbf{M}^\bullet$	186
$H^n(\mathbf{M}^\bullet)$	ο n-οστός μόδιος συνομολογίας $Z^n(\mathbf{M}^\bullet)/B^n(\mathbf{M}^\bullet)$ τού $\mathbf{M}^\bullet$	186
$H^n(f^\bullet)$	ο μοναδικός ομομορφισμός R-μοδίων (από τον $H^n(\mathbf{M}^\bullet)$ στον $H^n(\mathbf{M}'^\bullet)$) ο επαγόμενος μέσω ενός συναλυσωτού μετασχηματισμού $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$	187
$\bigoplus_{j\in J} \mathbf{M}^{j,\bullet}$	το ευθύ άθροισμα των μελών μιας οικογενείας συναλυσωτών συμπλόκων $(\mathbf{M}^{j,\bullet})_{j\in J}$	188
$\prod_{j\in J} \mathbf{M}^{j,\bullet}$	το ευθύ γινόμενο των μελών μιας οικογενείας συναλυσωτών συμπλόκων $(\mathbf{M}^{j,\bullet})_{j\in J}$	188
∂^n	ο αντίστοιχος συνδετικός ομομορφισμός (από τον $H^n(\mathbf{M}''^\bullet)$ στον $H^{n+1}(\mathbf{M}'^\bullet)$) για την (3.29))	190
$\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet$	η τομή δυο υποσυμπλόκων ενός αλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{M}_\bullet$	191
$\mathbf{M}'_\bullet + \mathbf{M}''_\bullet$	το άθροισμα δυο υποσυμπλόκων ενός αλ. συμπλόκου $\mathbf{M}_\bullet$	191
$\chi_R(\mathbf{M}_\bullet)$	η χαρακτηριστική Euler $\sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q\ \text{fr-rank}_R(M_q)$ ενός πεπερασμένου αλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ως προς μια Π.Κ.Ι. R	199
$(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$	οι αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ είναι (αλυσωτώς) ομότοποι μέσω τής αλυσωτής ομοτοπίας $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$	201
$(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} \simeq \mathbf{0}_\bullet$	η $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι συστέλλουσα αλυσωτή ομοτοπία (για το $\mathbf{M}_\bullet$) και το $\mathbf{M}_\bullet$ συσταλτό αλυσωτό σύμπλοκο	201
$(h^n)_{n\in\mathbb{Z}} : f^\bullet \simeq g^\bullet$	οι συναλυσωτοί μετασχηματισμοί $f^\bullet, g^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \to \mathbf{M}'^\bullet$ είναι (συναλυσωτώς) ομότοποι μέσω τής $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}}$	202
$(h^n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{M}^\bullet} \simeq \mathbf{0}^\bullet$	η $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι συστέλλουσα συναλυσωτή ομοτοπία (για το $\mathbf{M}^\bullet$) και το $\mathbf{M}^\bullet$ συσταλτό συναλυσωτό σύμπλοκο	202
$\mathbf{C}(f)_\bullet$	ο αλγεβρικός κώνος ενός αλυσωτού μετασχηματισμού $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$	206
$\mathbf{C}(f)^\bullet$	ο αλγεβρικός κώνος ενός συναλυσωτού μετασχηματισμού $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$	208

Κεφάλαιο 4

Κεφάλαιο 5

Κεφάλαιο 6

Κεφάλαιο 7

$\mathrm{cone}_+(X)$	$p(X\times[0,1])$, όπου $p: X\times[-1,1]\longrightarrow \Sigma X$ η φυσική επίρριψη	385
$\mathrm{cone}_-(X)$	$p(X\times[-1,0])$, όπου $p: X\times[-1,1]\longrightarrow \Sigma X$ η φυσική επίρριψη	385
$\mathbb{T}^d$	ο d-διάστατος (μοναδιαίος) τόρος $\underbrace{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1}_{d\ \text{φορές}}$	388

Κεφάλαιο 8

$H_n^{\text{sing.}}(X,A;M)$	ο n-οστός μόδιος ιδιάζουσας ομολογίας ενός τοπολογικού ζεύγους (X,A) με συντελεστές ειλημμένους από έναν R-μόδιο M	425
$H_n^{\text{sing.}}(X;M)$	ο n-οστός μόδιος ιδιάζουσας ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου X με συντελεστές ειλημμένους από έναν R-μόδιο M	426
$H^n_{\text{sing.}}(X,A;M)$	ο n-οστός μόδιος ιδιάζουσας συνομολογίας ενός τοπολογικού ζεύγους (X,A) με συντελεστές ειλημμένους από έναν R-μόδιο M	427
$H^n_{\text{sing.}}(X;M)$	ο n-οστός μόδιος ιδιάζουσας συνομολογίας ενός τοπολογικού χώρου X με συντελεστές ειλημμένους από έναν R-μόδιο M	427
$\mathsf{AW}_\bullet$	ο μετασχηματισμός $S_\bullet(X\times Y;R)\longrightarrow (S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet$ των Alexander και Whitney	439
K_S	ο κανονιστικός διαιρέτης μιας ομαλής συμπαγούς μιγαδικής επιφάνειας S	449
$p_g(S)$	το γεωμετρικό γένος $\dim_{\mathbb{C}} H^0(S,\mathscr{O}_S(K_S))$ μιας ομαλής συμπαγούς μιγαδικής επιφάνειας S	449
$q(S)$	η ακανονιστία $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S,\mathscr{O}_S)$ μιας ομαλής συμπαγούς μιγαδικής επιφάνειας S	449
$\mathrm{kod}(S)$	η λεγόμενη *διάσταση Kodaira* μιας ομαλής συμπαγούς μιγαδικής επιφάνειας S	449
$\boldsymbol{\pi}_n(X)$ $(n\geqslant 2)$	η n-οστή ομάδα ομοτοπίας ενός δρομοσυνεκτικού και n φορές απλού τοπολογικού χώρου X (βλ. [87], εδ. 16.3.14, σελ. 415)	455

Παράρτημα A

$\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$	η κλάση των αντικειμένων τής κατηγορίας $\mathscr{C}$	469
$\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B)$	η οικογένεια των μορφισμών από το $A\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ στο $B\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$	469
$\mathfrak{Sets}$	η κατηγορία των συνόλων	470
$\mathfrak{Groups}$	η κατηγορία των ομάδων	470
$\mathfrak{Mod}_R$	η κατηγορία των R-μοδίων	470
$\mathfrak{FSets}$	η κατηγορία των συνόλων που είναι το πολύ πεπερασμένα	470
$\mathfrak{Abgroups}$	η κατηγορία των αβελιανών ομάδων	470
$\mathfrak{Mod}_R^{\mathbb{Z}}$	η κατηγορία των ακολουθιών R-μοδίων με το $\mathbb{Z}$ ως το σύνολο των δεικτών τους	470
$\mathrm{Comp}^{\text{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$	η κατηγορία των αλυσωτών συμπλόκων	470
$\mathrm{Comp}^{\text{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)$	η κατηγορία των συναλυσωτών συμπλόκων	470
$\mathfrak{Top}$	η κατηγορία των τοπολογικών χώρων	470
$\mathfrak{Top}^{[2]}$	η κατηγορία των τοπολογικών ζευγών	470
$\mathfrak{Top}^{\text{εστ.}}$	η κατηγορία των εστιγμένων τοπολογικών χώρων	471

$\mathbf{F}_L$	ο σταθερός συναρτητής $\mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ που στέλνει κάθε αντικείμενο τής $\mathscr{C}$ να απεικονισθεί σε έναν παγιωμένο R-μόδιο L και οιονδήποτε μορφισμό τής $\mathscr{C}$ να απεικονισθεί στον ταυτοτικό id_L 611
$\mathbf{Fr}_R$	ο ελεύθερος συναρτητής $\mathfrak{Sets} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ ο οποίος στέλνει κάθε σύνολο $\mathscr{X}$ να απεικονισθεί στο $\mathbf{Fr}_R(\mathscr{X})$, ήτοι στο $R^{(\mathscr{X})}$ (όταν $\mathscr{X} \neq \varnothing$) και σε έναν τετριμμένο R-μόδιο (όταν $\mathscr{X} = \varnothing$), και κάθε απεικόνιση $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ να απεικονισθεί στη γραμμική επέκταση τής $\mathscr{X} \ni x \mapsto (f \circ j_{\mathscr{Y}})(x) \in \mathbf{Fr}_R(\mathscr{Y})$, όπου $j_{\mathscr{X}} : \mathscr{X} \hookrightarrow \mathbf{Fr}_R(\mathscr{X})$ η συνήθης ένριψη 612
$\mathbf{P}_i$ $(i \in \mathbb{Z})$	η i-οστή προβολή $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ που στέλνει κάθε αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{M}_\bullet = (M_\nu, d_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}}$ να απεικονισθεί στον M_i και κάθε αλυσωτό μετασχηματισμό $f_\bullet$ στον f_i 617

<u>Παράρτημα B</u>

$\mathrm{int}_X(A)$	το τοπολογικό εσωτερικό (ή ο ανοικτός πυρήνας) ενός υποσυνόλου A τού υποκειμένου συνόλου X ενός τοπολογικού χώρου 623
$\mathrm{cl}_X(A)$	η κλειστή θήκη (ή το κλειστό περίβλημα) ενός υποσυνόλου A ενός τοπολογικού χώρου X 623
$\mathrm{frnt}_X(A)$	η μεθόριος ενός υποσυνόλου A ενός τοπολογικού χώρου X 623
$X \approx Y$	συμβολισμός που δηλοί ότι οι τοπολογικοί χώροι X και Y είναι ομοιομορφικοί 624
$X \not\approx Y$	οι X και Y δεν είναι ομοιομορφικοί 624
$\mathbb{R}^0$	$\{0\}$ 625
$\mathbb{R}^d$ $(d \geqslant 1)$	ο d-διάστατος ευκλείδειος χώρος 624
$\mathbb{B}^1$	$[-1, 1]$ 625
$\mathbb{B}^2$	ο μοναδιαίος δίσκος $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\|\mathbf{x}\|\| \leqslant 1\}$ 625
$\mathbb{B}^d$ $(d \geqslant 3)$	η d-διάστατη μοναδιαία μπάλα $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\|\mathbf{x}\|\| \leqslant 1\}$ 624
$\mathbb{S}^{-1}$	$\varnothing$ 625
$\mathbb{S}^0$	$\{\pm 1\}$ 625
$\mathbb{S}^1$	ο μοναδιαίος κύκλος $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\|\mathbf{x}\|\| = 1\}$ 624
$\mathbb{S}^{d-1}$ $(d \geqslant 3)$	η $(d-1)$-διάστατη μοναδιαία σφαίρα $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\|\mathbf{x}\|\| = 1\}$ 624
$\mathring{\mathbb{B}}^1$	$(-1, 1)$ 625
$\mathring{\mathbb{B}}^2$	ο μοναδιαίος ανοικτός δίσκος $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\|\mathbf{x}\|\| < 1\}$ 624
$\mathring{\mathbb{B}}^d$ $(d \geqslant 1)$	το d-διάστατο μοναδιαίο κύτταρο $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\|\mathbf{x}\|\| < 1\}$ 624
$\mathbf{I}$ $(= \mathbf{I}^1)$	$[0, 1]$ 625
$\mathbf{I}^2$	το τετράγωνο $[0, 1] \times [0, 1]$ 625
$\mathbf{I}^d$ $(d \geqslant 3)$	$\{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \forall i \in \{1, ..., d\}\}$ (ήτοι ο d-διάστατος μοναδιαίος κύβος) 624
$\mathbb{S}^d_+$	το βόρειο ημισφαίριο $\{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d, x_{d+1}) \in \mathbb{S}^d \mid x_{d+1} \geqslant 0\}$ τής σφαίρας $\mathbb{S}^d$ 625
$\mathbb{S}^d_-$	το νότιο ημισφαίριο $\{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d, x_{d+1}) \in \mathbb{S}^d \mid x_{d+1} \leqslant 0\}$ τής $\mathbb{S}^d$ 625
P_+	ο βόρειος πόλος $(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{d\text{-φορές}}, 1)$ τής σφαίρας $\mathbb{S}^d$ 625
P_-	ο νότιος πόλος $(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{d\text{-φορές}}, -1)$ τής σφαίρας $\mathbb{S}^d$ 625

Παράρτημα C

Παράρτημα D

Παράρτημα Ε

$[X, \partial X; R]_{\text{f.cl.}}$	η θεμελιώδης κλάση ενός d-διάστατου συμπαγούς τοπολογικού πολυπτύγματος X *με σύνορο* ως προς τον δακτύλιο αναφοράς R 787
$[X, \partial X]_{\text{f.cl.}}$	$[X, \partial X; \mathbb{Z}]_{\text{f.cl.}}$ 787
PD	ο ισομορφισμός R-μοδίων $H^{d-n}_{\text{sing.}}(X; R) \ni \xi \mapsto \mathbf{PD}(\xi) := \xi \frown [X; R]_{\text{f.cl.}} \in H^{\text{sing.}}_n(X; R)$, όπου X είναι ένα d-διάστατο κλειστό τοπολογικό πολύπτυγμα εφοδιασμένο με έναν R-προσανατολισμό και $n \in \{0, ..., d\}$ 788
LD	ο ισομορφισμός R-μοδίων $H^{d-n}_{\text{sing.}}(X, \partial X; R) \ni \xi \mapsto \mathbf{LD}(\xi) := \xi \frown [X, \partial X; R]_{\text{f.cl.}} \in H^{\text{sing.}}_n(X; R)$, όπου X είναι ένα d-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα με σύνορο, εφοδιασμένο με έναν R-προσανατολισμό και $n \in \{0, ..., d\}$ .. 791
LD$'$	ο ισομορφισμός R-μοδίων $H^{d-n}_{\text{sing.}}(X; R) \ni \xi \mapsto \mathbf{LD}'(\xi) := \xi \frown [X, \partial X; R]_{\text{f.cl.}} \in H^{\text{sing.}}_n(X, \partial X; R)$, όπου X είναι ένα d-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα με σύνορο, εφοδιασμένο με έναν R-προσανατολισμό και $n \in \{0, ..., d\}$ .. 791
$\mathfrak{E}_{4g}$ $(g \geqslant 1)$	το συμπαγές κανονικό $4g$-γωνο $\text{conv}(\{z_n \mid 1 \leqslant n \leqslant 4g\}) \subsetneqq \mathbb{B}^2$ έχον ως κορυφές του τα σημεία $z_n := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{4g} n) \in \mathbb{S}^1$ 793
$X^{\text{or.}}_g$ $(g \geqslant 0)$	θεμελιακή προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους g, όπου $X^{\text{or.}}_0 := \mathbb{S}^2$ και (για $g \geqslant 1$) $X^{\text{or.}}_g := \mathfrak{E}_{4g}/\mathfrak{R}$ 793
$X \# Y$	το συνεκτικό άθροισμα δυο επιφανειών X και Y 794
$\mathfrak{E}_{2g}$ $(g \geqslant 2)$	το συμπαγές κανονικό $2g$-γωνο $\text{conv}(\{z_n \mid 1 \leqslant n \leqslant 2g\}) \subsetneqq \mathbb{B}^2$ έχον ως κορυφές του τα σημεία $z_n := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2g} n) \in \mathbb{S}^1$ 796
$X^{\text{nonor.}}_g$ $(g \geqslant 1)$	θεμελιακή μη προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους g, όπου εξ ορισμού $X^{\text{nonor.}}_1 := \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ και (για $g \geqslant 2$) $X^{\text{nonor.}}_g := \mathfrak{E}_{2g}/\mathfrak{R}'$ 796
$X^{\text{or.}}_{g,k}$	το αποτέλεσμα τής αφαιρέσεως τού εσωτερικού k σαφώς διακεκριμένων δίσκων από την $X^{\text{or.}}_g$, όπου $k \in \mathbb{N}$ 799
$X^{\text{nonor.}}_{g,k}$	το αποτέλεσμα τής αφαιρέσεως τού εσωτερικού k σαφώς διακεκριμένων δίσκων από την $X^{\text{nonor.}}_g$, όπου $k \in \mathbb{N}$ 799

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Δακτύλιοι και ακέραιες περιοχές

Τα πρώτα δύο κεφάλαια είναι προπαρασκευαστικά και περιλαμβάνουν σύντομες υπομνήσεις εννοιών και θεωρητικών αποτελεσμάτων που διδάσκεται κανείς παρακολουθώντας τις παραδόσεις τού μαθήματος[1] με κωδικό αριθμό `MEM226` (στο παρόν Πρόγραμμα Σπουδών τού Τμήματός μας). Εν πρώτοις περιγράφεται το πώς η κλάση των περιοχών κυρίων ιδεωδών τοποθετείται μεταξύ τής κλάσεως των σωμάτων και τής κλάσεως των περιοχών με μονοσήμαντη παραγοντοποίηση.

1.1 ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1.1.1 Ορισμός. Με τον όρο **δακτύλιος** θα εννοείται πάντοτε ένας *δακτύλιος* $(R, +, \cdot)$ *με μοναδιαίο στοιχείο*, ήτοι μια τριάδα αποτελούμενη από ένα μη κενό σύνολο R και δύο εσωτερικές πράξεις “$+$” και “$\cdot$” οριζόμενες επ' αυτού, που καλούνται (και συμβολίζονται ως) *πρόσθεση* και *πολλαπλασιασμός*, αντιστοίχως, ούτως ώστε

(i) το ζεύγος $(R, +)$ να είναι μια αβελιανή ομάδα,

(ii) το ζεύγος $(R, \cdot)$ να είναι ένα μονοειδές, και

(iii) η “$\cdot$” να είναι τόσον *εξ αριστερών* όσον και *εκ δεξιών επιμεριστική* ως προς την “$+$”, δηλαδή για κάθε a, b και $c \in R$ να ισχύει

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\,.$$

Το μεν ουδέτερο στοιχείο τής ομάδας $(R, +)$ καλείται **μηδενικό στοιχείο** τού $(R, +, \cdot)$ και σημειώνεται με το 0_R, το δε ουδέτερο στοιχείο τού μονοειδούς $(R, \cdot)$ καλείται **μοναδιαίο στοιχείο** τού $(R, +, \cdot)$ και σημειώνεται με το 1_R.

1.1.2 Σημείωση. Για λόγους συντομίας, είθισται αντί τού $a \cdot b$ να γράφουμε ab και όταν ομιλούμε για κάποιον «δακτύλιο R», να υπονοούμε τη θεώρηση μιας τριάδας

[1] Βλ., π.χ., τις σημειώσεις παραδόσεων [18]. (Διευκρίνιση: Εκεί, μεταξύ άλλων, γίνεται θεώρηση *και* δακτυλίων *χωρίς μοναδιαίο στοιχείο*, οπότε οι ορισμοί τού *υποδακτυλίου*, τού *ιδεώδους* αλλά και τού *ομομορφισμού* δακτυλίων είναι κατά τι γενικότεροι εκείνων που παρατίθενται στα εδάφια 1.1.6, 1.3.1 και 1.2.25 τής παρούσας εργασίας.)

$(R,+,\cdot)$ όπως στον ορισμό 1.1.1 χωρίς όμως και να τη σημειώνουμε. Επίσης, εάν[2] $n \in \mathbb{N}$ και εάν τα $a_1,\ldots,a_n$ είναι στοιχεία ενός δακτυλίου R, τότε χρησιμοποιούμε τις βραχυγραφίες

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + \cdots + a_n, \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot \cdots \cdot a_n.$$

Επίσης, για κάθε στοιχείο a ενός δακτυλίου R και έναν $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \cdot a}_{n \text{ φορές}}$$

και $a^0 := 1_R$. Προφανώς, $a^m a^n = a^{m+n}$ και $(a^m)^n = a^{mn}$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς m, n.

1.1.3 Ορισμός. Ένας δακτύλιος R λέγεται **μεταθετικός** όταν η πράξη τού πολλαπλασιασμού του είναι μεταθετική, δηλαδή όταν $ab = ba$ για κάθε $a, b \in R$.

1.1.4 Παραδείγματα. (i) Τα σύνολα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ των ακεραίων, των ρητών, των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών, αντιστοίχως, εφοδιασμένα με τις συνήθεις πράξεις τής προσθέσεως και τού πολλαπλασιασμού, αποτελούν τα πιο απλά παραδείγματα μεταθετικών δακτυλίων.

(ii) Έστω m ένας φυσικός αριθμός $\geqslant 1$. Η διμελής σχέση ισοτιμίας

$$a \sim_m b \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} [\text{ο } m \text{ διαιρεί τη διαφορά } a-b]$$

αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τού συνόλου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων. Για να δώσουμε έμφαση στην εξάρτηση από το m συμβολίζουμε ως

$$\ldots, [-2]_m, [-1]_m, [0]_m, [1]_m, [2]_m, \ldots$$

τις κλάσεις ισοδυναμίας των ακεραίων (ως προς την "$\sim_m$") και ως $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/\sim_m$ το *σύνολο των κλάσεων υπολοίπων (ή κλάσεων ισοτιμίας) των ακεραίων modulo* m). Το $\mathbb{Z}_m$ γράφεται σε «ανηγμένη[3] μορφή» ως ακολούθως[4]:

$$\boxed{\mathbb{Z}_m := \{[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m\}}$$

και αποτελεί έναν μεταθετικό δακτύλιο (με το $[1]_m$ ως μοναδιαίο στοιχείο[5]) βάσει των συνήθων πράξεων $[a]_m + [b]_m := [a+b]_m$ και $[a]_m \cdot [b]_m := [ab]_m$ για κάθε

[2] Ως συνήθως, συμβολίζουμε ως $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ τα σύνολα των φυσικών και των μη αρνητικών ακεραίων αριθμών, αντιστοίχως.

[3] Τούτο σημαίνει ότι τα εντός των αγκίστρων αναγραφόμενα στοιχεία είναι *σαφώς διακεκριμένα* (ήτοι ανά δύο διαφορετικά, αποκλείοντας την επανάληψη κάποιου εξ αυτών).

[4] Επειδή *κάθε* $a \in \mathbb{Z}$ μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή $a = qm + r$, όπου τα q και r είναι κατάλληλοι ακέραιοι αριθμοί και $0 \leqslant r < m$ (ήτοι το r είναι το υπόλοιπο τής διαιρέσεως τού a διά τού m), λαμβάνουμε την ισότητα $[a]_m = [r]_m$. Εξ αυτού συνάγεται ότι οι *σαφώς διακεκριμένες* κλάσεις ισοδυναμίας που διαθέτουμε είναι οι μόνον οι $[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m$.

[5] Όταν $m = 1$, έχουμε $[0]_1 = [1]_1$.

ζεύγος $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(iii) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $(R,+,\cdot)$ τυχών δακτύλιος. Το σύνολο $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ των **τετραγωνικών πινάκων** με εγγραφές ειλημμένες από τον R καθίσταται δακτύλιος μέσω τής συνήθους προσθετικής και τής συνήθους πολλαπλασιαστικής πράξεως:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} := (a_{ij}+b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \quad \mathbf{AB} := \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$

για οιουσδήποτε $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ και $\mathbf{B} = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$. Ο $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ έχει ως μοναδιαίο στοιχείο του τον *μοναδιαίο* $(n\times n)$*-πίνακα*

$$\mathbf{I}_n := \begin{pmatrix} 1_R & 0_R & \cdots & 0_R & 0_R \\ 0_R & 1_R & \cdots & 0_R & 0_R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_R & 0_R & \cdots & 1_R & 0_R \\ 0_R & 0_R & \cdots & 0_R & 1_R \end{pmatrix}.$$

Σημειωτέον ότι ο δακτύλιος $\mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ δεν είναι κατ' ανάγκην μεταθετικός, ακόμη και όταν ο ίδιος ο R είναι· εάν π.χ. ο R είναι μεταθετικός με $1_R \neq 0_R$, τότε ο $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(R)$ δεν είναι μεταθετικός, αφού

$$\begin{pmatrix} 0_R & 1_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1_R & 1_R \\ 0_R & 1_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_R & 1_R \\ 1_R & 1_R \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1_R & 1_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_R & 1_R \\ 0_R & 1_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_R & 1_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix}.$$

(iv) Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω R ένας δακτύλιος. Τότε το σύνολο των απεικονίσεων $R^X := \{\text{απεικονίσεις } f : X \longrightarrow R\}$ καθίσταται δακτύλιος μέσω των «σημειακών» πράξεων

$$f+g : X \longrightarrow R, \quad x \longmapsto f(x)+g(x)$$
$$f\cdot g : X \longrightarrow R, \quad x \longmapsto f(x)\cdot g(x)$$

Ιδιαιτέρως, εάν $X = \{1,\ldots,n\} \subset \mathbb{N}$, τότε μπορούμε να ταυτίζουμε το R^X με το *καρτεσιανό γινόμενο* $\underbrace{R\times R\times\cdots\times R\times R}_{n \text{ φορές}}$, το οποίο αποκτά τη δομή τού δακτυλίου μέσω των πράξεων

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n) := (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n),$$
$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\cdot(y_1,y_2,\ldots,y_n) := (x_1\cdot y_1,x_2\cdot y_2,\ldots,x_n\cdot y_n),$$

με ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση το $(0_R,\ldots,0_R)$. Εξάλλου, δοθέντων n αυθαιρέτως επιλεγμένων δακτυλίων $R_1,R_2,\ldots,R_n$ μπορούμε να ορίσουμε τη δομή ενός δακτυλίου επί τού *καρτεσιανού* ή (*εξωτερικού*) *ευθέος γινομένου* τους

$$\prod_{j=1}^{n} R_j := R_1\times\cdots\times R_n \tag{1.1}$$

με τις ανάλογες πράξεις κατά παράγοντες. Ο δακτύλιος (1.1) έχει ως μοναδιαίο στοιχείο του το $(1_{R_1},\ldots,1_{R_n})$ και είναι μεταθετικός εάν και μόνον εάν καθένας των παραγόντων του είναι μεταθετικός. Κατ' αναλογίαν, εάν η $(R_j)_{j\in J}$ είναι μια μη κενή οικογένεια δακτυλίων, μπορούμε να ορίσουμε τη δομή δακτυλίου επί τού $\prod_{j\in J} R_j$ μέσω των πράξεων

$$(x_j)_{j\in J} + (y_j)_{j\in J} := (x_j + y_j)_{j\in J},\ (x_j)_{j\in J} \cdot (y_j)_{j\in J} := (x_j \cdot y_j)_{j\in J}.$$

(vi) Εάν το R είναι ένα μονοσύνολο, τότε μπορεί να θεωρηθεί κατά τρόπο τετριμμένο ως δακτύλιος και γι' αυτό ονομάζεται **τετριμμένος δακτύλιος**. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε προφανώς $0_R = 1_R$.

(vii) Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος. Το $R^{\mathbb{N}_0}$ συμβολίζεται συνήθως ως $R[\![\mathsf{X}]\!]$ όταν λογίζεται ως ο **δακτύλιος επίτυπων δυναμοσειρών** (ή **τύποις δυναμοσειρών**) μιας **απροσδιορίστου** X με συντελεστές ειλημμένους από τον R. (Η πράξη προσθέσεως ακολουθιών με όρους ανήκοντες στον R ορίζεται κατά συντεταγμένες και η πράξη τού πολλαπλασιασμού ενελικτικώς, ενώ $\mathsf{X} := (0_R, 1_R, 0_R, 0_R, \ldots)$ και $(a_0, a_1, a_2, \ldots) = a_0 + a_1\mathsf{X} + a_2\mathsf{X}^2 + \cdots + a_n\mathsf{X}^n + \cdots =: \sum_{i=0}^{\infty} a_i\mathsf{X}^i$.) O δακτύλιος $R[\![\mathsf{X}]\!]$ είναι μεταθετικός εάν και μόνον εάν ο R είναι μεταθετικός. Επιπροσθέτως, ο $R[\![\mathsf{X}]\!]$ έχει ως μοναδιαίο του στοιχείο το $(1_R, 0_R, 0_R, \ldots)$.

1.1.5 Πρόταση. *Έστω R ένας δακτύλιος. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) $0_R\, a = a\, 0_R = 0_R$, *για όλα τα* $a \in R$.

(ii) $(-a)\, b = a\, (-b) = -(a\, b)$, *για όλα τα* $a, b \in R$.

(iii) $(-a)\, (-b) = a\, b$, *για όλα τα* $a, b \in R$.

(iv) *Για* $m, n \in \mathbb{N}$ *και για οιαδήποτε στοιχεία* $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ *τού* R *έχουμε*

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_j\, b_k\ .$$

(v) *Εάν για οιαδήποτε* $a \in R$ *και* $n \in \mathbb{Z}$ *χρησιμοποιήσουμε τη βραχυγραφία*

$$\boxed{na := \begin{cases} \underbrace{a + a + \cdots + a + a}_{n\text{-φορές}}, & \text{όταν} \quad n > 0 \\ \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a) + (-a)}_{(-n)\text{-φορές}}, & \text{όταν} \quad n < 0 \\ 0_R\ , & \text{όταν} \quad n = 0 \end{cases}}$$

από τη θεωρία των προσθετικών αβελιανών ομάδων, τότε $(na)\, b = a\, (nb) = n(a\, b)$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{Z}$ *και όλα τα* $a, b \in R$.

(vi) *Εάν ο δακτύλιος* R *διαθέτει περισσότερα τού ενός στοιχεία, τότε* $1_R \neq 0_R$.

Απόδειξη. (i) $0_R\, a = (0_R + 0_R)\, a = 0_R\, a + 0_R\, a \Longrightarrow 0_R\, a = 0_R$. Ομοίως δείχνει κανείς ότι $a\, 0_R = 0_R$.

(ii) Προφανώς,

$$a\, b + a\, (-b) = a\, (b + (-b)) = a\, 0_R = 0_R \Longrightarrow a\, (-b) = -(a\, b).$$

Η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο.

(iii) Προφανώς, $(-a)\,(-b) = -(-a)\,b = -(-(a\,b)) = a\,b$ [ύστερα από διπλή εφαρμογή τής (ii)].

(iv) Θεωρούμε το m ως παγιωμένο και χρησιμοποιούμε μαθηματική επαγωγή ως προς τον n. Για $n = 1$ η ανωτέρω ισότητα γράφεται ως

$$(a_1 + \cdots + a_m)\, b_1 = a_1 b_1 + \cdots + a_m b_1$$

και είναι αληθής λόγω τής επιμεριστικής ιδιότητας τού πολλαπλασιασμού τού R ως προς την πρόσθεση. Ας υποθέσουμε ότι, για δοθέντες m, n, ισχύει η ισότητα

$$\left(\sum_{j=1}^{m} a_j\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_j\, b_k.$$

Εφαρμόζοντας εκ νέου την επιμεριστική ιδιότητα, σε συνδυασμό με την επαγωγική μας υπόθεση, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{m} a_j\right) \left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k\right) &= \left(\sum_{j=1}^{m} a_j\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k + b_{n+1}\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} a_j\right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) + \left(\sum_{j=1}^{m} a_j\right) b_{n+1} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_j\, b_k + \sum_{j=1}^{m} a_j\, b_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n+1} a_j\, b_k. \end{aligned}$$

(v) Τούτο έπεται άμεσα από το (iv).

(vi) Επί τη βάσει τής υποθέσεώς μας, $R \smallsetminus \{0_R\} \neq \varnothing$. Άρα για κάθε $a \in R \smallsetminus \{0_R\}$ έχουμε $1_R a = a$, οπότε $1_R \neq 0_R$. $\square$

1.1.6 Ορισμός. Ένα μη κενό υποσύνολο S (τού υποκειμένου συνόλου R) ενός δακτυλίου $(R, +, \cdot)$ καλείται **υποδακτύλιος** τού $(R, +, \cdot)$ όταν το S είναι κλειστό ως προς αμφότερες τις πράξεις "$+$" και "$\cdot$" και καθίσταται αφ' εαυτού δακτύλιος (ως προς τον περιορισμό των εν λόγω πράξεων επ' αυτού) με $1_S = 1_R$.

1.1.7 Πρόταση. *Ένα μη κενό υποσύνολο S ενός δακτυλίου R είναι υποδακτύλιος τού R εάν και μόνον εάν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

(i) $1_R \in S$.

(ii) $a - b := a + (-b) \in S$, *για κάθε* $a, b \in S$.

(iii) $ab \in S$, *για κάθε* $a, b \in S$.

1.1.8 Παραδείγματα. (i) Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{Q}$, ο $\mathbb{Q}$ υποδακτύλιος τού $\mathbb{R}$ και ο $\mathbb{R}$ είναι υποδακτύλιος τού $\mathbb{C}$.

(ii) Ο **δακτύλιος των ακεραίων τού Gauss (ή «γκαουσιανών ακεραίων»)**

$$\boxed{\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subsetneqq \mathbb{C}} \tag{1.2}$$

με πράξεις τις (συνήθεις πράξεις τού $\mathbb{C}$):

$$(a+bi)+(c+di) := (a+c)+(b+d)i,\ (a+bi)\cdot(c+di) := (ac-bd)+(ad+bc)i,$$

όπου i η «φανταστική» μονάδα, είναι (μεταθετικός) υποδακτύλιος τού δακτυλίου των μιγαδικών αριθμών, ενώ περιέχει τον $\mathbb{Z}$ ως υποδακτύλιό του. Γενικότερα, το

$$\boxed{\mathbb{Z}[\sqrt{m}] := \{a+b\sqrt{m} \mid a,b\in\mathbb{Z}\} \subsetneqq \mathbb{C}} \tag{1.3}$$

όπου το $m\in\mathbb{Z}$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο (δηλαδή $\sqrt{|m|}\notin\mathbb{Q}$), καθίσταται υποδακτύλιος τού $\mathbb{R}$, όταν $m\in\mathbb{N}$, και υποδακτύλιος τού $\mathbb{C}$, όταν $m\in\mathbb{Z}\smallsetminus\mathbb{N}_0$, καθότι για οιουσδήποτε $a+b\sqrt{m}$, $a'+b'\sqrt{m}\in\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, έχουμε[6]

$$\begin{cases} (a+b\sqrt{m})-(a'+b'\sqrt{m}) = (a-a')+(b-b')\sqrt{m}\in\mathbb{Z}[\sqrt{m}], \\ (a+b\sqrt{m})\,(a'+b'\sqrt{m}) = (aa'+bmb')+(ab'+ba')\sqrt{m}\in\mathbb{Z}[\sqrt{m}]. \end{cases}$$

(iii) Κάθε δακτύλιος R έχει πάντοτε ως υποδακτυλίους τον εαυτό του και τον **τετριμμένο υποδακτύλιο** $\{0_R\}$. Ένας υποδακτύλιος S ενός δακτυλίου R με $S\subsetneqq R$ λέγεται **γνήσιος υποδακτύλιος** τού R.

(iv) Εάν R είναι ένας μη τετριμμένος δακτύλιος, τότε το υποσύνολο

$$R[\mathsf{X}] \subsetneqq R[\![\mathsf{X}]\!]$$

το απαρτιζόμενο από όλα **τα πολυώνυμα** (ως προς την απροσδιόριστο X) **με συντελεστές ειλημμένους από τον** R αποτελεί έναν υποδακτύλιο τού δακτυλίου $R[\![\mathsf{X}]\!]$. (Βλ. 1.1.4 (vii).)

1.1.9 Σημείωση. Έστω S ένας υποδακτύλιος ενός δακτυλίου R. Εάν ο R είναι μεταθετικός, τότε είναι προφανές ότι και ο S είναι μεταθετικός. Ωστόσο, εάν ο R είναι μη μεταθετικός και ο S *γνήσιος* υποδακτύλιός του, ο S ενδέχεται να είναι μεταθετικός, όπως, π.χ., συμβαίνει στην περίπτωση όπου

$$S := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in R \;\middle|\; b=c=0 \right\},\ R := \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}).$$

1.1.10 Πρόταση. *Εάν η $(S_j)_{j\in J}$ είναι μια μη κενή οικογένεια υποδακτυλίων ενός δακτυλίου R, τότε η τομή $\bigcap_{j\in J} S_j$ αποτελεί έναν υποδακτύλιο τού R.*

[6] Η δευτεροβάθμια εξίσωση $z^2-m=0$, $z\in\mathbb{C}$, έχει δύο λύσεις. Εάν $m>0$, τότε αυτές είναι οι $\pm\sqrt{m}\in\mathbb{R}$. Εάν $m<0$, τότε αυτές είναι οι $\pm i\sqrt{-m}\in\mathbb{C}$. Προσοχή! Γράφοντας απλώς $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, *στην περίπτωση όπου* $m<0$, ορίζουμε ως $\sqrt{m}$ τον μιγαδικό αριθμό $i\sqrt{-m}$ και λαμβάνουμε

$$\sqrt{m}\sqrt{m} = (i\sqrt{-m})(i\sqrt{-m}) = i^2(\sqrt{-m})^2 = (-1)(-m) = m$$

χρησιμοποιώντας τον συνήθη πολλαπλασιασμό εντός τού $\mathbb{C}$. Ο ανωτέρω σύντομος *φορμαλιστικός* συμβολισμός δεν θα πρέπει να μας οδηγεί σε επιπόλαια συμπεράσματα. Επί παραδείγματι, η ρίζα τού γινομένου δυο *θετικών* πραγματικών αριθμών ισούται με το γινόμενο των ριζών αυτών (εντός τού $\mathbb{R}$). Τούτο *δεν γενικεύεται* για τον εν λόγω φορμαλιστικό συμβολισμό όταν $m<0$. Εν προκειμένω, $-m=\sqrt{(-m)(-m)}=\sqrt{m\cdot m}\neq\sqrt{m}\sqrt{m}=m$.

Απόδειξη. Προφανώς, $1_R \in \bigcap_{j \in J} S_j$, οπότε η τομή αυτή, συν τοις άλλοις, δεν είναι κενή. Εάν $a, b \in \bigcap_{j \in J} S_j$, τότε

$$[a, b \in S_j,\ \forall j \in J] \Longrightarrow [a - b \in S_j,\ \forall j \in J] \Longrightarrow a - b \in \bigcap_{j \in J} S_j$$

και

$$[a, b \in S_j,\ \forall j \in J] \Longrightarrow [ab \in S_j,\ \forall j \in J] \Longrightarrow ab \in \bigcap_{j \in J} S_j.$$

Άρα η $\bigcap_{j \in J} S_j$ είναι όντως ένας υποδακτύλιος τού R. (Βλ. πρόταση 1.1.7). □

1.1.11 Ορισμός. Έστω R ένας δακτύλιος. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιος $m \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$ma = 0_R, \quad \forall a \in R.$$

Εάν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με αυτήν την ιδιότητα, τότε ο n λέγεται **χαρακτηριστική** τού δακτυλίου R. Εάν δεν υπάρχει κανένας $m \in \mathbb{N}$ με την ανωτέρω ιδιότητα, τότε λέμε ότι ο δακτύλιος R έχει **χαρακτηριστική** 0.

1.1.12 Παραδείγματα. (i) Οι $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ έχουν χαρακτηριστική 0.
(ii) Ο $\mathbb{Z}_m$ έχει χαρακτηριστική m.
(iii) Η χαρακτηριστική τού πολυωνυμικού δακτυλίου $R[\mathrm{X}]$ (βλ. 1.1.8 (iv)) ισούται με εκείνην τού R.

1.2 ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ ΚΑΙ ΣΩΜΑΤΑ

1.2.1 Ορισμός. Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα στοιχείο $a \in R \smallsetminus \{0_R\}$ καλείται **δεξιός** (και αντιστοίχως, **αριστερός**) **μηδενοδιαιρέτης** όταν υπάρχει ένα $b \in R \smallsetminus \{0_R\}$ (αντ. $c \in R \smallsetminus \{0_R\}$), τέτοιο ώστε $ba = 0_R$ (και αντιστοίχως, $ac = 0_R$). Ένα στοιχείο τού[7] $R \smallsetminus \{0_R\}$ καλείται **αμφίπλευρος μηδενοδιαιρέτης** ή απλώς **μηδενοδιαιρέτης** όταν αυτό είναι ταυτοχρόνως και δεξιός και αριστερός μηδενοδιαιρέτης. Το σύνολο όλων των μηδενοδιαιρετών ενός δακτυλίου R θα συμβολίζεται ως $\mathrm{Zdv}(R)$.

1.2.2 Παράδειγμα. Στον $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(R)$, όπου R ένας δακτύλιος, έχουμε

$$\begin{pmatrix} 0_R & 0_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix} \in \mathrm{Zdv}(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(R))$$

διότι

$$\begin{pmatrix} 1_R & 0_R \\ 0_R & 0_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_R & 0_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_R & 0_R \\ 0_R & 0_R \end{pmatrix},$$

[7] Προσοχή! Ορισμένοι συγγραφείς συγκαταλέγουν *και το* 0_R στους μηδενοδιαιρέτες τού R (χαρακτηρίζοντάς το ως τον «τετριμμένο» μηδενοδιαιρέτη τού R). Ωστόσο, τούτη η *σύμβαση* **δεν** θα υιοθετηθεί εδώ!

και
$$\begin{pmatrix} 0_R & 0_R \\ 1_R & 0_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_R & 0_R \\ 0_R & 1_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_R & 0_R \\ 0_R & 0_R \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Παρατήρηση. Στους *μεταθετικούς* δακτυλίους κάθε αριστερός μηδενοδιαιρέτης είναι δεξιός και αντιστρόφως. Ως εκ τούτου, δεν χρειάζεται να γίνεται διάκριση μεταξύ των δύο αυτών εννοιών.

1.2.4 Πρόταση. *Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_m$, $m \geqslant 1$, έχουμε*

$$\boxed{\mathrm{Zdv}\,(\mathbb{Z}_m) = \{[k]_m \in \mathbb{Z}_m \mid 1 \leqslant k \leqslant m-1,\ \ \text{μκδ}\,(k,m) > 1\}}$$

Απόδειξη. Όταν $m = 1$, η ισότητα είναι προφανής, αφού $\mathrm{Zdv}(\mathbb{Z}_m) = \varnothing$. Από εδώ και στο εξής θα υποθέτουμε ότι $m \geqslant 2$.

“ $\supseteq$ ” Έστω $[k]_m \in \mathbb{Z}_m$, όπου $1 \leqslant k \leqslant m-1$, με $d := \text{μκδ}(k,m) > 1$. Τότε

$$\begin{aligned}[k]_m\,([m/d]_m) &= [km/d]_m = [(k/d)\,m]_m = [k/d\,]_m\,[m]_m \\ &= [k/d\,]_m\,[0]_m = [0]_m \Longrightarrow [k]_m \in \mathrm{Zdv}\,(\mathbb{Z}_m)\ .\end{aligned}$$

“ $\subseteq$ ” Αυτό θα προκύψει άμεσα από την κάπως γενικότερη πρόταση 1.2.14. □

1.2.5 Πρόταση (Νόμος διαγραφής). *Έστω R ένας δακτύλιος. Τότε ο R δεν έχει δεξιούς μηδενοδιαιρέτες εάν και μόνον εάν για όλα τα στοιχεία $a, b \in R$ και όλα τα $c \in R \setminus \{0_R\}$ ισχύει ο εξής νόμος τής διαγραφής:*

$$ca = cb \Longrightarrow a = b.$$

Κατ' αναλογίαν, ο R δεν έχει αριστερούς μηδενοδιαιρέτες εάν και μόνον εάν για όλα τα στοιχεία $a, b \in R$ και όλα τα $c \in R \setminus \{0_R\}$ ισχύει ο ακόλουθος νόμος τής διαγραφής:

$$ac = bc \Longrightarrow a = b.$$

Κατά συνέπειαν, ο R δεν έχει ούτε δεξιούς ούτε αριστερούς μηδενοδιαιρέτες εάν και μόνον εάν για όλα τα στοιχεία $a, b \in R$ και όλα τα $c \in R \setminus \{0_R\}$ ισχύει ο εξής νόμος τής διαγραφής:

$$[ca = cb \quad \text{ή} \quad ac = bc] \Longrightarrow a = b.$$

(Στους μεταθετικούς δακτυλίους οι δύο πρώτοι νόμοι διαγραφής ενσωματώνονται προδήλως σε έναν.)

Απόδειξη. Εάν ο R είναι ένας δακτύλιος χωρίς δεξιούς (και αντιστοίχως, χωρίς αριστερούς) μηδενοδιαιρέτες και $c \in R \setminus \{0\}$, τότε η ισότητα $ca = cb$ (και αντιστοίχως, η ισότητα $ac = bc$) γράφεται ως $c(a-b) = 0_R$ (και αντιστοίχως, ως $(a-b)c = 0_R$), πράγμα που σημαίνει ότι $a-b = 0_R$, δηλαδή $a = b$. Και αντιστρόφως· προϋποθέτοντας την ισχύ τού πρώτου (και αντιστοίχως, τού δεύτερου) εκ των νόμων τής διαγραφής, αρκεί να δείξουμε ότι για οιαδήποτε στοιχεία $c, d \in R$, η $cd = 0_R$ σημαίνει ότι $[c \neq 0_R \Longrightarrow d = 0_R]$ (και αντιστοίχως, ότι $[d \neq 0_R \Longrightarrow c = 0_R]$). Πράγματι· εάν $c \neq 0_R$, τότε έχουμε $cd = 0_R = c \cdot 0_R$, οπότε από τον πρώτο νόμο τής διαγραφής λαμβάνουμε $d = 0_R$, ενώ εάν $d \neq 0_R$, τότε η $cd = 0_R = 0_R \cdot d$ μας δίδει (κατ' αναλογίαν, μέσω τού δεύτερου νόμου τής διαγραφής) $c = 0_R$. $\square$

1.2.6 Παράδειγμα. Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$ δεν ισχύει ο νόμος τής διαγραφής. (Σημειωτέον ότι $[2]_6\,[3]_6 = [6]_6 = [0]_6$, οπότε οι $[2]_6$ και $[3]_6$ είναι μηδενοδιαιρέτες. Μάλιστα, σύμφωνα με την πρόταση 1.2.4, $\mathrm{Zdv}(\mathbb{Z}_6) = \{[2]_6\,, [3]_6\,, [4]_6\}$.)

1.2.7 Ορισμός. Έστω R ένας δακτύλιος με[8] $1_R \neq 0_R$. Ένα στοιχείο $a \in R$ καλείται **εξ αριστερών** (και αντιστοίχως, **εκ δεξιών**) **αντιστρέψιμο** όταν $\exists b \in R$ (και αντιστοίχως, $\exists c \in R$), τέτοιο ώστε $ba = 1_R$ (και αντιστοίχως, $ac = 1_R$). Ένα τέτοιο $b \in R$ (αντ. $c \in R$) λέγεται **αριστερό** (και αντιστοίχως, **δεξιό**) **αντίστροφο**[9] τού a. Ένα στοιχείο τού R καλείται **αμφιπλεύρως αντιστρέψιμο** ή απλώς **αντιστρέψιμο** όταν αυτό είναι ταυτοχρόνως και εξ αριστερών και εκ δεξιών αντιστρέψιμο. Το σύνολο όλων των αντιστρεψίμων στοιχείων ενός μη τετριμμένου δακτυλίου R θα συμβολίζεται ως $R^\times$.

1.2.8 Πρόταση. *Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος και έστω $a \in R^\times$. Εάν το a διαθέτει το b ως ένα αριστερό αντίστροφό του και το c ως ένα δεξιό αντίστροφό του, τότε $b = c$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες $ba = 1_R = ac$ συμπεραίνουμε άμεσα ότι $c = 1_R c = (ba)c = b(ac) = b\,1_R = b$. $\square$

1.2.9 Συμβολισμός. Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος και έστω $a \in R^\times$. Τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο τού R, ας το πούμε b, τέτοιο ώστε $ba = 1_R = ab$ (επί τη βάσει τού ορισμού 1.2.7 και τής προτάσεως 1.2.8). Το b είναι *το μόνο* στοιχείο τού R που πληροί αυτήν την ιδιότητα, διότι για οιοδήποτε $b' \in R$ με $b'a = 1_R = ab'$ έχουμε $b = b'$ (αφού το b είναι αριστερό αντίστροφο και το b' δεξιό αντίστροφο τού a και τανάπαλιν). Αυτό το b καλείται **αντίστροφο στοιχείο τού** a και θα συμβολίζεται εφεξής ως a^{-1}. (Προφανώς, $1_R^{-1} = 1_R$, $\{\pm 1_R\} \subseteq R^\times$, $0_R \notin R^\times$ και για κάθε $a \in R^\times$ έχουμε $-a \in R^\times$ με $(-a)^{-1} = -a^{-1}$.) Επίσης, για κάθε στοιχείο $a \in R^\times$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, θα γράφουμε εν συντομία $a^{-n} := (a^{-1})^n$. (Πρβλ. 1.1.2).

1.2.10 Πρόταση. *Εάν R είναι ένας μη τετριμμένος δακτύλιος, τότε το ζεύγος $(R^\times, \cdot)$ αποτελεί μια πολλαπλασιαστική ομάδα.*

Απόδειξη. Επειδή $1_R \in R^\times$, έχουμε $R^\times \neq \varnothing$. Επιπροσθέτως, για οιαδήποτε στοιχεία $a, b \in R^\times$ έχουμε

$$\left(b^{-1}a^{-1}\right) ab = 1_R = ab \left(b^{-1}a^{-1}\right) \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \Rightarrow ab \in R^\times$$

[8] Η συνθήκη $1_R \neq 0_R$ ισοδυναμεί με το ότι ο R δεν είναι τετριμμένος (βλ. 1.1.4 (vi)). Πράγματι· εάν $1_R = 0_R$, τότε για κάθε $a \in R$ έχουμε $a = 1_R \cdot a = 0_R \cdot a = 0_R$, οπότε ο R οφείλει να είναι τετριμμένος. Το αντίστροφο είναι προφανές.

[9] Προσοχή! Η ύπαρξη ενός αριστερού αντιστρόφου ενός $a \in R$ δεν εγγυάται *αυτομάτως* την ύπαρξη κάποιου δεξιού αντιστρόφου του και τανάπαλιν. Επίσης, δεν αποκλείεται ένα παγιωμένο $a \in R$ να διαθέτει δεξιά (και αντιστοίχως, αριστερά) αντίστροφα *περισσότερα τού ενός*. Τούτα (όπως δείχνεται στα εδάφια 1.2.8 και 1.2.9) αλλάζουν άρδην όταν περιοριζόμαστε στα *(αμφιπλεύρως) αντιστρέψιμα* στοιχεία.

(με $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$) και

$$a^{-1}a = 1_R = aa^{-1} \Rightarrow a^{-1} \in R^{\times}.$$

Κατά συνέπειαν, το ζεύγος $(R^{\times}, \cdot)$ αποτελεί μια πολλαπλασιαστική ομάδα (με το 1_R ως ουδέτερο στοιχείο της). □

1.2.11 Ορισμός. Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος. Η ομάδα $R^{\times}$ καλείται **ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων τού** R.

1.2.12 Σημείωση. (i) Η $R^{\times}$ είναι δυνατόν να είναι αβελιανή ακόμη και όταν ο R δεν είναι μεταθετικός.

(ii) Άλλοτε η $R^{\times}$ έχει *πεπερασμένη* τάξη, όπως στην περίπτωση θεωρήσεως τού δακτυλίου $R = \mathbb{Z}_m$, $m \geqslant 2$, με $\mathbb{Z}_m^{\times} = \{[k]_m \in \mathbb{Z}_m \mid 1 \leqslant k \leqslant m-1,\ \text{μκδ}\,(k,m) = 1\}$ και $|\mathbb{Z}_m^{\times}| = \phi(m)$, όπου ϕ η συνάρτηση τού Euler, και άλλοτε *άπειρη*. Επί παραδείγματι, η $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^{\times} = \left\{\pm(1+\sqrt{2})^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ είναι άπειρη αριθμήσιμη και η $(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}))^{\times}$ $(=: \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ άπειρη υπεραριθμήσιμη.

(iii) Εάν ο S είναι ένας μη τετριμμένος υποδακτύλιος ενός δακτυλίου R, τότε $S^{\times} \subseteq R^{\times} \cap S$, χωρίς να αποκλείεται ο εγκλεισμός να είναι αυστηρός. Επί παραδείγματι, όταν $R = \mathbb{R}$ και $S = \mathbb{Z}$, τότε $2 \in R^{\times} = \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ αλλά $2 \notin S^{\times} = \{\pm 1\}$.

1.2.13 Ορισμός. Ένα στοιχείο a ενός δακτυλίου R λέγεται **μηδενοδύναμο** όταν ισχύει $a^n = 0_R$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Το σύνολο όλων των μηδενοδυνάμων στοιχείων τού R θα συμβολίζεται ως $\mathrm{Nil}(R)$. (Ως **δείκτης** ενός $a \in \mathrm{Nil}(R)$ ορίζεται ο $\nu := \min\{n \in \mathbb{N} \mid a^n = 0_R\}$.)

1.2.14 Πρόταση. *Για κάθε μη τετριμμένο δακτύλιο R ισχύουν οι εγκλειστικές σχέσεις:*

$$\boxed{\{1_R\} \subseteq R^{\times} \subseteq R\smallsetminus \mathrm{Zdv}(R) \subseteq (R\smallsetminus \mathrm{Nil}(R)) \cup \{0_R\} \subseteq R}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Nil}(R)\smallsetminus\{0_R\} \subseteq \mathrm{Zdv}(R) \subseteq R\smallsetminus R^{\times} \subseteq R.}$$

Απόδειξη. Έστω τυχόν στοιχείο $a \in \mathrm{Nil}(R)\smallsetminus\{0_R\}$. Εάν το a έχει δείκτη ν, τότε (προφανώς) $a^{\nu-1} \neq 0_R$ και $a^{\nu} = a^{\nu-1}a = a\,a^{\nu-1} = 0_R \Longrightarrow a \in \mathrm{Zdv}(R)$. Έστω τώρα ότι $b \in \mathrm{Zdv}(R)$, δηλαδή ότι υπάρχουν $c, d \in R\smallsetminus\{0_R\}$ με $cb = bd = 0_R$. Εάν υποθέσουμε ότι $b \in R^{\times}$, τότε θα υπάρχουν $e, g \in R$, τέτοια ώστε $eb = bg = 1_R$. Αυτό όμως μας οδηγεί σε ένα άτοπο συμπέρασμα, αφού

$$\begin{aligned} 0_R &= (0_R)\,g = (cb)\,g = c\,(bg) = c\,(1_R) = c, \quad \text{ή} \\ 0_R &= e\,(0_R) = e\,(bd) = (eb)\,d = (1_R)\,d = d\,. \end{aligned}$$

Επομένως, $\mathrm{Zdv}(R) \cap R^{\times} = \varnothing$. Οι λοιπές εγκλειστικές σχέσεις είναι προφανείς. □

1.2.15 Ορισμός. (i) Ένας μεταθετικός μη τετριμμένος δακτύλιος R καλείται **ακεραία περιοχή**[10] όταν $\mathrm{Zdv}(R) = \varnothing$.

(ii) Κάθε μη τετριμμένος δακτύλιος R με $R^{\times} = R \smallsetminus \{0_R\}$ καλείται **διαιρετικός**[11] **δακτύλιος** ή **στρεβλό σώμα**[12].

(iii) Κάθε μεταθετικός διαιρετικός δακτύλιος καλείται **σώμα.**

1.2.16 Παραδείγματα. (i) Οι δακτύλιοι $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ αποτελούν σώματα. Από την άλλη μεριά, όπως είδαμε στα 1.1.4 (ii) και 1.2.2, ο δακτύλιος $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(R)$, όπου το R είναι ένας εκ των $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, δεν μπορεί να είναι ούτε καν ακεραία περιοχή.

(ii) Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ (βλ. (1.3)), όπου το $m \in \mathbb{Z}$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο (δηλαδή $\sqrt{|m|} \notin \mathbb{Q}$), αποτελεί μια ακεραία περιοχή. Μάλιστα, στην περίπτωση όπου το m στερείται τετραγώνων[13], λέμε ότι ο $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ είναι η **τετραγωνική αριθμητική περιοχή** η αντιστοιχιζόμενη στον m.

(iii) Έστω $\mathbb{H}_{\mathbb{R}} := \left\{ a\,\mathbf{I} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$ ο υποδακτύλιος τού δακτυλίου $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ο οριζόμενος μέσω των πραγματικών γραμμικών συνδυασμών των τεσσάρων πινάκων

$$\mathbf{I} := \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{j} := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \; \mathbf{k} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{i} := \mathbf{jk} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ γράφεται ως εξής:

$$\boxed{\mathbb{H}_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.}$$

Ο $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ έχει το $1_{\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C})} = \mathbf{I}$ ως μοναδιαίο του στοιχείο. Ωστόσο, *δεν* είναι μεταθετικός, διότι π.χ. $\mathbf{i} \neq -\mathbf{i} = \mathbf{kj}$. Θεωρώντας ένα στοιχείο του

$$\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ένας τουλάχιστον εκ των a, b, c, d οφείλει να είναι $\neq 0$, πράγμα που σημαίνει ότι και η ορίζουσά του, η οποία ισούται με $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, θα είναι $\neq 0$. Προφανώς, ο αντίστροφός του πίνακας

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2} \begin{pmatrix} a-bi & -c-di \\ c-di & a+bi \end{pmatrix} \in (\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}))^{\times}$$

ανήκει στην ομάδα $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{\times}$. Άρα ο $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ αποτελεί έναν *διαιρετικό δακτύλιο*[14], ο οποίος ονομάζεται **στρεβλό σώμα των τετρανίων υπεράνω τού σώματος** $\mathbb{R}$.

---

[10] Προφανώς, ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος R είναι ακεραία περιοχή εάν και μόνον εάν σε αυτόν ισχύει ο νόμος τής διαγραφής (βλ. πρόταση 1.2.5) ή, ισοδυνάμως, εάν και μόνον εάν από την ισότητα $ab = 0_R$ (όπου $a, b \in R$) έπεται κατ' ανάγκην ότι είτε $a = 0_R$ είτε $b = 0_R$.

[11] Η ονομασία «διαιρετικός δακτύλιος» (ή «δακτύλιος με διαίρεση») προέρχεται από το γεγονός τού ότι σε τέτοιου είδους δακτυλίους ορίζεται πάντοτε το ab^{-1}, *για κάθε* $a \in R$ και $b \in R \smallsetminus \{0_R\}$.

[12] Προφανώς, ο πληθικός αριθμός τού υποκειμένου συνόλου μιας ακεραίας περιοχής ή ενός στρεβλού σώματος R είναι $\geqslant 2$ (αφού περιέχει τόσον το 1_R όσον και το $0_R (\neq 1_R)$).

1.2.17 Πρόταση. *Κάθε μη τετριμμένος υποδακτύλιος S μιας ακεραίας περιοχής R είναι ακεραία περιοχή.*

Απόδειξη. Επειδή $S \subseteq R$, έχουμε $1_S = 1_R$ και $\mathrm{Zdv}(S) \subseteq \mathrm{Zdv}(R) = \varnothing$. □

1.2.18 Πόρισμα. *Κάθε μη τετριμμένος υποδακτύλιος S ενός σώματος K είναι ακεραία περιοχή.* (*Ειδικότερα, κάθε σώμα είναι ακεραία περιοχή.*)

1.2.19 Παράδειγμα. Υπάρχουν ακέραιες περιοχές που δεν είναι σώματα. Τα απλούστερα παραδείγματα μας τα παρέχουν ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ των ακεραίων (με τις συνήθεις πράξεις), αφού $\mathrm{Zdv}(\mathbb{Z}) = \varnothing$ και $\mathbb{Z}^{\times} = \{-1, +1\} \subsetneqq \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, και ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i]$ των ακεραίων τού Gauss, αφού $\mathrm{Zdv}(\mathbb{Z}[i]) = \varnothing$ και

$$\mathbb{Z}[i]^{\times} = \{-1, +1, -i, i\} \subsetneqq \mathbb{Z}[i] \smallsetminus \{0\}.$$

Από την άλλη μεριά, για *πεπερασμένους* μεταθετικούς δακτυλίους με $1_R \neq 0_R$ οι έννοιες ακεραία περιοχή και σώμα ταυτίζονται. (Βλ. πρόταση 1.2.22).

1.2.20 Σημείωση. (i) Εάν R είναι μια ακεραία περιοχή και ο S υποδακτύλιός της, ο οποίος συμβαίνει να είναι ακεραία περιοχή ως προς τις ίδιες πράξεις, τότε ο S καλείται **υποπεριοχή** τής ακεραίας περιοχής R. Επί παραδείγματι, το σύνολο $R := \left\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ (ως προς τις συνήθεις πράξεις προσθέσεως και πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών) είναι υποπεριοχή τού $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Z} \subsetneqq R \subsetneqq \mathbb{Q}$.

(ii) Η χαρακτηριστική οιασδήποτε ακεραίας περιοχής είναι είτε μηδέν είτε ένας πρώτος αριθμός.

1.2.21 Σημείωση. Εάν το L είναι ένα σώμα και το K ένας υποδακτύλιος τού L με μοναδιαίο στοιχείο, ο οποίος συμβαίνει να είναι σώμα ως προς τις ίδιες πράξεις, τότε το K καλείται **υπόσωμα** τού L και το L (σωματική) **επέκταση** τού K. Επί παραδείγματι, το $\mathbb{Q}$ είναι υπόσωμα τού $\mathbb{R}$ και το $\mathbb{R}$ υπόσωμα τού $\mathbb{C}$.

1.2.22 Πρόταση. *Κάθε πεπερασμένος μη τετριμμένος δακτύλιος, ο οποίος δεν διαθέτει ούτε αριστερούς ούτε δεξιούς μηδενοδιαιρέτες, είναι διαιρετικός. Ειδικότερα, κάθε πεπερασμένη ακεραία περιοχή είναι σώμα.*

Απόδειξη. Έστω R ένας πεπερασμένος μη τετριμμένος δακτύλιος χωρίς δεξιούς ή αριστερούς μηδενοδιαιρέτες και $a \in R \smallsetminus \{0_R\}$. Αρκεί να προσδιορισθεί ένα στοιχείο $b \in R$ με $ab = ba = 1_R$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\beta : R \to R$, την οριζόμενη μέσω τού τύπου $\beta(c) := ac$ (και, αντιστοίχως, μέσω τού τύπου $\beta(c) := ca$) για όλα τα $c \in R$. Σύμφωνα με τον νόμο τής διαγραφής 1.2.5, για $c, c' \in R$ με $\beta(c) = \beta(c')$, λαμβάνουμε $c = c'$. Άρα η β, ως ενριπτική απεικόνιση, θα είναι και επιρριπτική. Αυτό σημαίνει ότι για το 1_R θα υπάρχει ένα αρχέτυπο μέσω τής β, δηλαδή ένα

[13] Λέμε ότι ένας ακέραιος αριθμός d **στερείται τετραγώνων** όταν $d \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, 1\}$ και $\nexists c \in \mathbb{N}$, $c \geqslant 2$, τέτοιο ώστε να ισχύει $c^2 \mid d$. Αυτό σημαίνει ότι είτε $d = -1$ είτε $|d| = p_1 \cdots p_k$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και οι $p_1, \ldots, p_k$ είναι πρώτοι αριθμοί (*σαφώς διακεκριμένοι* όταν $k \geqslant 2$), δηλαδή ότι $d \in \{-1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 10, \pm 11, \pm 13, \ldots\}$.

[14] Ο $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ είναι εφοδιασμένος και με τη δομή ενός *τετραδιάστατου πραγματικού διανυσματικού χώρου*, αφού οι πίνακες $\mathbf{I}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι και γραμμικώς ανεξάρτητοι υπεράνω τού $\mathbb{R}$.

$b \in R$, τέτοιο ώστε $\beta(b) = 1_R$. (Όπως έχουμε ήδη προαναφέρει, τα αριστερά και δεξιά αντίστροφα ενός αντιστρεψίμου στοιχείου a ενός τέτοιου R ταυτίζονται.) □

1.2.23 Πόρισμα. *Οι ακόλουθες συνθήκες για τον δακτύλιο $\mathbb{Z}_m$, $m \geqslant 2$, είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο m είναι πρώτος αριθμός.*

(ii) *Ο $\mathbb{Z}_m$ είναι μια ακεραία περιοχή.*

(iii) *Ο $\mathbb{Z}_m$ αποτελεί ένα σώμα.*

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή (i) ⇒ (ii) έπεται από την πρόταση 1.2.4, η (ii) ⇒ (iii) από την πρόταση 1.2.22, και η (iii) ⇒ (ii) από την πρόταση 1.2.18. Τέλος, για τη συνεπαγωγή (ii) ⇒ (i) ας υποθέσουμε ότι ο m είναι σύνθετος αριθμός, δηλαδή ότι γράφεται ως γινόμενο $m = pq$ δύο άλλων ακεραίων p, q, όπου $1 < p, q < m$. Αυτό θα σήμαινε ότι $[m]_m = [0]_m = [p]_m [q]_m$ με $p \neq 0$ και $q \neq 0$, πράγμα που αντίκειται στην (ii). □

1.2.24 Θεώρημα (Wedderburn, 1905). *Κάθε πεπερασμένος διαιρετικός δακτύλιος είναι σώμα.*

Απόδειξη[15]. Βλ. Hungerford [17], Ch. IX, Cor. 6.9, σελ. 462. □

1.2.25 Σημείωση. Εάν $(R_1, +_1, \cdot_1)$ και $(R_2, +_2, \cdot_2)$ είναι δακτύλιοι και $f : R_1 \to R_2$ ένας ομομορφισμός μεταξύ των ομάδων $(R_1, +_1)$ και $(R_2, +_2)$, τότε ο f καλείται **ομομορφισμός** μεταξύ των αρχικών δακτυλίων[16] όταν, συν τοις άλλοις, ισχύει $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$ και $f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b)$ για οιαδήποτε $a, b \in R$.

1.3 ΙΔΕΩΔΗ ΚΑΙ ΠΗΛΙΚΟΔΑΚΤΥΛΙΟΙ

1.3.1 Ορισμός. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος. Ένα υποσύνολο $\varnothing \neq I \subseteq R$, για το οποίο το ζεύγος $(I, +)$ αποτελεί μια υποομάδα τής προσθετικής ομάδας $(R, +)$, καλείται **ιδεώδες** όταν $ra \in I$ και $ar \in I$ για κάθε $r \in R$ και κάθε $a \in I$.

1.3.2 Πρόταση. *Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος. Ένα μη κενό υποσύνολο I τού R είναι ιδεώδες εάν και μόνον εάν ισχύουν τα εξής:*

(i) *$a - b \in I$, για οιαδήποτε $a, b \in I$.*

(ii) *$ra, ar \in I$ για οιαδήποτε $a \in I$, $r \in R$.*

Απόδειξη. Προφανώς η (i) ισοδυναμεί με το ότι το ζεύγος $(I, +)$ αποτελεί μια υποομάδα τής προσθετικής ομάδας $(R, +)$ τού δακτυλίου $(R, +, \cdot)$. □

[15] Για την αρχική απόδειξη βλ. J.H.M. Wedderburn: *A theorem on finite algebras*, Transactions of the American Mathematical Society **6** (1905), 349-352.

[16] Ένας τέτοιος ομομορφισμός δακτυλίων καλείται *μονομορφισμός* (και αντιστοίχως, *επιμορφισμός*/*ισομορφισμός*) όταν η απεικόνιση f είναι ενριπτική (και αντιστοίχως, επιρριπτική/αμφιρριπτική). Επιπροσθέτως, λέμε ότι δυο δακτύλιοι είναι μεταξύ τους *ισόμορφοι* (ή ότι ο ένας είναι *ισόμορφος* τού άλλου ή με τον άλλον) όταν υφίσταται κάποιος ισομορφισμός δακτυλίων μεταξύ αυτών.

1.3.3 Παραδείγματα. (i) Για κάθε ακέραιο n η κυκλική υποομάδα $n\mathbb{Z} = \{nk \,|k \in \mathbb{Z}\}$ τής $(\mathbb{Z}, +)$ αποτελεί ένα ιδεώδες τού δακτυλίου $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(ii) Ο υποδακτύλιος $\mathbb{Z}$ τού $\mathbb{Q}$ *δεν είναι* ιδεώδες τού $\mathbb{Q}$, διότι π.χ. $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ και $7 \in \mathbb{Z}$, αλλά $\frac{1}{2} \cdot 7 = 7 \cdot \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

(iii) Κάθε δακτύλιος R έχει πάντοτε τον εαυτό του και το $\{0_R\}$ ως ιδεώδη του. Το $\{0_R\}$ λέγεται **τετριμμένο**[17] **(ή μηδενικό) ιδεώδες**, ενώ κάθε ιδεώδες I τού R με $I \subsetneqq R$ λέγεται ***γνήσιο ιδεώδες***.

(iv) Εάν R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος και $a \in R$, τότε είναι προφανές ότι το σύνολο

$$\boxed{Ra := \{ra \mid r \in R\}}$$

είναι ένα ιδεώδες τού R.

(v) Έστω R ένας δακτύλιος και έστω $S \subsetneqq R$ ένας γνήσιος υποδακτύλιός του. Θεωρούμε ένα μη κενό υποσύνολο $I \subseteq S$. Εάν το I είναι ένα ιδεώδες τού R, τότε το I είναι ένα ιδεώδες τού S. Αντιθέτως, εάν το I είναι ένα ιδεώδες τού S, τότε το I δεν είναι κατ' ανάγκην ένα ιδεώδες τού R. Επί παραδείγματι, εάν $R := \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ και

$$I := \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & s \\ 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \; s \in \mathbb{R} \right\} \subsetneqq \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & c \end{array} \right) \middle| \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} =: S \subsetneqq R,$$

τότε το I είναι ένα ιδεώδες τού S, διότι για $a, b, c, s, s' \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & s \\ 0 & 0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} 0 & s' \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & s - s' \\ 0 & 0 \end{array} \right) \in I$$

και

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & c \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & s \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & as \\ 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 0 & s \\ 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & c \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & sc \\ 0 & 0 \end{array} \right) \in I.$$

Από την άλλη μεριά, το I δεν είναι ιδεώδες τού R, διότι π.χ.

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \notin I.$$

1.3.4 Πρόταση. *Έστω $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ μια οικογένεια ιδεωδών ενός δακτυλίου R. Τότε η τομή $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ των μελών της αποτελεί ένα ιδεώδες τού R.*

Απόδειξη. Εάν η $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ μια οικογένεια ιδεωδών ενός δακτυλίου R, και $r \in R$, $a, b \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$, τότε

$$(a, b \in I_\lambda, \; \forall \, \lambda \in \Lambda) \underset{[I_\lambda \text{ ιδεώδες}]}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} a - b \in I_\lambda \\ ra, ar \in I_\lambda \end{array} \right\}, \; \forall \, \lambda \in \Lambda,$$

οπότε και η τομή $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ αποτελεί ένα ιδεώδες τού R. $\square$

[17] Προσοχή! Ορισμένοι συγγραφείς (την ορολογία των οποίων δεν ακολουθούμε εν προκειμένω) χαρακτηρίζουν ως *τετριμμένα ιδεώδη* ενός δακτυλίου R *αμφότερα* τα $\{0_R\}$ και R.

1.3.5 Πρόταση. *Εάν I είναι ένα γνήσιο ιδεώδες ενός μη τετριμμένου δακτυλίου R, τότε αυτό δεν περιέχει κανένα (αμφιπλεύρως) αντιστρέψιμο στοιχείο τού R.*

Απόδειξη. Εάν το I είναι ένα γνήσιο ιδεώδες τού R και εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο $a \in I \smallsetminus \{0_R\}$, ούτως ώστε να ισχύει $ab = ba = 1_R$, για κάποιο $b \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τότε από τον ορισμό ενός ιδεώδους είναι πρόδηλο ότι και τα γινόμενα αυτά (που είναι ίσα με 1_R) οφείλουν να ανήκουν στο I. Άρα

$$1_R \in I \Longrightarrow [\forall r \in R : r \cdot 1_R = r \in I, \text{ αντ.}, 1_R \cdot r = r] \Longrightarrow I = R,$$

πράγμα που έχουμε εκ των προτέρων αποκλείσει. □

1.3.6 Πόρισμα. *Έστω R ένας μη τετριμμένος δακτύλιος. Εάν το I είναι ένα γνήσιο ιδεώδες τού R, τότε το I δεν περιέχει το 1_R.*

1.3.7 Πόρισμα. *Τα μόνα ιδεώδη ενός διαιρετικού δακτυλίου R είναι το $\{0_R\}$ και ο ίδιος ο R.*

1.3.8 Πόρισμα. *Έστω R ένας μη τετριμμένος, μεταθετικός δακτύλιος. Τότε ο R είναι σώμα εάν και μόνον εάν τα μόνα ιδεώδη του είναι το $\{0_R\}$ και ο ίδιος ο R.*

Μια συνήθης μέθοδος κατασκευής ιδεωδών ενός δοθέντος δακτυλίου είναι η κατά φυσικό τρόπο «παραγωγή τους» από τυχόντα υποσύνολα τού δακτυλίου.

1.3.9 Ορισμός. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος και έστω $A \subseteq R$. Λέμε ότι η τομή

$$\boxed{\langle A \rangle := \bigcap \{\text{ιδεώδη } I \text{ τού } R \mid I \supseteq A\}}$$

των μελών τής οικογενείας όλων των ιδεωδών αυτού, τα οποία περιέχουν το A, είναι **το ιδεώδες το παραγόμενο από το** A ή το ιδεώδες **με γεννήτορες** τα στοιχεία τού A. Όταν $A = \varnothing$, τότε $\langle A \rangle = \{0_R\}$. Κάθε ιδεώδες τού R που μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή $\langle A \rangle$, όπου $A \subseteq R$ είναι κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο αυτού, ας πούμε το $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ (όπου $k \in \mathbb{N}$), καλείται **πεπερασμένως παραγόμενο ιδεώδες** και συμβολίζεται απλούστερα ως $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. Τέλος, κάθε ιδεώδες τού R που μπορεί γραφεί υπό τη μορφή $\langle a \rangle$, για κάποιο $a \in R$, καλείται **κύριο ιδεώδες** (έχον το a ως έναν γεννήτορά του).

1.3.10 Σημείωση. Εάν R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος και $\varnothing \neq A \subseteq R$, τότε

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{\kappa} r_i \, a_i \;\middle|\; r_1, \ldots, r_\kappa \in R, \; a_1, \ldots, a_\kappa \in A, \; \kappa \in \mathbb{N} \right\}.$$

Επιπροσθέτως, για κάθε $a \in R$ έχουμε $\langle a \rangle = Ra = \{ra \mid r \in R\}$.

1.3.11 Πρόταση. *Κάθε ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών είναι τής μορφής $\langle n \rangle = n\mathbb{Z}$, όπου $n \in \mathbb{Z}$. (Οι εν λόγω γεννήτορες n είναι, βεβαίως, δυνατόν να περιορισθούν στα στοιχεία τού συνόλου $\mathbb{N}_0$, καθότι μια ενδεχόμενη αλλαγή* *προσήμου τού εκάστοτε θεωρούμενου n δεν επιφέρει διαφοροποίηση τού κυρίου ιδεώδους $\langle n \rangle$.) Ως εκ τούτου, κάθε ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ είναι κύριο ιδεώδες.*

Αποδειξη. Έστω I ένα ιδεώδες τού $\mathbb{Z}$. Εάν $I = \{0\}$, τότε $I = \langle 0 \rangle$. Εάν $\{0\} \subsetneqq I$, τότε υπάρχει κάποιος ακέραιος $n \in I \setminus \{0\}$. Άρα και ο αντίθετός του $-n$ ανήκει στο $I \setminus \{0\}$ (αφού $-n = 0 - n$ με $0 \in I$ και $n \in I$). Ως εκ τούτου, *κάθε* μη τετριμμένο ιδεώδες I τού $\mathbb{Z}$ περιέχει *θετικούς ακεραίους*. Έστω $n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \in I\}$. Θα δείξουμε ότι $I = \langle n_0 \rangle$. Πράγματι· έστω a τυχόν στοιχείο τού I. Τότε το a διαιρούμενο με το n_0 δίνει υπόλοιπο r, όπου $a = n_0 q + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r < n_0$, οπότε

$$q \in \mathbb{Z},\ n_0 \in I \Longrightarrow n_0 q \in I \underset{a \in I}{\Longrightarrow} a - n_0 q = r \in I,$$

απ' όπου έπεται ότι $r = 0$ (διότι αλλιώς θα παρουσιαζόταν αντίφαση ως προς την επιλογή τού n_0). Άρα $a = n_0 q \in \langle n_0 \rangle$, ήτοι $I \subseteq \langle n_0 \rangle$. Από την άλλη μεριά έχουμε

$$\langle n_0 \rangle = \{ k n_0 \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq I.$$

Άρα τελικώς $I = \langle n_0 \rangle = \langle -n_0 \rangle$. □

1.3.12 Παρατήρηση. Είναι προφανές ότι υφίσταται *αμφίρριψη*[18]

$$\mathbb{N}_0 \ni n \longmapsto \langle n \rangle \in \{\text{ιδεώδη τού δακτυλίου } \mathbb{Z}\}.$$

1.3.13 Ορισμός. Έστω ότι ο R είναι ένας δακτύλιος και τα $I_1, \ldots, I_n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, ιδεώδη του. Ορίζουμε το **άθροισμα** και το **γινόμενό** τους ως:

$$I_1 + \cdots + I_n := \sum_{j=1}^{n} I_j := \{a_1 + \cdots + a_n \mid a_j \in I_j,\ \ \forall j,\ \ 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

και

$$I_1 \ \cdots \ I_n := \left\{ \begin{array}{c} \text{αθροίσματα τής μορφής} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} a_{1,j}\, a_{2,j} \cdots a_{n,j},\ \ \text{με } a_{\varrho,j} \in I_\varrho,\ 1 \leqslant \varrho \leqslant n,\ k \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

αντιστοίχως.

1.3.14 Πρόταση. *Εάν R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος και $a, b \in R$, τότε*

(i) $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \{ xa + yb \mid x, y \in R\}$, *και*

(ii) $\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle$.

Αποδειξη. (i) Επειδή έχουμε $\langle a \rangle = Ra$ και $\langle b \rangle = Rb$, τούτο έπεται άμεσα από τον ορισμό 1.3.13.

[18] Η εν λόγω απεικόνιση είναι προφανώς *επιρριπτική* και στέλνει το 0 στο τετριμμένο ιδεώδες. Η *ενριπτικότητά* της έπεται από το γεγονός ότι για οιουσδήποτε $n, n' \in \mathbb{N}$ έχουμε $\langle n \rangle \subseteq \langle n' \rangle \Leftrightarrow$ ο n' διαιρεί τον n. (Επομένως, $\langle n \rangle = \langle n' \rangle \Leftrightarrow n = n'$.)

(ii) Προφανώς,

$$\begin{aligned}\langle a\rangle\langle b\rangle &= \left\{ \sum_{j=1}^{k} (r_j a)(s_j b) \,\middle|\, r_1,\ldots,r_k,s_1,\ldots,s_k \in R,\ k\in\mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ \left(\sum_{j=1}^{k} r_j s_j\right) ab \,\middle|\, r_1,\ldots,r_k,s_1,\ldots,s_k \in R,\ k\in\mathbb{N} \right\} = Rab,\end{aligned}$$

όπου $Rab = \langle ab\rangle$. □

1.3.15 Πρόταση. *Εάν $\langle m\rangle$ και $\langle n\rangle$ είναι δύο μη τετριμμένα ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων, όπου $m,n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$, τότε ισχύουν τα εξής*[19]:

(i) $\langle m\rangle \cap \langle n\rangle = \langle \text{εκπ}(m,n)\rangle$,

(ii) $\langle m\rangle + \langle n\rangle = \langle \text{μκδ}(m,n)\rangle$,

(iii) $\langle m\rangle\langle n\rangle = \langle mn\rangle$.

Απόδειξη. (i) Έστω τυχόν $a\in\langle m\rangle\cap\langle n\rangle$. Τότε $a\in\langle m\rangle$ και $a\in\langle n\rangle$, οπότε έχουμε $a=\lambda m=\kappa n$, για κάποιους $\lambda,\kappa\in\mathbb{Z}$. Έστω $d:=\text{μκδ}(m,n)$. Προφανώς,

$$\lambda\left(\frac{m}{d}\right)d=\kappa\left(\frac{n}{d}\right)d \Longrightarrow \lambda\left(\frac{m}{d}\right)=\kappa\left(\frac{n}{d}\right) \Longrightarrow \frac{n}{d}\,\Big|\,\lambda\left(\frac{m}{d}\right),$$

κι επειδή $\text{μκδ}\left(\frac{m}{d},\frac{n}{d}\right)=1$, έχουμε $\frac{n}{d}\,\big|\,\lambda \Longrightarrow \lambda=\nu\frac{n}{d}$, για κάποιον $\nu\in\mathbb{Z}$. Κατά συνέπειαν,

$$a=\lambda m=\nu\frac{n}{d}m=\left(\frac{mn}{d}\right)\nu=\text{sign}\,(mn)\ \text{εκπ}\,(m,n)\ \nu \Longrightarrow a\in\langle\text{εκπ}(m,n)\rangle,$$

ήτοι $\langle m\rangle\cap\langle n\rangle\subseteq\langle\text{εκπ}(m,n)\rangle$. Και αντιστρόφως· εάν $a\in\langle\text{εκπ}(m,n)\rangle$, τότε έχουμε $a=\mu\,\text{εκπ}(m,n)$, για κάποιον $\mu\in\mathbb{Z}$, οπότε[20]

$$a=\mu\frac{|m|\ |n|}{\text{μκδ}(m,n)}=m\left(\frac{\mu\,\text{sign}\,(m)\ |n|}{\text{μκδ}(m,n)}\right)=n\left(\frac{\mu\,\text{sign}\,(n)\ |m|}{\text{μκδ}(m,n)}\right),$$

όπου $\frac{\mu\,\text{sign}(m)\,|n|}{\text{μκδ}(m,n)}\in\mathbb{Z}$ και $\frac{\mu\,\text{sign}(n)\,|m|}{\text{μκδ}(m,n)}\in\mathbb{Z}$. Συνεπώς έχουμε $a\in\langle m\rangle\cap\langle n\rangle$, δηλαδή

$$\langle\text{εκπ}(m,n)\rangle\subseteq\langle m\rangle\cap\langle n\rangle.$$

(ii) Κατά το (i) τής προτάσεως 1.3.14, $\langle m\rangle+\langle n\rangle=\{xm+yn \mid x,y\in\mathbb{Z}\}$. Επειδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και n γράφεται ως ακέραιος γραμμικός συνδυασμός των m και n, έχουμε $\text{μκδ}(m,n)\in(\langle m\rangle+\langle n\rangle)\Longrightarrow\langle\text{μκδ}(m,n)\rangle\subseteq\langle m\rangle+\langle n\rangle$. Και αντιστρόφως· εάν $d:=\text{μκδ}(m,n)$ και $a\in\langle m\rangle+\langle n\rangle$, τότε

$$(a=\kappa m+\lambda n,\quad \kappa,\lambda\in\mathbb{Z})\Longrightarrow a=\left(\frac{\kappa m}{d}+\frac{\lambda n}{d}\right)d,$$

όπου $\frac{\kappa m}{d}+\frac{\lambda n}{d}\in\mathbb{Z}$, οπότε $a\in\langle\text{μκδ}(m,n)\rangle$. Τούτο σημαίνει ότι $\langle m\rangle+\langle n\rangle\subseteq\langle d\rangle$.

(iii) Προφανές επί τη βάσει τού (ii) τής προτάσεως 1.3.14. □

[19] Ως $\text{εκπ}(m,n)$ συμβολίζουμε το *ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο* και ως $\text{μκδ}(m,n)$ τον *μέγιστο κοινό διαιρέτη* των m και n.

[20] Για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ θέτουμε $\text{sign}(n):=1$ όταν $n\geqslant 0$ και $\text{sign}(n):=-1$ όταν $n<0$.

1.3.16 Ορισμός. Έστω R ένας δακτύλιος. Ένα ιδεώδες $\mathfrak{p}$ τού R καλείται **πρώτο ιδεώδες** όταν $\mathfrak{p} \subsetneq R$ και για οιαδήποτε ιδεώδη I, J τού R ισχύει η συνεπαγωγή

$$[IJ \subseteq \mathfrak{p} \Longrightarrow \text{είτε } \ I \subseteq \mathfrak{p} \ \text{ είτε } \ J \subseteq \mathfrak{p}].$$

1.3.17 Πρόταση. *Έστω $\mathfrak{p} \subsetneq R$ ένα ιδεώδες ενός δακτυλίου R. Εάν για οιοδήποτε ζεύγος $(a, b) \in R \times R$ ισχύει η συνεπαγωγή*

$$[ab \in \mathfrak{p} \Longrightarrow \text{είτε } \ a \in \mathfrak{p} \ \text{ είτε } \ b \in \mathfrak{p}], \tag{1.4}$$

τότε το $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο. Και αντιστρόφως· εάν το $\mathfrak{p}$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες ενός δακτυλίου R και ο R είναι μεταθετικός, τότε το $\mathfrak{p}$ ικανοποιεί την (1.4).

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε εν πρώτοις ότι η συνθήκη (1.4) ικανοποιείται. Εάν τα I, J είναι ιδεώδη τού R με $IJ \subseteq \mathfrak{p}$ και $I \nsubseteq \mathfrak{p}$, τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο $a \in I \smallsetminus \mathfrak{p}$. Για κάθε $b \in J$ έχουμε $ab \in IJ \subseteq \mathfrak{p}$, οπότε εξ υποθέσεως είτε $a \in \mathfrak{p}$ είτε $b \in \mathfrak{p}$. Επειδή $a \notin \mathfrak{p}$, αυτό σημαίνει ότι $b \in \mathfrak{p}$ *για κάθε* $b \in J$. Άρα $J \subseteq \mathfrak{p}$ και το $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο ιδεώδες τού R. Και αντιστρόφως· εάν το $\mathfrak{p}$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες ενός μεταθετικού δακτυλίου R και $ab \in \mathfrak{p}$, τότε το κύριο ιδεώδες $\langle ab \rangle$ περιέχεται στο $\mathfrak{p}$. Λόγω τής μεταθετικότητας τού R (βλ. 1.3.10) έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} \langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq \langle ab \rangle \subseteq \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p} \text{ πρώτο ιδεώδες} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{είτε } \ \langle a \rangle \subseteq \mathfrak{p} \ \text{ είτε } \ \langle b \rangle \subseteq \mathfrak{p},$$

οπότε είτε $a \in \mathfrak{p}$ είτε $b \in \mathfrak{p}$ και το $\mathfrak{p}$ ικανοποιεί την (1.4). □

1.3.18 Παραδείγματα. (i) Το τετριμμένο ιδεώδες $\{0_R\}$ οιασδήποτε *ακεραίας περιοχής* R είναι πρώτο, διότι για οιαδήποτε $a, b \in R$ ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$ab = 0_R \Longleftrightarrow \ \text{είτε } a = 0_R \text{ είτε } b = 0_R.$$

(ii) Το ιδεώδες $\langle 10 \rangle$ τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ δεν είναι πρώτο, καθότι ισχύει $2 \cdot 5 \in \langle 10 \rangle$ αλλά $2 \notin \langle 10 \rangle$ και $5 \notin \langle 10 \rangle$. Το σύνολο των πρώτων ιδεωδών τού $\mathbb{Z}$ προσδιορίζεται πλήρως στην πρόταση 1.3.19.

(iii) Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι το

$$I := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \mathsf{X}^i \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}] \ \middle| \ n \in \mathbb{N}_0, \ a_0 \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \right\}$$

είναι ένα μη κύριο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[\mathsf{X}]$. Επομένως, $I \subsetneq \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$. Επιπροσθέτως, το I είναι πρώτο ιδεώδες. Πράγματι· εάν τα

$$\varphi(\mathsf{X}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathsf{X}^i \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}] \ , \ \ \psi(\mathsf{X}) = \sum_{j=0}^{m} b_j \mathsf{X}^j \in \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$$

είναι πολυώνυμα, τέτοια ώστε $\varphi(\mathsf{X})\psi(\mathsf{X}) \in I$, τότε ο σταθερός όρος $a_0 b_0$ τού $\varphi(\mathsf{X})\psi(\mathsf{X})$ οφείλει να είναι άρτιος ακέραιος αριθμός. Κατ' ανάγκην λοιπόν, είτε $a_0 \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$ (δηλαδή $\varphi(\mathsf{X}) \in I$) είτε $b_0 \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$ (δηλαδή $\psi(\mathsf{X}) \in I$).

1.3.19 Πρόταση (Πρώτα ιδεώδη τού $\mathbb{Z}$). *Το σύνολο των πρώτων ιδεωδών τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών απαρτίζεται από το τετριμμένο ιδεώδες και τα κύρια ιδεώδη τής μορφής $\langle p \rangle$, όπου p κάποιος πρώτος αριθμός.*

Απόδειξη. Επειδή ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ είναι ακεραία περιοχή, το $\{0\}$ είναι πρώτο ιδεώδες του. Εάν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός και οι $a, b \in \mathbb{Z}$, τέτοιοι ώστε να ισχύει $ab \in \langle p \rangle$, τότε

$$p \mid ab \Rightarrow \text{είτε } p \mid a \text{ είτε } p \mid b \Rightarrow \text{είτε } \; a \in \langle p \rangle \; \text{ είτε } \; b \in \langle p \rangle,$$

οπότε το κύριο ιδεώδες $\langle p \rangle$ είναι πρώτο (βλ. πρόταση 1.3.17). Σύμφωνα με την πρόταση 1.3.11 κάθε μη τετριμμένο ιδεώδες τού $\mathbb{Z}$ είναι τής μορφής $\langle n \rangle$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Εάν ο n είναι σύνθετος αριθμός, τότε $n = n_1 n_2$ για κάποιους φυσικούς αριθμούς n_1, n_2 με $1 < n_1 < n$ και $1 < n_2 < n$. Κατά συνέπειαν, $n = n_1 n_2 \in \langle n \rangle$ αλλά $n_1 \notin \langle n \rangle$ και $n_2 \notin \langle n \rangle$ (διότι κανείς εκ των n_1, n_2 δεν μπορεί να ισούται με κάποιο πολλαπλάσιο τού n). Αυτό σημαίνει ότι το ιδεώδες $\langle n \rangle$ δεν είναι πρώτο. □

1.3.20 Παρατήρηση. Ως γνωστόν, η τομή δυο ιδεωδών ενός δακτυλίου αποτελεί ένα ιδεώδες αυτού. (Βλ. πρόταση 1.3.4). Ωστόσο, η τομή δυο πρώτων ιδεωδών δεν είναι κατ' ανάγκην πρώτο ιδεώδες. Επί παραδείγματι, σύμφωνα με την πρόταση 1.3.19 και το (i) τού πορίσματος 1.3.15, τα ιδεώδη $\langle 3 \rangle$ και $\langle 5 \rangle$ είναι πρώτα ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών αλλά η τομή τους $\langle 3 \rangle \cap \langle 5 \rangle = \langle 15 \rangle$ δεν είναι πρώτο ιδεώδες.

1.3.21 Ορισμός. Ένα ιδεώδες $\mathfrak{m} \subsetneqq R$ ενός δακτυλίου R καλείται **μεγιστικό** (ή **μεγιστοτικό**) **ιδεώδες** όταν ισχύει η συνεπαγωγή

$$\left[\left\{ \begin{array}{c} \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n} \subseteq R \\ \text{για κάποιο ιδεώδες } \mathfrak{n} \text{ τού } R \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{είτε } \mathfrak{n} = \mathfrak{m} \;\; \text{είτε } \; \mathfrak{n} = R \right].$$

1.3.22 Παραδείγματα. (i) Το ιδεώδες $\mathfrak{m} := \{(x, 2y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ τού δακτυλίου $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ είναι μεγιστικό. Πράγματι· εάν το $\mathfrak{n}$ είναι ένα ιδεώδες τού $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, για το οποίο ισχύει $\mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{n} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο τής μορφής $(a, 2b+1)$ εντός τού $\mathfrak{n}$, όπου a, b κατάλληλοι ακέραιοι αριθμοί. Επομένως,

$$\left. \begin{array}{r} (a, 2b+1) \in \mathfrak{n} \\ (a, 2b) \in \mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{n} \end{array} \right\} \Longrightarrow (a, 2b+1) - (a, 2b) = (0, 1) \in \mathfrak{n},$$

και επειδή $(1, 0) \in \mathfrak{m}$, έχουμε $(0,1) + (1,0) = (1,1) = 1_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \in \mathfrak{n} \Longrightarrow \mathfrak{n} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
(ii) Το ιδεώδες

$$\mathfrak{m} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & 0 \end{array} \right) \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\} \subsetneqq R = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \in \mathrm{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \middle| \; c = 0 \right\}$$

τού δακτυλίου R είναι μεγιστικό. Πράγματι· εάν το $\mathfrak{n}$ είναι ένα ιδεώδες τού R, για το οποίο ισχύει $\mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{n} \subseteq R$, τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & d \end{array} \right) \in \mathfrak{n} \smallsetminus \mathfrak{m}, \text{ με } a, b \in \mathbb{R}, \;\; d \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}.$$

Επομένως,

$$\left.\begin{array}{r}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{n} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{n} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{n} \Longrightarrow \mathfrak{n} = R.$$

(iii) Το κύριο ιδεώδες $\langle \mathsf{X} \rangle$ τού $\mathbb{Z}[\mathsf{X}]$ δεν είναι μεγιστικό, αφού $\langle \mathsf{X} \rangle \subsetneqq I \subsetneqq \mathbb{Z}[\mathsf{X}]$, όπου I το ιδεώδες το ορισθέν στο εδάφιο 1.3.18 (iii).

Μέσω τού λεγομένου *λήμματος τού Zorn* (που ισοδυναμεί με το *αξίωμα τής επιλογής*) αποδεικνύεται το ακόλουθο:

1.3.23 Θεώρημα. *Κάθε μη τετριμμένος δακτύλιος R διαθέτει πάντοτε μεγιστικά ιδεώδη. Μάλιστα, ισχύει κάτι ακόμη πιο ισχυρό: Κάθε γνήσιο ιδεώδες τού R περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες τού R.*

1.3.24 Θεώρημα. *Εάν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, τότε κάθε μεγιστικό ιδεώδες $\mathfrak{m}$ τού R είναι πρώτο.*

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{m}$ ένα μεγιστικό ιδεώδες τού R. Υποθέτοντας ότι υπάρχουν στοιχεία $a, b \in R$, για τα οποία ισχύει $ab \in \mathfrak{m}$, όπου $a \notin \mathfrak{m}$ και $b \notin \mathfrak{m}$, έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{m} + \langle a \rangle \\ \mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{m} + \langle b \rangle \end{array}\right\} \Longrightarrow R = \mathfrak{m} + \langle a \rangle = \mathfrak{m} + \langle b \rangle$$

(λόγω τής «μεγιστικότητας» τού $\mathfrak{m}$). Εξάλλου, επειδή ο R είναι μεταθετικός και $ab \in \mathfrak{m}$, συμπεραίνουμε ότι $\langle a \rangle \langle b \rangle \underset{1.3.10}{\subseteq} \langle ab \rangle \subseteq \mathfrak{m} \subsetneqq R$. Όμως, επειδή $R = RR$, λαμβάνουμε

$$R = RR = (\mathfrak{m} + \langle a \rangle)(\mathfrak{m} + \langle b \rangle) \subseteq \mathfrak{m} + \underbrace{\langle a \rangle \langle b \rangle}_{\subseteq \langle ab \rangle \subseteq \mathfrak{m}} \subseteq \mathfrak{m},$$

ήτοι κάτι το άτοπο, καθόσον $\mathfrak{m} \subsetneqq R$. Κατά συνέπειαν, είτε $a \in \mathfrak{m}$ είτε $b \in \mathfrak{m}$, οπότε το $\mathfrak{m}$ είναι πρώτο ιδεώδες τού R. (Βλ. πρόταση 1.3.17). $\square$

1.3.25 Παραδείγματα. Υπάρχουν, βεβαίως, πρώτα ιδεώδη, τα οποία δεν είναι μεγιστικά. Δύο στοιχειώδη παραδείγματα είναι τα εξής:

(i) Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων το τετριμμένο ιδεώδες $\{0\}$ είναι πρώτο, αλλά *δεν είναι* μεγιστικό, διότι $\{0\} \subsetneqq n\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, 1\}$. Ωστόσο, όπως θα δούμε στην πρόταση 1.3.26, τα λοιπά πρώτα ιδεώδη τού $\mathbb{Z}$ *είναι* μεγιστικά.

(ii) Επειδή ο $\mathbb{Z}$ δεν έχει μηδενοδιαιρέτες, το ιδεώδες $I = \mathbb{Z} \times \{0\} = \{(k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ τού $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ είναι προφανώς πρώτο. Ωστόσο, δεν είναι και μεγιστικό, διότι

$$I \subsetneqq \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

1.3.26 Πρόταση (Μεγιστικά ιδεώδη τού $\mathbb{Z}$.). *Το σύνολο των μεγιστικών ιδεωδών τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών απαρτίζεται από τα κύρια ιδεώδη τής μορφής $\langle p\rangle$, όπου p κάποιος πρώτος αριθμός.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στα εδάφια 1.3.19, 1.3.24 και 1.3.25 (i), το σύνολο των μεγιστικών ιδεωδών τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ περιέχεται στο σύνολο των κυρίων ιδεωδών τής μορφής $\langle p\rangle$, όπου p κάποιος πρώτος αριθμός. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ο αντίστροφος εγκλεισμός. Προς τούτο θεωρούμε το ιδεώδες $\langle p\rangle$, όπου p *τυχών* πρώτος αριθμός, και υποθέτουμε ότι το $\mathfrak{n}$ είναι ένα ιδεώδες τού $\mathbb{Z}$, για το οποίο ισχύει $\langle p\rangle \subsetneqq \mathfrak{n} \subseteq \mathbb{Z}$. Κατά την πρόταση 1.3.11, $\mathfrak{n} = \langle n\rangle$, όπου n κατάλληλος φυσικός αριθμός. Προφανώς,

$$p \in \mathfrak{n} = \langle n\rangle \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : p = kn \Rightarrow \text{είτε } [k = p,\ n = 1] \text{ είτε } [k = 1,\ n = p].$$

Το δεύτερο ενδεχόμενο αποκλείεται, καθόσον $\langle p\rangle \subsetneqq \mathfrak{n}$. Άρα $n = 1$, απ' όπου έπεται ότι $\mathfrak{n} = \langle 1\rangle = \mathbb{Z}$. Αυτό σημαίνει ότι το κύριο ιδεώδες $\langle p\rangle$ είναι μεγιστικό. □

Πηλικοδακτύλιοι. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας δακτύλιος και έστω I ένα ιδεώδες του. Επειδή η προσθετική ομάδα $(R, +)$ είναι αβελιανή, υπάρχει μια καλώς ορισμένη ομάδα πηλίκων R/I με πρόσθεση[21]:

$$(a + I) + (b + I) := (a + b) + I\ , \quad \text{για οιαδήποτε} \quad a, b \in R. \tag{1.5}$$

Το *ουδέτερο* στοιχείο $0_{R/I}$ τής $(R/I, +)$ είναι προφανώς το $0_R + I = I$. Εξάλλου, για οιαδήποτε $a, b \in R$ έχουμε $a + I = b + I \iff a - b \in I$. Η $(R/I, +)$ εφοδιάζεται με τη δομή ενός δακτυλίου όταν για οιαδήποτε $a, b \in R$ ορίσουμε τον «πολλαπλασιασμό»:

$$(a + I)\ (b + I) := (ab) + I\ . \tag{1.6}$$

1.3.27 Ορισμός. Ο δακτύλιος $(R/I, +, \cdot)$ ο οριζόμενος μέσω των πράξεων (1.5) και (1.6) έχει ως μοναδιαίο του στοιχείο το $1_{R/I} = 1_R + I$ και καλείται **πηλικοδακτύλιος** (ή **δακτύλιος κλάσεων υπολοίπων**) τού R ως προς το I.

1.3.28 Θεώρημα. *Εάν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος και το $\mathfrak{p}$ ένα ιδεώδες τού R, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mathfrak{p} \subsetneqq R$ *και το* $\mathfrak{p}$ *είναι πρώτο ιδεώδες τού* R.

(ii) *Ο πηλικοδακτύλιος* $R/\mathfrak{p}$ *είναι ακεραία περιοχή.*

Απόδειξη. Ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathfrak{p}$ είναι μεταθετικός με το $0_R + \mathfrak{p}$ ως μηδενικό και το $1_R + \mathfrak{p}$ ως μοναδιαίο του στοιχείο.

(i)⇒(ii): Εάν το $\mathfrak{p}$ είναι ένα πρώτο ιδεώδες τού R, τότε $1_R + \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}$ αφού $\mathfrak{p} \subsetneqq R$. Για οιαδήποτε $a, b \in R$, για τα οποία ισχύει η ισότητα $(a + \mathfrak{p})\,(b + \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$, έχουμε

$$ab + \mathfrak{p} = \mathfrak{p} \Rightarrow ab \in \mathfrak{p} \Longrightarrow [\text{είτε } a \in \mathfrak{p} \text{ είτε } b \in \mathfrak{p}] \Rightarrow [\text{είτε } a + \mathfrak{p} = \mathfrak{p} \text{ είτε } b + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}]\,.$$

Άρα ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathfrak{p}$ είναι μια ακεραία περιοχή.

[21] $a + I := \{\, a + r \mid r \in I\}\ , \ \forall a \in R.$

(ii)⇒(i): Εάν ο $R/\mathfrak{p}$ είναι ακεραία περιοχή, τότε $1_R + \mathfrak{p} \neq 0_R + \mathfrak{p}$, απ' όπου έπεται ότι $1_R \notin \mathfrak{p} \Longrightarrow \mathfrak{p} \subsetneqq R$. Εάν τώρα $a, b \in R$ και $ab \in \mathfrak{p}$, έχουμε

$$ab + \mathfrak{p} = \mathfrak{p} \Longrightarrow (a + \mathfrak{p})\,(b + \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}.$$

Επειδή ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathfrak{p}$ δεν διαθέτει μηδενοδιαιρέτες, από την τελευταία αυτή ισότητα συνάγεται ότι

$$[\text{είτε }\ a + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}\ \text{ είτε }\ b + \mathfrak{p} = \mathfrak{p}] \Longrightarrow [\text{είτε }\ a \in \mathfrak{p}\ \text{ είτε }\ b \in \mathfrak{p}]\,,$$

πράγμα που σημαίνει ότι το $\mathfrak{p}$ είναι πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου R βάσει τής προτάσεως 1.3.17. □

1.3.29 Πόρισμα. *Έστω $\mathfrak{m}$ ένα ιδεώδες ενός μη τετριμμένου δακτυλίου R. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν το $\mathfrak{m}$ είναι μεγιστικό και ο R μεταθετικός, τότε ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathfrak{m}$ είναι σώμα.*

(ii) *Εάν ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathfrak{m}$ είναι διαιρετικός δακτύλιος (= στρεβλό σώμα), τότε το $\mathfrak{m}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες.*

Απόδειξη. (i) Σύμφωνα με το θεώρημα 1.3.24, το $\mathfrak{m}$, όντας εξ υποθέσεως μεγιστικό, θα είναι και πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου R. Συνεπώς, βάσει τού θεωρήματος 1.3.28, ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathfrak{m}$ είναι μια ακεραία περιοχή. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε την ύπαρξη πολλαπλασιαστικού αντιστρόφου (εντός τού $R/\mathfrak{m}$) για οιοδήποτε στοιχείο $a + \mathfrak{m} \in R/\mathfrak{m}$, με $a \in R \smallsetminus \mathfrak{m}$. Επειδή το $\mathfrak{m}$ είναι ένα μεγιστικό ιδεώδες τού R, για οιοδήποτε μη μηδενικό στοιχείο $a + \mathfrak{m}$ τού $R/\mathfrak{m}$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{m} + \langle a \rangle \subseteq R \quad\Longrightarrow\quad \mathfrak{m} + \langle a \rangle = R \\ R \text{ μεταθετικός} \end{array}\right\} \Longrightarrow [\exists r \in R,\ b \in \mathfrak{m} : 1_R = b + ra]\,.$$

Επομένως, $1_R - ra = b \in \mathfrak{m}$, οπότε

$$1_R + \mathfrak{m} = (ra + b) + \mathfrak{m} = ra + \mathfrak{m} = (r + \mathfrak{m})\,(a + \mathfrak{m})\,,$$

απ' όπου έπεται ότι το $r + \mathfrak{m}$ είναι πολλαπλασιαστικό αντίστροφο τού $a + \mathfrak{m}$. Άρα ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathfrak{m}$ είναι σώμα.

(ii) Εάν ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathfrak{m}$ είναι διαιρετικός δακτύλιος, παρατηρούμε εν πρώτοις ότι $1_R + \mathfrak{m} \neq 0_R + \mathfrak{m} \Longrightarrow 1_R \notin \mathfrak{m} \Longrightarrow \mathfrak{m} \subsetneqq R$. Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι το $\mathfrak{n}$ είναι ένα ιδεώδες τού R με $\mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{n} \subseteq R$. Έστω τυχόν $a \in \mathfrak{n} \smallsetminus \mathfrak{m}$. Το $a + \mathfrak{m}$ έχει (εξ υποθέσεως) πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, ας το πούμε $b + \mathfrak{m}$, εντός τού $R/\mathfrak{m}$. Συνεπώς, $(a + \mathfrak{m})\,(b + \mathfrak{m}) = ab + \mathfrak{m} = 1_R + \mathfrak{m} \Longrightarrow ab - 1_R =: c \in \mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{n}$, και

$$\left.\begin{array}{r} a \in \mathfrak{n} \Longrightarrow ab \in \mathfrak{n} \\ c \in \mathfrak{n} \end{array}\right\} \Longrightarrow c - ab = 1_R \in \mathfrak{n} \Longrightarrow \mathfrak{n} = R.$$

Άρα το $\mathfrak{m}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες τού R. □

1.3.30 Ορισμός. Ένας μεταθετικός δακτύλιος καλείται **δακτύλιος τής Noether** ή **ναιτεριανός δακτύλιος** όταν κάθε ιδεώδες αυτού μπορεί να παραχθεί από ένα πεπερασμένο υποσύνολο τού υποκειμένου συνόλου του. Κάθε μεταθετικός δακτύλιος, ο οποίος τυγχάνει να είναι ταυτοχρόνως ναιτεριανός και ακεραία περιοχή, καλείται **ναιτεριανή περιοχή**.

1.3.31 Παραδείγματα. (i) Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών είναι ναιτεριανή περιοχή (βλ. πρόταση 1.3.11).

(ii) Κάθε σώμα είναι προφανώς ναιτεριανή περιοχή (αφού διαθέτει μόνον δύο ιδεώδη, τα οποία είναι κύρια ιδεώδη).

(iii) Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Εάν ο R είναι ναιτεριανός, τότε και ο πολυωνυμικός δακτύλιος[22] $R[\mathrm{X}]$ και ο δακτύλιος των επίτυπων δυναμοσειρών $R[\![\mathrm{X}]\!]$ είναι ναιτεριανοί.

1.3.32 Πρόταση. *Έστω m ένας ακέραιος αριθμός στερούμενος τετραγώνων. Τότε κάθε ιδεώδες τής τετραγωνικής αριθμητικής περιοχής*

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}] := \left\{ a + b\sqrt{m} \in \mathbb{Z} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subsetneqq \mathbb{C}$$

μπορεί να παραχθεί από δύο (όχι κατ' ανάγκην διαφορετικά) στοιχεία. (Ως εκ τούτου, η $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ είναι ναιτεριανή περιοχή.)

Απόδειξη. Έστω I τυχόν ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$. Θέτοντας

$$I_1 := I \cap \mathbb{Z}, \quad I_2 := \left\{ b \in \mathbb{Z} \mid a + b\sqrt{m} \in I, \text{ για κάποιον } a \in \mathbb{Z} \right\},$$

η απόδειξη τής προτάσεως απορρέει από τα ακόλουθα:

(i) Τα I_1 και I_2 είναι ιδεώδη τού $\mathbb{Z}$.

(ii) $I_1 \subseteq I_2$.

(iii) Σύμφωνα με την πρόταση 1.3.11 υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $I_1 = \langle r_1 \rangle$, $I_2 = \langle r_2 \rangle$. Επιπροσθέτως, επειδή $r_2 \in I_2$, υπάρχει κάποιο $c \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $c + r_2\sqrt{m} \in I$. Το I ισούται με

$$I = \left\langle r_1, c + r_2\sqrt{m} \right\rangle = \mathbb{Z}[\sqrt{m}]\, r_1 + \mathbb{Z}[\sqrt{m}]\, \left(c + r_2\sqrt{m}\right). \tag{1.7}$$

Απόδειξη τού (i): Εάν $a_1, a_2 \in I_1$, τότε, επειδή ο $\mathbb{Z}$ είναι δακτύλιος και το I ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} a_1, a_2 \in \mathbb{Z} \Longrightarrow a_1 - a_2 \in \mathbb{Z} \\ a_1, a_2 \in I \Longrightarrow a_1 - a_2 \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow a_1 - a_2 \in I_1.$$

Και εάν $k \in \mathbb{Z}$ και $a \in I_1$, τότε, κατ' αναλογίαν,

$$\left.\begin{array}{r} k, a \in \mathbb{Z} \Longrightarrow ka \in \mathbb{Z} \\ k, a \in I \Longrightarrow ka \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow ka \in I_1.$$

[22] Το ότι ο $R[\mathrm{X}]$ είναι, εν τοιαύτη περιπτώσει, ναιτεριανός, διασφαλίζεται από το λεγόμενο *θεώρημα βάσεως τού Hilbert*.

Άρα το I_1 είναι ιδεώδες τού $\mathbb{Z}$. Από την άλλη μεριά, εάν $b_1, b_2 \in I_2$, τότε υπάρχουν $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, ούτως ώστε

$$\left.\begin{array}{r} a_1 + b_1\sqrt{m} \in I \\ a_2 + b_2\sqrt{m} \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{m} \in I \Longrightarrow b_1 - b_2 \in I_2.$$

Και εάν $k \in \mathbb{Z}$ και $b \in I_2$, τότε υπάρχει $a \in \mathbb{Z}$, ούτως ώστε

$$\left.\begin{array}{r} a + b\sqrt{m} \in I \\ k \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{m}] \end{array}\right\} \Longrightarrow ka + kb\sqrt{m} \in I \Longrightarrow kb \in I_2.$$

Άρα *και* το I_2 είναι ιδεώδες τού $\mathbb{Z}$.

Απόδειξη τού (ii): Για οιοδήποτε $a \in I_1$ έχουμε $a \in \mathbb{Z}$ και $a \in I$. Άρα

$$\left.\begin{array}{r} a \in I \\ \sqrt{m} \in \mathbb{Z}[\sqrt{m}] \end{array}\right\} \Longrightarrow a\sqrt{m} \in I \Longrightarrow a \in I_2.$$

Απόδειξη τού (iii): Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

$$\left.\begin{array}{r} r_1 \in I_1 \Longrightarrow r_1 \in I \\ c + r_2\sqrt{m} \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\langle r_1, c + r_2\sqrt{m} \right\rangle \subseteq I.$$

Έστω τώρα τυχόν $r + s\sqrt{m} \in I$, $r, s \in \mathbb{Z}$. Επειδή $s \in I_2 = \langle r_2 \rangle$, υπάρχει κάποιο στοιχείο $s' \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ με $s = s'r_2$. Εξάλλου, επειδή

$$\left.\begin{array}{r} r + s\sqrt{m} \in I \\ s'\left(c + r_2\sqrt{m}\right) \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow r + s\sqrt{m} - s'\left(c + r_2\sqrt{m}\right) = r - s'c \in I,$$

και $r - s'c \in \mathbb{Z}$, έχουμε $r - s'c \in I_1 = \langle r_1 \rangle$, οπότε υπάρχει $t \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε

$$r - s'c = t\,r_1 \Longrightarrow r = t\,r_1 + s'c.$$

Ως εκ τούτου,

$$r + s\sqrt{m} = t\,r_1 + s'\left(c + r_2\sqrt{m}\right) \in \left\langle r_1, c + r_2\sqrt{m} \right\rangle \Longrightarrow I \subseteq \left\langle r_1, c + r_2\sqrt{m} \right\rangle,$$

οπότε εν τέλει οι ισότητες (1.7) είναι αληθείς. □

1.3.33 Ορισμός. Ένας δακτύλιος καλείται **δακτύλιος κυρίων ιδεωδών (=: Δ.Κ.Ι.)** όταν κάθε ιδεώδες του είναι κύριο. Επίσης, κάθε δακτύλιος κυρίων ιδεωδών, ο οποίος τυγχάνει να είναι -ταυτοχρόνως- και ακεραία περιοχή, καλείται **περιοχή κυρίων ιδεωδών (=: Π.Κ.Ι.).**

1.3.34 Παρατήρηση. Είναι προφανές ότι κάθε Π.Κ.Ι. είναι ναιτεριανή περιοχή. (Ωστόσο, το αντίστροφο δεν είναι αληθές. Βλ. εδ. 1.3.43.)

1.3.35 Πρόταση. *Κάθε σώμα είναι Π.Κ.Ι. και κάθε στρεβλό σώμα Δ.Κ.Ι.*

Απόδειξη. Τα μόνα ιδεώδη οιουδήποτε στρεβλού σώματος (= διαιρετικού δακτυλίου) είναι το τετριμμένο ιδεώδες και ο εαυτός του (βλ. 1.3.7), τα οποία είναι προφανώς κύρια ιδεώδη. Επιπροσθέτως, επειδή κάθε σώμα είναι ακεραία περιοχή (βλ. 1.2.18), κάθε σώμα οφείλει να είναι κατ' ανάγκην και Π.Κ.Ι. □

1.3.36 Πρόταση. *Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι Π.Κ.Ι.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την πρόταση 1.3.11. □

1.3.37 Πρόταση. *Ας υποθέσουμε ότι R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και $f : R \longrightarrow S$ ένας επιμορφισμός δακτυλίων. Εάν ο R είναι Δ.Κ.Ι., τότε και ο S είναι Δ.Κ.Ι.*

Απόδειξη. Έστω J τυχόν ιδεώδες τού S. Τότε το ιδεώδες $I = f^{-1}(J)$ είναι κύριο, ας πούμε το $I = \langle a \rangle = Ra$, για κάποιο $a \in R$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$J = \langle f(a) \rangle = f(a)S.$$

Πράγματι· εάν $b \in J$, τότε $b = f(c)$ για κάποιο $c \in I$. Εξ αυτού έπεται ότι $c = ra$ για κάποιο $r \in R$, οπότε $b = f(c) = f(ra) = f(r)f(a) \in f(a)S$. Άρα $J = f(a)S$. □

1.3.38 Πόρισμα. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Εάν ο R είναι Δ.Κ.Ι., τότε και ο πηλικοδακτύλιος R/I, όπου I οιοδήποτε ιδεώδες τού R, είναι Δ.Κ.Ι.*

Απόδειξη. Αρκεί η εφαρμογή τής προτάσεως 1.3.37 για τον φυσικό επιμορφισμό $R \longrightarrow R/I, \ r \longmapsto r + I$. □

1.3.39 Πόρισμα. *Εάν $m \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, \pm 1\}$, τότε ο πηλικοδακτύλιος $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (που είναι ισόμορφος τού $\mathbb{Z}_{|m|}$) είναι Π.Κ.Ι., όταν ο $|m|$ είναι πρώτος αριθμός, και Δ.Κ.Ι. (αλλά όχι και Π.Κ.Ι.), όταν ο $|m|$ είναι σύνθετος αριθμός.*

Απόδειξη. Προφανής δυνάμει των 1.2.23, 1.3.35, 1.3.11, καθώς και τού πορίσματος 1.3.38. □

1.3.40 Σημείωση. Μέσω τού πορίσματος 1.3.39 διαπιστώνουμε ότι το 1.3.38 δεν είναι πάντοτε αληθές για περιοχές κυρίων ιδεωδών: Εάν το I είναι ένα μη τετριμμένο ιδεώδες μιας Π.Κ.Ι. R, τότε ο πηλικοδακτύλιος R/I (που είναι Δ.Κ.Ι.) δεν είναι κατ' ανάγκην Π.Κ.Ι.

1.3.41 Πρόταση. *Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i] \subsetneqq \mathbb{C}$ των ακεραίων τού Gauss είναι Π.Κ.Ι.*

Απόδειξη. Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i]$ είναι ακεραία περιοχή. (Βλ. 1.2.16 (ii).) Έστω I ένα ιδεώδες τού $\mathbb{Z}[i]$. Εάν $I = \{0\}$, τότε $I = \langle 0 \rangle$. Εάν $\{0\} \subsetneqq I$, τότε υπάρχει κάποιο $z \in I \smallsetminus \{0\}$. Επιλέγουμε λοιπόν ένα $z_0 \in I \smallsetminus \{0\}$ για το οποίο ισχύει η ισότητα

$$|z_0| := \min\{\, |z| \mid z \in I \smallsetminus \{0\} \}.$$

Θα αποδείξουμε ότι $I = \langle z_0 \rangle$. Πράγματι· εάν $z_0 = a + bi$, για κάποιους $a, b \in \mathbb{Z}$ (με τουλάχιστον έναν εξ αυτών $\neq 0$), τότε για οιοδήποτε στοιχείο $w = a' + b'i \in I$, $a', b' \in \mathbb{Z}$, το κλάσμα w/z_0 γράφεται ως εξής:

$$\frac{w}{z_0} = \frac{a' + b'i}{a + bi} = \frac{(a' + b'i)\,(a - bi)}{(a + bi)\,(a - bi)} = \frac{(a' + b'i)\,(a - bi)}{a^2 + b^2} = r + si,$$

όπου $r := \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$ και $s := \frac{ab'+a'b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$. Θεωρούμε τους «εγγύτερους» ακεραίους[23] $p := \{r\}_{\text{εγγ}}$ και $q := \{s\}_{\text{εγγ}}$ των r και s, αντιστοίχως, οπότε ισχύουν οι ανισοϊσότητες:

$$0 \leqslant |r - p| \leqslant \frac{1}{2}, \;\; 0 \leqslant |s - q| \leqslant \frac{1}{2},$$

και ορίζουμε ως $\xi := p + qi \in \mathbb{Z}[i]$. Τότε

$$\left| \frac{w}{z_0} - \xi \right| = \sqrt{(r-p)^2 + (s-q)^2} \leqslant \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1. \tag{1.8}$$

Έστω $\zeta := w - z_0\xi$. Επειδή $z_0, w \in I$ και $\xi \in \mathbb{Z}[i]$ έχουμε $\zeta \in I$. Ας υποθέσουμε ότι $\zeta \neq 0$. Θέτοντας σε εφαρμογή την (1.8) λαμβάνουμε:

$$|\zeta| = |w - z_0\xi| = \left| z_0 \left(\frac{w}{z_0} - \xi \right) \right| = |z_0| \left| \frac{w}{z_0} - \xi \right| < |z_0|\,,$$

πράγμα *άτοπο* λόγω τού αρχικού τρόπου επιλογής τού z_0 (επί τη βάσει τής υποθέσεως περί ελαχίστης απόλυτης τιμής). Συνεπώς,

$$\zeta = 0 \Longrightarrow w = z_0\xi \Longrightarrow I \subseteq \langle z_0 \rangle.$$

Εξάλλου, $\langle z_0 \rangle = \{\, cz_0 \mid c \in \mathbb{Z}[i] \} \subseteq I$. Άρα τελικώς $I = \langle z_0 \rangle$. □

1.3.42 Σημείωση. Γενικότερα, η $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ είναι Π.Κ.Ι. όταν $m \in \{-2, -1, 2, 3, 6, 7\}$. Επίσης, οι δακτύλιοι $K[\mathsf{X}]$ και $K[\![\mathsf{X}]\!]$ των πολυωνύμων και των επίτυπων δυναμοσειρών μιας απροσδιορίστου (με συντελεστές ειλημμένους από κάποιο *σώμα* K) είναι Π.Κ.Ι.

1.3.43 Παράδειγμα. Υπάρχει, βεβαίως, και πληθώρα τετραγωνικών αριθμητικών περιοχών, οι οποίες δεν είναι Π.Κ.Ι. Επί παραδείγματι, η ακεραία περιοχή

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{\, x + y\sqrt{-5} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subsetneqq \mathbb{C}$$

δεν είναι Π.Κ.Ι., διότι το $I := \left\langle 2, 1 + \sqrt{-5} \right\rangle$ δεν είναι κύριο ιδεώδες. Πράγματι· υποθέτοντας ότι υπάρχουν κάποιοι $a, b \in \mathbb{Z}$ (με έναν τουλάχιστον εξ αυτών διάφορο τού μηδενός), τέτοιοι ώστε $I = \left\langle a + b\sqrt{-5} \right\rangle = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]\left(a + b\sqrt{-5}\right)$, καταλήγουμε σε κάτι το άτοπο ως ακολούθως: Επειδή $1 + \sqrt{-5} \in I$, θα ισχύει

$$1 + \sqrt{-5} = \left(x + y\sqrt{-5}\right)\left(a + b\sqrt{-5}\right) = (ax - 5y) + (bx + ay)\sqrt{-5},$$

[23] Εν προκειμένω, $\{x\}_{\text{εγγ}} := \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$, όπου $\lfloor y \rfloor := \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant y\}$, για οιουσδήποτε $x, y \in \mathbb{R}$

για κάποιους $x, y \in \mathbb{Z}$. Κατά συνέπειαν,

$$\left\{\begin{array}{l} ax - 5y = 1, \\ bx + ay = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{a+5b}{a^2+5b^2}, \\ y = \frac{a-b}{a^2+5b^2} \end{array}\right\}. \tag{1.9}$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: (i) $a = b$. Τότε $x = \frac{1}{a}$, και επειδή $x \in \mathbb{Z}$, συνάγεται ότι $a = \pm 1$, οπότε $a + b\sqrt{-5} = \pm\left(1 + \sqrt{-5}\right)$. Επειδή το 2 ανήκει στο I, θα πρέπει να ισχύει η ισότητα

$$2 = \left(1 + \sqrt{-5}\right)\left(\mu + \nu\sqrt{-5}\right), \tag{1.10}$$

για κάποιους $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$. Θεωρώντας τούς συζυγείς και στα δύο μέλη τής (1.10) καταλήγουμε στην

$$2 = \left(1 - \sqrt{-5}\right)\left(\mu - \nu\sqrt{-5}\right). \tag{1.11}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1.10) και (1.11) λαμβάνουμε

$$4 = 6\left(\mu^2 + 5\nu^2\right). \tag{1.12}$$

Όμως η ισότητα (1.12) είναι αδύνατη, καθότι το δεξιό της μέλος είναι προφανώς > 4, όταν τουλάχιστον ένα εκ των μ, ν είναι διάφορο τού μηδενός, και είναι $= 0$, όταν $\mu = \nu = 0$.

(ii) $a \neq b$ και $b \neq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση,

$$1 \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b| \leqslant a^2 + b^2 < a^2 + 5b^2 \Longrightarrow 0 < |y| = \frac{|a-b|}{a^2 + 5b^2} < 1,$$

(βλ. (1.9)), πράγμα άτοπο, διότι -εξ υποθέσεως- $y \in \mathbb{Z}$.

(iii) $a \neq b$ και $b = 0$. Στην τελευταία αυτή περίπτωση έχουμε (λόγω των (1.9)):

$$\mathbb{Z} \ni x = y = \frac{1}{a} \Longrightarrow a = \pm 1 \Longrightarrow a + b\sqrt{-5} = \pm 1 \Longrightarrow 1 \in I,$$

(οπότε $I = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$). Τούτο όμως ισοδυναμεί με το ότι

$$1 = 2(\alpha + \sqrt{-5}\beta) + \left(1 + \sqrt{-5}\right)\left(\gamma + \sqrt{-5}\delta\right), \tag{1.13}$$

για κατάλληλους ακεραίους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Από την (1.13) έπεται ότι

$$\left\{\begin{array}{l} 2\alpha + \gamma - 5\delta = 1, \\ 2\beta + \gamma + \delta = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2\alpha + 10\beta + 6\gamma = 1. \tag{1.14}$$

Αλλά *και* η ισχύς τής (1.14) είναι αδύνατη, καθόσον το αριστερό της μέλος είναι ένας άρτιος και το δεξιό της μέλος ένας περιττός ακέραιος αριθμός.

1.3.44 Πρόταση. *Εάν μια ακεραία περιοχή R είναι Π.Κ.Ι., τότε ένα μη τετριμμένο ιδεώδες της είναι πρώτο εάν και μόνον εάν είναι μεγιστικό.*

Απόδειξη. Κατά το θεώρημα 1.3.24 κάθε μη τετριμμένο μεγιστικό ιδεώδες τής ακεραίας περιοχής R είναι πρώτο. Έστω τώρα I ένα μη τετριμμένο πρώτο ιδεώδες τής R και έστω J ένα ιδεώδες τής R, για το οποίο ισχύει $I \subsetneqq J \subseteq R$. Επειδή η R είναι Π.Κ.Ι., υπάρχουν $a, b \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τέτοια ώστε $I = \langle a \rangle$ και $J = \langle b \rangle$. Επειδή $a \in \langle a \rangle \subsetneqq \langle b \rangle$, υπάρχει κάποιο $c \in R \smallsetminus \{0_R\}$ με $a = bc$. Παρατηρούμε ότι $b \notin \langle a \rangle$ (διότι αλλιώς θα είχαμε $\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$), οπότε

$$c \in \langle a \rangle \Longrightarrow [\exists d \in R : c = ad] \Longrightarrow a = bc = bad = abd.$$

Καθώς $a \neq 0_R$, αυτό σημαίνει ότι $1_R = bd$ (βλ. πρόταση 1.2.5), οπότε έχουμε

$$1_R \in \langle b \rangle \Longrightarrow J = R.$$

Άρα το I είναι μεγιστικό ιδεώδες. □

$\boxed{1.4}$ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΣΕ ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ

1.4.1 Ορισμός. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος.

(i) Έστω $a \in R$. Λέμε ότι το a είναι **διαιρέτης** ενός $b \in R$ (*εντός τού* R και σημειώνουμε[24]: $a \mid b$) όταν υπάρχει κάποιο στοιχείο $x \in R$, τέτοιο ώστε να ισχύει η ισότητα $b = ax$.

(ii) Δυο στοιχεία $a, b \in R$ λέγονται **συντροφικά** (ή **εταιρικά**) όταν $a \mid b$ και, ταυτοχρόνως, $b \mid a$. Επίσης, όταν ικανοποιούνται αυτές οι συνθήκες, αναφέρουμε το a ως **σύντροφο** τού b (ή, λόγω συμμετρίας, το b ως σύντροφο τού a).

1.4.2 Πρόταση. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $a \mid 0_R$, $\forall a \in R$, *και εάν* $b \in R$ *και* $0_R \mid b$, *τότε* $b = 0_R$.

(ii) *Εάν* $a,\ b \in R$ *και* $a \mid b$, *τότε* $ac \mid bc$, $\ \forall c \in R$.

(iii) *Εάν* $a, b, c \in R$, *τέτοια ώστε* $a \mid b$ *και* $b \mid c$, *τότε* $a \mid c$.

(iv) *Εάν* $a, b, c \in R$, *τέτοια ώστε* $a \mid b$ *και* $a \mid c$, *τότε*

$$a \mid bx + cy, \quad \forall\, (x, y) \in R \times R.$$

(v) *Εάν ο* R *δεν είναι τετριμμένος δακτύλιος, τότε* $a \mid a$, $1_R \mid a$, $\forall a \in R$ *και*

$$a \mid 1_R \Longleftrightarrow a \in R^{\times}.$$

Απόδειξη. (i) Προφανώς, $0_R = 0_R \cdot a$, οπότε $a \mid 0_R$ για κάθε $a \in R$. Και εάν $b \in R$ και $0_R \mid b$, τότε $\exists c \in R : b = c \cdot 0_R = 0_R$.

(ii) Για κάθε $c \in R$ έχουμε

$$a \mid b \Longrightarrow (\exists x \in R : b = ax) \Longrightarrow (\exists x \in R : bc = acx) \Longrightarrow ac \mid bc.$$

[24] Κατ' αναλογίαν, όταν το a δεν διαιρεί το b, γράφουμε $a \nmid b$.

(iii) Εάν $a, b, c \in R$, με $a \mid b$ και $b \mid c$, τότε υπάρχουν $x, y \in R$, τέτοια ώστε

$$[b = ax \text{ και } c = by] \Longrightarrow c = axy \Longrightarrow a \mid c.$$

(iv) Εάν $a, b, c \in R$, με $a \mid b$ και $a \mid c$, τότε υπάρχουν $a', a'' \in R$, τέτοια ώστε για οιαδήποτε $x, y \in R$ να ισχύει

$$[b = aa' \text{ και } c = aa''] \Longrightarrow bx + cy = a\left(a'x + a''y\right) \Longrightarrow a \mid bx + cy.$$

(v) Προφανώς, $a = a \cdot 1_R = 1_R \cdot a$ για κάθε $a \in R$ και

$$a \mid 1_R \Longleftrightarrow \exists x \in R : 1_R = ax,$$

το οποίο, λόγω τής ιδιότητας τής μεταθετικότητας εντός τού R ($ax = xa$) ισοδυναμεί με το ότι $a \in R^\times$. □

1.4.3 Πρόταση. *Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος. Εάν υποτεθεί ότι $a, b, u \in R$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $a \mid b \Longleftrightarrow \langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle$.

(ii) *Τα a και b είναι συντροφικά* $\Longleftrightarrow \langle a \rangle = \langle b \rangle$.

(iii) *Η σχέση* $[a \underset{\text{συν.}}{\sim} b \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ *τα a και b είναι συντροφικά*$]$ *αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τού R.*

(iv) $u \underset{\text{συν.}}{\sim} 0_R \Longleftrightarrow u = 0_R$, $u \underset{\text{συν.}}{\sim} 1_R \Longleftrightarrow u \in R^\times$ *και* $u \in R^\times \Longleftrightarrow u \mid r, \ \forall r \in R$.

(v) *Εάν $a = bx$, όπου $x \in R^\times$, τότε τα a και b είναι συντροφικά. Εάν, μάλιστα, ο R είναι ακεραία περιοχή, τότε ισχύει και το αντίστροφο.*

Απόδειξη. (i) Εάν $a \mid b$, τότε υπάρχει κάποιο $x \in R$ με $b = ax$, οπότε $b \in \langle a \rangle$. Εξάλλου, για οιοδήποτε $c \in \langle b \rangle$ υπάρχει κάποιο y με $c = by$, οπότε

$$c = (ax)\,y = a(xy) \Longrightarrow c \in \langle a \rangle \Longrightarrow \langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle.$$

(ii) Προφανώς, τα a και b είναι συντροφικά εάν και μόνον εάν

$$a \mid b \text{ και } b \mid a \underset{\text{(i)}}{\Longleftrightarrow} \langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle \text{ και } \langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle \Longleftrightarrow \langle a \rangle = \langle b \rangle.$$

(iii) Πρόδηλο λόγω τού (ii).

(iv) Η πρώτη αμφίπλευρη συνεπαγωγή έπεται από το (i) και η δεύτερη από το (v) τής προτάσεως 1.4.2. Σε ό,τι αφορά στην τρίτη, εάν το u είναι αντιστρέψιμο, τότε

$$r = u\left(u^{-1}r\right), \ \ \forall r \in R \Longrightarrow u \mid r, \ \ \forall r \in R.$$

Και αντιστρόφως· εάν $u \mid r$ για κάθε $r \in R$, θέτοντας $r = 1_R$ λαμβάνουμε την αμφίπλευρη συνεπαγωγή $u \mid 1_R \Longleftrightarrow u \in R^\times$ (βλ. το (v) τής προτάσεως 1.4.2).

(v) Εάν $a = bx$, όπου $x \in R^\times$, τότε $b = ax^{-1}$, οπότε $a \underset{\text{συν.}}{\sim} b$. Και αντιστρόφως· εάν ο R είναι ακεραία περιοχή και $a \underset{\text{συν.}}{\sim} b$, τότε υπάρχουν $x, y \in R$, τέτοια ώστε

$$[a = bx \text{ και } b = ay] \Longrightarrow a = axy,$$

απ' όπου έπεται ότι *είτε* $a = b = 0_R$ (οπότε $0_R = 0_R \cdot u, \ \forall u \in R^\times$) *είτε* $1_R = xy$ (βλ. 1.2.5), ήτοι $x, y \in R^\times$. □

1.4.4 Πόρισμα. *Για κάθε ζεύγος a, b στοιχείων μιας ακεραίας περιοχής R ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή*:

$$\boxed{a \underset{\text{συν.}}{\sim} b \Longleftrightarrow [\exists x \in R^{\times} : a = bx]\,.}$$

(*Αυτό το x είναι* μονοσημάντως ορισμένο *όταν $a, b \in R \smallsetminus \{0_R\}$.*)

Απόδειξη. Η ανωτέρω αμφίπλευρη συνεπαγωγή είναι αληθής λόγω τού (v) τής προτάσεως 1.4.3. Όταν τα a, b είναι μη μηδενικά, αυτό το $x \in R^{\times}$ είναι μονοσημάντως ορισμένο λόγω τού κανόνα τής διαγραφής 1.2.5. □

1.4.5 Παραδείγματα. (i) Εντός ενός σώματος K *οιαδήποτε* στοιχεία a, b τού $K \smallsetminus \{0_K\}$ είναι συντροφικά, διότι $a = bb^{-1}a$ και $b^{-1}a \in K^{\times} = K \smallsetminus \{0_K\}$.

(ii) Εντός τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών τα μόνα συντροφικά στοιχεία ενός $n \in \mathbb{Z}$ είναι τα $\pm n$, καθότι $\mathbb{Z}^{\times} = \{\pm 1\}$.

1.4.6 Παρατήρηση. Έστω R μια ακεραία περιοχή. Εάν τα a, b, c, d είναι στοιχεία τής R με $a \underset{\text{συν.}}{\sim} b$ και $c \underset{\text{συν.}}{\sim} d$, τότε $ac \underset{\text{συν.}}{\sim} bd$. (Πράγματι· εάν υπάρχουν $x, y \in R^{\times}$, τέτοια να ισχύουν οι ισότητες $a = bx$ και $c = dy$, τότε $ac = bd(xy)$, όπου $xy \in R^{\times}$.) Ωστόσο, εν γένει *δεν* ισχύει $a + c \underset{\text{συν.}}{\sim} b + d$, όπως διαπιστώνουμε, επί παραδείγματι, όταν $R = \mathbb{Z}[i]$, $a = b = 1$ και $c = 1 + 2i$, $d = -2 + i$. (Πράγματι· $1 \underset{\text{συν.}}{\sim} 1$ και $1 + 2i = i\,(-2 + i)$, οπότε $1 + 2i \underset{\text{συν.}}{\sim} -2 + i$, αλλά τα $2 + 2i$ και $-1 + i$ δεν είναι συντροφικά.)

1.4.7 Σημείωση. Έστω b ένα στοιχείο μιας ακεραίας περιοχής R. Επειδή οι σύντροφοι τού b και τα αντιστρέψιμα στοιχεία τής R είναι *πάντοτε* διαιρέτες τού b, είθισται κάθε $a \in R \smallsetminus R^{\times}$, το οποίο είναι διαιρέτης τού b χωρίς να είναι ταυτοχρόνως και σύντροφός του, να καλείται **γνήσιος διαιρέτης** τού b. (Προφανώς, σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό, τα αντιστρέψιμα στοιχεία τής R δεν διαθέτουν κανέναν γνήσιο διαιρέτη, ενώ οι γνήσιοι διαιρέτες τού 0_R είναι τα στοιχεία τού συνόλου $R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$.)

(i) Βάσει τού (i) τής προτάσεως 1.4.3, *το a είναι γνήσιος διαιρέτης τού b εάν και μόνον εάν $\langle b \rangle \subsetneqq \langle a \rangle \subsetneqq R$.*

(ii) Εάν $a, b \in R, c \in R \smallsetminus \{0_R\}$ και $c = ab$, τότε *το στοιχείο a είναι γνήσιος διαιρέτης τού $c \Longleftrightarrow$ το b είναι γνήσιος διαιρέτης τού c.* (Τούτο έπεται άμεσα από τις αμφίπλευρες συνεπαγωγές $b \in R^{\times} \Longleftrightarrow a \underset{\text{συν.}}{\sim} c$ και $a \in R^{\times} \Longleftrightarrow b \underset{\text{συν.}}{\sim} c$.)

1.4.8 Ορισμός. Εάν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, και τα $a_1, \ldots, a_n$ στοιχεία τού R, τότε ένα στοιχείο $d \in R$ καλείται **μέγιστος κοινός διαιρέτης** των $a_1, \ldots, a_n$ όταν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $d \mid a_1, \ldots, d \mid a_n$,

(ii) για οιοδήποτε $c \in R$, για το οποίο ισχύει $c \mid a_1, \ldots, c \mid a_n$, έχουμε $c \mid d$.

Θέτουμε

$$\boxed{\text{ΜΚΔ}_R(a_1,\ldots,a_n) := \left\{ d \in R \;\middle|\; \begin{array}{c} d \text{ μέγιστος κοινός} \\ \text{διαιρέτης των } a_1,\ldots,a_n \end{array} \right\}.}$$

1.4.9 Παρατήρηση. Εάν $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{Z}$, τότε (κάνοντας χρήση τού συνήθους ορισμού τού $\text{μκδ}(a_1,\ldots,a_n)$ τού θεσπιζόμενου εντός τού πλαισίου τής Στοιχειώδους Θεωρίας Αριθμών) διαπιστώνουμε ότι

$$\text{ΜΚΔ}_{\mathbb{Z}}(a_1,\ldots,a_n) = \{\pm\text{μκδ}(a_1,\ldots,a_n)\}\,.$$

Κατά συνέπειαν, στον $\mathbb{Z}$, από *δακτυλιοθεωρητική σκοπιά* (ήτοι ακολουθώντας τον ορισμό 1.4.8), οι $a_1,\ldots,a_n$ έχουν *αμφότερους* τους $\text{μκδ}(a_1,\ldots,a_n)$ και $-\text{μκδ}(a_1,\ldots,a_n)$ ως μεγίστους κοινούς διαιρέτες τους και

$$\text{μκδ}(a_1,\ldots,a_n) \neq -\text{μκδ}(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow \exists j \in \{1,\ldots,n\} : a_j \neq 0.$$

1.4.10 Σημείωση. Εάν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, και τα $a_1,\ldots,a_n$ στοιχεία τού R, τότε

(i) το σύνολο $\text{ΜΚΔ}_R(a_1,\ldots,a_n)$ δεν είναι κατ' ανάγκην μη κενό,

(ii) το $\text{ΜΚΔ}_R(a_1,\ldots,a_n)$ δεν είναι κατ' ανάγκην μονοσύνολο (βλ. 1.4.9) και

(iii) όταν $\text{ΜΚΔ}_R(a_1,\ldots,a_n) \neq \varnothing$, κάθε μέγιστος κοινός διαιρέτης των $a_1,\ldots,a_n$ είναι *μονοσημάντως ορισμένος μέχρι συντροφικότητας* (ήτοι οιοσδήποτε άλλος μέγιστος κοινός διαιρέτης των $a_1,\ldots,a_n$ οφείλει να είναι σύντροφος αυτού). Τούτο αποδεικνύεται στην επόμενη πρόταση.

1.4.11 Πρόταση. *Εάν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, τα $a_1,\ldots,a_n$ στοιχεία τού R και $d \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1,\ldots,a_n)$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν $d \underset{\text{συν.}}{\sim} d'$, για κάποιο $d' \in R$, τότε $d' \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1,\ldots,a_n)$.*

(ii) *Εάν $d' \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1,\ldots,a_n)$, τότε $d \underset{\text{συν.}}{\sim} d'$.*

Απόδειξη. (i) Εάν $d \underset{\text{συν.}}{\sim} d'$, για κάποιο $d' \in R$, τότε

$$\left.\begin{array}{r} d' \mid d \Longrightarrow \exists x \in R : d = d'x \\ \exists a'_j \in R : a_j = da'_j,\ \forall j \in \{1,...,n\} \end{array}\right\} \Longrightarrow a_j = d'xa'_j,\ \forall j \in \{1,...,n\},$$

οπότε $d' \mid a_j$ για κάθε $j \in \{1,...,n\}$. Εξάλλου, για οιοδήποτε $c \in R$, για το οποίο ισχύει $c \mid a_1, \ldots, c \mid a_n$, έχουμε $c \mid d$ και κατ' επέκταση $c \mid d'$ (αφού εξ υποθέσεως $d \mid d'$, βλ. 1.4.2 (iii)).

(ii) Εάν το $d' \in R$ είναι ένας μέγιστος κοινός διαιρέτης των $a_1,\ldots,a_n$, τότε λόγω των (i) και (ii) τού ορισμού 1.4.8 ισχύουν οι σχέσεις διαιρετότητας $d \mid d'$ και $d' \mid d$, οπότε $d \underset{\text{συν.}}{\sim} d'$. □

1.4.12 Πόρισμα. *Εάν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, τα $a_1, \ldots, a_n$ στοιχεία τού R και $d \in \mathrm{MK\Delta}_R(a_1, \ldots, a_n)$, τότε*

$$d = 0_R \iff a_1 = \cdots = a_n = 0_R \iff \mathrm{MK\Delta}_R(a_1, \ldots, a_n) = \{0_R\}.$$

Κατά συνέπειαν,

$$d \in R \smallsetminus \{0_R\} \iff \exists j \in \{1, \ldots, n\} : a_j \in R \smallsetminus \{0_R\}.$$

Αποδειξη. Εάν $d = 0_R$, τότε $0_R \mid a_j$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$, οπότε λόγω τού (i) τής προτάσεως 1.4.2 λαμβάνουμε $a_1 = \cdots = a_n = 0_R$. Και αντιστρόφως· εάν ισχύει $a_1 = \cdots = a_n = 0_R$, τότε το 0_R πληροί αμφότερες τις συνθήκες (i) και (ii) τού ορισμού 1.4.8, οπότε $0_R \in \mathrm{MK\Delta}_R(0_R, \ldots, 0_R)$. Έστω τυχών $d \in \mathrm{MK\Delta}_R(0_R, \ldots, 0_R)$. Τότε $d \underset{\text{συν.}}{\sim} 0_R$ (λόγω τού (ii) τής προτάσεως 1.4.11), οπότε $d = 0_R$ (λόγω τού (iv) τής προτάσεως 1.4.3). □

1.4.13 Θεώρημα. *Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, και εάν τα $d, a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι στοιχεία ενός μεταθετικού δακτυλίου R, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *$d \in \mathrm{MK\Delta}_R(a_1, \ldots, a_n)$ και*

$$d = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n$$

για κάποια $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$.

(ii) $\langle d \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ $(= \langle a_1 \rangle + \langle a_2 \rangle \cdots + \langle a_n \rangle)$.

Αποδειξη. (i)⇒(ii) Εάν το d είναι ένας μέγιστος κοινός διαιρέτης των $a_1, \ldots, a_n$ και $d = r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n$ για κάποια $r_1, \ldots, r_n \in R$, τότε προφανώς

$$d \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle \Longrightarrow \langle d \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle.$$

Εξάλλου, για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ έχουμε $d \mid a_j \Longrightarrow (\exists x_j \in R : a_j = x_j d)$, οπότε για οιοδήποτε στοιχείο $s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_n a_n \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, $s_1, \ldots, s_n \in R$, διαπιστώνουμε ότι

$$s_1 a_1 + \cdots + s_n a_n = (s_1 x_1 + \cdots + s_n x_n)\, d \in \langle d \rangle.$$

Άρα τελικώς $\langle d \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$.

(ii)⇒(i) Εάν $\langle d \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$, τότε προφανώς $d = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n$ για κάποια $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$. Επιπροσθέτως, για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ έχουμε

$$a_j \in \langle d \rangle \Longrightarrow d \mid a_j.$$

Εξάλλου, οιοδήποτε $c \in R$, για το οποίο ισχύει $c \mid a_1, \ldots, c \mid a_n$, είναι διαιρέτης τού $d = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n$ (βλ. 1.4.2 (v)). Άρα το d είναι ένας μέγιστος κοινός διαιρέτης των $a_1, a_2, \ldots, a_n$. □

1.4.14 Πόρισμα. *Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, και εάν τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι στοιχεία ενός μεταθετικού δακτυλίου κυρίων ιδεωδών R, τότε* $\text{ΜΚΔ}_R(a_1, \ldots, a_n) \neq \varnothing$, *ενώ κάθε* $d \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, \ldots, a_n)$ *παριστάται υπό τη μορφή*

$$\boxed{d = r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n,} \tag{1.15}$$

για κάποια $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$.

Απόδειξη. Επειδή ο R είναι Δ.Κ.Ι., υπάρχει κάποιο στοιχείο $d' \in R$, τέτοιο ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\left\langle d' \right\rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle,$$

οπότε το d' γράφεται υπό τη μορφή (1.15). Κατά το θεώρημα 1.4.13 το d' είναι ένας μέγιστος κοινός διαιρέτης των $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Αλλά και *οιοσδήποτε* μέγιστος κοινός διαιρέτης d των $a_1, a_2, \ldots, a_n$ μπορεί να γραφεί κατ' αυτόν τον τρόπο, αφού $d \underset{\text{συν.}}{\sim} d'$, πράγμα που σημαίνει ότι $\langle d \rangle = \langle d' \rangle$. □

1.4.15 Ορισμός. Έστω ότι $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, και ότι τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι μη μηδενικά στοιχεία ενός μεταθετικού δακτυλίου R. Λέμε ότι τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι **σχετικώς πρώτα** (ή ότι είναι **μεταξύ τους πρώτα**) όταν $1_R \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, \ldots, a_n)$.

1.4.16 Πόρισμα (Bézout). *Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, και εάν τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι στοιχεία ενός μεταθετικού δακτυλίου κυρίων ιδεωδών R, τότε τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι σχετικώς πρώτα εάν και μόνον εάν*

$$r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n = 1_R, \tag{1.16}$$

για κάποια $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$, ή -ισοδυνάμως- εάν και μόνον εάν

$$Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n = R.$$

Απόδειξη. Εάν τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι σχετικώς πρώτα, τότε ένας μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι το 1_R, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής επί τη βάσει τού πορίσματος 1.4.14. Και αντιστρόφως· εάν $r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n = 1_R$, για κάποια $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$, τότε για οιοδήποτε $c \in R$, για το οποίο ισχύει $c \mid a_1, \ldots, c \mid a_n$, έχουμε $c \mid 1_R$ (βλ. το (iv) τής προτάσεως 1.4.2). Επειδή προφανώς $1_R \mid a_1, \ldots, 1_R \mid a_n$, συμπεραίνουμε (απευθείας απο τον ορισμό 1.4.8) ότι $1_R \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, \ldots, a_n)$. □

1.4.17 Σημείωση. Εάν ο R δεν είναι Δ.Κ.Ι., τότε οι ισότητες (1.15) και (1.16) δεν ισχύουν πάντοτε. Όταν, π.χ., $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, τότε τα 2 και $1 + \sqrt{-5}$ είναι σχετικώς πρώτα, χωρίς να υφίσταται ισότητα τής μορφής (1.16). Πράγματι· το 1 είναι (προφανής) διαιρέτης αυτών των στοιχείων. Υποθέτοντας ότι υπάρχουν κάποιοι $a, b \in \mathbb{Z}$ (με τουλάχιστον έναν εξ αυτών διάφορο τού μηδενός), τέτοιοι ώστε

$$a + b\sqrt{-5} \mid 2, \quad a + b\sqrt{-5} \mid 1 + \sqrt{-5},$$

θα υπάρχουν κάποιοι $x, y \in \mathbb{Z}$ με

$$1+\sqrt{-5} = (x+y\sqrt{-5})(a+b\sqrt{-5}) = (ax-5y)+(bx+ay)\sqrt{-5},$$

Κατά συνέπειαν,

$$\left\{\begin{array}{l} ax-5y=1, \\ bx+ay=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{a+5b}{a^2+5b^2}, \\ y=\frac{a-b}{a^2+5b^2} \end{array}\right\}. \tag{1.17}$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: (i) $a = b$. Τότε $x = \frac{1}{a}$, και επειδή $x \in \mathbb{Z}$ έχουμε $a = \pm 1$, οπότε

$$a+b\sqrt{-5} = \pm\left(1+\sqrt{-5}\right).$$

Επειδή αυτό είναι διαιρέτης *και* τού 2, θα πρέπει να ισχύει η ισότητα

$$2 = (1+\sqrt{-5})(\mu+\nu\sqrt{-5}), \tag{1.18}$$

για κάποιους $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$. Θεωρώντας τούς συζυγείς και στα δύο μέλη τής (1.18) καταλήγουμε στην

$$2 = (1-\sqrt{-5})(\mu-\nu\sqrt{-5}). \tag{1.19}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1.18) και (1.19) λαμβάνουμε

$$4 = 6\left(\mu^2+5\nu^2\right). \tag{1.20}$$

Όμως η ισχύς τής ως άνω ισότητας (1.20) είναι *αδύνατη*, καθότι το δεξιό της μέλος είναι προφανώς > 4, όταν τουλάχιστον ένα εκ των μ, ν είναι διάφορο τού μηδενός, και είναι $= 0$, όταν $\mu = \nu = 0$.

(ii) $a \neq b$ και $b \neq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση,

$$1 \leqslant |a-b| \leqslant |a|+|b| \leqslant a^2+b^2 < a^2+5b^2 \Longrightarrow 0 < |y| = \frac{|a-b|}{a^2+5b^2} < 1,$$

(βλ. (1.17)), πράγμα *άτοπο*, διότι -εξ υποθέσεως- $y \in \mathbb{Z}$.

(iii) $a \neq b$ και $b = 0$. Στην τελευταία αυτή περίπτωση έχουμε (λόγω των (1.17)):

$$\mathbb{Z} \ni x = y = \frac{1}{a} \Longrightarrow a = \pm 1 \Longrightarrow a+b\sqrt{-5} = \pm 1,$$

που είναι διαιρέτης τού 1. Άρα οι 2 και $1+\sqrt{-5}$ είναι όντως *σχετικώς πρώτοι*.

Εν συνεχεία, υποθέτοντας ότι υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, τέτοιοι ώστε να ισχύει η (1.16):

$$2r_1 + \left(1+\sqrt{-5}\right) r_2 = 1$$

για τα εν λόγω στοιχεία, καταλήγουμε σε *άτοπο*, διότι αυτή ισοδυναμεί με την

$$(1-\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5})r_1 + 3(1+\sqrt{-5})r_2 = 3,$$

έχουσα το $1+\sqrt{-5}$ ως διαιρέτη τού αριστερού της αλλά όχι και τού δεξιού της μέλους! (Στο εδάφιο 1.3.43 είχαμε αποδείξει με ανάλογους συλλογισμούς ότι το ιδεώδες $\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle$ δεν είναι κύριο!)

1.4.18 Πρόταση. *Έστω ότι ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος κυρίων ιδεωδών και $a, b, c \in R$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν $a \mid bc$ και τα a, b είναι σχετικώς πρώτα, τότε $a \mid c$.*

(ii) *Εάν $a \mid c,\ b \mid c$ και τα a, b είναι σχετικώς πρώτα, τότε $ab \mid c$.*

(iii) *Εάν $c \mid a$ και τα a, b είναι σχετικώς πρώτα, τότε και τα c και b είναι σχετικώς πρώτα.*

Αποδειξη. Εάν υποθέσουμε ότι τα a, b είναι σχετικώς πρώτα, τότε, σύμφωνα με το πόρισμα 1.4.16, υπάρχουν $u, v \in R$ με $ua + vb = 1_R$.

(i) Εάν $a \mid bc$, τότε

$$\left.\begin{array}{r} c = uac + vbc \\ a \mid uac,\ a \mid vbc \end{array}\right\} \Longrightarrow a \mid c.$$

(ii) Εάν $a \mid c$ και $b \mid c$, τότε

$$\left.\begin{array}{r} c = uac + vbc \\ ab \mid ac,\ ab \mid bc \end{array}\right\} \Longrightarrow ab \mid c.$$

(iii) Εάν $c \mid a$, τότε $\exists x \in R : a = cx$, οπότε

$$\left.\begin{array}{r} ua + vb = 1_R \\ a = cx \end{array}\right\} \Longrightarrow (ux)\, c + vb = 1_R \Longrightarrow 1_R \in \text{ΜΚΔ}_R(c, b).$$

(Εν προκειμένω, έγινε χρήση των (ii) και (iv) τής προτάσεως 1.4.2, και τού πορίσματος 1.4.16, αντιστοίχως.) □

1.4.19 Ορισμός. Εάν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, και $a_1, \ldots, a_n \in R$, τότε ένα $t \in R$ καλείται **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** των $a_1, \ldots, a_n$ όταν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $a_1 \mid t, \ldots, a_n \mid t$,

(ii) για οιοδήποτε $s \in R$, για το οποίο ισχύει $a_1 \mid s, \ldots, a_n \mid s$, έχουμε $t \mid s$.

Θέτουμε

$$\boxed{\text{ΕΚΠ}_R(a_1, \ldots, a_n) := \left\{ t \in R \;\middle|\; \begin{array}{c} t \text{ ελάχιστο κοινό} \\ \text{πολλαπλάσιο των } a_1, \ldots, a_n \end{array} \right\}.}$$

1.4.20 Παρατήρηση. Εάν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, τότε (κάνοντας χρήση τού συνήθους ορισμού τού $\text{εκπ}(a_1, \ldots, a_n)$ τού θεσπιζόμενου εντός τού πλαισίου τής Στοιχειώδους Θεωρίας Αριθμών) διαπιστώνουμε ότι

$$\text{ΕΚΠ}_{\mathbb{Z}}(a_1, \ldots, a_n) = \{\pm \text{εκπ}(a_1, \ldots, a_n)\}.$$

Κατά συνέπειαν, στον $\mathbb{Z}$, από *δακτυλιοθεωρητική σκοπιά* (ήτοι ακολουθώντας τον ορισμό 1.4.19), οι $a_1, \ldots, a_n$ έχουν *αμφότερα* τα $\text{εκπ}(a_1, \ldots, a_n)$ και $-\text{εκπ}(a_1, \ldots, a_n)$ ως ελάχιστα κοινά πολλαπλάσιά τους και

$$\text{εκπ}(a_1, \ldots, a_n) \neq -\,\text{εκπ}(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow a_j \neq 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

1.4.21 Σημείωση. Εάν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, και τα $a_1, \ldots, a_n$ στοιχεία τού R, τότε

(i) το σύνολο $\text{ΕΚΠ}_R(a_1, \ldots, a_n)$ δεν είναι κατ' ανάγκην μη κενό,

(ii) το $\text{ΕΚΠ}_R(a_1, \ldots, a_n)$ δεν είναι κατ' ανάγκην μονοσύνολο (βλ. 1.4.20) και

(iii) όταν $\text{ΕΚΠ}_R(a_1, \ldots, a_n) \neq \varnothing$, κάθε ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $a_1, \ldots, a_n$ είναι *μονοσημάντως ορισμένο μέχρι συντροφικότητας* (ήτοι οιοδήποτε άλλο ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $a_1, \ldots, a_n$ οφείλει να είναι σύντροφος αυτού). Τούτο αποδεικνύεται στην επόμενη πρόταση.

1.4.22 Πρόταση. *Εάν ο R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, τα $a_1, \ldots, a_n$ στοιχεία τού R και $t \in \text{ΕΚΠ}_R(a_1, \ldots, a_n)$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν $t \underset{\text{συν.}}{\sim} t'$, για κάποιο $t' \in R$, τότε $t' \in \text{ΕΚΠ}_R(a_1, \ldots, a_n)$.*

(ii) *Εάν το $t' \in \text{ΕΚΠ}_R(a_1, \ldots, a_n)$, τότε $t \underset{\text{συν.}}{\sim} t'$.*

Απόδειξη. (i) Εάν $t \underset{\text{συν.}}{\sim} t'$, για κάποιο $t' \in R$, τότε

$$\left.\begin{array}{r} t \mid t' \Longrightarrow \exists x \in R : t' = tx \\ \exists a_j' \in R : t = a_j a_j', \ \forall j \in \{1, ..., n\} \end{array}\right\} \Longrightarrow t' = a_j a_j' x, \ \forall j \in \{1, ..., n\},$$

οπότε $a_j \mid t'$ για κάθε $j \in \{1, ..., n\}$. Εξάλλου, για οιοδήποτε $s \in R$, για το οποίο ισχύει $a_1 \mid s, \ldots, a_n \mid s$, έχουμε $t \mid s$ και κατ' επέκταση $t' \mid s$ (αφού εξ υποθέσεως $t' \mid t$, βλ. 1.4.2 (iii)).

(ii) Εάν το $t' \in R$ είναι ένα ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $a_1, \ldots, a_n$, τότε λόγω των (i) και (ii) τού ορισμού 1.4.19 ισχύουν οι σχέσεις διαιρετότητας $t \mid t'$ και $t' \mid t$, οπότε $t \underset{\text{συν.}}{\sim} t'$. □

1.4.23 Θεώρημα. *Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, και εάν τα $t, a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι στοιχεία ενός μεταθετικού δακτυλίου R, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $t \in \text{ΕΚΠ}_R(a_1, \ldots, a_n)$.

(ii) $\langle t \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν το t είναι ένα ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $a_1, a_2, \ldots, a_n$, τότε για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ έχουμε $a_j \mid t$, οπότε

$$t \in \langle a_j \rangle \Longrightarrow t \in \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle \Longrightarrow \langle t \rangle \subseteq \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle.$$

Από την άλλη μεριά, εάν $r \in \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle$, τότε $r \in \langle a_j \rangle \Longrightarrow a_j \mid r$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$, και επειδή το t είναι ένα ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $a_1, a_2, \ldots, a_n$, έχουμε $t \mid r \Longrightarrow r \in \langle t \rangle$, οπότε $\langle a_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle \subseteq \langle t \rangle$. Κατά συνέπειαν,

$$\langle t \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle.$$

(ii)⇒(i) Εάν υποθέσουμε ότι $\langle t \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle$, τότε για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ έχουμε

$$\langle t \rangle \subseteq \langle a_j \rangle \Longrightarrow a_j \mid t,$$

ενώ για οιοδήποτε $s \in R$, για το οποίο ισχύει $a_1 \mid s, \ldots, a_n \mid s$, έχουμε

$$s \in \langle a_j \rangle, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \Longrightarrow s \in \langle a_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle = \langle t \rangle \Longrightarrow t \mid s.$$

Ως εκ τούτου, το t είναι ένα ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $a_1, a_2, \ldots, a_n$. □

1.4.24 Πόρισμα. *Οιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους στοιχεία ενός μεταθετικού δακτυλίου κυρίων ιδεωδών R διαθέτουν πάντοτε (κάποιο) ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο.*

1.4.25 Πόρισμα. *Έστω R μια ακεραία περιοχή. Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, τα $a_1, \ldots, a_n$ στοιχεία τής R και $t \in$ ΕΚΠ$_R(a_1, \ldots, a_n)$, τότε*

$$t = 0_R \Longleftrightarrow \exists j \in \{1, \ldots, n\} : a_j = 0_R \Longleftrightarrow \text{ΕΚΠ}_R(a_1, \ldots, a_n) = \{0_R\}.$$

Κατά συνέπειαν, $t \in R \smallsetminus \{0_R\} \Longleftrightarrow a_j \in R \smallsetminus \{0_R\}, \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $a_j \neq 0_R$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Επειδή ο θεωρηθείς δακτύλιος R είναι (εξ υποθέσεως) ακεραία περιοχή, έχουμε $\prod_{j=1}^{n} a_j \neq 0_R$. Κατά το θεώρημα 1.4.23, $\langle t \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle$. Παρατηρούμε ότι

$$0_R \neq \prod_{j=1}^{n} a_j \in \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle = \langle t \rangle \Rightarrow \{0_R\} \subsetneqq \langle t \rangle \Rightarrow t \neq 0_R.$$

Εάν λοιπόν $t = 0_R$, τότε υπάρχει κατ' ανάγκην κάποιος $j \in \{1, \ldots, n\}$ με $a_j = 0_R$. Και αντιστρόφως· εάν $\exists j \in \{1, \ldots, n\} : a_j = 0_R$ και $t \in$ ΕΚΠ$_R(a_1, \ldots, a_n)$, τότε το θεώρημα 1.4.23 μας πληροφορεί ότι

$$t \in \langle t \rangle \, (= \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle) \subseteq \langle a_j \rangle = \langle 0_R \rangle = \{0_R\},$$

οπότε $t = 0_R$. □

1.4.26 Λήμμα. *Έστω R μια ακεραία περιοχή. Εάν $a, b \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Τα a, b είναι σχετικώς πρώτα.*

(ii) *Για κάθε $c \in R \smallsetminus \{0_R\}$ με $c \mid a$ και $c \mid b$, έχουμε $c \in R^{\times}$.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν $c \in R \smallsetminus \{0_R\}$ και $c \mid a$, $c \mid b$, τότε $c \mid 1_R$ (επειδή εξ υποθέσεως $1_R \in$ ΜΚΔ$_R(a, b)$, βλ. 1.4.8). Αυτό σημαίνει ότι $\exists c' \in R : 1_R = cc'$, απ' όπου έπεται ότι $c \in R^{\times}$.

(ii)⇒(i) Έστω $c \in R$ με $c \mid a$ και $c \mid b$. Επειδή $a, b \in R \smallsetminus \{0_R\}$, έχουμε κατ' ανάγκην $c \in R \smallsetminus \{0_R\}$ (βλ. 1.4.2 (i)). Εξ υποθέσεως, $c \in R^{\times}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $c' \in R : 1_R = cc'$, απ' όπου έπεται ότι

$$\left.\begin{array}{r} c \mid 1_R \\ \text{1.4.2 (v)} \Rightarrow 1_R \mid a, \ 1_R \mid b \end{array}\right\} \underset{\text{1.4.8}}{\Longrightarrow} 1_R \in \text{ΜΚΔ}_R(a, b),$$

οπότε τα a, b είναι σχετικώς πρώτα. □

1.4.27 Λήμμα. *Έστω R μια ακεραία περιοχή. Εάν υποθέσουμε ότι δυο τυχόντα μη μηδενικά στοιχεία τής R διαθέτουν (κάποιον) μέγιστο κοινό διαιρέτη, τότε για $a, b, d \in R\smallsetminus\{0_R\}$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) $d \in \mathrm{ΜΚΔ}_R(a, b)$.

(ii) *Υπάρχουν σχετικώς πρώτα στοιχεία $a', b' \in R\smallsetminus\{0_R\}$, τέτοια ώστε $a = da'$ και $b = db'$.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν $d \in \mathrm{ΜΚΔ}_R(a, b)$, τότε $d \mid a$ και $d \mid b$, οπότε υπάρχουν $a', b' \in R\smallsetminus\{0_R\}$, τέτοια ώστε $a = da'$ και $b = db'$. Θα αποδείξουμε ότι τα a', b' είναι σχετικώς πρώτα. Προς τούτο θεωρούμε $c \in R$, τέτοιο ώστε $c \mid a'$ και $c \mid b'$. Τότε υπάρχουν $a'', b'' \in R\smallsetminus\{0_R\}$ με $a' = ca''$ και $b' = cb''$. Επομένως,

$$\left.\begin{array}{r} a = dca'' \Rightarrow dc \mid a \\ b = dcb'' \Rightarrow dc \mid b \end{array}\right\} \Longrightarrow dc \mid d \Longrightarrow \exists c' \in R : d = dcc'.$$

Επειδή ο δακτύλιος αναφοράς R είναι εξ υποθέσεως ακεραία περιοχή, έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} d(1_R - cc') = 0_R \\ d \neq 0_R \end{array}\right\} \Longrightarrow cc' = 1_R \Rightarrow c \in R^{\times}$$

(βλ. 1.2.5), οπότε $1_R \in \mathrm{ΜΚΔ}_R(a', b')$ (κατόπιν εφαρμογής τού λήμματος 1.4.26 με τα a', b' στη θέση των εκεί παρατεθέντων a και b, αντιστοίχως).

(ii)⇒(i) Εξ υποθέσεως, υπάρχει κάποιος $d' \in \mathrm{ΜΚΔ}_R(a, b)$. Επιπροσθέτως, υπάρχουν σχετικώς πρώτα στοιχεία $a', b' \in R\smallsetminus\{0_R\}$ και $d \in R\smallsetminus\{0_R\}$, τέτοια ώστε $a = da'$ και $b = db'$. Κατά συνέπειαν,

$$\left.\begin{array}{r} d \mid a \\ d \mid b \end{array}\right\} \underset{1.4.8}{\Longrightarrow} d \mid d' \Rightarrow \exists c \in R\smallsetminus\{0_R\} : d' = dc.$$

Εξάλλου,

$$\left.\begin{array}{r} d' \mid a \Rightarrow \exists a'' \in R\smallsetminus\{0_R\} : da' = a = d'a'' = dca'' \\ d' \mid b \Rightarrow \exists b'' \in R\smallsetminus\{0_R\} : db' = b = d'b'' = dcb'' \\ d \neq 0_R \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a' = ca'' \\ b' = cb'' \end{array}\right\}$$

(βλ. 1.2.5), οπότε εφαρμόζοντας το λήμμα 1.4.26 (με τα a', b' στη θέση των εκεί παρατεθέντων a και b, αντιστοίχως) λαμβάνουμε

$$\left.\begin{array}{r} c \mid a',\ c \mid b' \\ 1_R \in \mathrm{ΜΚΔ}_R(a', b') \end{array}\right\} \Longrightarrow c \in R^{\times}.$$

Από αυτό και από το πόρισμα 1.4.4 συνάγεται ότι $d' \underset{\text{συν.}}{\sim} d$. Το (i) τής προτάσεως 1.4.11 μας πληροφορεί ότι $d \in \mathrm{ΜΚΔ}_R(a, b)$. □

1.4.28 Λήμμα. *Έστω R μια ακεραία περιοχή. Εάν υποθέσουμε ότι δυο τυχόντα μη μηδενικά στοιχεία τής R διαθέτουν (κάποιο) ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, τότε για $a, b, t \in R \smallsetminus \{0_R\}$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) $t \in \text{ΕΚΠ}_R(a, b)$.

(ii) *Υπάρχουν σχετικώς πρώτα στοιχεία $a', b' \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι ισότητες $t = aa' = bb'$.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν $t \in \text{ΕΚΠ}_R(a, b)$, τότε $a \mid t$ και $b \mid t$, οπότε υπάρχουν στοιχεία $a', b' \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τέτοια ώστε $t = aa' = bb'$. Θα αποδείξουμε ότι τα a', b' είναι σχετικώς πρώτα στοιχεία. Προς τούτο θεωρούμε τυχόν $c \in R$ με $c \mid a'$ και $c \mid b'$. Λόγω αυτής τής επιλογής τού c υπάρχουν $x, y \in R$, τέτοια ώστε $a' = cx$ και $b' = cy$. Επειδή $a', b' \in R \smallsetminus \{0_R\}$, έχουμε κατ' ανάγκην $c, x, y \in R \smallsetminus \{0_R\}$. Επομένως,

$$\left.\begin{array}{r} t = c(ax) = c(by) \\ c \neq 0_R \end{array}\right\} \Longrightarrow ax = by$$

(βλ. 1.2.5), οπότε

$$\left.\begin{array}{r} a \mid ax \\ b \mid by = ax \end{array}\right\} \underset{1.4.19}{\Longrightarrow} t \mid ax \;\text{ και }\; t = c(ax) \Rightarrow ax \mid t.$$

Επομένως, $t \underset{\text{συν.}}{\sim} ax$ και $c \in R^\times$ (βλ. ορισμό 1.4.1 (ii) και πόρισμα 1.4.4). Εφαρμόζοντας το λήμμα 1.4.26 (με τα a', b' στη θέση των εκεί παρατεθέντων a και b, αντιστοίχως) λαμβάνουμε $1_R \in \text{ΜΚΔ}_R(a', b')$.

(ii)⇒(i) Εξ υποθέσεως, υπάρχει κάποιο $t' \in \text{ΕΚΠ}_R(a, b)$. Επιπροσθέτως, υπάρχουν σχετικώς πρώτα στοιχεία $a', b' \in R \smallsetminus \{0_R\}$ και $t \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι ισότητες $t = aa' = bb'$. Κατά συνέπειαν,

$$\left.\begin{array}{r} a \mid t \\ b \mid t \end{array}\right\} \underset{1.4.19}{\Longrightarrow} t' \mid t \Rightarrow \exists c \in R \smallsetminus \{0_R\} : t = t'c.$$

Εξάλλου,

$$\left.\begin{array}{r} a \mid t' \Rightarrow \exists a'' \in R \smallsetminus \{0_R\} : t' = aa'' \\ b \mid t' \Rightarrow \exists b'' \in R \smallsetminus \{0_R\} : t' = bb'' \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} aa' = t = aa''c \\ bb' = t = bb''c \end{array}\right\}.$$

Επειδή $a, b \in R \smallsetminus \{0_R\}$, έχουμε λόγω τής προτάσεως 1.2.5 και τού λήμματος 1.4.26 (με τα a', b' στη θέση των εκεί παρατεθέντων a και b, αντιστοίχως)

$$\left.\begin{array}{r} a' = a''c \Rightarrow c \mid a' \\ b' = b''c \Rightarrow c \mid b' \\ 1_R \in \text{ΜΚΔ}_R(a', b') \end{array}\right\} \Longrightarrow c \in R^\times.$$

Από αυτό και από το πόρισμα 1.4.4 συνάγεται η σχέση συντροφικότητας $t \underset{\text{συν.}}{\sim} t'$. Το (i) τής προτάσεως 1.4.22 μας πληροφορεί ότι $t \in \text{ΕΚΠ}_R(a, b)$. □

1.4.29 Πρόταση. *Έστω R μια ακεραία περιοχή. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν υποθέσουμε ότι δυο τυχόντα μη μηδενικά στοιχεία τής R διαθέτουν μέγιστο κοινό διαιρέτη και εάν θεωρήσουμε $a, b \in R\smallsetminus\{0_R\}$, τότε υπάρχει $t \in R\smallsetminus\{0_R\}$, τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$t \in \text{ΕΚΠ}_R(a, b) \ \text{ και } \ td = ab, \ \text{όπου} \ \ d \in \text{ΜΚΔ}_R(a, b).$$

(ii) *Εάν υποθέσουμε ότι δυο τυχόντα μη μηδενικά στοιχεία τής R διαθέτουν ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο και εάν θεωρήσουμε $a, b \in R\smallsetminus\{0_R\}$, τότε υπάρχει $d \in R\smallsetminus\{0_R\}$, τέτοιο ώστε να ισχύει*

$$d \in \text{ΜΚΔ}_R(a, b) \ \text{ και } \ td = ab, \ \text{όπου} \ \ t \in \text{ΕΚΠ}_R(a, b).$$

Αποδειξη. (i) Εάν $a, b \in R\smallsetminus\{0_R\}$ και $d \in \text{ΜΚΔ}_R(a, b)$, τότε σύμφωνα με το λήμμα 1.4.27 υπάρχουν σχετικώς πρώτα στοιχεία $a', b' \in R\smallsetminus\{0_R\}$, τέτοια ώστε $a = da'$ και $b = db'$. Θέτοντας $t := da'b'$ παρατηρούμε ότι $t = ab' = ba'$. Εφαρμόζοντας τη συνεπαγωγή (ii)⇒(i) τού λήμματος 1.4.28 (με το στοιχείο a στη θέση τού εκεί παρατεθέντος b και το στοιχείο b στη θέση τού εκεί παρατεθέντος a) διαπιστώνουμε ότι $t \in \text{ΕΚΠ}_R(b, a) = \text{ΕΚΠ}_R(a, b)$. Επιπροσθέτως, εξ ορισμού τού t έχουμε $td = ab$.
(ii) Εάν $a, b \in R\smallsetminus\{0_R\}$ και $t \in \text{ΕΚΠ}_R(a, b)$, τότε σύμφωνα με το λήμμα 1.4.28 υπάρχουν σχετικώς πρώτα στοιχεία $a', b' \in R\smallsetminus\{0_R\}$, τέτοια ώστε $t = aa' = bb'$. Επειδή $a \mid ab$ και $b \mid ab$, από τον ορισμό 1.4.19 τού ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου έπεται ότι $t \mid ab$. Κατά συνέπειαν, $\exists d \in R\smallsetminus\{0_R\}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $ab = td$, οπότε

$$\left.\begin{array}{r} ab = td = aa'd \\ ba = td = bb'd \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = a'd = da' \\ a = b'd = db' \end{array}\right\},$$

καθότι ο θεωρηθείς δακτύλιος R είναι εξ υποθέσεως ακεραία περιοχή (βλ. 1.2.5). Επειδή τα a', b' είναι σχετικώς πρώτα, εφαρμόζοντας τη συνεπαγωγή (ii)⇒(i) τού λήμματος 1.4.27 διαπιστώνουμε ότι $d \in \text{ΜΚΔ}_R(a, b)$. □

1.4.30 Λήμμα. *Έστω R μια ακεραία περιοχή. Εάν δυο τυχόντα στοιχεία τής R διαθέτουν πάντοτε κάποιον μέγιστο κοινό διαιρέτη και $a_1, a_2, a_3 \in R$, τότε*

$$\text{ΜΚΔ}_R(a_1, a_2, a_3) = \text{ΜΚΔ}_R(d, a_3), \ \forall d \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, a_2). \tag{1.21}$$

(Ως εκ τούτου, $\text{ΜΚΔ}_R(a_1, a_2, a_3) \neq \varnothing$.)

Αποδειξη. Θεωρούμε τυχόντες μεγίστους κοινούς διαιρέτες $d \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, a_2)$, $d' \in \text{ΜΚΔ}_R(d, a_3)$, καθώς και τυχόν $c \in R$ με $c \mid a_j$ για κάθε $j \in \{1, 2, 3\}$. Προφανώς,

$$\left.\begin{array}{r} d' \mid d \ \text{ και } \ d \mid a_1, \ d \mid a_2 \Rightarrow d' \mid a_1 \ \text{ και } \ d' \mid a_2 \\ d' \mid a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow d' \mid a_j, \forall j \in \{1, 2, 3\}. \tag{1.22}$$

Από τον ορισμό 1.4.8 (εφαρμοζόμενον τόσον για τον d όσον και για τον d') λαμβάνουμε

$$c \mid a_1 \ \text{ και } \ c \mid a_2 \Rightarrow \ c \mid d, \quad c \mid d \ \text{ και } \ c \mid a_3 \Rightarrow \ c \mid d'. \tag{1.23}$$

Από τις (1.22) και (1.23) συμπεραίνουμε ότι $d' \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, a_2, a_3)$. Επομένως,

$$\text{ΜΚΔ}_R(a_1, a_2, a_3) \neq \varnothing \;\text{ και }\; \text{ΜΚΔ}_R(d, a_3) \subseteq \text{ΜΚΔ}_R(a_1, a_2, a_3).$$

Έστω τώρα τυχών $d'' \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, a_2, a_3)$. Από τον ορισμό 1.4.8 γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις διαιρετότητας

$$d'' \mid a_1 \;\text{ και }\; d'' \mid a_2 \Rightarrow d'' \mid d, \quad d'' \mid d \;\text{ και }\; d'' \mid a_3 \Rightarrow d'' \mid d',$$

από τη μια μεριά και οι σχέσεις διαιρετότητας

$$\left.\begin{array}{r} d' \mid d \;\text{ και }\; d \mid a_1,\; d \mid a_2 \Rightarrow d' \mid a_1 \;\text{ και }\; d' \mid a_2 \\ d' \mid a_3 \\ d'' \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, a_2, a_3) \end{array}\right\} \Rightarrow d' \mid d'',$$

από την άλλη. Αυτό σημαίνει ότι $d' \underset{\text{συν.}}{\sim} d''$. Από την πρόταση 1.4.11 συνάγεται ότι $d' \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, a_2, a_3)$ και $d'' \in \text{ΜΚΔ}_R(d, a_3)$, απ' όπου έπεται ότι η (1.21) είναι αληθής. □

1.4.31 Πρόταση. *Έστω R μια ακεραία περιοχή. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν δυο τυχόντα στοιχεία τής R διαθέτουν μέγιστο κοινό διαιρέτη, τότε και οιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους στοιχεία τής R διαθέτουν μέγιστο κοινό διαιρέτη.*

(ii) *Εάν δυο τυχόντα στοιχεία τής R διαθέτουν ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, τότε και οιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους στοιχεία τής R διαθέτουν ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο.*

(iii) *Εάν δυο τυχόντα στοιχεία τής R διαθέτουν μέγιστο κοινό διαιρέτη, τότε και δυο τυχόντα στοιχεία τής R διαθέτουν ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, και τανάπαλιν.*

(iv) *Εάν οιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους στοιχεία τής R διαθέτουν μέγιστο κοινό διαιρέτη, τότε και οιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους στοιχεία τής R διαθέτουν ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, και τανάπαλιν.*

Απόδειξη. (i) Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, και εάν τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι στοιχεία τού R, τότε -εξ υποθέσεως- οιοδήποτε ζεύγος εξ αυτών διαθέτει κάποιον μέγιστο κοινό διαιρέτη. Θα αποδείξουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής μέσω μαθηματικής επαγωγής. Έστω $n = 3$ και έστω $d \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, a_2)$. Εάν $d' \in \text{ΜΚΔ}_R(d, a_3)$, τότε σύμφωνα με το λήμμα 1.4.30 έχουμε

$$d' \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, a_2, a_3).$$

Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι $n \geqslant 4$ και ότι ο ισχυρισμός μας είναι αληθής για τα $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Έστω $d \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, \ldots, a_{n-1})$. Εξ υποθέσεως, $\exists d' \in \text{ΜΚΔ}_R(d, a_n)$. Έστω $c \in R$ με $c \mid a_j$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Προφανώς,

$$\left.\begin{array}{r} d' \mid d \;\text{ και }\; d \mid a_j,\; \forall j \in \{1, \ldots, n-1\} \\ \Rightarrow d \mid a_j,\; \forall j \in \{1, \ldots, n-1\} \\ d' \mid a_n \end{array}\right\} \Rightarrow d' \mid a_j, \forall j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.24}$$

Από τον ορισμό 1.4.8 (εφαρμοζόμενον τόσον για τον d όσον και για τον d') λαμβάνουμε

$$c \mid a_j,\; \forall j \in \{1, \ldots, n-1\} \Rightarrow c \mid d, \quad c \mid d \;\text{ και }\; c \mid a_n \Rightarrow c \mid d'. \tag{1.25}$$

Από τις (1.24) και (1.25) συμπεραίνουμε ότι $d' \in \mathrm{MK\Delta}_R(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$. Επομένως,

$$\mathrm{MK\Delta}_R(a_1, \ldots, a_n) \neq \varnothing \ \text{ και } \ \mathrm{MK\Delta}_R(d, a_n) \subseteq \mathrm{MK\Delta}_R(a_1, \ldots, a_n).$$

(Με επιχειρήματα ανάλογα εκείνων που χρησιμοποιήθησαν στο λήμμα 1.4.30, όπου $n = 3$, μπορεί κανείς να δείξει ότι $\mathrm{MK\Delta}_R(d, a_n) = \mathrm{MK\Delta}_R(a_1, \ldots, a_n)$, αλλά εδώ αρκεί μόνον η διασφάλιση τής υπάρξεως *τουλάχιστον ενός* μεγίστου κοινού διαιρέτη των $a_1, \ldots, a_n$).

(ii) Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, και εάν τα $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι στοιχεία τού R, τότε -εξ υποθέσεως- οιοδήποτε ζεύγος εξ αυτών διαθέτει κάποιο ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. Θα αποδείξουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής μέσω μαθηματικής επαγωγής. Έστω $n = 3$ και έστω $t \in \mathrm{EK\Pi}_R(a_1, a_2)$. Τότε

$$\langle t \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \Longrightarrow \langle t \rangle \cap \langle a_3 \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \langle a_3 \rangle$$

και επειδή τα t και a_3 διαθέτουν κάποιο ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, ας το πούμε t', με $\langle t' \rangle = \langle t \rangle \cap \langle a_3 \rangle$ (βλ. 1.4.23 (i)⇒(ii)), έχουμε

$$\langle t' \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \langle a_3 \rangle .$$

Τούτο σημαίνει ότι το t' είναι κατ' ανάγκην ένα ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των a_1, a_2, a_3 (λόγω τού 1.4.23 (ii)⇒(i)). Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι $n \geqslant 4$ και ότι ο ισχυρισμός μας είναι αληθής για τα $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Εάν το t είναι ένα ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $a_1, \ldots, a_{n-1}$, τότε

$$\langle t \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_{n-1} \rangle \Longrightarrow \langle t \rangle \cap \langle a_n \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_n \rangle ,$$

και επειδή τα t και a_n διαθέτουν (εξ υποθέσεως) κάποιο ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, ας το πούμε t', με

$$\langle t' \rangle = \langle t \rangle \cap \langle a_n \rangle$$

(βλ. 1.4.23 (i)⇒(ii)), έχουμε

$$\langle t' \rangle = \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle \cap \langle a_3 \rangle \cap \cdots \cap \langle a_{n-1} \rangle \cap \langle a_n \rangle ,$$

κάτι που σημαίνει ότι το t' είναι κατ' ανάγκην ένα ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (λόγω τού 1.4.23 (ii)⇒(i)).

(iii) Κατ' αρχάς, υποθέτοντας ότι δυο τυχόντα στοιχεία τής R διαθέτουν μέγιστο κοινό διαιρέτη, θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{EK\Pi}_R(a, b) \neq \varnothing$ για οιαδήποτε $a, b \in R$. Εάν τουλάχιστον ένα εκ των a, b είναι $= 0_R$, τότε έχουμε $\mathrm{EK\Pi}_R(a, b) = \{0_R\} \neq \varnothing$ (βλ. πόρισμα 1.4.25). Εάν $a, b \in R \setminus \{0_R\}$, τότε η ύπαρξη κάποιου μεγίστου κοινού διαιρέτη $d \in \mathrm{MK\Delta}_R(a, b)$ συνεπιφέρει την ύπαρξη ενός $t \in \mathrm{EK\Pi}_R(a, b)$ με

$$td = ab$$

επί τη βάσει τής προτάσεως 1.4.29.

Εν συνεχεία, υποθέτοντας ότι δυο τυχόντα στοιχεία τής R διαθέτουν ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{MK\Delta}_R(a, b) \neq \varnothing$ για οιαδήποτε $a, b \in R$.

Εάν $a = 0_R$, τότε προφανώς $b \in$ ΜΚΔ$_R(0_R, b)$. Κατ' αναλογίαν, εάν $b = 0_R$, τότε $a \in$ ΜΚΔ$_R(a, 0_R)$. Εάν $a, b \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τότε η ύπαρξη κάποιου ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου $t \in$ ΕΚΠ$_R(a, b)$ συνεπιφέρει την ύπαρξη ενός $d \in$ ΜΚΔ$_R(a, b)$ με $td = ab$ επί τη βάσει τής προτάσεως 1.4.29.

(iv) Τούτο έπεται άμεσα από τα (i), (ii) και (iii). □

1.4.32 Ορισμός. Έστω R μια ακεραία περιοχή. Η R καλείται **περιοχή με μέγιστο κοινό διαιρέτη** ή, εν συντομία, **περιοχή με μ.κ.δ.** όταν ΜΚΔ$_R(a, b) \neq \varnothing$ για οιαδήποτε στοιχεία $a, b \in R$. (Εάν η R είναι περιοχή με μ.κ.δ., τότε, βάσει τής προτάσεως 1.4.31, και οιαδήποτε πεπερασμένου πλήθους στοιχεία τής R διαθέτουν τόσο μέγιστο κοινό διαιρέτη όσο και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο).

1.4.33 Παραδείγματα. Κάθε Π.Κ.Ι. είναι περιοχή με μ.κ.δ. (Βλ. πόρισμα 1.4.14.) Από την άλλη μεριά, επειδή ΜΚΔ$_{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]}(6, 2\left(1 + \sqrt{-5}\right)) = \varnothing$, η τετραγωνική αριθμητική περιοχή $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ δεν είναι περιοχή με μ.κ.δ.

1.4.34 Πρόταση. *Έστω R μια περιοχή με μ.κ.δ. Εάν $a, b, c \in R$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $a \in$ ΜΚΔ$_R(a, a)$,

(ii) $a \mid b \Longleftrightarrow a \in$ ΜΚΔ$_R(a, b)$,

(iii) ΜΚΔ$_R(d, c) =$ ΜΚΔ$_R(a, d')$, $\forall d \in$ ΜΚΔ$_R(a, b)$ *και* $\forall d' \in$ ΜΚΔ$_R(b, c)$,

(iv) ΜΚΔ$_R(ca, cb) = \{cd \mid d \in$ ΜΚΔ$_R(a, b)\}$,

(v) ΜΚΔ$_R(ab, c) =$ ΜΚΔ$_R(db, c)$, *για οιονδήποτε* $d \in$ ΜΚΔ$_R(a, c)$.

Απόδειξη. (i) Προφανώς, $a \mid a$ και για κάθε $c \in R$ με $c \mid a$ ικανοποιούνται οι συνθήκες τού ορισμού 1.4.8 για το a, οπότε $a \in$ ΜΚΔ$_R(a, a)$.

(ii) Υποθέτοντας ότι $a \mid b$, έχουμε $a \mid a$ και $a \mid b$, και για κάθε $c \in R$ με $c \mid a$ και $c \mid b$ ικανοποιούνται οι συνθήκες τού ορισμού 1.4.8 για το a, οπότε $a \in$ ΜΚΔ$_R(a, b)$. Το αντίστροφο είναι προφανές.

(iii) Θεωρούμε τυχόντες $d \in$ ΜΚΔ$_R(a, b)$, $d' \in$ ΜΚΔ$_R(b, c)$. Εάν $d'' \in$ ΜΚΔ$_R(d, c)$ και $d''' \in$ ΜΚΔ$_R(a, d')$, αρκεί να δειχθεί ότι[25] $d'' \underset{\text{συν.}}{\sim} d'''$, ήτοι ότι $d'' \mid d'''$ και $d''' \mid d''$. Εξ υποθέσεως, $d'' \mid d$ και $d'' \mid c$. Επειδή $d \mid a$ και $d \mid b$, έχουμε $d'' \mid a$, $d'' \mid b$ και $d'' \mid c$. Από την άλλη μεριά, επειδή $d' \in$ ΜΚΔ$_R(b, c)$, έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} d'' \mid a \ \text{ και } \ d'' \mid d' \\ d''' \in \text{ΜΚΔ}_R(a, d') \end{array}\right\} \Rightarrow d'' \mid d'''.$$

Η σχέση διαιρετότητας $d''' \mid d''$ αποδεικνύεται παρομοίως.

(iv) Εάν $d \in$ ΜΚΔ$_R(a, b)$ και $d' \in$ ΜΚΔ$_R(ca, cb)$, αρκεί να δειχθεί ότι $d' \underset{\text{συν.}}{\sim} cd$, ήτοι

[25] Εάν $d'' \underset{\text{συν.}}{\sim} d'''$, τότε από την πρόταση 1.4.11 συνάγουμε ότι $d''' \in$ ΜΚΔ$_R(d, c)$ και $d'' \in$ ΜΚΔ$_R(a, d')$, οπότε ΜΚΔ$_R(d, c) =$ ΜΚΔ$_R(a, d')$.

ότι $d' \mid cd$ και $cd \mid d'$. Εάν $c = 0_R$, τούτο είναι προφανές, διότι

$$\mathrm{MK\Delta}_R(0_R, 0_R) = \{0_R\}.$$

Εάν $c \neq 0_R$, τότε από τις σχέσεις διαιρετότητας $d \mid a$ και $d \mid b$ έπονται άμεσα οι $cd \mid ca$ και $cd \mid cb$ (βλ. 1.4.2 (ii)), οπότε $cd \mid d'$. Εξάλλου,

$$\left.\begin{array}{r} cd \mid d' \Rightarrow \exists r \in R : d' = (cd)\, r \\ d' \mid ca \Rightarrow \exists s \in R : ca = d's \\ d' \mid cb \Rightarrow \exists t \in R : cb = d't \end{array}\right\} \Rightarrow ca = cdrs,\ cb = cdrt.$$

Επειδή ο θεωρηθείς δακτύλιος R είναι εξ υποθέσεως ακεραία περιοχή, έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} a = drs \\ b = drt \end{array}\right\} \Rightarrow dr \mid a \text{ και } dr \mid b$$

(βλ. 1.2.5), οπότε $d \in \mathrm{MK\Delta}_R(a, b) \Rightarrow dr \mid d \Rightarrow d' = c\,(dr) \mid cd$.

(v) Έστω τυχών $d \in \mathrm{MK\Delta}_R(a, c)$. Κατά το (iv), $db \in \mathrm{MK\Delta}_R(ab, cb)$. Έστω τυχών $d' \in \mathrm{MK\Delta}_R(ab, cb)$. Τότε $d \underset{\text{συν.}}{\sim} d'$, οπότε

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{MK\Delta}_R(db, c) = \mathrm{MK\Delta}_R(d', c) \\ \text{(iii)} \Rightarrow \mathrm{MK\Delta}_R(d', c) = \mathrm{MK\Delta}_R(ab, d''), \\ \forall d'' \in \mathrm{MK\Delta}_R(cb, c) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{MK\Delta}_R(db, c) = \mathrm{MK\Delta}_R(ab, d''), \\ \forall d'' \in \mathrm{MK\Delta}_R(cb, c) \end{array} \right\}$$

Κατά το (ii), $c \in \mathrm{MK\Delta}_R(cb, c)$. Επιλέγοντας λοιπόν ως d'' το c, λαμβάνουμε $\mathrm{MK\Delta}_R(db, c) = \mathrm{MK\Delta}_R(ab, c)$. □

Ανάλογες ιδιότητες που αφορούν στα σύνολα των ελαχίστων κοινών πολλαπλασίων περιλαμβάνονται στην ακόλουθη πρόταση:

1.4.35 Πρόταση. *Έστω R μια περιοχή με μ.κ.δ. Εάν $a, b, c \in R$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $a \in \mathrm{EK\Pi}_R(a, a)$,

(ii) $a \mid b \Longleftrightarrow b \in \mathrm{EK\Pi}_R(a, b)$,

(iii) $\mathrm{EK\Pi}_R(t, c) = \mathrm{EK\Pi}_R(a, t')$, $\forall t \in \mathrm{EK\Pi}_R(a, b)$ *και* $\forall t' \in \mathrm{EK\Pi}_R(b, c)$,

(iv) $\mathrm{EK\Pi}_R(ca, cb) = \{\, ct \mid t \in \mathrm{EK\Pi}_R(a, b)\}$,

(v) $\mathrm{EK\Pi}_R(ab, c) = \mathrm{EK\Pi}_R(tb, c)$, *για οιοδήποτε* $t \in \mathrm{EK\Pi}_R(a, c)$.

1.4.36 Ορισμός. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Ένα στοιχείο $p \in R$ καλείται **πρώτο στοιχείο** τού R όταν $p \in R \smallsetminus (R^\times \cup \{0_R\})$ και, επιπροσθέτως, για οιαδήποτε $a, b \in R$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$[p \mid ab \Longrightarrow \text{είτε } p \mid a \text{ είτε } p \mid b].$$

1.4.37 Ορισμός. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Ένα στοιχείο $q \in R$ καλείται **ανάγωγο στοιχείο** τού R όταν $q \in R \smallsetminus (R^\times \cup \{0_R\})$ και, επιπροσθέτως, για οιαδήποτε $a, b \in R$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$[q = ab \Longrightarrow \text{είτε } \ a \in R^{\times} \ \text{ είτε } \ b \in R^{\times}].$$

1.4.38 Παραδείγματα. (i) Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών ένα στοιχείο είναι πρώτο εάν και μόνο εάν είναι ανάγωγο, ήτοι τής μορφής $\pm p$, όπου p κάποιος πρώτος αριθμός.

(ii) Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}_6$ (που είναι Δ.Κ.Ι. αλλά όχι Π.Κ.Ι.) το στοιχείο $[2]_6$ είναι πρώτο. Πράγματι· τα μόνα γινόμενα στοιχείων τού $\mathbb{Z}_6$ τα οποία διαιρεί το $[2]_6$ είναι τα

$$[1]_6\,[2]_6\,,\,[1]_6\,[4]_6\,,\,[2]_6\,[3]_6\,,\,[2]_6\,[4]_6\,,\,[2]_6\,[5]_6\,,\,[3]_6\,[4]_6\,,\,[4]_6\,[5]_6\,.$$

Αρκεί λοιπόν να παρατηρήσουμε ότι το $[2]_6$ διαιρεί τουλάχιστον έναν εκ των παραγόντων αυτών των γινομένων. Από την άλλη μεριά, το $[2]_6$ *δεν είναι* ανάγωγο στοιχείο τού $\mathbb{Z}_6$, αφού

$$[2]_6 = [4]_6\,[2]_6\,, \quad [4]_6 \notin \mathbb{Z}_6^{\times}, \quad [2]_6 \notin \mathbb{Z}_6^{\times} \; (= \{[1]_6\,, [5]_6\}).$$

(iii) Στην υποπεριοχή $R = \left\{ \frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$ τού σώματος των ρητών αριθμών το στοιχείο $6 = \frac{6}{2^0}$ είναι ανάγωγο. Πράγματι· εάν το 6 γράφεται ως γινόμενο $6 = \frac{a}{2^n}\frac{b}{2^m}$, όπου $a, b \in \mathbb{Z},\ n, m \in \mathbb{N}_0$, τότε

$$ab = 2^{n+m+1} \cdot 3, \text{ με } n + m + 1 \geqslant 1,$$

απ' όπου έπεται ότι $3 \mid ab \Longrightarrow$ είτε $\ 3 \mid a\ $ είτε $\ 3 \mid b$ (εντός τού $\mathbb{Z}$!). Εάν $3 \mid a$, τότε $a = 3r$ για κάποιον $r \in \mathbb{Z}$, οπότε $rb = 2^{n+m+1} \Rightarrow b = 2^{\mu}$, για κάποιον $\mu \in \mathbb{N}_0$, $\mu \leqslant n+m+1$. Κατά συνέπειαν, $\frac{b}{2^m} = 2^{\mu - m} \in R^{\times} = \{\pm 2^{\nu} \mid \nu \in \mathbb{Z}\}$. Εάν $3 \mid b$, τότε -κατ' αναλογίαν- $\frac{a}{2^n} \in R^{\times}$.

(iv) Στον δακτύλιο $\mathbb{Z}[i]$ των ακεραίων τού Gauss (που είναι ακεραία περιοχή) ένα στοιχείο είναι πρώτο εάν και μόνο εάν είναι ανάγωγο (πρβλ. 1.4.39 (iv)).

1.4.39 Πρόταση. *Έστω R μια ακεραία περιοχή. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Ένα $p \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ είναι πρώτο στοιχείο τής R εάν και μόνον εάν το κύριο ιδεώδες $\langle p \rangle$ είναι ένα μη τετριμμένο πρώτο ιδεώδες τής R.*

(ii) *Ένα $q \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ είναι ανάγωγο στοιχείο τής R εάν και μόνον εάν το $\langle q \rangle$ είναι ένα μεγιστικό στοιχείο τού συνόλου όλων των γνησίων μη τετριμμένων κυρίων ιδεωδών τής R (ως προς τον συνήθη συνολοθεωρητικό εγκλεισμό).*

(iii) *Κάθε πρώτο στοιχείο τής R είναι ανάγωγο.* (Όπως είδαμε στο 1.4.38 (ii), τούτο δεν είναι πάντοτε αληθές για μεταθετικούς δακτυλίους R οι οποίοι *δεν είναι* ακέραιες περιοχές!)

(iv) *Εάν η R είναι Π.Κ.Ι., τότε ένα $p \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ είναι πρώτο στοιχείο τής R εάν και μόνον εάν είναι ανάγωγο στοιχείο τής R.*

(v) *Εάν το p είναι ένα πρώτο στοιχείο τής R και $p \underset{\text{συν.}}{\sim} p'$, για κάποιο $p' \in R$, τότε και το p' είναι ένα πρώτο στοιχείο τής R.*

(vi) *Εάν το q είναι ένα ανάγωγο στοιχείο τής R και $q \underset{\text{συν.}}{\sim} q'$, για κάποιο $q' \in R$, τότε* *και το q' είναι ένα ανάγωγο στοιχείο τής R.*

(vii) *Οι μόνοι διαιρέτες ενός αναγώγου στοιχείου q τής R είναι τα συντροφικά του στοιχεία και τα αντιστρέψιμα στοιχεία τής R, ήτοι οι «μη γνήσιοι» διαιρέτες τού q* (βλ. 1.4.7).

(viii) *Ένα $q \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ είναι ανάγωγο στοιχείο τής R εάν και μόνον εάν δεν διαθέτει «γνήσιους» διαιρέτες.*

Απόδειξη. (i) Έστω $p \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ ένα πρώτο στοιχείο τής R. Επειδή το p είναι μη μηδενικό και μη αντιστρέψιμο, έχουμε $\{0_R\} \subsetneqq \langle p \rangle \subsetneqq R$. Υποθέτοντας ότι $a, b \in R$ με $ab \in \langle p \rangle$, έχουμε $p \mid ab$, οπότε είτε $p \mid a$ είτε $p \mid b$, δηλαδή είτε $a \in \langle p \rangle$ είτε $b \in \langle p \rangle$. Άρα το $\langle p \rangle$ είναι ένα μη τετριμμένο πρώτο ιδεώδες τής R. Και αντιστρόφως· υποθέτοντας ότι το το $\langle p \rangle$ είναι ένα μη τετριμμένο πρώτο ιδεώδες τής R, το στοιχείο p που το παράγει είναι μη μηδενικό και μη αντιστρέψιμο (βλ. 1.3.5), και εάν $a, b \in R$ με $p \mid ab$, τότε

$$ab \in \langle p \rangle \Longrightarrow \text{είτε } \; a \in \langle p \rangle \; \text{ είτε } b \in \langle p \rangle \Longrightarrow \text{είτε } \; p \mid a \; \text{ είτε } \; p \mid b,$$

οπότε το p είναι ένα πρώτο στοιχείο τής ακεραίας περιοχής R.

(ii) Έστω q ένα ανάγωγο στοιχείο τής R. Προφανώς, $\{0_R\} \subsetneqq \langle q \rangle \subsetneqq R$. Έστω $\langle a \rangle$ τυχόν μη τετριμμένο γνήσιο κύριο ιδεώδες τής R με $\langle q \rangle \subseteq \langle a \rangle$. Τότε $q = ar$ για κάποιο $r \in R$. Επομένως, είτε $a \in R^{\times}$ είτε $r \in R^{\times}$. Η πρώτη περίπτωση αποκλείεται (καθότι υπετέθη πως το $\langle a \rangle$ είναι *γνήσιο* ιδεώδες τής R). Άρα $r \in R^{\times}$, οπότε

$$q \underset{\text{συν.}}{\sim} a \Longleftrightarrow \langle q \rangle = \langle a \rangle \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Το } \langle q \rangle \text{ είναι ένα μεγιστικό στοιχείο} \\ \text{τού συνόλου όλων των μη τετριμμένων} \\ \text{γνησίων κυρίων ιδεωδών τής } R. \end{array} \right\}.$$

Και αντιστρόφως· εάν υποθέσουμε ότι το κύριο ιδεώδες $\langle q \rangle$ είναι ένα μεγιστικό στοιχείο τού συνόλου όλων των μη τετριμμένων γνησίων κυρίων ιδεωδών τής R (ως προς τον συνήθη συνολοθεωρητικό εγκλεισμό), τότε $\{0_R\} \subsetneqq \langle q \rangle \subsetneqq R$, οπότε το q δεν είναι ούτε $= 0_R$ ούτε αντιστρέψιμο. Επιπροσθέτως, εάν $a, b \in R$ με $q = ab$, έχουμε $\langle q \rangle \subseteq \langle a \rangle \Longrightarrow$ είτε $\langle q \rangle = \langle a \rangle$ είτε $\langle a \rangle = R$. Εάν ισχύει η ισότητα $\langle q \rangle = \langle a \rangle$, τότε $a = qc$ για κάποιο $c \in R$, οπότε $q = ab = qbc \underset{\text{(βλ. 1.2.5)}}{\Longrightarrow} bc = 1 \Longrightarrow b \in R^{\times}$. Εάν, από την άλλη μεριά, ισχύει η ισότητα $\langle a \rangle = R$, τότε $a \in R^{\times}$. Κατά συνέπειαν, το q είναι ένα ανάγωγο στοιχείο τής R.

(iii) Έστω p ένα πρώτο στοιχείο τής R. Εάν $a, b \in R$ με $p = ab$, έχουμε

$$\text{είτε } \; p \mid a \; \text{ είτε } \; p \mid b \Longrightarrow \text{είτε } \left\{ \begin{array}{c} a = pr \\ \text{για κάποιο } r \in R \end{array} \right\} \text{ είτε } \left\{ \begin{array}{c} b = ps \\ \text{για κάποιο } s \in R \end{array} \right\}.$$

Επομένως, είτε $rb = 1$ είτε $sa = 1$, δηλαδή είτε $b \in R^{\times}$ είτε $a \in R^{\times}$. Άρα το p είναι ένα ανάγωγο στοιχείο τής R.

(iv) Λόγω τού (iii), αρκεί να αποδειχθεί ότι κάθε ανάγωγο στοιχείο μιας Π.Κ.Ι. R είναι πρώτο. Εάν λοιπόν το q είναι ανάγωγο, τότε $\{0_R\} \subsetneqq \langle q \rangle \subsetneqq R$ και (κατά το (ii)) το $\langle q \rangle$ είναι ένα μεγιστικό στοιχείο τού συνόλου όλων των μη τετριμμένων γνησίων κυρίων ιδεωδών τής R (ως προς τον συνήθη συνολοθεωρητικό εγκλεισμό). Επειδή η ακεραία περιοχή R είναι Π.Κ.Ι., το $\langle q\rangle$ είναι κατ' ανάγκην μεγιστικό ιδεώδες τής R. Όμως κάθε μεγιστικό ιδεώδες τής R είναι πρώτο ιδεώδες (βλ. θεώρημα 1.3.24). Άρα το $\langle q\rangle$ είναι πρώτο ιδεώδες και (βάσει τού (i)) το q είναι πρώτο στοιχείο τής R.

(v) Εάν το p είναι ένα πρώτο στοιχείο τής R και $p \underset{\text{συν.}}{\sim} p'$, τότε $p' = up$ για κάποιο $u \in R^\times$. Υποθέτοντας ότι $a, b \in R$ με $p' \mid ab$, έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} p \mid p' \\ p' \mid ab \end{array}\right\} \Longrightarrow p \mid ab \Longrightarrow \text{είτε } \ p \mid a \ \text{ είτε } \ p \mid b.$$

Ως εκ τούτου, είτε $a = pr = u^{-1}p'r$ για κάποιο $r \in R$ είτε $b = ps = u^{-1}p's$ για κάποιο $s \in R$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι είτε $p' \mid a$ είτε $p' \mid b$. Κατά συνέπειαν, *και* το p'είναι ένα πρώτο στοιχείο τής ακεραίας περιοχής R.

(vi) Εάν το q είναι ένα ανάγωγο στοιχείο τής R και $q \underset{\text{συν.}}{\sim} q'$, τότε $q = uq'$ για κάποιο $u \in R^\times$. Υποθέτοντας ότι $a, b \in R$ με $q' = ab$, έχουμε

$$q = uab \Longrightarrow \text{είτε } \ ua \in R^\times \ \text{ είτε } \ b \in R^\times \Longrightarrow \text{είτε } \ a \in R^\times \ \text{ είτε } \ b \in R^\times,$$

οπότε *και* το q' είναι ένα ανάγωγο στοιχείο τής ακεραίας περιοχής R.

(vii) Έστω τυχόν $a \in R$ που είναι διαιρέτης τού q. Τότε $\langle q\rangle \subseteq \langle a\rangle$. Επειδή (κατά το (ii)) το κύριο ιδεώδες $\langle q\rangle$ είναι ένα μεγιστικό στοιχείο τού συνόλου όλων των μη τετριμμένων γνησίων κυρίων ιδεωδών τής R (ως προς τον συνήθη συνολοθεωρητικό εγκλεισμό), συμπεραίνουμε ότι $\langle q\rangle = \langle a\rangle$. Τούτο σημαίνει ότι είτε τα q και a είναι συντροφικά (βλ. 1.4.3 (ii)) είτε $\langle q\rangle = \langle a\rangle = R$, οπότε το a είναι αντιστρέψιμο.

(viii) Εάν το $q \in R \smallsetminus (R^\times \cup \{0_R\})$ είναι ανάγωγο στοιχείο τής ακεραίας περιοχής R, τότε αυτό δεν διαθέτει γνήσιους διαιρέτες βάσει τού (vii). Εάν, αντιστρόφως, ένα στοιχείο $q \in R \smallsetminus (R^\times \cup \{0_R\})$ δεν διαθέτει γνήσιους διαιρέτες και υπάρχουν $a, b \in R$, τέτοια ώστε να ισχύει η ισότητα $q = ab$, τότε, επειδή $a \mid q$ και $b \mid q$, έχουμε

$$\Big(\text{είτε } \ a \in R^\times \ \text{ είτε } \ q \underset{\text{συν.}}{\sim} a\Big) \ \text{ και } \ \Big(\text{είτε } \ b \in R^\times \ \text{ είτε } \ q \underset{\text{συν.}}{\sim} b\Big).$$

Υποθέτοντας ότι $q \underset{\text{συν.}}{\sim} a$ και $q \underset{\text{συν.}}{\sim} b$, συμπεραίνουμε ότι

$$q^2 \underset{\text{συν.}}{\sim} ab = q \Longrightarrow \exists x \in R^\times : q^2 = qx.$$

(Βλ. 1.4.4 και 1.4.6). Επειδή ο θεωρούμενος δακτύλιος R είναι εξ υποθέσεως ακεραία περιοχή (βλ. 1.2.5), η ως άνω ισότητα ισοδυναμεί με την $q = x \in R^\times$, κάτι το οποίο είναι άτοπο. Άρα είτε $a \in R^\times$ είτε $b \in R^\times$ και, ως εκ τούτου, το q είναι ανάγωγο στοιχείο τής R. □

1.4.40 Πόρισμα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Το p είναι πρώτο στοιχείο τής R εάν και μόνον εάν το κύριο ιδεώδες $\langle p\rangle$ είναι ένα μη τετριμμένο πρώτο ιδεώδες τής R.*

(ii) *Το q είναι ανάγωγο στοιχείο τής R εάν και μόνον εάν το κύριο ιδεώδες $\langle q\rangle$ είναι ένα μεγιστικό ιδεώδες τής R.*

(iii) *Ένα στοιχείο τής R είναι πρώτο εάν και μόνον εάν είναι ανάγωγο.*

(iv) *Ένα μη τετριμμένο ιδεώδες τής R είναι πρώτο εάν και μόνον εάν είναι μεγιστικό.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι τα (i), (ii) και (iv) έπονται άμεσα από την προηγηθείσα πρόταση 1.4.39. (Το (iv) είχε αποδειχθεί και ανεξαρτήτως αυτής στην πρόταση 1.3.44). Εξάλλου, επειδή κάθε ιδεώδες τής R είναι κύριο, το (iii) έπεται από το ότι κάθε μεγιστικό ιδεώδες τής R είναι μεγιστικό στοιχείο τού συνόλου των γνησίων ιδεωδών της και το (ii) τής 1.4.39. □

1.4.41 Πρόταση. *Ένα στοιχείο μιας περιοχής R με μ.κ.δ. είναι πρώτο εάν και μόνον εάν είναι ανάγωγο.*

Απόδειξη. Λόγω τού (iii) τής προτάσεως 1.4.39 αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε ανάγωγο στοιχείο τής R είναι πρώτο. Έστω $q \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ τυχόν ανάγωγο στοιχείο τής R. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν στοιχεία $a, b \in R$, τέτοια ώστε $q \mid ab$. Εάν $q \nmid a$ και $d \in \text{ΜΚΔ}_R(q, a)$, τότε, σύμφωνα με το (ii) τής προτάσεως 1.4.34, $d \underset{\text{συν.}}{\nsim} q$. Ωστόσο, $d \mid q$, οπότε υπάρχει $q' \in R$, τέτοιο ώστε να ισχύει η ισότητα $q = dq'$. Επειδή το q είναι ανάγωγο στοιχείο, έχουμε κατ' ανάγκην είτε $d \in R^{\times}$ είτε $q' \in R^{\times}$. Όμως $d \underset{\text{συν.}}{\nsim} q \Longrightarrow q' \notin R^{\times}$. Επομένως, $d \in R^{\times} \Longrightarrow d \underset{\text{συν.}}{\sim} 1_R$, οπότε τα q και a είναι σχετικώς πρώτα. Εξ αυτού συμπεραίνουμε ότι $q \mid b$. (Παρομοίως αποδεικνύεται, ύστερα από εναλλαγή των ρόλων των a και b, ότι εάν $q \nmid b$, τότε $q \mid a$.) Άρα το q είναι όντως πρώτο στοιχείο τής R. □

1.4.42 Παράδειγμα. Βάσει των προαναφερθέντων στα εδάφια 1.3.43 και 1.4.33, η ακεραία περιοχή $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ δεν είναι ούτε Π.Κ.Ι. ούτε καν περιοχή με μ.κ.δ. Εναλλακτικώς, αυτό το συμπέρασμα μπορεί (λόγω τής προτάσεως 1.4.41) να εξαχθεί και απευθείας παρατηρώντας οτι το 2 είναι ανάγωγο, χωρίς όμως να είναι και πρώτο στοιχείο της.

1.4.43 Ορισμός. Μια ακεραία περιοχή R καλείται **περιοχή με παραγοντοποίηση** όταν κάθε $a \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ διαθέτει σύντροφο παριστώμενο ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αναγώγων στοιχείων τής R, ήτοι όταν γράφεται υπό τη μορφή

$$a = uq_1q_2 \cdots q_k,$$

όπου $u \in R^{\times}$, $k \in \mathbb{N}$ και τα $q_1, q_2, \ldots, q_k$ είναι ανάγωγα στοιχεία τής R.

1.4.44 Ορισμός. Μια ακεραία περιοχή R καλείται **περιοχή μονοσήμαντης παραγοντοποιήσεως** (=: **Π.Μ.Π.**) όταν πληροί τις ακόλουθες συνθήκες:

(i) Η R είναι περιοχή με παραγοντοποίηση (υπό την έννοια τού 1.4.43) και

(ii) για οιεσδήποτε παραστάσεις $a \underset{\text{συν.}}{\sim} q_1q_2 \cdots q_k \underset{\text{συν.}}{\sim} q'_1q'_2 \cdots q'_l$ συντρόφων ενός $a \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ ως γινομένων πεπερασμένου πλήθους αναγώγων στοιχείων τής R, έχουμε $k = l$ και υπάρχει μια μετάταξη $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ τού συνόλου $\{1, \ldots, k\}$, τέτοια ώστε να ισχύει $q_{\sigma(j)} \underset{\text{συν.}}{\sim} q'_j, \forall j \in \{1, \ldots, k\}$.

1.4.45 Θεώρημα. *Έστω R μια ακεραία περιοχή. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η R είναι Π.Μ.Π.*

(ii) *Η R είναι περιοχή με παραγοντοποίηση και κάθε στοιχείο $q \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ είναι πρώτο εάν και μόνον εάν είναι ανάγωγο.*

(iii) *Κάθε $a \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ διαθέτει κάποιον σύντροφο παριστώμενο ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους πρώτων στοιχείων τής R.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii): Λόγω τού (iii) τής προτάσεως 1.4.39 αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε ανάγωγο στοιχείο $r \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ είναι πρώτο στοιχείο τής R. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $a, b \in R$, τέτοια ώστε να ισχύει $r \mid ab$. Τότε υπάρχει κάποιο $c \in R$ με $ab = rc$. Γράφοντας τα a, b, c ως

$$a = uq_1q_2 \cdots q_k,\ b = u'q_1'q_2' \cdots q_l' \text{ και } c = u''q_1''q_2'' \cdots q_m'',$$

ήτοι ως συντρόφους γινομένων πεπερασμένου πλήθους αναγώγων στοιχείων τού R (όπου $u, u', u'' \in R^{\times}$), λαμβάνουμε

$$uu'\,(\prod_{j=1}^{k} q_j)\,(\prod_{\varrho=1}^{l} q_\varrho') = ab = u''\,r\,q_1''q_2'' \cdots q_m''.$$

Επειδή η R είναι Π.Μ.Π., είτε υπάρχει $j \in \{1, \ldots, k\}$ με $r \underset{\text{συν.}}{\sim} q_j$ είτε υπάρχει $\varrho \in \{1, \ldots, l\}$ με $r \underset{\text{συν.}}{\sim} q_\varrho'$. Κατά συνέπειαν, είτε $r \mid a$ είτε $r \mid b$.

(ii)⇒(iii): Τούτο είναι προφανές.

(iii)⇒(i): Έστω τυχόν $a \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$. Εξ υποθέσεως υπάρχουν $u \in R^{\times}$ και πρώτα στοιχεία $p_1, \ldots, p_k$, τέτοια ώστε $a = up_1p_2 \cdots p_k$. Επειδή κάθε πρώτο στοιχείο τής R είναι ανάγωγο (βλ. 1.4.39 (iii)), η R πληροί τη συνθήκη (i) τού ορισμού 1.4.44. Εάν το a διαθέτει μια δεύτερη παράσταση $a = wq_1q_2 \cdots q_l$, όπου $w \in R^{\times}$ και τα $q_1, \ldots, q_l$ ανάγωγα στοιχεία τής R, τότε

$$\left.\begin{array}{r} p_1 \mid p_1p_2 \cdots p_k = u^{-1}wq_1q_2 \cdots q_l \\ p_1 \text{ πρώτο}, p_1 \nmid u^{-1},\ p_1 \nmid w \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists j_1 \in \{1, \ldots, l\} : p_1 \mid q_{j_1}.$$

Επειδή το q_{j_1} είναι ανάγωγο και το p_1 δεν είναι αντιστρέψιμο, έχουμε $p_1 \underset{\text{συν.}}{\sim} q_{j_1}$, ήτοι $p_1 = eq_{j_1}$ για κάποιο $e \in R^{\times}$. Ύστερα από απλοποίηση τού p_1 στην ανωτέρω ισότητα λαμβάνουμε

$$\left.\begin{array}{r} p_2 \mid p_2 \cdots p_k = e^{-1}u^{-1}w(\displaystyle\prod_{\varrho \in \{1,..,l\} \smallsetminus \{j_1\}} q_\varrho) \\ p_2 \text{ πρώτο στοιχείο}, p_2 \nmid e^{-1},\ p_2 \nmid u^{-1},\ p_2 \nmid w \end{array}\right\} \Rightarrow \exists j_2 \in \{1, .., l\} \smallsetminus \{j_1\} : p_2 \mid q_{j_2},$$

οπότε και πάλι $p_2 \underset{\text{συν.}}{\sim} q_{j_2}$. Εφαρμόζοντας την ίδια συλλογιστική συμπεραίνουμε ότι $k \leqslant l$ (έπειτα από k εν συνόλω βήματα) και ότι

$$\exists\, \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subseteq \{1, \ldots, l\} : p_\varrho \underset{\text{συν.}}{\sim} q_{j_\varrho},\ \forall \varrho \in \{1, \ldots, k\}.$$

Εάν ίσχυε η ανισότητα $k < l$, τότε θα είχαμε

$$\underbrace{1_R = c\,(\prod_{\varrho\in\{1,..,l\}\smallsetminus\{j_1,..,j_k\}} q_\varrho), \text{ για κάποιο } c \in R^\times}_{\Downarrow}$$
$$\exists \varrho \in \{1,..,l\}\smallsetminus\{j_1,..,j_k\} : q_\varrho \mid 1_R \Longrightarrow q_\varrho \in R^\times,$$

πράγμα άτοπο. Συνεπώς, $k = l$, και ορίζοντας τη μετάταξη $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ μέσω τού τύπου $\sigma(\varrho) = j_\varrho$ για κάθε $\varrho \in \{1,\ldots,k\}$ λαμβάνουμε $p_\varrho \underset{\text{συν.}}{\sim} q_{\sigma(\varrho)}$. Άρα η R πληροί *και* τη συνθήκη (ii) τού ορισμού 1.4.44, οπότε η R είναι όντως μια Π.Μ.Π. □

1.4.46 Ορισμός. Λέμε ότι μια ακεραία περιοχή R πληροί τη **συνθήκη των αλυσίδων γνησίων διαιρετών** όταν κάθε ανιούσα αλυσίδα *κυρίων ιδεωδών*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \cdots$$

τής R είναι *στάσιμη*, ήτοι όταν $\exists k \in \mathbb{N}$, για τον οποίο ισχύει $I_n = I_k$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant k$. Η συνθήκη αυτή ισοδυναμεί με την ακόλουθη: Δεν υπάρχει καμία (άπειρη) ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων τής R, τέτοια ώστε ο a_{n+1} να είναι *γνήσιος διαιρέτης* τού a_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (Σημειωτέον ότι, λόγω των (i), (ii) και (iv) τής προτάσεως 1.4.3 και τού ορισμού των γνησίων διαιρετών (βλ. 1.4.7), ο $b \in R$ είναι ένας γνήσιος διαιρέτης ενός $a \in R$ εάν και μόνον εάν $\langle a\rangle \subsetneqq \langle b\rangle \subsetneqq R$.)

1.4.47 Θεώρημα. *Έστω R μια ακεραία περιοχή. Εάν υποθέσουμε ότι η R πληροί τη συνθήκη των αλυσίδων γνησίων διαιρετών, τότε η R είναι περιοχή με παραγοντοποίηση.*

Απόδειξη. Έστω

$$\Lambda := \left\{ a \in R\smallsetminus\left(R^\times \cup \{0_R\}\right) \;\middle|\; \begin{array}{c} \nexists c \underset{\text{συν.}}{\sim} a \text{ παριστώμενος} \\ \text{ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους} \\ \text{αναγώγων στοιχείων τής } R. \end{array} \right\}.$$

Ας υποθέσουμε ότι η ακεραία περιοχή R πληροί τη συνθήκη των αλυσίδων γνησίων διαιρετών, ότι $\Lambda \neq \varnothing$ κι ας θέσουμε για κάθε στοιχείο $a \in \Lambda$,

$$\Gamma_a := \{ b \in \Lambda \mid b \text{ είναι γνήσιος διαιρέτης τού } a\}.$$

Τότε $\Gamma_a \neq \varnothing$ για οιοδήποτε $a \in \Lambda$. (Πράγματι· εάν υπήρχε $a \in \Lambda$, για το οποίο θα είχαμε $\Gamma_a = \varnothing$, τότε το ίδιο το a θα όφειλε να είναι ανάγωγο, κάτι που θα αντέκειτο προς την υπόθεσή μας.) Σύμφωνα με το αξίωμα τής επιλογής,

$$(\Gamma_a \neq \varnothing,\ \forall a \in \Lambda) \Longrightarrow \prod_{a\in\Lambda} \Gamma_a \neq \varnothing,$$

οπότε υπάρχει μια απεικόνιση $f : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{a\in\Lambda} \Gamma_a$, με $f(a) \in \Gamma_a$, $\forall a \in \Lambda$, ήτοι τέτοια, ώστε η εικόνα $f(a)$ τού a μέσω τής f να είναι γνήσιος διαιρέτης τού a, $\forall a \in \Lambda$. Επιλέγοντας ένα τυχόν στοιχείο τού Λ και ονομάζοντάς το a_1 έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε μια αναδρομική απεικόνιση $\mathfrak{K} : \mathbb{N} \longrightarrow \Lambda$ μέσω των τύπων

$$\mathfrak{K}(1) := a_1, \quad \mathfrak{K}(n+1) := f(\mathfrak{K}(n)) =: a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Η κατ' αυτόν τον τρόπο σχηματιζομένη ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων τής R είναι τέτοια, ώστε ο a_{n+1} να είναι *γνήσιος διαιρέτης* τού a_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ως εκ τούτου, η R δεν μπορεί να πληροί τη συνθήκη των αλυσίδων γνησίων διαιρετών, κάτι που αντιφάσκει προς την υπόθεσή μας! Άρα τελικώς $\Lambda = \varnothing$ και η R είναι πράγματι περιοχή με παραγοντοποίηση. □

1.4.48 Πόρισμα. *Κάθε ναιτεριανή περιοχή είναι περιοχή με παραγοντοποίηση.*

Απόδειξη. Κάθε ναιτεριανή περιοχή πληροί τη συνθήκη των αλυσίδων γνησίων διαιρετών (διότι πληροί τη συνθήκη των ανιουσών αλυσίδων επί τού συνόλου *όλων* των ιδεωδών της) και είναι, ως εκ τούτου, περιοχή με παραγοντοποίηση (λόγω τού θεωρήματος 1.4.47). □

1.4.49 Παραδείγματα. (i) Έστω m ένας ακέραιος αριθμός στερούμενος τετραγώνων. Τότε η τετραγωνική αριθμητική περιοχή $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$, ούσα ναιτεριανή (βλ. πρόταση 1.3.32), είναι περιοχή με παραγοντοποίηση. Ωστόσο, όταν $m \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$ ή $m \leqslant -3$, η $\mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ *δεν είναι* Π.Μ.Π.!

(ii) Υποδακτύλιοι περιοχών μονοσήμαντης παραγοντοποιήσεως δεν είναι απαραιτήτως Π.Μ.Π. Επί παραδείγματι, η τετραγωνική αριθμητική περιοχή $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ δεν είναι Π.Μ.Π., αλλά αποτελεί υποπεριοχή τής $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$ (που είναι Π.Μ.Π.).

1.4.50 Πόρισμα. *Κάθε Π.Κ.Ι. είναι Π.Μ.Π.*

Απόδειξη. Έστω R τυχούσα Π.Κ.Ι. Επειδή η R είναι ναιτεριανή, κάθε στοιχείο $a \in R \smallsetminus (R^\times \cup \{0_R\})$ διαθέτει σύντροφο παριστώμενο ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αναγώγων στοιχείων τής R (βάσει τού πορίσματος 1.4.48). Χρησιμοποιώντας τό γεγονός τού ότι κάθε ανάγωγο στοιχείο μιας Π.Κ.Ι. είναι πρώτο, καθώς και την ισοδυναμία των (i) και (iii) τού θεωρήματος 1.4.45, συμπεραίνουμε ότι η R οφείλει να είναι περιοχή μονοσήμαντης παραγοντοποιήσεως. □

1.4.51 Σημείωση. Το αντίστροφο τού πορίσματος 1.4.50 δεν είναι πάντοτε αληθές. Επί παραδείγματι, ο πολυωνυμικός δακτύλιος $\mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ είναι Π.Μ.Π. αλλά δεν είναι Π.Κ.Ι. (διότι, π.χ., το ιδεώδες αυτού το ορισθέν στο (iii) τού εδαφίου 1.3.18 δεν είναι κύριο.)

1.4.52 Ορισμός. Έστω R μια Π.Μ.Π. και έστω $r \in R\smallsetminus\{0_R\}$. Τότε το r είτε είναι αντιστρέψιμο είτε γράφεται ως $r = ws_1s_2\cdots s_k$, όπου $w \in R^\times$, $k \in \mathbb{N}$ και τα $s_1, s_2, \ldots, s_k$ πρώτα (= ανάγωγα) στοιχεία τής R. Εάν

$$s_1 \underset{\text{συν.}}{\sim} s_2 \underset{\text{συν.}}{\sim} \cdots \underset{\text{συν.}}{\sim} s_k =: p,$$

τότε $r = up^k$, για κάποιο $u \in R^\times$. Ειδάλλως, για να συμπτύξουμε σε αυτό το γινόμενο όσα εκ των $s_1, s_2, \ldots, s_k$ είναι ανά δύο συντροφικά (με την εισαγωγή «δυνάμεων») μπορούμε (πιθανώς ύστερα από μια αναδιάταξη δεικτών) να υποθέσουμε ότι

$$s_1 \underset{\text{συν.}}{\sim} \cdots \underset{\text{συν.}}{\sim} s_{j_1}, s_{j_1+1} \underset{\text{συν.}}{\sim} \cdots \underset{\text{συν.}}{\sim} s_{j_2}, s_{j_2+1} \underset{\text{συν.}}{\sim} \cdots \underset{\text{συν.}}{\sim} s_{j_3} \cdots\cdots, s_{j_{\ell-1}+1} \underset{\text{συν.}}{\sim} \cdots \underset{\text{συν.}}{\sim} s_{j_\ell} = s_k$$

για κατάλληλα $\{j_1, j_2, \ldots, j_\ell\} \subseteq \{1, \ldots, k\},\ 2 \leqslant l \leqslant k$, με

$$1 = j_1 < j_2 < \cdots < j_{\ell-1} < j_\ell = k$$

και $s_{j_\mu} \underset{\text{συν.}}{\not\sim} s_{j_{\mu'}}$ για οιουσδήποτε $\mu, \mu' \in \{1, \ldots, \ell\}, \mu \neq \mu'$. Θέτοντας

$$\nu_1 := j_1,\ \nu_2 := j_2 - j_1,\ \ldots,\ \nu_\ell := j_\ell - j_{\ell-1},\quad p_\mu := s_{j_\mu},\ \forall \mu \in \{1, \ldots, \ell\},$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $s_{\rho_\mu} = u_{\rho_\mu} s_{j_\mu}$ για κάποιο $u_{\rho_\mu} \in R^\times$ και για οιουσδήποτε δείκτες $\rho_\mu \in \{1, ..., j_\mu\}$, $\mu \in \{1, \ldots, \ell\}$, το r γράφεται ως

$$\boxed{r = u p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots p_\ell^{\nu_\ell},} \tag{1.26}$$

όπου

$$u := w(\textstyle\prod_{\mu=1}^{\ell} (\prod_{\rho_\mu=1}^{j_\mu} u_{\rho_\mu})) \in R^\times.$$

Η έκφραση (1.26) καλείται **παράσταση τού r ως γινομένου πρώτων στοιχείων** ή **αποσύνθεση τού r σε γινόμενο πρώτων στοιχείων**. Το r μπορεί να γραφεί υπό μία ακόμη πιο βολική μορφή στην οποία *συμπεριλαμβάνεται και η περίπτωση κατά την οποία* $r \in R^\times$, ως ακολούθως: Το σύνολο των πρώτων (= αναγώγων) στοιχείων τής R αποσυντίθεται σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς τη σχέση "$\underset{\text{συν.}}{\sim}$", ήτοι σε σαφώς διακεκριμένες κλάσεις συντροφικών πρώτων στοιχείων. Έστω $\mathscr{P}_R$ ένα *πλήρες σύστημα εκπροσώπων* αυτών των κλάσεων ισοδυναμίας (ήτοι ένα υποσύνολο τού συνόλου των πρώτων στοιχείων τής R, το οποίο περιέχει *ακριβώς ένα* στοιχείο από καθεμιά εξ αυτών). Τότε[26]

$$\boxed{r = u \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\boldsymbol{\nu}_p(r)},\quad u \in R^\times,} \tag{1.27}$$

όπου

$$\boldsymbol{\nu}_p(r) := \begin{cases} \max\left\{k \in \mathbb{N} \,:\, p^k \mid r\right\}, & \text{όταν } p \mid r, \\ 0, & \text{όταν } p \nmid r. \end{cases}$$

1.4.53 Πρόταση. *Έστω R μια Π.Μ.Π. Εάν $r, s \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $\boldsymbol{\nu}_p(rs) = \boldsymbol{\nu}_p(r) + \boldsymbol{\nu}_p(s),\ \forall p \in \mathscr{P}_R$.

(ii) $r \mid s \Longleftrightarrow \boldsymbol{\nu}_p(r) \leqslant \boldsymbol{\nu}_p(s),\ \forall p \in \mathscr{P}_R$.

(iii) $r \underset{\text{συν.}}{\sim} s \Longleftrightarrow \boldsymbol{\nu}_p(r) = \boldsymbol{\nu}_p(s),\ \forall p \in \mathscr{P}_R$.

(iv) $r \in R^\times \Longleftrightarrow \boldsymbol{\nu}_p(r) = 0,\ \forall p \in \mathscr{P}_R$.

(v) *Εάν* $r + s \neq 0_R$, *τότε* $\boldsymbol{\nu}_p(r+s) \geqslant \min\{\boldsymbol{\nu}_p(r), \boldsymbol{\nu}_p(s)\},\ \forall p \in \mathscr{P}_R$.

(vi) *Εάν* $\boldsymbol{\nu}_p(r) < \boldsymbol{\nu}_p(s)$ *για κάποιο* $p \in \mathscr{P}_R$, *τότε* $\boldsymbol{\nu}_p(r+s) = \boldsymbol{\nu}_p(r)$.

[26] Στην ειδική περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$, $u \in \{\pm 1\}$ και μπορούμε να θεωρήσουμε *ως $\mathscr{P}_\mathbb{Z}$ το σύνολο των πρώτων αριθμών*. (Μάλιστα, εάν $r > 0$, τότε $u = 1$.)

Αποδειξη. (i) Εάν οι

$$r = u \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\boldsymbol{\nu}_p(r)}, \quad s = w \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\boldsymbol{\nu}_p(s)}, \tag{1.28}$$

είναι οι παραστάσεις των r και s ως γινομένων πρώτων στοιχείων, τότε, λόγω τού μονοσημάντου τής παραστάσεως τού rs, έχουμε

$$rs = uw \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\boldsymbol{\nu}_p(r)+\boldsymbol{\nu}_p(s)} \Longrightarrow \boldsymbol{\nu}_p(rs) = \boldsymbol{\nu}_p(r) + \boldsymbol{\nu}_p(s), \ \forall p \in \mathscr{P}_R.$$

(ii) Εάν $r \mid s$, τότε $\exists r' \in R : s = rr'$, οπότε

$$\left.\begin{array}{r} \text{(i)} \Rightarrow \boldsymbol{\nu}_p(s) = \boldsymbol{\nu}_p(rr') = \boldsymbol{\nu}_p(r) + \boldsymbol{\nu}_p(r'), \forall p \in \mathscr{P}_R \\ \boldsymbol{\nu}_p(r') \geqslant 0, \forall p \in \mathscr{P}_R \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\nu}_p(s) \geqslant \boldsymbol{\nu}_p(r), \ \forall p \in \mathscr{P}_R.$$

(iii) Αυτό έπεται άμεσα από το (ii).

(iv) Εάν $r \in R^{\times}$, τότε $r \underset{\text{συν.}}{\sim} 1_R$, οπότε εφαρμόζοντας το (iii) λαμβάνουμε

$$\boldsymbol{\nu}_p(r) = \boldsymbol{\nu}_p(1_R) = 0, \ \forall p \in \mathscr{P}_R.$$

Το αντίστροφο είναι προφανές.

(v) Εάν υποθέσουμε ότι $r + s \neq 0_R$, $\mu_p := \min\{\boldsymbol{\nu}_p(r), \boldsymbol{\nu}_p(s)\}$ και ότι οι (1.28) είναι οι οι παραστάσεις των r και s ως γινομένων πρώτων στοιχείων, τότε

$$r + s = \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\mu_p} \left(u \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\boldsymbol{\nu}_p(r)-\mu_p} + w \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\boldsymbol{\nu}_p(s)-\mu_p} \right),$$

οπότε $\boldsymbol{\nu}_p(r+s) \geqslant \mu_p, \ \forall p \in \mathscr{P}_R$.

(vi) Ας διατηρήσουμε τους συμβολισμούς τους εισαχθέντες στο (v). Εάν ισχύει η ανισότητα $\boldsymbol{\nu}_p(r) < \boldsymbol{\nu}_p(s)$ για κάποιο $p \in \mathscr{P}_R$, τότε $\mu_p = \boldsymbol{\nu}_p(r)$, πράγμα που σημαίνει ότι

$$p \nmid u \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\boldsymbol{\nu}_p(r)-\mu_p}, \quad p \mid w \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\boldsymbol{\nu}_p(s)-\mu_p}.$$

Άρα $\boldsymbol{\nu}_p(r+s) = \boldsymbol{\nu}_p(r)$. □

1.4.54 Θεώρημα. *Εάν μια ακεραία περιοχή R είναι Π.Μ.Π., τότε η R είναι περιοχή με μ.κ.δ. Επιπροσθέτως, εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τότε*

$$\boxed{\prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\min\{\boldsymbol{\nu}_p(a_1), \boldsymbol{\nu}_p(a_2), \ldots, \boldsymbol{\nu}_p(a_n)\}} \in \mathrm{MK\Delta}_R(a_1, \ldots, a_n)} \tag{1.29}$$

και

$$\boxed{\prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\max\{\boldsymbol{\nu}_p(a_1), \boldsymbol{\nu}_p(a_2), \ldots, \boldsymbol{\nu}_p(a_n)\}} \in \mathrm{EK\Pi}_R(a_1, \ldots, a_n)} \tag{1.30}$$

Αποδειξη. Εάν οι

$$a_j = u_j \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\boldsymbol{\nu}_p(a_j)}, \ \ u_j \in R^\times, \ \ j \in \{1, \ldots, n\},$$

είναι οι παραστάσεις (1.27) των $a_1, \ldots, a_n$ ως γινομένων πρώτων στοιχείων, τότε

$$a_j \underset{\text{συν.}}{\sim} \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\boldsymbol{\nu}_p(a_j)}.$$

Έστω c ένα στοιχείο τής R, για το οποίο ισχύει $c \mid a_j$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το 1.4.53 (ii), για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ έχουμε

$$\boldsymbol{\nu}_p(c) \leqslant \boldsymbol{\nu}_p(a_j) \Rightarrow \boldsymbol{\nu}_p(c) \leqslant \min\{\boldsymbol{\nu}_p(a_1), \ldots, \boldsymbol{\nu}_p(a_n)\}, \ \forall p \in \mathscr{P}_R.$$

Κατά συνέπειαν, το

$$d := \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\min\{\boldsymbol{\nu}_p(a_1), \boldsymbol{\nu}_p(a_2), \ldots, \boldsymbol{\nu}_p(a_n)\}}$$

είναι διαιρέτης τού a_j για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ και $d \mid c$. Ως εκ τούτου, το d είναι ένας μέγιστος κοινός διαιρέτης των $a_1, \ldots, a_n$ και το (1.29) είναι αληθές. Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι το c είναι ένα στοιχείο τής R, για το οποίο ισχύει $a_j \mid c$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Λαμβάνοντας εκ νέου υπ' όψιν το 1.4.53 (ii), για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ έχουμε

$$\boldsymbol{\nu}_p(c) \geqslant \boldsymbol{\nu}_p(a_j) \Longrightarrow \boldsymbol{\nu}_p(c) \geqslant \max\{\boldsymbol{\nu}_p(a_1), \ldots, \boldsymbol{\nu}_p(a_n)\}, \ \forall p \in \mathscr{P}_R.$$

Κατά συνέπειαν, τα a_j είναι διαιρέτες τού

$$t := \prod_{p \in \mathscr{P}_R} p^{\max\{\boldsymbol{\nu}_p(a_1), \boldsymbol{\nu}_p(a_2), \ldots, \boldsymbol{\nu}_p(a_n)\}}$$

για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ και $c \mid t$. Ως εκ τούτου, το t είναι ένα ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των $a_1, \ldots, a_n$ και το (1.30) είναι αληθές. □

1.4.55 Θεώρημα. *Έστω R μια ακεραία περιοχή. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η R είναι Π.Μ.Π.*

(ii) *Η R είναι περιοχή με μ.κ.δ. και πληροί τη συνθήκη των αλυσίδων γνησίων διαιρετών.*

Αποδειξη. (i)⇒(ii) Εάν η R είναι Π.Μ.Π, τότε η R είναι περιοχή με μ.κ.δ. δυνάμει τού θεωρήματος 1.4.54. Ας υποθέσουμε ότι η R δεν πληροί τη συνθήκη των αλυσίδων γνησίων διαιρετών. Τότε υπάρχει μια (άπειρη) ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων τής R, τέτοια ώστε ο a_{n+1} να είναι *γνήσιος διαιρέτης* τού a_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε η ανιούσα αλυσίδα κυρίων ιδεωδών

$$\langle a_1 \rangle \subsetneqq \langle a_2 \rangle \subsetneqq \cdots \subsetneqq \langle a_n \rangle \subsetneqq \langle a_{n+1} \rangle \subsetneqq \cdots$$

είναι μη στάσιμη. Ιδιαιτέρως, το a_n είναι γνήσιος διαιρέτης τού a_1 για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε υπάρχουν *άπειροι* γνήσιοι διαιρέτες τού a_1. Τούτο όμως είναι κάτι το *άτοπο*, διότι το $a_1 \in R\smallsetminus(R^{\times} \cup \{0_R\})$ διαθέτει ως σύντροφο κάποιον $a \underset{\text{συν.}}{\sim} p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\cdots p_\ell^{\nu_\ell}$, όπου $p_1,\ldots,p_\ell$ είναι ανά δύο μη συντροφικά πρώτα στοιχεία και $\nu_1,...,\nu_\ell \in \mathbb{N}_0$, ο οποίος έχει παράγοντες *μονοσημάντως ορισμένους* (με μόνη εξαίρεση την αντικατάστασή τους από ισαρίθμους συντρόφους τους). Ως εκ τούτου, οι μόνοι γνήσιοι διαιρέτες τού a_1 είναι τα στοιχεία τού συνόλου

$$\left\{p_1^{\mu_1}p_2^{\mu_2}\cdots p_\ell^{\mu_\ell}\;\middle|\;(\mu_1,\ldots,\mu_\ell)\in\left(\prod_{j=1}^{\ell}\{0,1,...,\nu_j\}\right)\smallsetminus\{(0,...,0),(\nu_1,...,\nu_\ell)\}\right\}$$

που έχει *πεπερασμένο* πληθικό αριθμό (ίσον με $(\prod_{j=1}^{\ell}(\nu_j+1))-2$). Άρα τελικώς η R οφείλει να πληροί *και* τη συνθήκη των αλυσίδων γνησίων διαιρετών.

(ii)⇒(i) Επειδή η R είναι περιοχή με μ.κ.δ., κάθε ανάγωγο στοιχείο τής R είναι πρώτο (βάσει τής προτάσεως 1.4.41). Επειδή η R πληροί και τη συνθήκη των αλυσίδων γνησίων διαιρετών, είναι, επιπροσθέτως, και περιοχή με παραγοντοποίηση (κατά το θεώρημα 1.4.47). Ως εκ τούτου, η R είναι Π.Μ.Π. βάσει τής ισοδυναμίας (ii)⇔(i) τού θεωρήματος 1.4.45. □

Οι ιδιότητες τής διαιρετότητας μας οδηγούν στη σύνταξη τού κάτωθι πίνακα, μέσω τού οποίου γίνεται μια (έστω και) αδρομερής ιεράρχηση κάποιων ειδών ακεραίων περιοχών. (Όλοι οι εγκλεισμοί τού πίνακα είναι *αυστηροί*.)

{Ακέραιες περιοχές}	$\subset$	{Μεταθετικοί δακτύλιοι}
$\cup$		
{Περιοχές με παραγοντοποίηση}	$\supset$	{ναιτεριανές περιοχές}
$\cup$		
{Περιοχές που πληρούν τη συνθήκη των αλυσίδων γνησίων διαιρετών}		{Περιοχές, στις οποίες κάθε ανάγωγο στοιχείο είναι πρώτο}
$\cup$		$\cup$
{Περιοχές μονοσήμαντης παραγοντοποιήσεως (Π.Μ.Π)}	$\subset$	{Περιοχές με μ.κ.δ.}
$\cup$		
{Περιοχές κυρίων ιδεωδών (Π.Κ.Ι)}	$\subset$	{Μεταθετικοί δακτύλιοι κυρίων ιδεωδών}
$\cup$		
{Σώματα}	$\subset$	{Στρεβλά σώματα}

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μόδιοι ορισμένοι υπεράνω μεταθετικών δακτυλίων

Η κύρια αλγεβρική δομή που θα μας απασχολήσει είναι αυτή τού *μοδίου* που ορίζεται υπεράνω ενός *μεταθετικού μη τετριμμένου δακτυλίου* (και περιλαμβάνει, ως ειδικές περιπτώσεις, τόσον τη δομή τής αβελιανής ομάδας όσον και τη δομή τού διανυσματικού χώρου).

$\boxed{2.1}$ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

2.1.1 Ορισμός. Έστω $(R,+,\cdot)$ ένας *μεταθετικός μη τετριμμένος* δακτύλιος και έστω $(M,\boxplus)$ μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα με ουδέτερό της στοιχείο το 0_M. Εάν το σύνολο M είναι εφοδιασμένο με μια (εν γένει *εξωτερική*) πράξη [1]

$$R \times M \longrightarrow M, \quad (r,x) \longmapsto r \star x,$$

ούτως ώστε να πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες [2]:

(i)	$1_R \star x = x,$	$\forall x \in M,$	
(ii)	$(r+s) \star x = (r \star x) \boxplus (s \star x),$	$\forall x \in M$	και $\forall\, (r,s) \in R \times R,$
(iii)	$r \star (x \boxplus y) = (r \star x) \boxplus (r \star y),$	$\forall (x,y) \in M \times M$	και $\forall r \in R,$
(iv)	$(r \cdot s) \star x = r \star (s \star x)\,,$	$\forall x \in M$	και $\forall\, (r,s) \in R \times R,$

τότε λέμε ότι το M (μαζί με αυτές τις πράξεις “$\boxplus$” και “$\star$”) αποτελεί έναν **μόδιο υπεράνω τού** R ή, εν συντομία, έναν R-**μόδιο** (R-module).

2.1.2 Πρόταση. *Έστω $(M,\boxplus,\star)$ ένας R-μόδιος. Εάν για $x \in M$ συμβολίσουμε ως $\backsim x$ το αντίθετό του[3] ως προς την “$\boxplus$”, τότε ισχύουν τα εξής:*

[1] Η προκειμένη πράξη καλείται συνήθως **αριθμητικός** ή **βαθμωτός πολλαπλασιασμός**. (Τα στοιχεία τού R είναι τα **αριθμητικά** ή **βαθμωτά μεγέθη** με τα οποία «πολλαπλασιάζουμε» τα στοιχεία τού M μέσω τής “$\star$”.)

[2] Οι ιδιότητες (ii) και (iii) είναι γνωστές ως **γενικευμένοι επιμεριστικοί νόμοι** και η (iv) ως **γενικευμένος προσεταιριστικός νόμος**.

(i) $0_R \star x = 0_M$, *για κάθε* $x \in M$.

(ii) $r \star 0_M = 0_M$, *για κάθε* $r \in R$.

(iii) *Για οιαδήποτε* $r \in R^{\times}$ *και* $x \in M$ *ισχύει*

$$r \star x = 0_M \Longleftrightarrow x = 0_M.$$

(iv) $(-1_R) \star x = \backsim x$, *για κάθε* $x \in M$.

(v) $(-r) \star x = r \star (\backsim x) = \backsim (r \star x)$, *για οιαδήποτε* $r \in R$ *και* $x \in M$.

(vi) $r \star (x_1 \backsim x_2) = (r \star x_1) \backsim (r \star x_2)$, *για οιαδήποτε* $r \in R$ *και* $x_1, x_2 \in M$.

Αποδειξη. (i) Έστω τυχόν στοιχείο $x \in M$. Κατόπιν εφαρμογής τής ιδιότητας 2.1.1 (ii) για $r = s = 0_R$ λαμβάνουμε $(0_R \star x) \boxplus (0_R \star x) = (0_R + 0_R) \star x = 0_R \star x$. Προσθέτοντας το αντίθετο στοιχείο $\backsim (0_R \star x)$ τού $0_R \star x$ σε αμφότερα τα μέλη συμπεραίνουμε ότι

$$\backsim (0_R \star x) \boxplus ((0_R \star x) \boxplus (0_R \star x)) = \backsim (0_R \star x) \boxplus (0_R \star x) = 0_M.$$

Εφαρμόζοντας την προσεταιριστική ιδιότητα τής προσθέσεως τής $(M, \boxplus)$ συμπεραίνουμε τελικώς ότι $0_R \star x = (\backsim (0_R \star x) \boxplus (0_R \star x)) \boxplus (0_R \star x) = 0_M$.

(ii) Λόγω τού (i) έχουμε κατ' αρχάς $0_R \star 0_M = 0_M$. Έστω τώρα τυχόν $r \in R$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα 2.1.1 (iv) για $s = 0_R$ λαμβάνουμε

$$r \star 0_M = r \star (0_R \star 0_M) = (r \cdot 0_R) \star 0_M = 0_R \star 0_M = 0_M.$$

(iii) Η συνεπαγωγή "$\Leftarrow$" είναι προφανής λόγω τής (ii). Απομένει να δείξουμε την "$\Rightarrow$". Προς τούτο θεωρούμε $r \in R^{\times}$ και $x \in M$, τέτοια ώστε να ισχύει $r \star x = 0_M$. Επειδή το r διαθέτει αντίστροφο στοιχείο r^{-1}, από το (ii) και τις ιδιότητες 2.1.1 (i) και (iv) συμπεραίνουμε ότι $x = 1_R \star x = (r^{-1} \cdot r) \star x = r^{-1} \star (r \star x) = r^{-1} \star 0_M = 0_M$.

(iv) Έστω τυχόν $x \in M$. Προφανώς, λόγω των ιδιοτήτων 2.1.1 (i) και (ii),

$$\begin{aligned} x \boxplus ((-1_R) \star x) &= (1_R \star x) \boxplus ((-1_R) \star x) \\ &= (1_R + (-1_R)) \star x = 0_R \star x = 0_M \Rightarrow (-1_R) \star x = \backsim x. \end{aligned}$$

(v) Θεωρούμε τυχόντα $r \in R$ και $x \in M$. Μέσω τού (i) και τής ιδιότητας 2.1.1 (ii) λαμβάνουμε $0_M = 0_R \star x = (r + (-r)) \star x = (r \star x) \boxplus ((-r) \star x)$. Κατ' αναλογίαν, από το (ii) και την ιδιότητα 2.1.1 (iii) έπεται ότι

$$0_M = r \star 0_M = r \star (x \boxplus (\backsim x)) = (r \star x) \boxplus (r \star (\backsim x)),$$

οπότε (λόγω τής μοναδικότητας τού ουδετέρου στοιχείου τής ομάδας $(M, \boxplus)$) έχουμε τελικώς $(-r) \star x = r \star (\backsim x) = \backsim (r \star x)$.

(vi) Θεωρούμε τυχόντα στοιχεία $r \in R$ και $x_1, x_2 \in M$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα 2.1.1 (iii) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} r \star x_1 &= r \star (x_1 \boxplus 0_M) = r \star ((x_1 \boxplus ((\backsim x_2) \boxplus x_2)) \\ &= (r \star x_1) \boxplus (r \star ((\backsim x_2) \boxplus x_2)) = ((r \star x_1) \boxplus (r \star (\backsim x_2))) \boxplus (r \star x_2) \\ &= (r \star (x_1 \backsim x_2)) \boxplus (r \star x_2), \end{aligned}$$

[3] Εξ ορισμού, το $\backsim x$ είναι το μοναδικό στοιχείο τής $(M, \boxplus)$ για το οποίο ισχύει $(\backsim x) \boxplus x = 0_M = x \boxplus (\backsim x)$.

οπότε (λόγω τού (v))$(r \star x_1) \backsim (r \star x_2) = (r \star x_1) \boxplus ((-r) \star x_2) = r \star (x_1 \backsim x_2)$. □

2.1.3 Σημείωση (Απλούστευση συμβολισμών). Στον ορισμό 2.1.1 και στην πρόταση 2.1.2 χρησιμοποιήθηκαν τα σύμβολα “ $\boxplus$ ” και “ $\star$ ” για τη σήμανση των πράξεων επί ενός R-μοδίου M και το $\backsim x$ για εκείνην τού αντιθέτου ενός στοιχείου $x \in M$. Ωστόσο, η περαιτέρω διατήρηση ενός τόσο δυσκίνητου συμβολισμού θα ήταν κάτι το πολύ φορτικό. Γι’ αυτόν τον λόγο θα μεταβούμε, από εδώ και στο εξής, στον *απλουστευμένο προσθετικό και πολλαπλασιαστικό* συμβολισμό αυτών των πράξεων (διακρίνοντάς τες από εκείνες τού ιδίου τού δακτυλίου R από τα συμφραζόμενα και από τον τρόπο επιλογής των εκάστοτε θεωρούμενων στοιχείων, και παραλείποντας, ως επί το πλείστον, ακόμη και το dot “ $\cdot$ ”). Έτσι, αντί τού $\backsim x$ θα γράφουμε $-x$ και αντί των (i)-(iv) τού ορισμού 2.1.1 θα γράφουμε απλώς

(i) $1_R x = x$, (ii) $(r+s)\,x = rx + sx$,

(iii) $r\,(x+y) = rx + ry$, (iv) $(rs)\,x = r\,(sx)$.

Επίσης, όταν $x_1, \ldots, x_k \in M$, $k \in \mathbb{N}$, θα συμβολίζουμε ως $\sum_{i=1}^{k} x_i$ το **άθροισμα** $x_1 + \cdots + x_n$ των $x_1, \ldots, x_n$.

2.1.4 Παραδείγματα. (i) Εάν $(G,+)$ είναι μια προσθετική αβελιανή ομάδα, τότε υπάρχει *ένας και μόνον τρόπος* για να καταστεί αυτή $\mathbb{Z}$-μόδιος[4]: Ως *αριθμητικός* (*βαθμωτός*) *πολλαπλασιασμός* ορίζεται η πράξη

$$\mathbb{Z} \times G \ni (n,g) \longmapsto ng \in G$$

θέτοντας

$$ng := \begin{cases} \underbrace{g + g + \cdots + g}_{n \text{ φορές}}, & \text{όταν } n > 0, \\ -((-n)g), & \text{όταν } n < 0, \\ 0_G\,, & \text{όταν } n = 0, \end{cases}$$

εν είδει «πολλαπλασίου» τού g. Ως εκ τούτου, η έννοια *αβελιανή ομάδα* ταυτίζεται κατ’ ουσίαν με την έννοια $\mathbb{Z}$-*μόδιος*.

(ii) Κάθε K-*διανυσματικός χώρος*, ήτοι κάθε διανυσματικός χώρος οριζόμενος υπεράνω ενός *σώματος* K, είναι προφανώς ένας K-μόδιος.

2.1.5 Παραδείγματα. Έστω R ένας μεταθετικός μη τετριμμένος δακτύλιος.

(i) Εκτός από $\mathbb{Z}$-μόδιος (βλ. 2.1.4 (i)) ο R μπορεί να ιδωθεί αφ’ εαυτού ως R-μόδιος (εάν ως αριθμητικός πολλαπλασιασμός ορισθεί ο πολλαπλασιασμός τού R). Γενικότερα, εάν S είναι ένας μη τετριμμένος υποδακτύλιος τού R, τότε ο R μπορεί (κατ’ αναλογίαν) να ιδωθεί ως S-μόδιος.

(ii) Εάν I είναι ένα ιδεώδες τού R, τότε ο πηλικοδακτύλιος R/I καθίσταται R-μόδιος μέσω τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού:

$$R \times R/I \ni (r, a+I) \longmapsto ra + I \in R/I.$$

[4]Εν προκειμένω, ως $\mathbb{Z}$ συμβολίζεται ο δακτύλιος των ακεραίων αριθμών ως προς τις *συνήθεις* πράξεις προσθέσεως και πολλαπλασιασμού.

(iii) Εάν $f : R \longrightarrow R'$ είναι ένας ομομορφισμός μεταθετικών δακτυλίων (όπου $1_{R'} \neq 0_{R'}$), τότε ο R' καθίσταται R-μόδιος μέσω τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού:

$$R \times R' \ni (r, r') \longmapsto f(r)r' \in R'.$$

(iv) Γενικότερα, εάν $f : R \longrightarrow R'$ είναι ένας ομομορφισμός μεταθετικών δακτυλίων (όπου $1_{R'} \neq 0_{R'}$) και N ένας R'-μόδιος, τότε ο N μπορεί να ιδωθεί *και* ως R-μόδιος με (την ίδια πρόσθεση και) αριθμητικό πολλαπλασιασμό

$$R \times N \ni (r, x) \longmapsto f(r)x \in N.$$

(v) Εάν $m, n \in \mathbb{N}$, τότε η αβελιανή ομάδα $(\mathrm{Mat}_{m\times n}(R), +)$ των $(m \times n)$-πινάκων με εγγραφές ειλημμένες από τον R καθίσταται R-μόδιος μέσω τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού:

$$R \times \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \ni (r, (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}) \longmapsto (ra_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R).$$

(vi) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Η αβελιανή ομάδα $(R^n, +)$, όπου

$$R^n := \{ (r_1, \ldots, r_n) | \, r_i \in R, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

(με την κατά συντεταγμένες πρόσθεση), καθίσταται R-μόδιος μέσω τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού:

$$R \times R^n \ni (r, (r_1, \ldots, r_n)) \longmapsto (rr_1, \ldots, rr_n) \in R^n.$$

(vii) Παρομοίως, εάν $n \in \mathbb{N}$ και M είναι ένας R-μόδιος, τότε το

$$M^n := \{ (x_1, \ldots, x_n) | \, x_i \in M, \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\},$$

μπορεί να ιδωθεί ως R-μόδιος ως προς τις συνήθεις κατά συντεταγμένες πράξεις προσθέσεως και αριθμητικού πολλαπλασιασμού.

(viii) Εάν M είναι ένας R-μόδιος και $\mathscr{X}$ τυχόν μη κενό σύνολο, τότε το σύνολο

$$M^{\mathscr{X}} := \text{ΑΠ}(\mathscr{X}, M) := \{\text{απεικονίσεις } f : \mathscr{X} \longrightarrow M\}$$

καθίσταται R-μόδιος μέσω των πράξεων:

$$\begin{aligned} M^{\mathscr{X}} \times M^{\mathscr{X}} &\ni (f, g) \longmapsto f + g \in M^{\mathscr{X}}, \\ R \times M^{\mathscr{X}} &\ni (r, f) \longmapsto rf \in M^{\mathscr{X}}, \end{aligned}$$

όπου $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, $(rf)(x) := rf(x)$, $\forall x \in \mathscr{X}$ και $\forall r \in R$.

2.1.6 Ορισμός. Ένα μη κενό υποσύνολο U (τού υποκειμένου συνόλου) ενός R-μοδίου M καλείται **υπομόδιος τού** M όταν το U καθίσταται αφ' εαυτού μόδιος ως προς τους περιορισμούς $+|_{U\times U}$ και $\cdot|_{R\times U}$ των πράξεων τής προσθέσεως "+" και τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού "·" με τις οποίες είναι εφοδιασμένο το M ή, ισοδυνάμως, όταν για οιαδήποτε $u_1, u_2, u \in U$ και $r \in R$,

$$u_1 - u_2 \in U \ \text{ και } \ ru \in U.$$

2.1.7 Πρόταση. *Ένα μη κενό υποσύνολο U ενός R-μοδίου M είναι υπομόδιος αυτού εάν και μόνον εάν*

$$r_1u_1 + r_2u_2 \in U, \ \forall (r_1, r_2) \in R \times R \ \text{ και } \ \forall (u_1, u_2) \in U \times U. \tag{2.1}$$

Απόδειξη. Εάν το U είναι υπομόδιος τού M, τότε για κάθε $(r_1, r_2) \in R \times R$ και κάθε $(u_1, u_2) \in U \times U$ έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} r_1u_1 \in U \\ -r_2u_2 = (-r_2)u_2 \in U \end{array}\right\} \Rightarrow r_1u_1 - (-r_2u_2) = r_1u_1 + r_2u_2 \in U.$$

Και αντιστρόφως· εάν ικανοποιείται η συνθήκη (2.1), τότε θέτοντας $r_1 = 1_R$ και $r_2 = -1_R$ συμπεραίνουμε ότι $u_1 - u_2 \in U$, ενώ θέτοντας $r = r_1$, $u = u_1$, $r_2 = 0_R$, συμπεραίνουμε ότι $ru \in U$. Άρα το U είναι όντως ένας υπομόδιος τού M. □

2.1.8 Παραδείγματα. (i) Οι υπομόδιοι μιας αβελιανής ομάδας $(G, +)$ (με τη δομή τού $\mathbb{Z}$-μοδίου, βλ. 2.1.4 (i)) είναι ακριβώς οι υποομάδες αυτής.

(ii) Οι υπομόδιοι ενός K-διανυσματικού χώρου (βλ. 2.1.4 (ii)) δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι γραμμικοί υπόχωροι αυτού.

2.1.9 Παραδείγματα. Έστω R ένας μεταθετικός μη τετριμμένος δακτύλιος.

(i) Εάν ο R θεωρηθεί αφ' εαυτού ως R-μόδιος (βλ. 2.1.5 (i)), τότε οι υπομόδιοι αυτού είναι ακριβώς τα ιδεώδη του.

(ii) Εάν M είναι ένας R-μόδιος, τότε τόσον ο ίδιος ο M όσον και τα σύνολα

$$Rx := \{rx | \, r \in R\}, \ \ x \in M,$$

αποτελούν υπομοδίους τού M. (Ιδιαιτέρως, ο $R0_M = \{0_M\}$ καλείται **τετριμμένος υπομόδιος** τού M.)

(iii) Εάν M είναι ένας R-μόδιος και I ένα ιδεώδες τού R, τότε το

$$IM := \left\{ \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \,\middle|\, r_j \in I, \ x_j \in M, \ \forall j \in \{1, ..., k\}, \ k \in \mathbb{N} \right\}$$

αποτελεί έναν υπομόδιο τού M.

(iv) Εάν M είναι ένας R-μόδιος, $\mathscr{X}$ τυχόν μη κενό σύνολο και $f \in M^{\mathscr{X}}$, τότε το σύνολο $\operatorname{supp}(f) := \{x \in \mathscr{X} \,|\, f(x) \neq 0_M\}$ καλείται **φορέας** τής f. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι το[5]

$$M^{(\mathscr{X})} := \left\{ f \in M^{\mathscr{X}} \,\middle|\, \operatorname{card}(\operatorname{supp}(f)) < \infty \right\}$$

είναι ένας υπομόδιος τού R-μοδίου $M^{\mathscr{X}}$. (Βλ. 2.1.5 (viii).) Ειδική περίπτωση αυτού (όταν $M = R$ και $\mathscr{X} = \mathbb{N}_0$) αποτελεί ο *πολυωνυμικός δακτύλιος* $R[\mathsf{X}] := R^{(\mathbb{N}_0)}$ μίας απροσδιορίστου X (με τους συντελεστές καθενός εκ των στοιχείων του ειλημμένους από τον R και $\mathsf{X} := (0_R, 1_R, 0_R, 0_R, \ldots)$).

[5] Ως $\operatorname{card}(A)$ συμβολίζεται ο *πληθικός αριθμός* οιουδήποτε συνόλου A.

2.1.10 Πρόταση. *Εάν $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι μια οικογένεια υπομοδίων ενός R-μοδίου M, τότε η τομή των μελών της $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ είναι υπομόδιος τού M.*

Απόδειξη. Επειδή $0_M \in U_\lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$, έχουμε $0_M \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, οπότε η τομή αυτή δεν είναι κενή. Για κάθε $(r_1, r_2) \in R \times R$ και κάθε $(u_1, u_2) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \times \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$,

$$[u_1, u_2 \in U_\lambda,\ \forall \lambda \in \Lambda] \Rightarrow [r_1u_1 + r_2u_2 \in U_\lambda,\ \forall \lambda \in \Lambda] \Rightarrow r_1u_1 + r_2u_2 \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda,$$

οπότε η τομή $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ αποτελεί όντως έναν υπομόδιο τού M. (Βλ. 2.1.7.) □

2.1.11 Ορισμός. Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $\mathscr{X} \subseteq M$ τυχόν υποσύνολο (τού κενού μη εξαιρουμένου). Κατά την πρόταση 2.1.10 το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{Lin}_R(\mathscr{X}) := \bigcap \{U \mid U \text{ υπομόδιος τού } M \text{ με } \mathscr{X} \subseteq U\}}$$

είναι ένας υπομόδιος τού M και καλείται **γραμμική θήκη** ή **γραμμικό περίβλημα τού $\mathscr{X}$ εντός τού M** ή **ο υπομόδιος τού M ο παραγόμενος από το $\mathscr{X}$**. Προφανώς, ο $\mathrm{Lin}_R(\mathscr{X})$ είναι *ο ελάχιστος υπομόδιος τού M* (ως προς τον συνολοθεωρητικό εγκλεισμό) *που περιέχει το $\mathscr{X}$*.

2.1.12 Ορισμός. Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $\varnothing \neq \mathscr{X} \subseteq M$. Λέμε ότι ένα στοιχείο $y \in M$ είναι **(R-)γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τού $\mathscr{X}$** όταν υπάρχουν (πεπερασμένου πλήθους) στοιχεία $x_1, ..., x_k$ τού $\mathscr{X}$ και $r_1, ..., r_k \in R$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$y = r_1x_1 + \cdots + r_kx_k.$$

Συμβολισμός: $\mathrm{L.C.}_R(\mathscr{X}) := \{$όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί στοιχείων τού $\mathscr{X}\}$.

2.1.13 Πρόταση. *Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $\mathscr{X} \subseteq M$ τυχόν υποσύνολο. Τότε*

$$\mathrm{Lin}_R(\mathscr{X}) = \begin{cases} \{0_M\}, & \text{όταν } \mathscr{X} = \varnothing, \\ \mathrm{L.C.}_R(\mathscr{X}), & \text{όταν } \mathscr{X} \neq \varnothing. \end{cases}$$

Απόδειξη. Όταν $\mathscr{X} = \varnothing$ είναι προφανές ότι ο ελάχιστος υπομόδιος που περιέχει το $\varnothing$ είναι ο τετριμμένος υπομόδιος $\{0_M\}$ τού M. Έστω ότι $\mathscr{X} \neq \varnothing$. Εν τοιαύτη περιπτώσει, εάν $r, r' \in R$ και

$$y = \sum_{j=1}^{k} s_jx_j,\ y' = \sum_{\rho=1}^{l} s'_\rho x'_\rho \in \mathrm{L.C.}_R(\mathscr{X}),$$

όπου $x_1, ..., x_k, x'_1, ..., x'_l \in \mathscr{X}$ και $s_1, ..., s_k, s'_1, ..., s'_l \in R$, τότε

$$ry + r'y' = \sum_{j=1}^{k} (rs_j)x_j + \sum_{\rho=1}^{l} (r's'_\rho)x'_\rho \in \mathrm{L.C.}_R(\mathscr{X}),$$

οπότε το (εξ υποθέσεως μη κενό) σύνολο $\mathrm{L.C.}_R(\mathscr{X})$ είναι υπομόδιος τού M. (Βλ. πρόταση 2.1.7.) Επιπροσθέτως, $\mathscr{X} \subseteq \mathrm{L.C.}_R(\mathscr{X})$ (διότι $1_R x = x \in \mathrm{L.C.}_R(\mathscr{X})$ για κάθε $x \in \mathscr{X}$). Επειδή ο $\mathrm{L.C.}_R(\mathscr{X})$ είναι ο ελάχιστος υπομόδιος που περιέχει το $\mathscr{X}$, $\mathrm{Lin}_R(\mathscr{X}) \subseteq \mathrm{L.C.}_R(\mathscr{X})$. Από την άλλη μεριά, είναι πρόδηλο ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τού συνόλου $\mathscr{X}$ ανήκει σε κάθε υπομόδιο που περιέχει το $\mathscr{X}$, οπότε ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός: $\mathrm{L.C.}_R(\mathscr{X}) \subseteq \mathrm{Lin}_R(\mathscr{X})$. □

2.1.14 Ορισμός. Λέμε ότι ένας υπομόδιος U ενός R-μοδίου M **παράγεται από ένα υποσύνολο** $\mathscr{X} \subseteq U$ ή ότι το $\mathscr{X}$ είναι ένα **σύστημα γεννητόρων** ή **παράγον υποσύνολο τού** U όταν $\mathrm{Lin}_R(\mathscr{X}) = U$. Εάν ο ίδιος ο M διαθέτει κάποιο πεπερασμένο σύστημα γεννητόρων, τότε καλείται **πεπερασμένως παραγόμενος**. Εάν ο M είναι δυνατόν να παραχθεί από κάποιο μονοσύνολο $\{x\}$, $x \in M$, τότε λέμε ότι ο M είναι ένας **κυκλικός** R**-μόδιος**. (Εν τοιαύτη περιπτώσει, $M = Rx$.)

2.1.15 Παραδείγματα. (i) Εάν M είναι ένας R-μόδιος, τότε[6]

$$\{0_M\} = \mathrm{Lin}_R(\varnothing) = \mathrm{Lin}_R(\{0_M\}).$$

(ii) Εάν M είναι ένας R-μόδιος και I ένα ιδεώδες τού R, τότε ο υπομόδιος IM (βλ. 2.1.9 (iii)) είναι ο υπομόδιος $\mathrm{Lin}_R(\{rx \mid r \in I,\ x \in M\})$ τού M.

2.1.16 Πρόταση. *Εάν υποθέσουμε ότι $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι μια οικογένεια υπομοδίων ενός R-μοδίου M με $\Lambda \neq \varnothing$ και $\mathfrak{E}(\Lambda) := \{\Lambda' \mid \varnothing \neq \Lambda' \subseteq \Lambda : \mathrm{card}(\Lambda') < \infty\}$, τότε ο υπομόδιος $\mathrm{Lin}_R(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda)$ τού M απαρτίζεται από όλα τα (πεπερασμένα) αθροίσματα τής μορφής*

$$\sum_{\nu\in\Lambda'} x_\nu, \quad \text{όπου} \quad \Lambda' \in \mathfrak{E}(\Lambda) \ \text{ και } \ x_\nu \in U_\nu,\ \forall \nu \in \Lambda'. \tag{2.2}$$

Απόδειξη. Κάθε γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τής ενώσεως $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ των μελών τής θεωρούμενης οικογενείας υπομοδίων είναι ακριβώς τής μορφής (2.2). Ως εκ τούτου, ο ισχυρισμός είναι αληθής δυνάμει τής προτάσεως 2.1.13. □

2.1.17 Ορισμός. Ο ανωτέρω υπομόδιος $\mathrm{Lin}_R(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda)$ καλείται **το άθροισμα** των μελών τής οικογενείας $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ και συμβολίζεται ως $\sum_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Όταν το Λ είναι πεπερασμένο, ας πούμε το $\Lambda = \{1, ..., k\}$ τότε γράφουμε

$$\sum_{j=1}^{k} U_j \ \text{ ή απλώς } \ U_1 + \cdots + U_k.$$

2.1.18 Σημείωση. (i) Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι αυτό το «άθροισμα» έχει τόσον την *προσεταιριστική* όσον και τη *μεταθετική* ιδιότητα, ήτοι ότι

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \sum_{j\in J} \left(\sum_{\lambda\in\Lambda_j} U_\lambda \right)$$

[6] Ως εκ τούτου, *και* ο τετριμμένος υπομόδιος τού M θεωρείται ως *πεπερασμένως παραγόμενος*.

για κάθε οικογένεια $(\Lambda_j)_{j\in J}$ μη κενών υποσυνόλων τού Λ με $\Lambda = \coprod_{j\in J} \Lambda_j$ και

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} U_{\sigma(\lambda)} \text{ για κάθε αμφίρριψη } \ \sigma : \Lambda \longrightarrow \Lambda.$$

(ii) Ιδιαιτέρως, $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = U_j + \sum\limits_{\lambda\in\Lambda\smallsetminus\{j\}} U_\lambda,\ \forall j \in \Lambda.$

2.1.19 Παρατήρηση. *Εν γένει* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subsetneqq \sum_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ και το $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ δεν είναι κατ' ανάγκην υπομόδιος τού M. Επί παραδείγματι, εάν $\Lambda = \{1, 2\}$, τότε για τους υπόχωρους $U_1 := \left\{ (x, 0) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in \mathbb{R}\right\}$, $U_2 := \left\{ (0, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y \in \mathbb{R}\right\}$ τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$ ισχύει $U_1 \cup U_2 \subsetneqq U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$.

2.1.20 Πρόταση. *Εάν U, U', U'' είναι υπομόδιοι ενός R-μοδίου M με $U'' \subseteq U$, τότε*

$$U \cap (U' + U'') = (U \cap U') + U''.$$

Απόδειξη. Επειδή $U'' \subseteq U$, έχουμε $U'' + U = U$. Επιπροσθέτως,

$$\left.\begin{array}{r} (U \cap U') + U'' \subseteq U + U'' \\ (U \cap U') + U'' \subseteq U' + U'' \end{array}\right\} \Rightarrow (U \cap U') + U'' \subseteq (U \cap U') \cap (U' + U''),$$

όπου $(U \cap U') \cap (U' + U'') = U \cap (U' + U'')$. Για την απόδειξη τού αντιστρόφου εγκλεισμού θεωρούμε τυχόν $x \in U \cap (U' + U'')$. Τότε $x \in U$ και $x = y + z$ για κάποια $y \in U'$ και $z \in U''$. Επειδή $U'' \subseteq U$, έχουμε $z \in U$, οπότε $y = x - z \in U$ και, κατ' επέκταση, $y \in U \cap U'$, απ' όπου έπεται ότι $x = y + z \in (U \cap U') + U''$. □

2.2 ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΟΙ R-ΜΟΔΙΩΝ

Ομομορφισμοί μεταξύ R-μοδίων ονομάζονται εκείνες οι απεικονίσεις που είναι συμβατές με τις πράξεις ενός εκάστου.

2.2.1 Ορισμός. Εάν M, N είναι R-μόδιοι, τότε μια απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$ καλείται **ομομορφισμός (R-μοδίων)** ή **R-γραμμική απεικόνιση** όταν ισχύουν τα ακόλουθα[7]:

(i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),\ \forall (x_1, x_2) \in M \times M.$

(ii) $f(rx) = rf(x),\ \forall (r, x) \in R \times M.$

Το σύνολο όλων των ομομορφισμών από τον M στον N συμβολίζεται ως εξής:

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(M, N) := \left\{ f \in N^M \middle| f \text{ ομομορφισμός } R\text{-μοδίων}\right\}.} \tag{2.3}$$

Ως **πυρήνας** και **εικόνα** ενός $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ ορίζονται τα υποσύνολα

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{0_N\}) = \{x \in M \,|\, f(x) = 0_N\} \subseteq M} \tag{2.4}$$

και

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) := f(M) = \{f(x)\,|x \in M\} \subseteq N,} \tag{2.5}$$

αντιστοίχως.

2.2.2 Πρόταση. *Για κάθε* $f \in \operatorname{Hom}_R(M,N)$ *ισχύουν τα εξής*:
(i) $f(0_M) = 0_N$.
(ii) $f(-x) = -f(x), \forall x \in M$.

Απόδειξη. (i) Δυνάμει των 2.1.2 (i) και 2.2.1 (ii), $f(0_R \cdot 0_M) = 0_R \cdot f(0_M) = 0_N$.
(ii) Έστω τυχόν $x \in M$. Σύμφωνα με το (i) και το 2.2.1 (i),

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0_M) = 0_N,$$

οπότε $f(-x) = -f(x)$. □

2.2.3 Πρόταση. *Δοθέντων δυο R-μοδίων M, N και μιας απεικονίσεως $f \in N^M$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:
(i) $f \in \operatorname{Hom}_R(M,N)$.
(ii) *Για οιαδήποτε* $(x_1, x_2) \in M \times M$ *και* $(r_1, r_2) \in R \times R$ *ισχύει η ισότητα*

$$f(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1f(x_1) + r_2f(x_2). \tag{2.6}$$

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν η απεικόνιση f είναι ομομορφισμός, τότε για οιαδήποτε ζεύγη $(x_1, x_2) \in M \times M$ και $(r_1, r_2) \in R \times R$ τα 2.2.1 (i) και (ii) δίδουν

$$f(r_1x_1 + r_2x_2) = f(r_1x_1) + f(r_2x_2) = r_1f(x_1) + r_2f(x_2).$$

(ii)⇒(i) Εφαρμόζοντας την (2.6) για $r_1 = r_2 = 1_R$ λαμβάνουμε την ισότητα 2.2.1 (i). Εξάλλου, η (2.6) για $x_1 = x$ και $x_2 = 0_M$ δίδει την ισότητα 2.2.1 (ii). □

2.2.4 Πρόταση. *Δοθέντων δυο R-μοδίων M, N και ενός πεπερασμένου υποσυνόλου* $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq M$, *ισχύει η ακόλουθη ισότητα για οιονδήποτε* $f \in \operatorname{Hom}_R(M,N)$ *και για οιαδήποτε* $r_1, \ldots, r_k \in R$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} r_ix_i\right) = \sum_{i=1}^{k} r_if(x_i). \tag{2.7}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή ως προς το πλήθος k των προσθετέων. Για $k = 1$ η (2.7) έπεται άμεσα από το 2.2.1 (ii). Για $k = 2$ η (2.7) είναι αληθής, διότι συμπίπτει με την (2.6). Υποθέτοντας ότι για οιονδήποτε φυσικό αριθμό $k \geqslant 3$ η (2.7) είναι αληθής για $k-1$ προσθετέους, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k} r_ix_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{k-1} r_ix_i + r_kx_k\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{k-1} r_ix_i\right) + f(r_kx_k) = \sum_{i=1}^{k-1} r_if(x_i) + r_kf(x_k) = \sum_{i=1}^{k} r_if(x_i), \end{aligned}$$

[7] Προσοχή! Παρά το γεγονός ότι χρησιμοποιούμε ίδιο συμβολισμό για τις πράξεις επί των M και N, αυτές ενδέχεται να είναι διαφορετικές!

όπου η δεύτερη ισότητα έπεται από το 2.2.1 (i) και η τρίτη από την επαγωγική μας υπόθεση. Άρα η (2.7) είναι αληθής και για k προσθετέους. □

▸ **Εικόνες και αντίστροφες εικόνες υπομοδίων μέσω ομομορφισμών**. Οι κύριες ιδιότητες αυτών δίδονται στις προτάσεις 2.2.5 και 2.2.6.

2.2.5 Πρόταση. *Εάν M, N είναι R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(W)$ οιουδήποτε υπομοδίου W τού N μέσω τού f αποτελεί υπομόδιο τού M.*

(ii) *Ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f)$ τού f (βλ. (2.4)) είναι ένας υπομόδιος τού M.*

(iii) *Η εικόνα $f(U) := \{f(u) \,|\, u \in U\}$ οιουδήποτε υπομοδίου U τού M μέσω τού f αποτελεί υπομόδιο τού N.*

(iv) *Η εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ τού f (βλ. (2.5)) είναι ένας υπομόδιος τού N.*

Απόδειξη. (i) Έστω W τυχών υπομόδιος τού N. Για κάθε ζεύγος $(r,s) \in R \times R$ και για κάθε ζεύγος $(x_1, x_2) \in f^{-1}(W) \times f^{-1}(W)$ έχουμε $f(x_1), f(x_2) \in W$ και

$$f(rx_1 + sx_2) = rf(x_1) + sf(x_2) \in W$$

(λόγω τής προτάσεως 2.2.3), οπότε $rx_1 + sx_2 \in f^{-1}(W)$. Αυτό (δυνάμει τής προτάσεως 2.1.7) σημαίνει ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(W)$ τού W μέσω τού ομομορφισμού f αποτελεί υπομόδιο τού M.

(ii) Αρκεί να εφαρμοσθεί το (i) στην ειδική περίπτωση όπου $W = \{0_N\}$.

(iii) Έστω U τυχών υπομόδιος τού M. Για κάθε ζεύγος $(r,s) \in R \times R$ και για κάθε ζεύγος $(w_1, w_2) \in f(U) \times f(U)$ υπάρχουν στοιχεία $u_1, u_2 \in U$ με $f(u_1) = w_1$, $f(u_2) = w_2$, και $ru_1 + su_2 \in U$ (διότι το U είναι υπομόδιος τού M, βλ. 2.1.7). Επομένως,

$$rw_1 + sw_2 = rf(u_1) + sf(u_2) = f(ru_1 + su_2) \in f(U)$$

και, ως εκ τούτου, η εικόνα $f(U)$ τού U μέσω τού ομομορφισμού f αποτελεί υπομόδιο τού N (λόγω τής προτάσεως 2.2.3).

(iv) Αρκεί να εφαρμοσθεί το (iii) στην ειδική περίπτωση όπου $U = M$. □

2.2.6 Πρόταση. *Έστω U ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M και έστω W ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου N. Για κάθε $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ ισχύουν τα εξής:*

(i) $f\left(U \cap f^{-1}(W)\right) = f(U) \cap W$.

(ii) $f\left(f^{-1}(W)\right) = \mathrm{Im}(f) \cap W$.

(iii) $f^{-1}(W + f(U)) = f^{-1}(W) + U$.

(iv) $f^{-1}(f(U)) = \mathrm{Ker}(f) + U$.

Απόδειξη. (i) Για κάθε $x \in f^{-1}(W)$ έχουμε $f(x) \in W$, οπότε $f\left(f^{-1}(W)\right) \subseteq W$. Επειδή οι σχέσεις εγκλεισμού παραμένουν εν ισχύ κατόπιν εφαρμογής τής απεικονίσεως f, έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} f\left(U \cap f^{-1}(W)\right) \subseteq f(U) \\ f\left(U \cap f^{-1}(W)\right) \subseteq f\left(f^{-1}(W)\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow f\left(U \cap f^{-1}(W)\right) \subseteq f(U) \cap W.$$

Έστω τώρα τυχόν $w \in f(U) \cap W$. Προφανώς, $w \in W$ και $w = f(u)$ για κάποιο στοιχείο $u \in U$. Επειδή $f(u) \in W$, έχουμε $w \in f\left(U \cap f^{-1}(W)\right)$, οπότε ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $f(U) \cap W \subseteq f\left(U \cap f^{-1}(W)\right)$.

(ii) Αρκεί να εφαρμοσθεί το (i) στην ειδική περίπτωση όπου $U = M$.

(iii) Για κάθε $u \in U$ έχουμε $f(u) \in f(U)$. Κατά συνέπειαν, $U \subseteq f^{-1}(f(U))$. Από το (ii) και από το γεγονός ότι οι σχέσεις εγκλεισμού παραμένουν εν ισχύ κατόπιν θεωρήσεως αντιστρόφων εικόνων προκύπτει ότι

$$f^{-1}(W) + U \subseteq f^{-1}\left(f(f^{-1}(W) + U)\right) = f^{-1}\left(f(f^{-1}(W)) + f(U)\right) \subseteq f^{-1}\left(W + f(U)\right).$$

Έστω τώρα $y \in f^{-1}(W + f(U))$. Επειδή $f(y) \in W + f(U)$, υπάρχουν $w \in W$ και $u \in U$, τέτοια ώστε να ισχύει $f(y) = w + f(u)$ (βλ. πρόταση 2.1.16). Επομένως,

$$f(y + (-u)) = w \in W \Rightarrow y + (-u) \in f^{-1}(\{w\}) \subseteq f^{-1}(W) \Rightarrow y \in f^{-1}(W) + U,$$

οπότε ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $f^{-1}(W + f(U)) \subseteq f^{-1}(W) + U$.

(iv) Αρκεί να εφαρμοσθεί το (iii) στην ειδική περίπτωση όπου $W = \{0_N\}$. □

2.2.7 Πρόταση. *Εάν M, N είναι R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν $\mathscr{E}$ είναι ένα σύστημα γεννητόρων τού M, τότε η εικόνα $f(\mathscr{E})$ αυτού αποτελεί ένα σύστημα γεννητόρων τού R-μοδίου $\mathrm{Im}(f)$.*

(ii) *Εάν $\mathscr{E}'$ είναι ένα σύστημα γεννητόρων τού πυρήνα $\mathrm{Ker}(f)$ τού f και $\mathscr{E}'' \subseteq M$ τέτοιο, ώστε $\mathrm{Lin}_R(f(\mathscr{E}'')) = \mathrm{Im}(f)$, τότε η ένωση $\mathscr{E}' \cup \mathscr{E}''$ αποτελεί ένα σύστημα γεννητόρων τού M.*

Απόδειξη. (i) Έστω τυχόν $x \in M$. Εξ υποθέσεως, υπάρχουν στοιχεία $x_1, ..., x_k$ τού $\mathscr{E}$ και $r_1, ..., r_k \in R$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$x = \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \Rightarrow f(x) \underset{(2.7)}{=} \sum_{j=1}^{k} r_j \underbrace{f(x_j)}_{\in f(\mathscr{E})} \in \mathrm{Im}(f),$$

οπότε $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Lin}_R(f(\mathscr{E}))$. Εξάλλου, $f(\mathscr{E}) \subseteq \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \mathrm{Lin}_R(f(\mathscr{E})) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

(ii) Έστω τυχόν $x \in M$. Εξ υποθέσεως, υπάρχουν $x_1, ..., x_\rho$ τού $\mathscr{E}''$ και $r_1, ..., r_\rho \in R$, τέτοια ώστε $f(x) = \sum_{j=1}^{\rho} r_j f(x_j)$. Θέτοντας $x' := \sum_{j=1}^{\rho} r_j x_j$ λαμβάνουμε

$$f(x - x') = 0_N \Rightarrow x - x' \in \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Lin}_R(\mathscr{E}'),$$

οπότε υπάρχουν $x_{\rho+1}, ..., x_l \in \mathscr{E}'$ και $r_{\rho+1}, ..., r_l \in R$ με

$$x - x' = \sum_{j=\rho+1}^{l} r_j x_j \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{l} r_j x_j,$$

όπου $x_1, ..., x_l \in \mathscr{E}' \cup \mathscr{E}''$. Κατά συνέπειαν, $\mathrm{Lin}_R(\mathscr{E}' \cup \mathscr{E}'') = M$. □

2.2.8 Πόρισμα. *Έστω ότι M, N είναι δυο R-μόδιοι και $f : M \longrightarrow N$ ένας επιμορφισμός. Εάν ο M είναι πεπερασμένως παραγόμενος, τότε και ο N είναι πεπερασμένως παραγόμενος.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το (i) τής προτάσεως 2.2.7. □

▸ **Συνθέσεις ομομορφισμών**. Η σύνθεση δυο ομομορφισμών R-μοδίων είναι αφ' εαυτής ομομορφισμός. Η πρόταση 2.2.11 περιγράφει λεπτομερώς το πώς σχετίζεται ο πυρήνας και η εικόνα τής συνθέσεως με την εικόνα τού πρώτου εξ αυτών και με τον πυρήνα τού δεύτερου.

2.2.9 Πρόταση. *Εάν M, N, L είναι R-μόδιοι, τότε ισχύει η συνεπαγωγή*

$$[f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \text{ και } g \in \mathrm{Hom}_R(N, L)] \Longrightarrow g \circ f \in \mathrm{Hom}_R(M, L).$$

Απόδειξη. Για οιαδήποτε $(x_1, x_2) \in M \times M$ και $(r_1, r_2) \in R \times R$ έχουμε

$$\begin{aligned}(g \circ f)(r_1x_1 + r_2x_2) &= g(f(r_1x_1 + r_2x_2)) = g(r_1f(x_1) + r_2f(x_2)) \\ &= r_1g(f(x_1)) + r_2g(f(x_2)) = r_1(g \circ f)(x_1) + r_2(g \circ f)(x_2),\end{aligned}$$

οπότε $g \circ f \in \mathrm{Hom}_R(M, L)$ λόγω τής προτάσεως 2.2.3. □

2.2.10 Πρόταση. *Εάν M, N, L είναι R-μόδιοι, τότε η σύνθεση ομομορφισμών*

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \times \mathrm{Hom}_R(N, L) \ni (f, g) \longmapsto g \circ f \in \mathrm{Hom}_R(M, L)$$

έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$, $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$,

(ii) $g \circ (rf) = r\,(g \circ f) = (rg) \circ f$,

για οιοδήποτε $r \in R$ και $f, f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_R(M, N), g, g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_R(N, L)$.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τους ορισμούς. □

2.2.11 Πρόταση. *Εάν M, N, L είναι R-μόδιοι και*

$$f \in \mathrm{Hom}_R(M, N), \quad g \in \mathrm{Hom}_R(N, L),$$

τότε

$$\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) = f(\mathrm{Ker}\,(g \circ f)) \text{ και } \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) = g^{-1}\,(\mathrm{Im}(g \circ f))\,.$$

Απόδειξη. (i) Έστω τυχόν $y \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$. Εξ ορισμού, υπάρχει $x \in M$, τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Επειδή $g(y) = 0_L$, έχουμε $(g \circ f)(x) = 0_L$, οπότε $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$ και $y \in f(\mathrm{Ker}(g \circ f))$. Και αντιστρόφως· εάν $w \in f(\mathrm{Ker}(g \circ f))$, τότε $w \in \mathrm{Im}\,(f)$ και $w = f(u)$ για κάποιο $u \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, οπότε

$$0_L = (g \circ f)(u) = g(f(u)) = g(w) \Rightarrow w \in \mathrm{Ker}\,(g)\,.$$

(ii) Έστω τυχόν $y \in \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}(g)$. Εξ ορισμού, $y = y_1 + y_2$ για κάποια $y_1 \in \mathrm{Im}\,(f)$ και $y_2 \in \mathrm{Ker}(g)$. Επομένως, $y_1 = f(x)$ για κάποιο στοιχείο $x \in M$ και $g(y_2) = 0_L$, οπότε$g(y) = g(y_1 + y_2) = g(y_1) + g(y_2) = g(f(x)) \in \mathrm{Im}(g \circ f) \Rightarrow y \in g^{-1}(\mathrm{Im}(g \circ f))$. Και αντιστρόφως· εάν $w \in g^{-1}(\mathrm{Im}(g \circ f))$, τότε $g(w) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, οπότε έχουμε $g(w) = g(f(u))$ για κάποιο $u \in M$,

$$g(w - f(u)) = 0_L \Rightarrow w - f(u) \in \mathrm{Ker}\,(g)$$

και $w = f(u) + (w - f(u)) \in \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}(g)$. □

2.2.12 Ορισμός. Έστω $f : M \to N$ ένας ομομορφισμός R-μοδίων. Ο f καλείται[8]

μονομορφισμός	$\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$	η απεικόνιση f είναι ενριπτική,
επιμορφισμός	$\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$	η απεικόνιση f είναι επιρριπτική,
ισομορφισμός	$\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$	η απεικόνιση f είναι αμφιρριπτική,
ενδομορφισμός (τού M)	$\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$	$M = N$ (με τις ίδιες πράξεις),
αυτομορφισμός (τού M)	$\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$	$M = N$ και η f είναι ισομορφισμός.

2.2.13 Πρόταση. *Εάν M, N είναι R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:

(i) *Ο f είναι μονομορφισμός.*

(ii) $\mathrm{Ker}(f) = \{0_M\}$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν ο $f : M \longrightarrow N$ είναι μονομορφισμός, τότε για κάθε στοιχείο $x \in \mathrm{Ker}(f)$ έχουμε

$$f(x) = 0_N = f(0_M) \Rightarrow x = 0_M,$$

οπότε $\mathrm{Ker}(f) = \{0_M\}$.

(ii)⇒(i) Εάν $\mathrm{Ker}(f) = \{0_M\}$ και για δυο στοιχεία $x, x' \in M$ ισχύει $f(x) = f(x')$, τότε

$$\begin{aligned} 0_N &= f(x) + (-f(x')) = f(x) + f(-x') = f(x + (-x')) \\ &\Longrightarrow x - x' = x + (-x') \in \mathrm{Ker}\,(f) = \{0_M\}, \end{aligned}$$

οπότε $x = x'$, απ' όπου έπεται ότι ο $f : M \longrightarrow N$ είναι μονομορφισμός. □

2.2.14 Παραδείγματα. Έστω R τυχών μεταθετικός μη τετριμμένος δακτύλιος.

(i) Για οιουσδήποτε R-μοδίους M και N η *μηδενική απεικόνιση* $0 \in N^M$,

$$0 : M \longrightarrow N,\;\; x \longmapsto 0(x) := 0_N, \tag{2.8}$$

είναι (προφανώς) ομομορφισμός, **ο μηδενικός ομομορφισμός**.

(ii) Για οιονδήποτε R-μόδιο M η **ταυτοτική απεικόνιση**

$$\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M,\; x \longmapsto \mathrm{id}_M(x) := x,$$

είναι ένας *αυτομορφισμός* τού M. Οι **ομοθετικές απεικονίσεις**

$$f_r : M \longrightarrow M,\; r \longmapsto f_r(x) := rx, \tag{2.9}$$

[8] Ενίοτε, όταν επιθυμούμε *να τονίσουμε* ότι ένας τέτοιος $f : M \to N$ είναι μονομορφισμός (και αντιστοίχως, επιμορφισμός) γράφουμε $f : M \hookrightarrow N$ (και αντιστοίχως, $f : M \twoheadrightarrow N$).

για κάποιο $r \in R$, είναι *ομομορφισμοί*. ($f_{0_R} = 0$, $f_{1_R} = \mathrm{id}_M$.) Επίσης, εάν ο U είναι ένας υπομόδιος τού M, η **συνήθης ένθεση**[9]

$$\mathrm{in}_{U,M} : U \hookrightarrow M,\; x \longmapsto \mathrm{in}_{U,M}(x) := x, \tag{2.10}$$

τού U **στον** M είναι ένας *μονομορφισμός*.

(iii) Εάν M, N είναι R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, τότε έχουμε $f = \mathrm{in}_{\mathrm{Im}(f),N} \circ \check{f}$, όπου

$$\check{f} : M \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(f),\; x \longmapsto \check{f}(x) := f(x) \tag{2.11}$$

ο επιμορφισμός ο επαγόμενος μέσω τού f.

(iv) Η απεικόνιση

$$f : R^{\mathbb{N}_0} \longrightarrow R^{\mathbb{N}_0},\;\; (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \longmapsto (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\,,$$

όπου $b_0 := 0_K$, $b_n := a_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, είναι μονομορφισμός αλλά *δεν είναι* επιμορφισμός.

(v) Η απεικόνιση

$$f : R^{\mathbb{N}_0} \longrightarrow R^{\mathbb{N}_0},\;\; (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \longmapsto (c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\,,$$

όπου $c_n := a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, είναι επιμορφισμός αλλά *δεν είναι* μονομορφισμός.

Οι προτάσεις 2.2.15 και 2.2.16 έπονται άμεσα από τις γνωστές ιδιότητες των ενριπτικών, επιρριπτικών και αμφιρριπτικών απεικονίσεων μεταξύ συνόλων.

2.2.15 Πρόταση. *Έστω ότι οι M, N, L είναι R-μόδιοι και*

$$f \in \mathrm{Hom}_R(M,N),\;\; g \in \mathrm{Hom}_R(N,L).$$

Τότε για τον $g \circ f \in \mathrm{Hom}_R(M,L)$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) *Εάν οι f και g είναι μονομορφισμοί, τότε και ο $g \circ f$ είναι μονομορφισμός.*

(ii) *Εάν οι f και g είναι επιμορφισμοί, τότε και ο $g \circ f$ είναι επιμορφισμός.*

(iii) *Εάν οι f και g είναι ισομορφισμοί, τότε και ο $g \circ f$ είναι ισομορφισμός.*

(iv) *Εάν ο $g \circ f$ είναι μονομορφισμός, τότε ο f είναι μονομορφισμός.*

(v) *Εάν ο $g \circ f$ είναι επιμορφισμός, τότε ο g είναι επιμορφισμός.*

(vi) *Εάν ο $g \circ f$ είναι ισομορφισμός, τότε ο f είναι μονομορφισμός και ο g είναι επιμορφισμός.*

2.2.16 Πρόταση. *Εάν M, N είναι R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ ένας ισομορφισμός, τότε και η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : N \longrightarrow M$ είναι ισομορφισμός.*

[9] Αργότερα, αντί τού $\mathrm{in}_{U,M}$ θα χρησιμοποιηθούν και συντομότεροι συμβολισμοί (όπως ι, i, j, ενίοτε και με κάποιους δείκτες, κ.ά.) για τις συνήθεις ενθέσεις υπομοδίων.

2.2.17 Σημείωση. (i) Λέμε ότι δυο R-μόδιοι M και N είναι (μεταξύ τους) **ισόμορφοι** ή ότι ο M είναι **ισόμορφος με τον** N και σημειώνουμε[10]: $M \cong N$ όταν υπάρχει κάποιος ισομορφισμός[11] $f : M \longrightarrow N$.

(ii) Είναι εύκολος ο έλεγχος (μέσω τού (iii) τής προτάσεως 2.2.15 και τής προτάσεως 2.2.16) τού ότι η διμελής σχέση "$\cong$" ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας επί οιουδήποτε συνόλου απαρτιζομένου από R-μοδίους. Οι κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την "$\cong$" ονομάζονται **κλάσεις ισομορφίας**. Δυο R-μόδιοι λογίζονται ως (μοδιοθεωρητικώς) *ταυτιζόμενοι* όταν είναι μεταξύ τους ισόμορφοι, ήτοι όταν ανήκουν στην ίδια κλάση ισομορφίας. Ως εκ τούτου, ο μοδιοθεωρητικός προσδιορισμός μιας οικογενείας R-μοδίων, τα μέλη τής οποίας έχουν μια *ειδική* ιδιότητα, ισοδυναμεί με την *ταξινόμηση* των μελών της *μέχρις ισομορφισμού*[12].

(iii) Ένα *μονοσύνολο* μπορεί να θεωρηθεί κατά έναν και μόνον τρόπο[13] ως μόδιος υπεράνω οιουδήποτε (παγιωμένου) μεταθετικού μη τετριμμένου δακτυλίου R και δυο τέτοια μονοσύνολα είναι μεταξύ τους ισόμορφα (ως R-μόδιοι). Ο *μέχρις ισομορφισμού μονοσημάντως ορισμένος* R-μόδιος με ένα μονοσύνολο ως υποκείμενο σύνολό του ονομάζεται **τετριμμένος R-μόδιος** και θα συμβολίζεται εφεξής απλώς ως[14] $\{0\}$.

▸ **«Συμπληρώσεις» τριγώνων**. Ο ταυτόχρονος χειρισμός πολλών συντιθέμενων ομομορφισμών R-μοδίων τοποθετημένων σε (ενίοτε πολύ μεγάλα) διαγράμματα απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή. Όπως, επίσης, και η εξεύρεση κατάλληλων συνθηκών, υπό τις οποίες διασφαλίζεται *η ύπαρξη* ή *η κατασκευή* ομομορφισμών που «συμπληρώνουν» κάποια *ελλείποντα βέλη* εντός αυτών. Τέτοιου είδους συνθήκες, όπως θα δούμε στα θεωρήματα 2.2.24 και 2.2.25, είναι εκ τής φύσεώς τους *αρκούντως περιοριστικές* ακόμη και στην απλούστερη των περιπτώσεων (ήτοι σε εκείνην ενός *τριγώνου*). Ας γυρίσουμε, όμως, προς στιγμήν, κάπως πιο πίσω, *ξεχνώντας* την αλγεβρική δομή τού R-μοδίου κι ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε απλώς τρία μη κενά σύνολα A, B και C. Ευλόγως τίθενται τα εξής ερωτήματα:

• **Ερώτημα 1**: Εάν δοθούν απεικονίσεις f και g (όπως δείχνονται στο κάτωθι αριστερά ευρισκόμενο διάγραμμα) *εκπορευόμενες από το* A (ήτοι έχουσες ως *πεδίο ορισμού τους* το A), πότε υφίσταται απεικόνιση

$$h : B \longrightarrow C$$

η οποία «συμπληρώνει» (ή «κλείνει») το τρίγωνο το καθοριζόμενο από τα A, B και C (όπως δείχνεται στο κάτωθι δεξιά ευρισκόμενο διάγραμμα);

[10] Κατ' αναλογίαν, το σύμβολο $M \ncong N$ θα δηλοί ότι ο M δεν είναι ισόμορφος με τον N.

[11] Ενίοτε, για να τονίσουμε (π.χ., σε μεταθετικά διαγράμματα και αλλού) ότι ένας ομομορφισμός $f : M \longrightarrow N$ είναι *ισομορφισμός*, γράφουμε $f : M \xrightarrow{\cong} N$.

[12] Η φράση «ταξινόμηση μέχρις ισομορφισμού» ή «με ακρίβεια ισομορφισμού» (up to isomorphism) δηλοί τη «διάκριση (R-μοδίων) με μόνο κριτήριο ταυτίσεως τη διαμεσολάβηση κάποιου ισομορφισμού».

[13] Εν τοιαύτη περιπτώσει, εάν $M = \{x\}$, τότε $x + x := x$ και $rx := x$ για κάθε $r \in R$. (Προφανώς, $0_M = x$.)

[14] Εν προκειμένω, υφίσταται μια διαφορά μεταξύ τού «τετριμμένου R-μοδίου», όπως εισήχθη εδώ, και τού «τετριμμένου υπομοδίου δοθέντος R-μοδίου», όπως είχε εισαχθεί στο εδάφιο 2.1.9 (ii). Ο πρώτος εκφράζει μια *απόλυτη* έννοια (*μέχρις ισομορφισμού*), ενώ ο δεύτερος εκφράζει μια *σχετική* έννοια (παρότι είναι *συνολοθεωρητικώς* μονοσημάντως ορισμένος), αφού είναι -εκ παραλλήλου- απαραίτητη η αναφορά τού R-μοδίου εντός τού οποίου περιέχεται (ως το μονοσύνολο το περιέχον ως στοιχείο του το ουδέτερο στοιχείο τής προσθετικής του ομάδας).

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
B & & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
B \arrow[rr, dashed, "h"'] & {} & C
\end{tikzcd}
$$

• **Ερώτημα 2**: Εάν δοθούν απεικονίσεις f και g (όπως στο κάτωθι αριστερά ευρισκόμενο διάγραμμα) *απολήγουσες στο* A (ήτοι έχουσες ως *πεδίο τιμών τους* το A), πότε υφίσταται απεικόνιση $h : C \longrightarrow B$ η οποία «συμπληρώνει» το τρίγωνο το καθοριζόμενο από τα A, B και C;

$$
\begin{tikzcd}
 & A & \\
B \arrow[ur, "f"] & & C \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
B \arrow[ur, "f"] & {} & C \arrow[ul, "g"'] \arrow[ll, dashed, "h"]
\end{tikzcd}
$$

Οι απαντήσεις περιέχονται στις προτάσεις 2.2.18 και 2.2.19, αντιστοίχως.

2.2.18 Πρόταση. *Εάν A, B, C είναι μη κενά σύνολα και $f : A \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow C$ απεικονίσεις, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) *Υφίσταται μια απεικόνιση $h : B \longrightarrow C$ με $h \circ f = g$.*

(ii) $(\forall (x, y) \in A \times A)\ [f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y)]$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Για οιοδήποτε ζεύγος $(x, y) \in A \times A$ με $f(x) = f(y)$ έχουμε προφανώς $g(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(f(y)) = (h \circ f)(y) = g(y)$.

(ii)⇒(i) Θεωρούμε το σύνολο $\mathscr{G} := \{(y, z) \in \mathrm{Im}(f) \times C \mid \exists x \in A : y = f(x), z = g(x)\}$. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι $\mathscr{G} \neq \varnothing$, διότι για κάθε $x \in A$ έχουμε $(f(x), g(x)) \in \mathscr{G}$. Για οιοδήποτε $y \in \mathrm{Im}(f)$ υπάρχει *ένα και μόνον* $z \in C$, τέτοιο ώστε να ισχύει $(y, z) \in \mathscr{G}$. (Πράγματι· εάν $y = f(x)$, για κάποιο $x \in A$, τότε θέτουμε $z := g(x)$. Εάν υποθέσουμε ότι $(y, z), (y, z') \in \mathscr{G}$, τότε υπάρχουν $x, x' \in A$ με $y = f(x) = f(x')$ και $z = g(x)$, $z' = g(x')$. Εξ υποθέσεως, $g(x) = g(x')$, οπότε $z = z'$.) Άρα ορίζεται (καλώς) μια απεικόνιση $\beta : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow C$, $\beta(f(x)) := g(x), \forall x \in A$, και (μέσω αυτής) η απεικόνιση $h : B \longrightarrow C$,

$$
h(y) := \begin{cases} \beta(y), & \text{όταν } y \in \mathrm{Im}(f), \\ \text{κάποιο παγιωμένο } c \in C, & \text{όταν } y \notin \mathrm{Im}(f). \end{cases}
$$

Προφανώς, $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \beta(f(x)) = g(x)$ για κάθε $x \in A$. □

2.2.19 Πρόταση. *Εάν A, B, C είναι μη κενά σύνολα και $f : B \longrightarrow A$, $g : C \longrightarrow A$ απεικονίσεις, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) *Υφίσταται μια απεικόνιση $h : C \longrightarrow B$ με $f \circ h = g$.*

(ii) $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) $g(x) = f(h(x)) \in \mathrm{Im}(g), \forall x \in C$, οπότε $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

(ii)⇒(i) Για κάθε $x \in C$ υπάρχει $y \in B : g(x) = f(y)$, οπότε $f^{-1}(\{g(x)\}) \neq \varnothing$. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathscr{E} := \left\{ f^{-1}(\{g(x)\}) \,\middle|\, x \in C \right\}$ αποτελεί μια οικογένεια υποσυνόλων τού συνόλου B, καθένα των οποίων είναι μη κενό. Σύμφωνα με το *αξίωμα τής επιλογής*, $\exists \alpha : \mathscr{E} \longrightarrow \bigcup \mathscr{E} : \alpha(Y) \in Y,\ \forall Y \in \mathscr{E}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
[\alpha(Y) \in Y,\ \forall Y \in \mathscr{E}] \quad &\Leftrightarrow \quad [\forall x \in C : \alpha(f^{-1}(\{g(x)\})) \in f^{-1}(\{g(x)\})] \\
&\Leftrightarrow \quad [\forall x \in C : f(\alpha(f^{-1}(\{g(x)\}))) \in \{g(x)\}] \\
&\Leftrightarrow \quad [\forall x \in C : f(\alpha(f^{-1}(\{g(x)\}))) = g(x)]
\end{aligned}$$

και (γι' αυτόν τον λόγο) η $h : C \longrightarrow B,\ x \longmapsto h(x) := \alpha(f^{-1}(\{g(x)\}))$ είναι μια *καλώς ορισμένη* απεικόνιση με $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = g(x)$ για κάθε $x \in C$. □

2.2.20 Παρατήρηση. Εάν κανείς επαναδιατυπώσει τα ανωτέρω ερωτήματα 1 και 2 αντικαθιστώντας τά σύνολα A, B, C με R-μοδίους M, N, L και υποθέσει (α) ότι οι f και g είναι *ομομορφισμοί* και (β) ότι οι συνθήκες (ii) των προτάσεων 2.2.18 και 2.2.19 ικανοποιούνται, αξιώνοντας, εκ παραλλήλου, από τις κατασκευαζόμενες απεικονίσεις h να είναι ωσαύτως *ομομορφισμοί*, η απάντηση σε αμφότερα (όπως προδήλως προκύπτει από τα παραδείγματα 2.2.21 και από τα θεωρήματα 2.2.24 και 2.2.25) θα είναι: *Μόνον υπό επιπρόσθετες, ειδικότερες προϋποθέσεις*!

2.2.21 Παραδείγματα. (i) Έστω $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$. Εάν $M = N = L = \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ ως $\mathbb{Z}$-μόδιος) και[15] $f := k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}},\ g := \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, τότε η συνθήκη (ii) τής προτάσεως 2.2.18 ικανοποιείται, οπότε υπάρχει κάποια *απεικόνιση* $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ με $h \circ f = g$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z} \arrow[dl, "k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\mathbb{Z} \arrow[rr, dashed, "h"'] & {} & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Επιπροσθέτως, $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Ωστόσο, ο f δεν είναι επιμορφισμός και η h *δεν μπορεί* να είναι ενδομορφισμός τού $\mathbb{Z}$, διότι εάν ήταν θα είχαμε

$$kh(\xi) = h(k\xi) = (h \circ (k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}))(\xi) = (h \circ f)(\xi) = g(\xi) = \xi,\ \forall \xi \in \mathbb{Z}.$$

Ειδικότερα, $kh(1) = 1$, πράγμα αδύνατο, διότι θα έπρεπε να ισχύει $h(1) \in \mathbb{Z}$.

(ii) Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Μέσω τής υποομάδας $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] := \{ \frac{a}{p^i} \,|\, a \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}_0\}$ τής $(\mathbb{Q}, +)$ ορίζουμε την υποομάδα[16]

$$\mathbb{Z}(p^\infty) := \mathbb{Z}[\tfrac{1}{p}]/\mathbb{Z} = \left\{ \tfrac{a}{p^i} + \mathbb{Z} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

τής πηλικοομάδας $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$. Αυτή η υποομάδα καθίσταται κατά τρόπο φυσικό $\mathbb{Z}$-μόδιος[17]. Θέτοντας $M = N = L = \mathbb{Z}(p^\infty)$, $f(x) := px$, $\forall x \in \mathbb{Z}(p^\infty)$, $g := \mathrm{id}_{\mathbb{Z}(p^\infty)}$,

[15] Αυτό σημαίνει ότι $f(\xi) := k\xi$ για κάθε $\xi \in \mathbb{Z}$.

[16] Η $(\mathbb{Z}(p^\infty), +)$ καλείται, ιδιαιτέρως, **p-σχεδόν κυκλική ομάδα** (διότι είναι μια *μη πεπερασμένως παραγόμενη* ομάδα, κάθε *γνήσια* υποομάδα τής οποίας είναι πεπερασμένη και κυκλική, έχουσα ως τάξη της μια δύναμη τού p.)

[17] Αριθμητικός πολλαπλασιασμός: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}(p^\infty) \ni (\lambda, \frac{a}{p^i} + \mathbb{Z}) \longmapsto \frac{\lambda a}{p^i} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}(p^\infty)$.

παρατηρούμε ότι $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(p^\infty), \mathbb{Z}(p^\infty))$ και ότι η συνθήκη 2.2.19 (ii) ικανοποιείται, καθώς ισχύει $\frac{a}{p^i} + \mathbb{Z} = p(\frac{a}{p^{i+1}} + \mathbb{Z})$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ και για κάθε $i \in \mathbb{N}_0$ (οπότε $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}(p^\infty)$). Άρα υπάρχει κάποια *απεικόνιση* $h : \mathbb{Z}(p^\infty) \longrightarrow \mathbb{Z}(p^\infty)$ με $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}(p^\infty)}$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}(p^\infty) & \\
& \circlearrowright & \\
\mathbb{Z}(p^\infty) \arrow[uur, "f"] & & \mathbb{Z}(p^\infty) \arrow[uul, "\mathrm{id}_{\mathbb{Z}(p^\infty)}"'] \arrow[ll, dashed, "h"]
\end{tikzcd}$$

Ωστόσο, η h *δεν μπορεί* να είναι ενδομορφισμός τού $\mathbb{Z}(p^\infty)$, διότι εάν ήταν θα είχαμε

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{p} + \mathbb{Z} &= f(h(\tfrac{1}{p} + \mathbb{Z})) = ph(\tfrac{1}{p} + \mathbb{Z}) = h(p(\tfrac{1}{p} + \mathbb{Z})) \\ &= h(1 + \mathbb{Z}) = h(0 + \mathbb{Z}) = h(0_{\mathbb{Z}(p^\infty)}) = 0_{\mathbb{Z}(p^\infty)} = 0 + \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ήτοι $\frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$. (Άτοπο!)

Κατάλληλες *επιπρόσθετες* προϋποθέσεις (υπό τις οποίες οι απεικονίσεις h που συμπληρώνουν τα τρίγωνα καθίστανται ομομορφισμοί, όπως ζητείται στα *αναθεωρημένα* ερωτήματα 1 και 2 τού εδ. 2.2.20) μπορούν να εντοπισθούν εάν ανατρέξουμε στα στοιχειώδη λήμματα 2.2.22 και 2.2.23 τα περιγράφοντα συνθήκες ισοδύναμες τής *επιρριπτικότητας* και, αντιστοίχως, τής *ενριπτικότητας* μιας απεικονίσεως. Η *επιρριπτικότητα* τού ομομορφισμού f (στην πρώτη περίπτωση) και η *ενριπτικότητα* αυτού (στη δεύτερη περίπτωση) είναι δυνατόν να μας οδηγήσουν σε *μοδιοθεωρητικά ανάλογα* των προτάσεων 2.2.18 και 2.2.19. Και μάλιστα και σε κάτι πιο ισχυρό: Στη *μοναδικότητα* των δημιουργούμενων ομομορφισμών h.

2.2.22 Λήμμα. *Εάν A, B είναι μη κενά σύνολα και $f : A \longrightarrow B$ μια απεικόνιση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:

(i) *Η f είναι επιρριπτική απεικόνιση.*

(ii) *Υπάρχει κάποια απεικόνιση $\gamma : B \longrightarrow A$, ούτως ώστε να ισχύει $f \circ \gamma = \mathrm{id}_B$.*

(iii) *Η f είναι «εκ δεξιών διαγράψιμη», δηλαδή για οιοδήποτε μη κενό σύνολο C και οιεσδήποτε απεικονίσεις $h_1 : B \longrightarrow C$ και $h_2 : B \longrightarrow C$ ισχύει η συνεπαγωγή*

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Longrightarrow h_1 = h_2.$$

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν η f είναι επιρριπτική, τότε για κάθε $y \in B = \mathrm{Im}(f) = f(A)$ επιλέγουμε[18] ένα $x_y \in A$, ούτως ώστε $f(x_y) = y$, και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\gamma : B \longrightarrow A, \ y \longmapsto \gamma(y) := x_y.$$

Τότε

$$(f \circ \gamma)(y) = f(\gamma(y)) = f(x_y) = y = \mathrm{id}_B(y) \Longrightarrow f \circ \gamma = \mathrm{id}_B.$$

(ii)⇒(iii) Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποια απεικόνιση $\gamma : B \longrightarrow A$, ούτως ώστε να ισχύει $f \circ \gamma = \mathrm{id}_B$. Για οιεσδήποτε απεικονίσεις $h_1 : B \longrightarrow C$ και $h_2 : B \longrightarrow C$ για

[18] Αρκεί να εφαρμοσθεί εκ νέου το *αξίωμα τής επιλογής* (όπως στο (ii)⇒(i) τής προτάσεως 2.2.19), αλλά εδώ για την οικογένεια $\mathscr{E} := \{ f^{-1}(\{y\}) | \, y \in B \}$ (μη κενών) υποσυνόλων τού A.

τις οποίες ισχύει η ισότητα $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} h_1 \circ f = h_2 \circ f &\Rightarrow (h_1 \circ f) \circ \gamma = (h_2 \circ f) \circ \gamma \\ &\Rightarrow h_1 \circ (f \circ \gamma) = h_2 \circ (f \circ \gamma) \Rightarrow h_1 = h_1 \circ \mathrm{id}_B = h_2 \circ \mathrm{id}_B = h_2. \end{aligned}$$

(iii)⇒(i) Υποθέτουμε ότι η f είναι «εκ δεξιών διαγράψιμη». Εάν το B είναι μονοσύνολο, τότε η f είναι προδήλως επιρριπτική. Εάν το B περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία y_1, y_2 με $y_1 \neq y_2$, τότε ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$h_1(y) := \begin{cases} y, & \text{όταν } y \in \mathrm{Im}(f), \\ y_1, & \text{όταν } y \notin \mathrm{Im}(f), \end{cases} \qquad h_2(y) := \begin{cases} y, & \text{όταν } y \in \mathrm{Im}(f), \\ y_2, & \text{όταν } y \notin \mathrm{Im}(f). \end{cases}$$

Προφανώς, $h_1(f(x)) = f(x) = h_2(f(x))$ για κάθε $x \in X$, οπότε

$$h_1 \circ f = h_2 \circ f \Longrightarrow h_1 = h_2.$$

Εάν υπήρχε κάποιο $y \in B \setminus \mathrm{Im}(f)$, τότε θα ίσχυε

$$h_1(y) = h_2(y) \Rightarrow y_1 = y_2,$$

ήτοι κάτι που θα αντέκειτο στην υπόθεσή μας. Επομένως, $B = \mathrm{Im}(f)$. □

2.2.23 Λήμμα. *Εάν A, B είναι μη κενά σύνολα και $f : A \longrightarrow B$ μια απεικόνιση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η f είναι ενριπτική απεικόνιση.*

(ii) *Υπάρχει κάποια απεικόνιση $\gamma : B \longrightarrow A$, ούτως ώστε να ισχύει $\gamma \circ f = \mathrm{id}_A$.*

(iii) *Η f είναι «εξ αριστερών διαγράψιμη», δηλαδή για οιοδήποτε μη κενό σύνολο C και οιεσδήποτε απεικονίσεις $h_1 : C \longrightarrow A$ και $h_2 : C \longrightarrow A$ ισχύει η συνεπαγωγή*

$$f \circ h_1 = f \circ h_2 \Longrightarrow h_1 = h_2.$$

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν η f είναι ενριπτική, τότε για όλα τα $y \in \mathrm{Im}\,(f) = f\,(A)$ οι ίνες $f^{-1}(\{y\})$ θα αποτελούνται από ένα και μόνον στοιχείο τού A. Ας συμβολίσουμε λοιπόν για κάθε $y \in \mathrm{Im}\,(f)$ αυτό το στοιχείο ως x_y. (Για το x_y ισχύει εξ ορισμού $f(x_y) = y$). Αντιθέτως, για κάθε $y \in B \setminus \mathrm{Im}(f)$ έχουμε $f^{-1}(\{y\}) = \varnothing$. Παγιώνουμε εφεξής ένα στοιχείο $x_0 \in A$ (σημειωτέον ότι το A δεν είναι κενό) και ορίζουμε μια απεικόνιση $\gamma : B \longrightarrow A$ ως ακολούθως:

$$\gamma\,(y) := \begin{cases} x_y, & \text{όταν } y \in \mathrm{Im}\,(f)\,, \\ x_0, & \text{όταν } y \in B \setminus \mathrm{Im}(f). \end{cases}$$

Τότε για κάθε $x \in A$ λαμβάνουμε $(\gamma \circ f)\,(x) = \gamma(f(x)) = x_y$, όπου $y := f(x)$, οπότε

$$f^{-1}\,(\{y\}) = f^{-1}\,(\{f(x)\}) = \{x\},$$

απ' όπου έπεται ότι $x_y = x = \mathrm{id}_A\,(x)$, ήτοι ότι $\gamma \circ f = \mathrm{id}_A$.

(ii)⇒(i) Εάν υπάρχει μια απεικόνιση $\gamma : B \longrightarrow A$ με $\gamma \circ f = \mathrm{id}_A$ και εάν τα x_1, x_2 είναι δυο στοιχεία τού A, ούτως ώστε $f(x_1) = f\,(x_2)$, τότε

$$x_1 = \mathrm{id}_A\,(x_1) = (\gamma \circ f)\,(x_1) = \gamma(f(x_1)) = \gamma(f(x_2)) = (\gamma \circ f)\,(x_2) = \mathrm{id}_A\,(x_2) = x_2.$$

Άρα η f είναι όντως ενριπτική.
(ii)⇒(iii) Κατά την υπόθεσή μας, $f \circ h_1 = f \circ h_2$. Επομένως,

$$\gamma \circ (f \circ h_1) = \gamma \circ (f \circ h_2) \Rightarrow (\gamma \circ f) \circ h_1 = (\gamma \circ f) \circ h_2 \Rightarrow \mathrm{id}_A \circ h_1 = \mathrm{id}_A \circ h_1 \Rightarrow h_1 = h_2.$$

(iii)⇒(ii) Εάν η f είναι «εξ αριστερών διαγράψιμη» και υποθέσουμε ότι δεν είναι ενριπτική, τότε θα υπάρχουν $x, y \in A$, $x \neq y$, με $f(x) = f(y)$. Για οιοδήποτε μη κενό σύνολο C ορίζουμε τις σταθερές απεικονίσεις

$$h_1 : C \longrightarrow A,\ \ c \mapsto h_1(c) := x,\ \ h_2 : C \longrightarrow A,\ \ c \mapsto h_2(c) := y.$$

Παρατηρούμε ότι $h_1 \neq h_2$ αλλά $f \circ h_1 = f \circ h_2$. Άτοπο! Άρα η f είναι κατ' ανάγκην ενριπτική. □

2.2.24 Θεώρημα. *Εάν υποτεθεί ότι M, N, L είναι R-μόδιοι, $f : M \longrightarrow N$ ένας επιμορφισμός και $g \in \mathrm{Hom}_R(M, L)$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*
(i) *Υφίσταται ένας και μόνον $h \in \mathrm{Hom}_R(N, L)$ με $h \circ f = g$.*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ N \arrow[rr, dashed, "h"'] & {} & L \end{tikzcd}$$

(ii) $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.
Επιπροσθέτως, στην περίπτωση κατά την οποία ικανοποιούνται οι ανωτέρω συνθήκες, ισχύουν τα εξής:
(a) *Ο h είναι μονομορφισμός* $\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.
(b) *Ο h είναι επιμορφισμός* $\Longleftrightarrow$ *ο g είναι επιμορφισμός.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Έστω τυχόν $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Τότε

$$g(x) = h(f(x)) = h(0_N) = 0_L \Longrightarrow x \in \mathrm{Ker}(g),$$

οπότε $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.
(ii)⇒(i) Εάν $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$ και $(x_1, x_2) \in M \times M$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = 0_N \Rightarrow x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g),$$

οπότε

$$0_N = g(x_1 - x_2) = g(x_1) - g(x_2) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2).$$

Κατόπιν εφαρμογής τής συνεπαγωγής (ii)⇒(i) τής προτάσεως 2.2.18 (με τους M, N, L στη θέση των εκεί παρατεθέντων A, B και C, αντιστοίχως) εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μιας απεικονίσεως $h : N \longrightarrow L$ για την οποία ισχύει $h \circ f = g$. Επειδή η απεικόνιση f είναι (εξ υποθέσεως) επιρριπτική, η h (σύμφωνα με τη συνεπαγωγή (i)⇒(iii) τού λήμματος 2.2.22) είναι η μοναδική απεικόνιση από τον N στον L που πληροί αυτήν την ιδιότητα. Απομένει λοιπόν να δειχθεί ότι $h \in \mathrm{Hom}_R(N, L)$. Προς τούτο θεωρούμε τυχόντα ζεύγη $(y_1, y_2) \in N \times N$ και $(r_1, r_2) \in R \times R$. Λόγω τής επιρριπτικότητας τής απεικονίσεως f υπάρχουν $x_1, x_2 \in M$, τέτοια ώστε να ισχύει $f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$. Επειδή οι f, g είναι ομομορφισμοί, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & h\left(r_1 y_1 + r_2 y_2\right) = h\left(r_1 f(x_1) + r_2 f(x_2)\right) = h(f(r_1 x_1 + r_2 x_2)) = (h \circ f)\left(r_1 x_1 + r_2 x_2\right) \\ & = g(r_1 x_1 + r_2 x_2) = r_1 g(x_1) + r_2 g(x_2) = r_1 \left(h \circ f\right)(x_1) + r_2 \left(h \circ f\right)(x_2) \\ & = r_1 h(f(x_1)) + r_2 h(f(x_2)) = r_1 h(y_1) + r_2 h(f(y_2)), \end{aligned}$$

οπότε η h είναι ωσαύτως ομομορφισμός. (Βλ. πρόταση 2.2.3.)

Εν συνεχεία, υποθέτοντας ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (i), (ii), θα αποδείξουμε τις αμφίπλευρες συνεπαγωγές (a) και (b).

(a) "$\Rightarrow$" Εξ υποθέσεως, $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$. Έστω τυχόν $x \in \mathrm{Ker}(g)$. Τότε

$$0_L = g(x) = h\left(f(x)\right) \Rightarrow f(x) \in \mathrm{Ker}(h) = \{0_N\},$$

όπου η τελευταία ισότητα οφείλεται στο ότι ο h είναι (εξ υποθέσεως) μονομορφισμός (βλ. πρόταση 2.2.13). Επομένως, $x \in \mathrm{Ker}(f)$, και, ως εκ τούτου, ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

"$\Leftarrow$" Εάν $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ και $y \in \mathrm{Ker}(h)$, τότε (λόγω τής επιρριπτικότητας τής f)

$$\exists x \in M : y = f(x),$$

οπότε $0_L = h(y) = h(f(x)) = g(x) \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow y = f(x) = 0_N$. Άρα $\mathrm{Ker}(h) = \{0_L\}$ και ο h είναι μονομορφισμός. (Βλ. πρόταση 2.2.13.)

(b) "$\Rightarrow$" Εάν ο h είναι επιμορφισμός, τότε και ο $g = h \circ f$ είναι επιμορφισμός (ως σύνθεση δύο επιμορφισμών).

"$\Leftarrow$" Εάν $g = h \circ f$ είναι επιμορφισμός και $z \in L$, τότε υπάρχει κάποιο $x \in M$, τέτοιο ώστε να ισχύει $g(x) = z$. Άρα το $f(x)$ απεικονίζεται μέσω τής h στο z και η h είναι επιρριπτική. □

2.2.25 Θεώρημα. *Εάν υποτεθεί ότι M, N, L είναι R-μόδιοι, $f : N \longrightarrow M$ ένας μονομορφισμός και $g \in \mathrm{Hom}_R(L, M)$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Υφίσταται ένας και μόνον $h \in \mathrm{Hom}_R(L, N)$ με $f \circ h = g$.*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ N \arrow[ur, "f"] & {} & L \arrow[ul, "g"'] \arrow[ll, dashed, "h"] \end{tikzcd}$$

(ii) $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$.

Επιπροσθέτως, στην περίπτωση κατά την οποία ικανοποιούνται οι ανωτέρω συνθήκες, ισχύουν τα εξής:

(a) *Ο h είναι μονομορφισμός $\Longleftrightarrow$ ο g είναι μονομορφισμός.*

(b) *Ο h είναι επιμορφισμός $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f)$.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) $g(x) = f(h(x)) \in \mathrm{Im}(g), \forall x \in L$, οπότε

$$\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(f).$$

(ii)⇒(i) Κατά την πρόταση 2.2.19 υπάρχει απεικόνιση $h : L \longrightarrow N$, τέτοια ώστε να ισχύει η ισότητα $f \circ h = g$. Επειδή ο f είναι εξ υποθέσεως μονομορφισμός, το λήμμα 2.2.23 μας πληροφορεί ότι αυτός είναι «εξ αριστερών διαγράψιμος», πράγμα που σημαίνει ότι η h είναι η μοναδική απεικόνιση με την ιδιότητα $f \circ h = g$. Αρκεί λοιπόν να ελεγχθεί ότι η h είναι *και* ομομορφισμός R-μοδίων. Για τυχόντα ζεύγη $(x_1, x_2) \in L \times L$ και $(r_1, r_2) \in R \times R$ έχουμε

$$f(h(r_1x_1+r_2x_2)) = r_1g(x_1)+r_2g(x_2) = r_1f(h(x_1))+r_2f(h(x_2)) = f(r_1h(x_1)+r_2h(x_2)),$$

οπότε

$$h(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1h(x_1) + r_2h(x_2)$$

(διότι ο f είναι εξ υποθέσεως μονομορφισμός). Επομένως, $h \in \mathrm{Hom}_R(L, N)$. (Βλ. πρόταση 2.2.3.)

Εν συνεχεία, υποθέτοντας ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (i), (ii), θα αποδείξουμε τις αμφίπλευρες συνεπαγωγές (a) και (b).

(a) Τούτη έπεται άμεσα από τα (i) και (iv) τής προτάσεως 2.2.15.

(b) "⇒" Εάν ο h είναι επιμορφισμός και $y \in N$, τότε υπάρχει $x \in L$, τέτοιο ώστε να ισχύει $y = h(x)$, οπότε

$$f(y) = f(h(x)) = g(x) \in \mathrm{Im}(g) \Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Im}(g).$$

"⇐" Έστω $y \in N$. Προφανώς,

$$f(y) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(g),$$

οπότε $\exists x \in L : f(y) = g(x)$. Επειδή $g(x) = f(h(x))$, λαμβάνουμε

$$f(y) = f(h(x)) \Rightarrow y = h(x)$$

(διότι ο f είναι εξ υποθέσεως μονομορφισμός). Άρα ο ομομορφισμός h είναι όντως επιμορφισμός. □

2.2.26 Σημείωση. Σε κατοπινές ενότητες θα συναντήσουμε κατ' επανάληψη το πρόβλημα τής «συμπληρώσεως» ποικίλων διαγραμμάτων R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων (και όχι μόνον για τρίγωνα). Ενίοτε, λύοντάς το καθιστούμε τα διαγράμματά μας *μεταθετικά*. (Ένα διάγραμμα μη κενών συνόλων και απεικονίσεων είναι **μεταθετικό διάγραμμα**[19] όταν όλες οι δυνατές συνθέσεις απεικονίσεων από οιοδήποτε δοθέν σύνολο αφετηρίας σε οιοδήποτε σύνολο απολήξεως είναι ίσες μεταξύ τους.)

[19]Όταν δοθέν (συγκεκριμένο) διάγραμμα καλείται (εκ προοιμίου) *μεταθετικό*, τότε εννοείται ότι η μεταθετικότητα τηρείται *παντού*. Όταν η μεταθετικότητα τηρείται μόνον για ορισμένα τμήματα αυτού (αλλά *όχι καθ' ολοκληρίαν*), τότε δίδονται οι απαραίτητες διευκρινίσεις. (Πρβλ., π.χ., λήμμα 3.1.24 και θεώρημα 3.1.26.)

2.3 ΠΗΛΙΚΟΜΟΔΙΟΙ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ

2.3.1 Πρόταση. *Έστω U ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M. Τότε ισχύουν τα εξής:*
(i) *Η διμελής σχέση "$\sim_U$" επί τού M η οριζόμενη ως ακολούθως:*

$$\boxed{x \sim_U y \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} x - y \in U}$$

αποτελεί σχέση ισοδυναμίας.
(ii) *Συμβολίζουμε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την "$\sim_U$" ως*

$$\boxed{M/U := \{x + U \mid x \in M\},}$$

(όπου $x + U := [x]_{\sim_U} := \{y \in M \mid y \sim_U x\}$). Το M/U καθίσταται R-μόδιος μέσω των πράξεων

$$[x_1]_{\sim_U} + [x_2]_{\sim_U} := [x_1 + x_2]_{\sim_U}, \ \forall (x_1, x_2) \in M \times M,$$
$$r[x]_{\sim_U} := [rx]_{\sim_U}, \ \forall (r, x) \in R \times M.$$

(iii) *Η απεικόνιση*

$$\boxed{\pi_U^M : M \longrightarrow M/U, \ \ x \longmapsto \pi_U^M(x) := x + U,} \tag{2.12}$$

είναι ένας επιμορφισμός έχων ως πυρήνα του τον $\mathrm{Ker}(\pi_U^M) = U$.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι $x, y, z \in M$. Προφανώς, $x - x = 0_M = 0_U \in U$, οπότε $x \sim_U x$ και η $\sim_U$ είναι αυτοπαθής. Εάν $x \sim_U y$, τότε

$$x - y \in U \Rightarrow -(x - y) = y - x \in U \Rightarrow y \sim_U x,$$

οπότε η $\sim_U$ είναι συμμετρική. Τέλος, εάν $x \sim_U y$ και $y \sim_U z$, τότε

$$[x - y \in U \text{ και } y - z \in U] \Rightarrow (x - y) + (y - z) = x - z \in U \Rightarrow x \sim_U z,$$

οπότε η $\sim_U$ είναι *και* μεταβατική.
(ii) Ας υποθέσουμε εν πρώτοις ότι $x_1, x_2 \in M$ και ότι το x_1' (και αντιστοίχως, το x_2') ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας $[x_1]_{\sim_U}$ (και αντιστοίχως, στην κλάση ισοδυναμίας $[x_2]_{\sim_U}$). Τότε

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_1' \in U \\ x_2 - x_2' \in U \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1 - x_1') + (x_2 - x_2') = (x_1 + x_2) - (x_1' + x_2') \in U,$$

οπότε $[x_1 + x_2]_{\sim_U} = [x_1' + x_2']_{\sim_U}$. Εν συνεχεία, ας θεωρήσουμε τυχόντα $r \in R$ και $x \in M$ κι ας υποθέσουμε ότι το x' ανήκει στην κλάση ισοδυναμίας $[x]_{\sim_U}$. Προφανώς,

$$\left.\begin{array}{r} x - x' \in U \\ r \in R \end{array}\right\} \Rightarrow r(x - x') = rx - rx' \in U \Rightarrow [rx]_{\sim_U} = [rx']_{\sim_U}.$$

Ως εκ τούτου οι “ $+$ ” και “ $\cdot$ ” είναι καλώς ορισμένες πράξεις. Είναι δε άμεσος ο έλεγχος τού ότι τα (i)-(iv) τού ορισμού 2.1.1 ικανοποιούνται.
(iii) Για οιαδήποτε ζεύγη $(x_1, x_2) \in M \times M$ και $(r_1, r_2) \in R \times R$ έχουμε

$$\begin{aligned}\pi_U^M(r_1x_1 + r_2x_2) &= (r_1x_1 + r_2x_2) + U = (r_1x_1 + U) + (r_2x_2 + U)\\ &= r_1\,(x_1 + U) + r_2\,(x_2 + U) = r_1\,\pi_U^M(x_1) + r_2\,\pi_U^M(x_2),\end{aligned}$$

οπότε (λόγω τής προτάσεως 2.2.3) $\pi_U^M \in \mathrm{Hom}_R(M, M/U)$ με πυρήνα του τον

$$\mathrm{Ker}(\pi_U^M) = \left\{x \in M \,\middle|\, \pi_U^M(x) = 0_{M/U}\right\} = \{x \in M\,|x + U = U\} = U.$$

Η επιρριπτικότητα τής απεικονίσεως π_U^M είναι προφανής. □

2.3.2 Ορισμός. Ο R-μόδιος M/U καλείται **πηλικομόδιος τού** M **ως προς τον** U και η απεικόνιση (2.12) **φυσικός επιμορφισμός** τού M επί τού M/U ή **επιμορφισμός κλάσεων υπολοίπων** τού M ως προς τον U.

2.3.3 Πρόταση. *Έστω U ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M. Εάν ο M είναι πεπερασμένως παραγόμενος, τότε και ο πηλικομόδιος M/U είναι πεπερασμένως παραγόμενος.*

Απόδειξη. Αρκεί να εφαρμοσθεί το πόρισμα 2.2.8 για τον (2.12). □

2.3.4 Θεώρημα («Θεώρημα αντιστοιχίσεως»).
Έστω U ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M. Τότε η απεικόνιση

$$\left\{\begin{array}{c}\text{υπομόδιοι τού } M\\ \text{που περιέχουν τον } U\end{array}\right\} \xrightarrow{\alpha} \{\text{υπομόδιοι τού } M/U\}$$

η οριζόμενη από τον τύπο

$$\boxed{U' \longmapsto \alpha(U') := \pi_U^M(U') = U'/U}$$

είναι μια αμφίρριψη που διατηρεί τους εγκλεισμούς, δηλαδή για οιουσδήποτε υπομόδιους U', U'' τού M ισχύει η συνεπαγωγή

$$U \subseteq U' \subseteq U'' \Longrightarrow \alpha(U') \subseteq \alpha(U'').$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\{\text{υπομόδιοι τού } M/U\} \xrightarrow{\beta} \left\{\begin{array}{c}\text{υπομόδιοι τού } M\\ \text{που περιέχουν τον } U\end{array}\right\}$$

την οριζόμενη από τον τύπο $W \longmapsto \beta(W) := \left(\pi_U^M\right)^{-1}(W)$. Σημειωτέον ότι η αντίστροφη εικόνα $\left(\pi_U^M\right)^{-1}(W)$ αποτελεί υπομόδιο τού M λόγω τού (i) τής προτάσεως 2.2.5 και $\{0_W\} \subseteq W \Rightarrow U = \mathrm{Ker}(\pi_U^M) = \left(\pi_U^M\right)^{-1}(\{0_W\}) \subseteq \left(\pi_U^M\right)^{-1}(W)$ (βλ. πρόταση 2.3.1). Για κάθε υπομόδιο W τού M/U λαμβάνουμε

$$\alpha\,(\beta(W)) = \alpha((\pi_U^M)^{-1}(W)) = \pi_U^M((\pi_U^M)^{-1}(W)) = W \cap \mathrm{Im}(\pi_U^M) = W$$

(βλ. 2.2.6 (ii)). Κατά συνέπειαν, $\alpha\left(\beta(W)\right) = W$. Από την άλλη μεριά, για κάθε υπομόδιο U' τού M που περιέχει τον U λαμβάνουμε

$$\beta\left(\alpha\left(U'\right)\right) = \beta\left(\pi_U^M(U')\right) = (\pi_U^M)^{-1}\left(\pi_U^M(U')\right) = U' + \operatorname{Ker}(\pi_U^M) = U' + U = U'$$

(βλ. 2.2.6 (iv) και 2.3.1). Κατά συνέπειαν, $\beta\left(\alpha\left(U'\right)\right) = U'$, απ' όπου συνάγεται ότι η απεικόνιση α είναι αμφιρριπτική έχουσα την β ως αντίστροφό της. Τέλος, για οιουσδήποτε υπομόδιους U', U'' τού M, για τους οποίους ισχύει $U \subseteq U' \subseteq U''$, έχουμε $\alpha(U') = U'/U = \pi_U^M(U') \subseteq \pi_U^M(U'') = U''/U = \alpha(U'')$, οπότε η α όντως διατηρεί τους εγκλεισμούς. □

2.3.5 Πόρισμα. *Έστω U ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M. Τότε κάθε υπομόδιος τού M/U είναι τής μορφής U'/U, όπου U' είναι ένας υπομόδιος τού M περιέχων τον U.*

Εν συνεχεία, δοθέντος ενός υπομοδίου U ενός R-μοδίου M και ενός ομομορφισμού R-μοδίων $g : M \longrightarrow L$, επίκειται να περιγραφούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες, ούτως ώστε να υφίσταται ένας «κανονιστικός» ομομορφισμός $h \in \operatorname{Hom}_R(M/U, L)$ με $h \circ \pi_U^M = g$. (Βλ. πρόταση 2.3.6, καθώς και το θεώρημα 2.3.10 στην περίπτωση κατά την οποία ο ίδιος ο L είναι κάποιος πηλικομόδιος.) Γι' αυτό θα απαιτηθεί η εφαρμογή τού θεωρήματος 2.2.24. Κατόπιν τούτου, τα περιώνυμα τρία *θεωρήματα ισομορφισμών* θα έχουν ενταχθεί σε ένα ευρύτερο πλαίσιο εργασίας με ομομορφισμούς R-μοδίων.

2.3.6 Πρόταση («Καθολική ιδιότητα πηλικομοδίου»). *Έστω U ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M και έστω L τυχών R-μόδιος. Εάν $g \in \operatorname{Hom}_R(M, L)$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Υφίσταται ένας και μόνον $h \in \operatorname{Hom}_R(M/U, L)$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] \arrow[d, two heads, "\pi_U^M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L \\
M/U \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, ήτοι ο «κανονιστικός» ομομορφισμός ο οριζόμενος από τον τύπο

$$\boxed{h(x + U) := g(x),\ \forall x \in M.}$$

(ii) $U \subseteq \operatorname{Ker}(g)$.

Επιπροσθέτως, στην περίπτωση κατά την οποία ικανοποιούνται οι ανωτέρω συνθήκες, ισχύουν τα εξής:

(a) *Ο h είναι μονομορφισμός $\Longleftrightarrow U = \operatorname{Ker}(g)$.*

(b) *Ο h είναι επιμορφισμός $\Longleftrightarrow$ ο g είναι επιμορφισμός.*

Απόδειξη. Αρκεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα 2.2.24 για τον $N = M/U$, με τον φυσικό επιμορφισμό π_U^M στη θέση τού εκεί παρατεθέντος επιμορφισμού f. (Σύμφωνα με την πρόταση 2.3.1, $U = \mathrm{Ker}(\pi_U^M)$.) □

2.3.7 Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών.
Εάν M, N είναι R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, τότε

$$\boxed{M/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}\,(f)\,.}$$

Συγκεκριμένα, υπάρχει ένας και μόνον ισομορφισμός R-μοδίων

$$h : M/\mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}\,(f)$$

ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, two heads, "\check{f}"] \arrow[d, two heads, "\pi^M_{\mathrm{Ker}(f)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Im}(f) \\
M/\mathrm{Ker}(f) \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, όπου $\check{f}$ ο επιμορφισμός ο επαγόμενος μέσω τού f. (Βλ. (2.11).)

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την πρόταση 2.3.6 για τον υπομόδιο $U := \mathrm{Ker}(f)$ τού M και για τον επιμορφισμό $g := \check{f}$. Εν προκειμένω, η συνθήκη (ii) αυτού τού πορίσματος ικανοποιείται, διότι

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(\check{f}).$$

Μάλιστα, ο κατασκευαζόμενος ομομορφισμός h είναι μονομορφισμός. Από την άλλη μεριά, η απεικόνιση h είναι, συν τοις άλλοις, και επιρριπτική, καθόσον για κάθε $y \in \mathrm{Im}(f)$ υπάρχει κάποιο $x \in M$ με $f(x) = y$, οπότε $h(x + \mathrm{Ker}(f)) = y$. □

2.3.8 Παράδειγμα. Εάν $n \in \mathbb{N}$, τότε μέσω τού επιμορφισμού $\mathbb{Z}$-μοδίων

$$\mathbb{Z} \ni a \overset{f}{\longmapsto} [a]_n \in \mathbb{Z}_n$$

επάγεται ισομορφισμός $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ (καθώς $\mathrm{Ker}(f) = n\mathbb{Z}$).

2.3.9 Πόρισμα. *Εάν M, N είναι R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, τότε υφίσταται μια αμφίρριψη*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{υπομόδιοι τού } M \\ \text{που περιέχουν τον } \mathrm{Ker}(f) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{\text{υπομόδιοι τού } \mathrm{Im}(f)\}\,.$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τα θεωρήματα 2.3.4 και 2.3.7. □

2.3.10 Θεώρημα (Μεταφορά ομομορφισμού σε «επίπεδο πηλικομοδίων»).
Έστω ότι η $f : M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων, U ένας υπομόδιος τού M και W ένας υπομόδιος τού N. Τότε οι εξής συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) *Υφίσταται ένας και μόνον $h \in \mathrm{Hom}_R(M/U, N/W)$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi_U^M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N \arrow[d, two heads, "\pi_W^N"] \\ M/U \arrow[r, dashed, "h"'] & N/W \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, ήτοι ο «κανονιστικός» ομομορφισμός ο επαγόμενος από τον f που ορίζεται από τον τύπο

$$\boxed{h(x+U) := f(x) + W, \ \forall x \in M.}$$

(ii) $f(U) \subseteq W$.

Επιπροσθέτως, στην περίπτωση κατά την οποία ικανοποιούνται οι ανωτέρω συνθήκες, ισχύουν τα ακόλουθα:

(a) *Ο h είναι μονομορφισμός* $\Longleftrightarrow U = f^{-1}(W)$.

(b) *Ο h είναι επιμορφισμός* $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) + W = N$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την πρόταση 2.3.6 για τον $L := N/W$ και τον $g := \pi_W^N \circ f$. Σημειωτέον ότι

$$\mathrm{Ker}(\pi_W^N \circ f) = \{x \in M \,|\, f(x) + W = W\} = \{x \in M \,|\, f(x) \in W\} = f^{-1}(W).$$

Εάν λοιπόν $(U =)\ \mathrm{Ker}(\pi_U^M) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi_W^N \circ f)$, τότε $f(U) \subseteq f(f^{-1}(W)) \subseteq W$. Και αντιστρόφως· εάν $f(U) \subseteq W$, τότε

$$U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(W) = \mathrm{Ker}(\pi_W^N \circ f).$$

Άρα η ανωτέρω συνθήκη (ii) ισοδυναμεί, εν προκειμένω, με την 2.3.6 (ii). Εν συνεχεία, υποθέτοντας ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (i), (ii), θα αποδείξουμε τις αμφίπλευρες συνεπαγωγές (a) και (b).

(a) Επειδή

$$\mathrm{Ker}(h) = \{x + U \,|\, f(x) \in W\} = \left\{x + U \,\middle|\, x \in f^{-1}(W)\right\} = f^{-1}(W)/U,$$

ο h (λόγω τής προτάσεως 2.2.13) είναι μονομορφισμός $\Longleftrightarrow U = f^{-1}(W)$.

(b) Επειδή $\mathrm{Im}(h) = \{f(x) + W \,|\, x \in M\}$, ο h είναι επιμορφισμός εάν και μόνον εάν

$$(\forall y \in N)\,(\exists x \in M : y + W = f(x) + W) \Leftrightarrow (\forall y \in N)\,(\exists x \in M : y - f(x) \in W),$$

δηλαδή εάν και μόνον εάν $\mathrm{Im}(f) + W = N$. □

2.3.11 Σημείωση. Ενίοτε, στην περίπτωση όπου είναι γνωστό (από τα δεδομένα ενός *συγκεκριμένου* f και *συγκεκριμένων* U και W) ότι $f(U) \subseteq W$, θα χρησιμοποιείται και ένας ειδικότερος συμβολισμός για τον «κανονιστικό» ομομορφισμό h

τού θεωρήματος 2.3.10: Αντί τού h θα γράφουμε απλώς $f^{\pi\eta\lambda.}$ (για να υποδηλούται ρητώς ότι ο εν λόγω ομομορφισμός είναι εκείνος που επάγεται *σε επίπεδο πηλικομοδίων μέσω τού* f).

2.3.12 Δεύτερο Θεώρημα Ισομορφισμών. *Εάν οι* U, U' *είναι δυο υπομόδιοι ενός* R*-μοδίου* M, *τότε*

$$\boxed{U/(U\cap U') \cong (U+U')/U'.}$$

Συγκεκριμένα, υπάρχει ένας και μόνον ισομορφισμός R*-μοδίων*

$$h : U/\left(U\cap U'\right) \longrightarrow \left(U+U'\right)/U'$$

ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\mathrm{in}_{U,U+U'}"] \arrow[d, "\pi^{U}_{U\cap U'}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U+U' \arrow[d, "\pi^{U+U'}_{U'}"] \\
U/(U\cap U') \arrow[r, dashed, "h"'] & (U+U')/U'
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

Απόδειξη. Επειδή $\mathrm{in}_{U,U+U'}(U\cap U') = U\cap U' \subseteq U'$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{in}^{-1}_{U,U+U'}(U') = \{u\in U \,|\mathrm{in}_{U,U+U'}(u) = u \in U'\} = U\cap U',\\
&\mathrm{Im}(\mathrm{in}_{U,U+U'}) + U' = U + U'.
\end{aligned}$$

ο ισχυρισμός είναι αληθής, προκύπτων άμεσα ύστερα από εφαρμογή τού θεωρήματος 2.3.10 για τους υπομόδιους $U\cap U'$ και U' των U και $U+U'$, αντιστοίχως, και τον ομομορφισμό $f := \mathrm{in}_{U,U+U'}$. □

2.3.13 Τρίτο Θεώρημα Ισομορφισμών. *Εάν οι* U, W *είναι δυο υπομόδιοι ενός* R*-μοδίου* M *και* $W \subseteq U$, *τότε*

$$\boxed{M/U \cong (M/W)/(U/W).}$$

Συγκεκριμένα, υπάρχει ένας και μόνον ισομορφισμός R*-μοδίων*

$$h : M/U \longrightarrow (M/W)/(U/W)$$

ο οποίος καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\pi^{M}_{W}"] \arrow[d, two heads, "\pi^{M}_{U}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M/W \arrow[d, two heads, "\pi^{M/W}_{U/W}"] \\
M/U \arrow[r, dashed, "h"'] & (M/W)/(U/W)
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Από το πόρισμα 2.3.5 γνωρίζουμε ότι ο U/W είναι υπομόδιος τού

M/W. Επειδή $\pi_W^M(U) = U/W$,

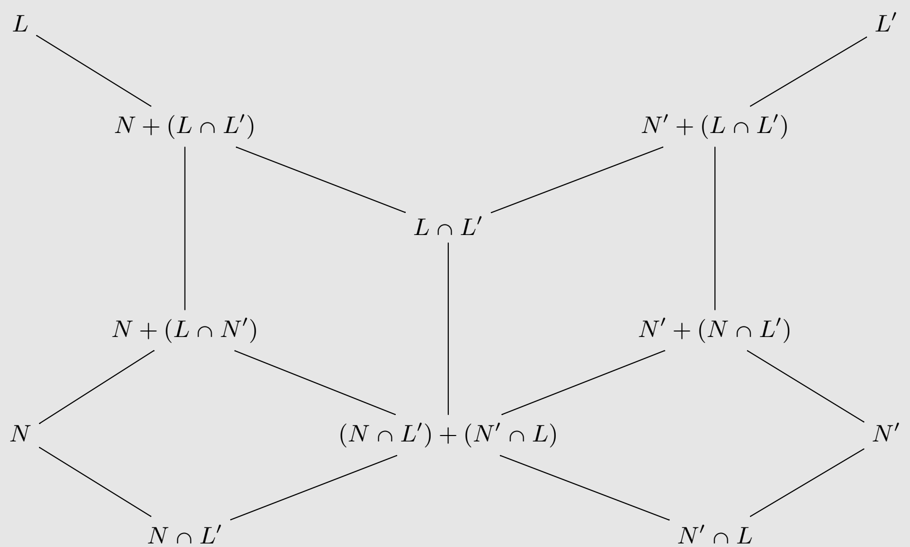
$$\left(\pi_W^M\right)^{-1}(U/W) = \{x \in M \,|\exists u \in U : x - u \in W (\subseteq U)\} = U,$$
$$U/W \subseteq M/W \Rightarrow \mathrm{Im}(\pi_W^M) + U/W = M/W + U/W = M/W.$$

ο ισχυρισμός είναι αληθής, προκύπτων άμεσα ύστερα από εφαρμογή τού θεωρήματος 2.3.10 για τους υπομόδιους U και U/W των M και M/W, αντιστοίχως, και τον $f := \pi_W^M$. □

2.3.14 Θεώρημα («Λήμμα τής πεταλούδας» τού Zassenhaus, 1934).
Έστω M ένας R-μόδιος. Εάν N, L, N', L' είναι υπομόδιοι τού M με $N \subseteq L$ και $N' \subseteq L'$, τότε υφίστανται ισομορφισμοί

$$\boxed{\begin{aligned} L \cap L'/(N \cap L') + (N' \cap L) &\cong N + (L \cap L')/N + (L \cap N') \\ &\cong N' + (L \cap L')/N' + (N \cap L) \end{aligned}}$$

με τους αντίστοιχους εγκλεισμούς ορατούς μέσω τού ακολούθου εσσιανού διαγράμματος (που ομοιάζει με «πεταλούδα»):



Απόδειξη. Επειδή $L \cap N' \subseteq L \cap L'$, έχουμε

$$(L \cap L') + [N + (L \cap N')] = (L \cap L') + N = N + (L \cap L'),$$

οπότε από την πρόταση 2.1.20 έπεται ότι

$$\begin{aligned}&(L \cap L') \cap [N + (L \cap N')] = (L \cap L' \cap N) + (L \cap N') \\ &= (L' \cap N) + (L \cap N') = (N \cap L') + (N' \cap L).\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 2.3.12 για τους $U := L \cap L'$ και $U' := N + (L \cap N')$

λαμβάνουμε

$$\underbrace{L \cap L'}_{=:U} / \underbrace{(N \cap L') + (N' \cap L)}_{=U \cap U'} \cong \underbrace{N + (L \cap L')}_{=U+U'} / \underbrace{N + (L \cap N')}_{=:U'}.$$

Η ύπαρξη τού δευτέρου ισομορφισμού προκύπτει ύστερα από επανάληψη των ιδίων επιχειρημάτων για τα δεδομένα που είναι «συμμετρικά» των ανωτέρω παρατεθέντων ως προς τον «κορμό» (μεσαίο κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα) τής «πεταλούδας». □

2.3.15 Ορισμός. Έστω M ένας R-μόδιος. Ένας **πύργος υπομοδίων** του είναι μια πεπερασμένη φθίνουσα αλυσίδα υπομοδίων τής μορφής

$$M =: M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_l \cong \{0\}.$$

Έστω ότι οι

$$\begin{aligned} \Pi_1: \quad & M =: M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_l \cong \{0\} \\ \Pi_2: \quad & M =: N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_{l'} \cong \{0\} \end{aligned} \tag{2.13}$$

είναι δυο πύργοι υπομοδίων τού M.

(i) Λέμε ότι ο Π_2 αποτελεί μια **εκλέπτυνση τού** Π_1 όταν $l \leqslant l'$ και όταν (ταυτοχρόνως) $j_0, j_1, \ldots j_l \in \mathbb{N}_0 : j_0 < j_1 < \cdots < j_l \leqslant l'$ με $M_i = N_{j_i}$, για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, l\}$, ή, με άλλα λόγια, όταν αποκτούμε τον Π_2 από τον Π_1 ύστερα από παρεμβολή $l' - l$ επιπρόσθετων όρων μεταξύ κάποιων εκ των όρων τού Π_1. Ο Π_2 καλείται **γνήσια εκλέπτυνση τού** Π_1 όταν

$$\exists j \in \{1, \ldots, l'\} : M_i \neq N_j, \text{ για κάθε } i \in \{0, 1, \ldots, l\}.$$

(ii) Λέμε ότι οι Π_1 και Π_2 είναι **ισοδύναμοι** όταν $l = l'$ και όταν[20] (ταυτοχρόνως)

$$\exists \sigma \in \mathfrak{S}_l : M_i / M_{i+1} \cong N_{\sigma(i)} / N_{\sigma(i)+1}, \; \forall i \in \{1, \ldots, l\}.$$

Η χρήση τού λήμματος 2.3.14 τής «πεταλούδας» απλουστεύει την απόδειξη τού ακόλουθου *θεωρήματος των εκλεπτύνσεων* τού O. Schreier.

2.3.16 Θεώρημα (O. Schreier, 1928). *Δυο πύργοι υπομοδίων ενός R-μοδίου M διαθέτουν πάντοτε ισοδύναμες εκλεπτύνσεις.*

Απόδειξη. Δοθέντων δυο πύργων υπομοδίων (2.13) ενός R-μοδίου M ορίζουμε για κάθε ζεύγος $(j, k) \in \{1, \ldots, l\} \times \{1, \ldots, l'\}$ τους R-μοδίους

$$M_{j,k} := M_j + (M_{j-1} \cap N_k) \text{ και } N_{k,j} := N_k + (N_{k-1} \cap M_j).$$

Ας υποθέσουμε, δίχως βλάβη τής γενικότητας, ότι $l' \leqslant l$. Θέτοντας $M_{j,\rho} := M_{j,l'}$ για κάθε $\rho \in \{l' + 1, \ldots, l\}$, λαμβάνουμε τις ακόλουθες φθίνουσες αλυσίδες υπομοδίων

[20] $\mathfrak{S}_l := \{\sigma : \{1, \ldots, l\} \longrightarrow \{1, \ldots, l\} \mid \sigma \text{ αμφιρριπτική απεικόνιση}\}$.

τού M:

$$\cdots \supseteq M_{j-1} = M_{j,0} \supseteq M_{j,1} \supseteq \cdots \supseteq M_{j,l'} = \cdots = M_{j,l} = M_j = M_{j+1,0} \cdots$$
$$\cdots \supseteq N_{k-1} = N_{k,0} \supseteq N_{k,1} \supseteq \cdots \supseteq N_{k,l} = N_k = N_{k+1,0} \cdots$$

που αποτελούν εκλεπτύνσεις των Π_1 και Π_2, αντιστοίχως. Εν συνεχεία θεωρούμε τους πηλικομοδίους τούς προκύπτοντες από τους εγκλεισμούς $M_{j,k} \subseteq M_{j,k-1}$ και $N_{k,j} \subseteq N_{k,j-1}$ (και αφορούν σε υπομοδίους εφοδιασμένους με *διαδοχικούς* δείκτες). Εφαρμόζοντας το λήμμα 2.3.14 τής «πεταλούδας» (με τα M_j, M_{j-1}, N_k και N_{k-1} στη θέση των εκεί παρατεθέντων N, L, N' και L', αντιστοίχως) λαμβάνουμε για κάθε ζεύγος $(j,k) \in \{1,...,l\} \times \{1,...,l\}$:

$$M_{j,k-1}/M_{j,k} \cong N_{k,j-1}/N_{k,j},$$

οπότε

$$M_{j,k-1} = M_{j,k} \Leftrightarrow N_{k,j-1} = N_{k,j}.$$

Εξ αυτού συμπεραίνουμε ότι, κατόπιν παραλείψεως (από τις ανωτέρω αλυσίδες) όλων των υπομοδίων που είναι ίσοι με τους προηγούμενούς τους, προκύπτουν εκλεπτύνσεις Π_1' τού Π_1 και Π_2' τού Π_2 που είναι ισοδύναμες μεταξύ τους. □

2.3.17 Ορισμός. (i) Λέμε ότι ένας R-μόδιος είναι **απλός** όταν δεν διαθέτει άλλους υπομόδιους πέραν τού τετριμμένου και τού εαυτού του.

(ii) Ένας πύργος υπομοδίων $M =: M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_l \cong \{0\}$ ενός R-μοδίου M καλείται **πύργος των Jordan και Hölder** όταν ο πηλικομόδιος M_i/M_{i+1} είναι απλός για κάθε $i \in \{0,\ldots,l-1\}$.

Λόγω τής αμφιρρίψεως

$$\{\text{υπομόδιοι } U \text{ τού } M \text{ με } M_i \supseteq U \supseteq M_{i+1}\} \quad \longleftrightarrow \quad \{\text{υπομόδιοι τού } M_i/M_{i+1}\},$$

η οποία διατηρεί τους εγκλεισμούς, οι πύργοι των Jordan και Hölder *δεν διαθέτουν γνήσιες εκλεπτύνσεις*. Τούτη η ιδιότητα οδηγεί στο εξής:

2.3.18 Θεώρημα. *Εάν δυο πύργοι υπομοδίων (2.13) ενός R-μοδίου M είναι πύργοι των Jordan και Hölder, τότε $l = l'$ και οι Π_1, Π_2 είναι κατ' ανάγκην ισοδύναμοι.*

Αποδειξη. Κατά το θεώρημα 2.3.16 οι Π_1, Π_2 διαθέτουν ισοδύναμες εκλεπτύνσεις Π_1' και Π_2', αντιστοίχως. Επειδή οι Π_1 και Π_2 είναι εξ υποθέσεως πύργοι των Jordan και Hölder, $\Pi_1 = \Pi_1'$ και $\Pi_2 = \Pi_2'$ (αφού οι μόνες εκλεπτύνσεις τους είναι οι εαυτοί τους). □

2.3.19 Σημείωση. Το θεώρημα 2.3.18 μας πληροφορεί ότι ο αριθμός των *μη τετριμμένων* υπομοδίων τού M που εμπεριέχονται *σε οιονδήποτε* πύργο των Jordan και Hölder είναι *ανεξάρτητος τής επιλογής τού πύργου*. (Αυτός ο αριθμός είθισται να καλείται **ύψος τού πύργου**.)

2.4 ΕΥΘΕΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Τα *γινόμενα* (products) [υλοποιούμενα μέσω «ευθέων γινομένων»] και τα *συγκινόμενα* (coproducts) [υλοποιούμενα μέσω «ευθέων αθροισμάτων»] R-μοδίων μπορούν να ορισθούν *μέχρις ισομορφισμού* ως λύσεις *καθολικών προβλημάτων* (που αφορούν στην ύπαρξη ομομορφισμών συμπληρώσεως διαγραμμάτων).

Αλλά ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή. Εάν M_1, M_2 είναι δυο R-μόδιοι, τότε το *καρτεσιανό γινόμενο* $M_1 \times M_2$ καθίσταται R-μόδιος μέσω των ακολούθων πράξεων «κατά συντεταγμένες»:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad r(x, y) := (rx, ry),$$

για οιαδήποτε $x_1, x_2 \in M_1, y_1, y_2 \in M_2$ και $r \in R$. Ένας ενδιαφέρων χαρακτηρισμός τού R-μοδίου $M_1 \times M_2$ που χρησιμοποιεί τις *προβολές*[21]

$$\mathrm{pr}_1 : M_1 \times M_2 \twoheadrightarrow M_1 \text{ και } \mathrm{pr}_2 : M_1 \times M_2 \twoheadrightarrow M_2$$

επί των M_1 και M_2, αντιστοίχως, έχει ως εξής:

Για κάθε R-μόδιο M και $g_1 \in \mathrm{Hom}_R(M, M_1)$, $g_2 \in \mathrm{Hom}_R(M, M_2)$ υπάρχει *μονοσημάντως ορισμένος* $h \in \mathrm{Hom}_R(M, M_1 \times M_2)$, ούτως ώστε τα κατωτέρω διαγράμματα να είναι μεταθετικά.

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ M \arrow[ur, "g_1"] \arrow[rr, dashed, "h"'] & {} & M_1 \times M_2 \arrow[ul, "\mathrm{pr}_1"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M_2 \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ M \arrow[ur, "g_2"] \arrow[rr, dashed, "h"'] & {} & M_1 \times M_2 \arrow[ul, "\mathrm{pr}_2"'] \end{tikzcd}$$

Εδώ, $h(x) := (g_1(x), g_2(x))$, $\forall x \in M$. Γενίκευση αυτού αποτελεί ο ορισμός 2.4.1.

2.4.1 Ορισμός. Έστω $(M_j)_{j \in J}$ μια (μη κενή[22]) οικογένεια R-μοδίων. Ένα **γινόμενο** (των μελών) αυτής τής οικογενείας είναι ένα ζεύγος $(P, (f_j)_{j \in J})$ αποτελούμενο από έναν R-μόδιο P και μια οικογένεια ομομορφισμών $f_j \in \mathrm{Hom}_R(P, M_j)$, το οποίο ικανοποιεί την εξής *καθολική συνθήκη*:

Για κάθε R-μόδιο M και *για κάθε* οικογένεια ομομορφισμών $g_j \in \mathrm{Hom}_R(M, M_j)$ υπάρχει *μονοσημάντως ορισμένος* $h \in \mathrm{Hom}_R(M, P)$, ούτως ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} & M_j \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ M \arrow[ur, "g_j"] \arrow[rr, dashed, "h"'] & {} & P \arrow[ul, "f_j"'] \end{tikzcd}$$

[21] $\mathrm{pr}_1(x, y) := x$ και $\mathrm{pr}_2(x, y) := y$ για κάθε $(x, y) \in M_1 \times M_2$.

[22] Από εδώ και στο εξής, όταν γίνεται λόγος για μια οικογένεια R-μοδίων $(M_j)_{j \in J}$ θα υποτίθεται ότι $J \neq \varnothing$ (χωρίς να αναφέρεται ρητώς), με μόνη εξαίρεση τη συμβολιστική *σύμβαση* την περιγραφόμενη στο εδ. 2.4.11 (iii).

2.4.2 Λήμμα. *Εάν το $(P, (f_j)_{j\in J})$ είναι ένα γινόμενο μιας οικογενείας R-μοδίων $(M_j)_{j\in J}$, τότε όλοι οι f_j είναι επιμορφισμοί.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την καθολική συνθήκη τού ορισμού 2.4.1 με τον M_j στη θέση τού M και για $g_j := \mathrm{id}_{M_j}$, λαμβάνουμε $f_j \circ h = \mathrm{id}_{M_j}$, απ' όπου έπεται ότι ο ομομορφισμός f_j είναι επιμορφισμός για κάθε $j \in J$. (Βλ. 2.2.22 (ii)⇒(i).) □

2.4.3 Θεώρημα (Μοναδικότητα γινομένου οικογενείας R-μοδίων μέχρις ισομορφισμού). *Εάν $(P, (f_j)_{j\in J})$ είναι ένα γινόμενο μιας οικογενείας R-μοδίων $(M_j)_{j\in J}$, τότε ένα ζεύγος $(P', (f'_j)_{j\in J})$ (όπου P' είναι ένας R-μόδιος και $f'_j \in \mathrm{Hom}_R(P', M_j)$, $\forall j \in J$) είναι ωσαύτως ένα γινόμενο τής $(M_j)_{j\in J}$ εάν και μόνον εάν υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος ισομορφισμός $h : P' \xrightarrow{\cong} P$, τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα*

$$f_j \circ h = f'_j, \ \forall j \in J.$$

Απόδειξη. Εξ ορισμού, υπάρχουν μονοσημάντως ορισμένοι $h \in \mathrm{Hom}_R(P', P)$ και $h' \in \mathrm{Hom}_R(P, P')$ που καθιστούν τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} & M_j \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ P' \arrow[ur, "f'_j"] \arrow[rr, dashed, "h"] & {} & P \arrow[ul, "f_j"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M_j \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ P \arrow[ur, "f_j"] \arrow[rr, dashed, "h'"] & {} & P' \arrow[ul, "f'_j"'] \end{tikzcd}$$

μεταθετικά για κάθε $j \in J$. Επειδή $f_j \circ h \circ h' = f'_j \circ h' = f_j$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & M_j \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ P \arrow[ur, "f_j"] \arrow[rr, dashed, "h\circ h'"] & {} & P \arrow[ul, "f_j"'] \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για κάθε $j \in J$. Από τον ορισμό 2.4.1 υπάρχει *ένας και μόνον* ενδομορφισμός τού P που καθιστά το εν λόγω διάγραμμα μεταθετικό για κάθε δείκτη $j \in J$. Επειδή ισχύει $f_j \circ \mathrm{id}_P = f_j$, έχουμε κατ' ανάγκην $h \circ h' = \mathrm{id}_P$. Με ανάλογα επιχειρήματα (ύστερα από εναλλαγή των ρόλων των P και P', και των f_j και f'_j) αποδεικνύεται ότι $h' \circ h = \mathrm{id}_{P'}$. Άρα ο h είναι *ισομορφισμός* με $h^{-1} = h'$.

Και αντιστρόφως· ας υποθέσουμε ότι η ανωτέρω συνθήκη ικανοποιείται. Επειδή ισχύει η ισότητα $f_j = f'_j \circ h^{-1}$ για κάθε $j \in J$, έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το ζεύγος $(P, (f_j)_{j\in J})$ είναι ένα γινόμενο των μελών τής οικογενείας $(M_j)_{j\in J}$ προκειμένου να κατασκευάσουμε (για οιονδήποτε R-μόδιο M και οιονδήποτε $g_j \in \mathrm{Hom}_R(M, M_j)$) έναν μοναδικό $\theta \in \mathrm{Hom}_R(M, P)$, τέτοιον ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & M_j \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ M \arrow[ur, "g_j"] \arrow[r, dashed, "\theta"] & P \arrow[r, "h^{-1}"] & P' \arrow[ul, "f'_j"'] \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό για κάθε $j \in J$. Προφανώς, $f'_j \circ (h^{-1} \circ \theta) = g_j$, και για κάθε ομομορφισμό $\eta \in \mathrm{Hom}_R(M, P')$ για τον οποίο ισχύει $f'_j \circ \eta = g_j$, έχουμε

$$g_j = f'_j \circ \eta = f'_j \circ (h^{-1} \circ h) \circ \eta, \ \forall j \in J,$$

οπότε, λόγω τής μοναδικότητας τής θ, $h \circ \eta = \theta \Rightarrow \eta = h^{-1} \circ \theta$. Τούτο όμως σημαίνει ότι το ζεύγος $(P', (f'_j)_{j\in J})$ είναι όντως ένα γινόμενο των μελών τής οικογενείας $(M_j)_{j\in J}$. □

2.4.4 Ορισμός. Έστω $(M_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων και έστω

$$\prod_{j\in J} M_j := \left\{ \text{απεικονίσεις } \vartheta : J \longrightarrow \bigcup_{j\in J} M_j \,\middle|\, \vartheta(j) \in M_j, \ \forall j \in J \right\}.$$

Συμβολισμός: Αντί τού $\vartheta(j)$ είθισται να γράφουμε x_j και αντί τής ϑ να γράφουμε $(x_j)_{j\in J}$ και να θεωρούμε το $\prod_{j\in J} M_j$ απαρτιζόμενο από εκείνες τις οικογένειες στοιχείων $(x_j)_{j\in J}$ τής ενώσεως $\bigcup_{j\in J} M_j$ για τις οποίες ισχύει $x_j \in M_j, \forall j \in J$. Το $\prod_{j\in J} M_j$, εφοδιασμένο με τις πράξεις

$$(x_j)_{j\in J} + (x'_j)_{j\in J} := (x_j + x'_j)_{j\in J}, \ \ r(x_j)_{j\in J} := (rx_j)_{j\in J},$$

είναι ένας R-μόδιος και καλείται, ιδιαιτέρως, **ευθύ γινόμενο** (των μελών) τής οικογενείας $(M_j)_{j\in J}$. Για κάθε $\lambda \in J$ ορίζουμε ως λ-**οστή φυσική προβολή** τού $\prod_{j\in J} M_j$ επί τού M_λ τον επιμορφισμό

$$\mathrm{pr}_\lambda : \prod_{j\in J} M_j \twoheadrightarrow M_\lambda, \ (x_j)_{j\in J} \longmapsto \mathrm{pr}_\lambda((x_j)_{j\in J}) := x_\lambda,$$

και ως λ-**οστή φυσική ένθεση** τού M_λ εντός τού $\prod_{j\in J} M_j$ τον μονομορφισμό

$$\mathrm{in}_\lambda : M_\lambda \hookrightarrow \textstyle\prod_{j\in J} M_j, \ x_\lambda \longmapsto \mathrm{in}_\lambda(x_\lambda) := \begin{cases} 0_{M_j}, & \text{όταν } j \neq \lambda, \\ x_\lambda, & \text{όταν } j = \lambda. \end{cases}$$

2.4.5 Θεώρημα (Ύπαρξη γινομένου οικογενείας R-μοδίων). *Εάν $(M_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια R-μοδίων, τότε το ζεύγος $\left(\prod_{j\in J} M_j, (\mathrm{pr}_j)_{j\in J}\right)$ αποτελεί ένα γινόμενο των μελών τής $(M_j)_{j\in J}$.*

Απόδειξη. Έστω M τυχών R-μόδιος. Ας υποθέσουμε ότι $(g_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια R-μοδίων $g_j : M \longrightarrow M_j$. Ορίζοντας τον ομομορφισμό

$$h : M \longrightarrow \prod_{j\in J} M_j, \ x \longmapsto h(x) := (g_j(x))_{j\in J},$$

παρατηρούμε ότι $\mathrm{pr}_j \circ h = g_j$ για κάθε $j \in J$. Μάλιστα, αυτός είναι ο μόνος ομομορφισμός με αυτήν την ιδιότητα, διότι για κάθε $h' \in \mathrm{Hom}_R(M, \prod_{j\in J} M_j)$ με $\mathrm{pr}_j \circ h' = g_j$, $\forall j \in J$, έχουμε $h(x)_j = g_j(x) = h'(x)_j$, για κάθε $j \in J$ και για κάθε $\forall x \in M$, οπότε $h = h'$ και το ζεύγος $\left(\prod_{j\in J} M_j, (\mathrm{pr}_j)_{j\in J}\right)$ είναι ένα γινόμενο των μελών τής $(M_j)_{j\in J}$. □

2.4.6 Σημείωση. (i) Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι το «ευθύ γινόμενο» έχει (μέχρις ισομορφισμού) τόσον την *προσεταιριστική* όσον και τη *μεταθετική* ιδιότητα, ήτοι ότι

$$\prod_{j\in J} M_j \cong \prod_{\lambda\in\Lambda}\left(\prod_{j\in J_\lambda} M_j\right)$$

για κάθε οικογένεια $(J_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μη κενών υποσυνόλων τού J με

$$J = \coprod\nolimits_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda$$

και

$$\prod_{j\in J} M_j \cong \prod_{j\in J} M_{\sigma(j)} \ \text{ για κάθε αμφίρριψη } \ \sigma : J \longrightarrow J.$$

(ii) Ιδιαιτέρως, $\prod_{j\in J} M_j \cong M_\lambda \times \prod\limits_{j\in J\smallsetminus\{\lambda\}} M_j,\ \forall\lambda\in J.$

Εν συνεχεία, δίδεται ένας ορισμός που είναι «δυϊκός» τού 2.4.1.

2.4.7 Ορισμός. Έστω $(M_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων. Ένα **συγκινόμενο** (των μελών) αυτής τής οικογενείας είναι ένα ζεύγος $(C,(f_j)_{j\in J})$ αποτελούμενο από έναν R-μόδιο C και μια οικογένεια ομομορφισμών $f_j \in \mathrm{Hom}_R(M_j, C)$, το οποίο ικανοποιεί την εξής *καθολική συνθήκη*:

Για κάθε R-μόδιο M και *για κάθε* οικογένεια ομομορφισμών $g_j \in \mathrm{Hom}_R(M_j, M)$ υπάρχει *μονοσημάντως ορισμένος* $h \in \mathrm{Hom}_R(C, M)$, ούτως ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} & M_j \arrow[dl, "f_j"'] \arrow[dr, "g_j"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ C \arrow[rr, dashed, "h"'] & & M \end{tikzcd}$$

2.4.8 Λήμμα. *Εάν το $(C,(f_j)_{j\in J})$ είναι ένα συγκινόμενο μιας οικογενείας R-μοδίων $(M_j)_{j\in J}$, τότε όλοι οι f_j είναι μονομορφισμοί.*

Απόδειξη. Ανάλογη εκείνης τού λήμματος 2.4.2. □

2.4.9 Θεώρημα (Μοναδικότητα συγκινομένου οικογενείας μοδίων μέχρις ισομορφισμού). *Εάν $(C,(f_j)_{j\in J})$ είναι ένα συγκινόμενο μιας οικογενείας R-μοδίων $(M_j)_{j\in J}$, τότε ένα ζεύγος $(C',(f'_j)_{j\in J})$ (όπου C' είναι ένας R-μόδιος και $f'_j \in \mathrm{Hom}_R(M_j, C')$, $\forall j\in J$) είναι ωσαύτως ένα συγκινόμενο τής $(M_j)_{j\in J}$ εάν και μόνον εάν υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος ισομορφισμός $h : C \xrightarrow{\cong} C'$, τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα*

$$h\circ f_j = f'_j,\ \forall j\in J.$$

Απόδειξη. Ανάλογη εκείνης τού θεωρήματος 2.4.3. □

2.4.10 Ορισμός. Έστω $(M_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων και έστω

$$\bigoplus_{j\in J} M_j := \left\{ (x_j)_{j\in J} \;\middle|\; \begin{array}{c} x_j \in M_j,\ \forall j \in J \ \text{ και } \ x_j \neq 0_{M_j} \\ \text{για πεπερασμένους} \\ \text{το πολύ δείκτες } j \end{array} \right\} \subseteq \prod_{j\in J} M_j.$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι το $\bigoplus_{j\in J} M_j$ είναι ένας υπομόδιος τού ευθέος γινομένου $\prod_{j\in J} M_j$. Ο R-μόδιος $\bigoplus_{j\in J} M_j$ καλείται **εξωτερικό ευθύ άθροισμα** (των μελών) τής οικογενείας $(M_j)_{j\in J}$.

2.4.11 Σημείωση. (i) Στην περίπτωση όπου ο M_j είναι μη τετριμμένος, $\forall j \in J$, το $\bigoplus_{j\in J} M_j$ είναι *γνήσιος* υπομόδιος τού $\prod_{j\in J} M_j$ εάν και μόνον εάν το J είναι *απειροσύνολο*.

(ii) Εάν το σύνολο δεικτών J είναι *πεπερασμένο*, τότε

$$\bigoplus_{j\in J} M_j = \prod_{j\in J} M_j.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $J = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, λαμβάνουμε το σύνηθες (καρτεσιανό) γινόμενο $M_1 \times \cdots \times M_n$.

(iii) Εάν $M_j = M$, $\forall j \in J$, το $\bigoplus_{j\in J} M_j$ συμβολίζεται ως $M^{(J)}$ και $\prod_{j\in J} M_j =: M^J$. *Σύμβαση*: Επέκταση αυτού τού ορισμού και στην περίπτωση κατά την οποία $J = \varnothing$: Ο $M^{(\varnothing)} = M^{\varnothing}$ θεωρείται ότι είναι ένας *τετριμμένος* R-μόδιος.

(iv) Η εικόνα $\mathrm{in}_\lambda(M_\lambda)$ τού M_λ μέσω τής $\mathrm{in}_\lambda : M_\lambda \hookrightarrow \prod_{j\in J} M_j$ (βλ. 2.4.4) είναι ένας υπομόδιος τού $\bigoplus_{j\in J} M_j$ για κάθε $\lambda \in J$.

2.4.12 Θεώρημα (Ύπαρξη συγκινομένου οικογενείας R-μοδίων). *Εάν $(M_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια R-μοδίων, τότε το $\left(\bigoplus_{j\in J} M_j, (\mathrm{in}_j)_{j\in J}\right)$ αποτελεί ένα συγκινόμενο τής $(M_j)_{j\in J}$.*

Απόδειξη. Έστω M τυχών R-μόδιος. Ας υποθέσουμε ότι $(g_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια R-μοδίων $g_j : M_j \longrightarrow M$. Ορίζοντας τον ομομορφισμό[23]

$$h : \textstyle\bigoplus_{j\in J} M_j \longrightarrow M,\ (x_j)_{j\in J} \longmapsto h((x_j)_{j\in J}) := \sum_{j\in J} g_j(x_j),$$

παρατηρούμε ότι $h\circ\, \mathrm{in}_j = g_j$ για κάθε $j \in J$. Μάλιστα, αυτός είναι ο μόνος ομομορφισμός με αυτήν την ιδιότητα, διότι για κάθε $h' \in \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} M_j, M)$ για τον οποίο ισχύει $h'\circ\, \mathrm{in}_j = g_j$, $\forall j \in J$, έχουμε

$$h'((x_j)_{j\in J}) = \sum_{j\in J} (h' \circ \mathrm{in}_j)(x_j) = \sum_{j\in J} g_j(x_j) = h((x_j)_{j\in J}),\ \forall (x_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} M_j,$$

οπότε $h = h'$ και το ζεύγος $\left(\bigoplus_{j\in J} M_j, (\mathrm{in}_j)_{j\in J}\right)$ είναι ένα συγκινόμενο των μελών τής $(M_j)_{j\in J}$. □

[23] Η h είναι *καλώς ορισμένη* απεικόνιση, διότι για κάθε $(x_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} M_j$ έχουμε $x_j \neq 0_{M_j}$ μόνον για πεπερασμένους το πολύ δείκτες j, οπότε το αναγραφόμενο άθροισμα επέχει θέση *συνήθους αθροίσματος* στοιχείων τού M.

2.4.13 Σημείωση. (i) Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι το «εξωτερικό ευθύ άθροισμα» έχει (μέχρις ισομορφισμού) τόσον την *προσεταιριστική* όσον και τη *μεταθετική* ιδιότητα, ήτοι ότι

$$\bigoplus_{j\in J} M_j \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigoplus_{j\in J_\lambda} M_j\right)$$

για κάθε οικογένεια $(J_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μη κενών υποσυνόλων τού J με $J = \coprod_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda$ και

$$\bigoplus_{j\in J} M_j \cong \bigoplus_{j\in J} M_{\sigma(j)} \text{ για κάθε αμφίρριψη } \sigma : J \longrightarrow J.$$

(ii) Ιδιαιτέρως, $\bigoplus_{j\in J} M_j \cong M_\lambda \times \bigoplus\limits_{j\in J\smallsetminus\{\lambda\}} M_j,\ \forall \lambda\in J.$

2.4.14 Θεώρημα. *Εάν η $(U_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια υπομοδίων ενός R-μοδίου M με $\mathrm{card}(J) \geqslant 2$ και $U := \sum_{j\in J} U_j$, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*
(i) *Εάν $\sum\limits_{j\in J} u_j = 0_M$, όπου $u_j \in U_j, \forall j\in J$, με $u_j \neq 0_M$ για πεπερασμένους το πολύ προσθετέους, τότε $u_j = 0_M, \forall j\in J$.*
(ii) *Κάθε $u \in U$ γράφεται ως άθροισμα $u = \sum\limits_{j\in J} u_j$, μονοσημάντως ορισμένων στοιχείων $u_j \in U_j, \forall j\in J$, όπου $u_j \neq 0_M$ για πεπερασμένους το πολύ προσθετέους.*
(iii) *Για κάθε δείκτη $\lambda\in J$ έχουμε $U_\lambda \cap \left(\sum\limits_{j\in J\smallsetminus\{\lambda\}} U_j\right) = \{0_M\}$.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Σύμφωνα με την πρόταση 2.1.16 κάθε στοιχείο τού U γράφεται ως άθροισμα κάποιων στοιχείων των $U_j, j\in J$, όπου μόνον το πολύ πεπερασμένοι εξ αυτών είναι $\neq 0_M$. Έστω τυχόν $u\in U$. Υποθέτοντας ότι αυτό γράφεται ως

$$u = \sum_{j\in J} u_j = \sum_{j\in J} u'_j,$$

για κάποια $u_j, u'_j \in U_j$, $j\in J$, και κάποια $u_2, u'_2 \in U_2$, όπου μόνον το πολύ πεπερασμένοι εξ αυτών των u_j (και αντιστοίχως, των u'_j) είναι $\neq 0_M$, αρκεί να δείξουμε ότι $u_j = u'_j, \forall j\in J$. Επειδή

$$\sum_{j\in J} u_j = \sum_{j\in J} u'_j \Longrightarrow \sum_{j\in J}\left(u_j - u'_j\right) = 0_M,$$

εφαρμόζοντας το (i) για τα στοιχεία $u_j - u'_j$, $j\in J$, λαμβάνουμε

$$\left[u_j - u'_j = 0_M,\ \forall j\in J\right] \Longrightarrow \left[u_j = u'_j,\ \forall j\in J\right].$$

(ii)⇒(iii) Έστω $\lambda\in J$ και έστω τυχόν $u \in U_\lambda \cap \left(\sum\limits_{j\in J\smallsetminus\{\lambda\}} U_j\right) \subseteq U$. Επειδή

$$u = \sum_{j\in J} w_j = \sum_{j\in J} w'_j,$$

όπου

$$w_j := \begin{cases} 0_M, & \text{όταν } j \neq \lambda, \\ u, & \text{όταν } j = \lambda, \end{cases} \quad \text{και } w'_j := \begin{cases} 0_M, & \text{όταν } j \neq \lambda', \\ u, & \text{όταν } j = \lambda', \end{cases}$$

για $\lambda, \lambda' \in J, \lambda \neq \lambda'$, από το (ii) έπεται ότι $u = 0_M \Rightarrow U_\lambda \cap \left(\sum_{j \in J \smallsetminus \{\lambda\}} U_j \right) \subseteq \{0_M\}$.
Από την άλλη μεριά, η τομή $U_\lambda \cap \left(\sum_{j \in J \smallsetminus \{\lambda\}} U_j \right)$ (ούσα, κατά την πρόταση 2.1.10, υπομόδιος τού M) οφείλει να περιέχει το 0_M, οπότε

$$U_\lambda \cap \left(\sum_{j \in J \smallsetminus \{\lambda\}} U_j \right) \supseteq \{0_M\}.$$

Άρα τελικώς $U_\lambda \cap \left(\sum_{j \in J \smallsetminus \{\lambda\}} U_j \right) = \{0_M\}$.
(iii)⇒(i) Εάν $\sum_{j \in J} u_j = 0_M$, όπου $u_j \in U_j$, $\forall j \in J$, με $u_j \neq 0_M$ για πεπερασμένους το πολύ προσθετέους, τότε

$$u_\lambda = - \sum_{j \in J \smallsetminus \{\lambda\}} u_j \in \sum_{j \in J \smallsetminus \{\lambda\}} U_j, \ \forall \lambda \in J,$$

οπότε $u_\lambda \in U_\lambda \cap (\sum_{j \in J \smallsetminus \{\lambda\}} U_j)$. Επειδή (εξ υποθέσεως) $U_\lambda \cap (\sum_{j \in J \smallsetminus \{\lambda\}} U_j) = \{0_M\}$, έχουμε $u_\lambda = 0_M$ για κάθε $\lambda \in J$. □

2.4.15 Ορισμός. Έστω $(U_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια υπομοδίων ενός R-μοδίου M με $\mathrm{card}(J) \geqslant 2$ και έστω $U := \sum_{j \in J} U_j$. Εάν ικανοποιείται μία (και, κατ' επέκταση, και οι τρεις) εκ των συνθηκών τού θεωρήματος 2.4.14, τότε λέμε ότι ο U είναι το **εσωτερικό ευθύ άθροισμα** των μελών αυτής τής οικογενείας και γράφουμε (τουλάχιστον προς στιγμήν[24]) $U = \bigoplus_{j \in J}^{\text{εσ.}} U_j$.

2.4.16 Σημείωση. (i) Εάν υποθέσουμε ότι $(U_j)_{j \in J}$ είναι μια οικογένεια υπομοδίων ενός R-μοδίου M, τότε, εκλαμβάνοντας καθέναν εκ των U_j ως «αυτόνομο» R-μόδιο, σχηματίζουμε το *εξωτερικό* ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{j \in J} U_j$ και αποκτούμε (μέσω τού θεωρήματος 2.4.12 και τού ορισμού 2.4.7) τον μοναδικό ομομορφισμό h που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & U_\lambda \arrow[dl, hook, "\mathrm{in}_\lambda"'] \arrow[dr, hook', "\mathrm{in}_{U_\lambda, M}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ \bigoplus_{j \in J} U_j \arrow[rr, dashed, "h"'] & & M \end{tikzcd}$$

[24] Βλ. 2.4.16 (iii).

Ο h είναι *ισομορφισμός* $\Leftrightarrow M = \bigoplus_{j\in J}^{\text{εσ.}} U_j$. Πράγματι· ο h είναι *επιμορφισμός* εάν και μόνον εάν $\forall x \in M \;\; \exists (u_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} U_j : x = h((u_j)_{j\in J}) = \sum_{j\in J} u_j$, δηλαδή εάν και μόνον εάν $M = \sum_{j\in J} U_i$. Ο h είναι *μονομορφισμός* εάν και μόνον εάν για οιαδήποτε στοιχεία $(u_j)_{j\in J}, (u'_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{j\in J} U_j$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\sum_{j\in J} u_j = \sum_{j\in J} u'_j \Longrightarrow [u_j = u'_j, \; \forall j \in J].$$

Άρα ο ισχυρισμός είναι αληθής λόγω τού (ii) τού θεωρήματος 2.4.14.

(ii) Από την άλλη μεριά, εάν $(M_j)_{j\in J}$ είναι τυχούσα οικογένεια R-μοδίων, τότε

$$\bigoplus_{j\in J} M_j = \bigoplus_{j\in J}^{\text{εσ.}} \text{in}_j(M_j).$$

(iii) Επί τη βάσει των προαναφερθέντων, οιοσδήποτε R-μόδιος γραφόμενος ως εσωτερικό ευθύ άθροισμα των μελών μιας οικογενείας υπομοδίων του είναι ισόμορφος με το εξωτερικό ευθύ άθροισμα αυτών (ιδωθέντων ως «αυτονόμων» R-μοδίων) και, αντιστρόφως, το εξωτερικό ευθύ άθροισμα των μελών τυχούσας οικογενείας R-μοδίων είναι ίσο με το εσωτερικό ευθύ άθροισμα υπομοδίων του, καθένας των οποίων είναι ισόμορφος με το αντίστοιχο μέλος της. (Υπ' αυτήν την έννοια, υφίσταται *δομοθεωρητική ταύτιση* μεταξύ *εσωτερικών* και *εξωτερικών* ευθέων αθροισμάτων.) Γι' αυτόν τον λόγο, θα υιοθετηθεί εφεξής το "$\bigoplus$" για την έκφραση *και* των εσωτερικών ευθέων αθροισμάτων και δεν θα γίνεται χρήση καν των επιθέτων *εξωτερικό* και *εσωτερικό*, καθότι θα είναι πάντοτε σαφές από τα συμφραζόμενα το ποιο εξ αυτών θα υπονοείται.

2.4.17 Πόρισμα. *Εάν U, W είναι υπομόδιοι ενός R-μοδίου M, τότε*

$$M = U \oplus W \Longleftrightarrow [M = U + W \text{ και } U \cap W = \{0_M\}].$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το θεώρημα 2.4.14, τον ορισμό 2.4.15 και τα προαναφερθέντα στο εδ. 2.4.16 (iii). □

2.4.18 Ορισμός. (i) Λέμε ότι δυο υπομόδιοι U, W ενός R-μοδίου M είναι **συμπληρωματικοί** (και ο ένας **συμπλήρωμα** τού άλλου) εντός τού M όταν

$$M = U \oplus W. \tag{2.14}$$

(ii) Ένας υπομόδιος U ενός R-μοδίου M καλείται **ευθύς προσθετέος** τού M όταν υπάρχει κάποιος υπομόδιος W τού M, ούτως ώστε να ισχύει η ισότητα (2.14).

2.4.19 Παρατήρηση. (i) Υπάρχουν υπομόδιοι R-μοδίων που *δεν διαθέτουν κανένα* συμπλήρωμα. Π.χ., εάν $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, \pm 1\}$ και εάν υποθέταμε ότι ο υπομόδιος $k\mathbb{Z}$ τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Z}$ διαθέτει κάποιο συμπλήρωμα, αυτό θα έπρεπε (ως ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$) να είναι τής μορφής $l\mathbb{Z}$ για κάποιον $l \in \mathbb{Z}$, οπότε θα είχαμε

$$k\mathbb{Z} \cap l\mathbb{Z} = \text{εκπ}(k, l)\mathbb{Z} = \{0\} \Rightarrow l = 0 \Rightarrow k\mathbb{Z} + 0\mathbb{Z} = k\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Z},$$

και θα καταλήγαμε σε άτοπο.

(ii) Υπομόδιοι R-μοδίων ενδέχεται να έχουν *διαφορετικά* συμπληρώματα. Π.χ., θεωρώντας τούς εξής υποχώρους τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^2$:

$$U_1 := \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \; U_2 := \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \; W := \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

και παρατηρώντας ότι κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ μπορεί να εκφρασθεί *μονοσημάντως* ως

$$(x,y) = (x-y,0) + (y,y) = (0,y-x) + (x,x),$$

διαπιστώνουμε ότι $\mathbb{R}^2 = U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$ με $U_1 \neq U_2$.

Ωστόσο, *όλα* τα συμπληρώματα ενός υπομοδίου ενός R-μοδίου οφείλουν να είναι *ισόμορφα*, όπως έπεται από την ακόλουθη πρόταση:

2.4.20 Πρόταση. *Εάν U, W είναι υπομόδιοι ενός R-μοδίου M με $M = U \oplus W$, τότε λαμβάνουμε $M/W \cong U$.*

Απόδειξη. Επειδή $M = U \oplus W$, η απεικόνιση

$$p : M \longrightarrow U, \; x = u + w \longmapsto p(x) := u,$$

είναι επιμορφισμός έχων ως πυρήνα του τον $\operatorname{Ker}(p) := \{u + w \in M \mid u = 0_M\} \cong W$, οπότε το 1ο θεώρημα ισομορφισμών 2.3.7 δίδει $M/W \cong U$. □

2.4.21 Πρόταση. *Εάν ένας R-μόδιος M είναι το άθροισμα $M = U + W$ δύο υπομοδίων του U και W, τότε*

$$M/(U \cap W) \cong (M/U) \oplus (M/W).$$

Απόδειξη. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι η απεικόνιση

$$f : M \longrightarrow (M/U) \oplus (M/W), \; x \longmapsto f(x) := (x + U, x + W),$$

είναι ομομορφισμός, έχων ως πυρήνα του τον

$$\operatorname{Ker}(f) = \{x \in M \mid (x + U, x + W) = (U, W)\} = \{x \in M \mid x \in U \cap W\} = U \cap W.$$

Για τυχόν $(x + U, y + W) \in (M/U) \oplus (M/W)$, τα στοιχεία x και y γράφονται ως αθροίσματα $x = u_1 + w_1$ και $y = u_2 + w_2$ κάποιων στοιχείων, όπου $u_1, u_2 \in U$ και $w_1, w_2 \in W$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} f(w_1 + u_2) &= f(w_1) + f(u_2) = (w_1 + U, 0_M + W) + (0_M + U, u_2 + W) \\ &= (w_1 + U, u_2 + W) = (w_1 + u_1 + U, u_2 + w_2 + W) \\ &= (u_1 + w_1 + U, u_2 + w_2 + W) = (x + U, y + W), \end{aligned}$$

οπότε ο f είναι επιμορφισμός. Υπολείπεται η εφαρμογή τού 1ου θεωρήματος ισομορφισμών 2.3.7. □

2.4.22 Παράδειγμα. Εάν υποτεθεί ότι $k, l \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, l \geqslant 2$ με μκδ$(k,l) = 1$, τότε έχουμε $k\mathbb{Z} \cap l\mathbb{Z} = kl\mathbb{Z}$ και $k\mathbb{Z} + l\mathbb{Z} =$ μκδ$(k,l)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, οπότε

$$\mathbb{Z}_{kl} \cong \mathbb{Z}/kl\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l.$$

2.4.23 Ορισμός. Εάν η
$$(f_j : M_j \longrightarrow N_j)_{j \in J}$$
είναι μια οικογένεια ομομορφισμών R-μοδίων και ορίσουμε **ως ευθύ γινόμενο** των μελών της την απεικόνιση
$$\prod_{j \in J} f_j : \prod_{j \in J} M_j \longrightarrow \prod_{j \in J} N_j, \ \ (x_j)_{j \in J} \longmapsto (f_j(x_j))_{j \in J},$$
και, αντιστοίχως, ως **ευθύ άθροισμα** των μελών της την απεικόνιση
$$\bigoplus_{j \in J} f_j : \bigoplus_{j \in J} M_j \longrightarrow \bigoplus_{j \in J} N_j, \ \ (x_j)_{j \in J} \longmapsto (f_j(x_j))_{j \in J},$$
(όπου εδώ μόνον το πολύ πεπερασμένοι εξ αυτών των x_j είναι διάφορα τού μηδενικού στοιχείου). Αμφότερες οι $\prod\limits_{j \in J} f_j$ και $\bigoplus\limits_{j \in J} f_j$ είναι ομομορφισμοί R-μοδίων με τους υπομοδίους
$$\mathrm{Ker}(\prod_{j \in J} f_j) = \prod_{j \in J} \mathrm{Ker}(f_j), \quad \mathrm{Ker}(\bigoplus_{j \in J} f_j) = \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Ker}(f_j) \tag{2.15}$$
ως πυρήνες τους και τους υπομοδίους
$$\mathrm{Im}(\prod_{j \in J} f_j) = \prod_{j \in J} \mathrm{Im}(f_j), \quad \mathrm{Im}(\bigoplus_{j \in J} f_j) = \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Im}(f_j) \tag{2.16}$$
ως εικόνες τους.

2.4.24 Πρόταση. *Έστω $(M_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων και έστω N_j ένας υπομόδιος τού M_j, $\forall j \in J$. Τότε μέσω τού ευθέος γινομένου και τού ευθέος αθροίσματος των μελών τής*
$$(\pi^{M_j}_{N_j} : M_j \longrightarrow M_j/N_j)_{j \in J}$$
(τής απαρτιζομένης από τους αντιστοίχους φυσικούς επιμορφισμούς) επάγονται ισομορφισμοί R-μοδίων:
$$(\prod_{j \in J} M_j)/(\prod_{j \in J} N_j) \cong \prod_{j \in J} (M_j/N_j)$$
και
$$(\bigoplus_{j \in J} M_j)/(\bigoplus_{j \in J} N_j) \cong \bigoplus_{j \in J} (M_j/N_j).$$

Απόδειξη. Επειδή οι $\prod_{j \in J} \pi^{M_j}_{N_j}$ και $\bigoplus_{j \in J} \pi^{M_j}_{N_j}$ είναι επιμορφισμοί και
$$\mathrm{Ker}(\prod_{j \in J} \pi^{M_j}_{N_j}) = \prod_{j \in J} N_j, \quad \mathrm{Ker}(\bigoplus_{j \in J} \pi^{M_j}_{N_j}) = \bigoplus_{j \in J} N_j,$$
αρκεί να εφαρμοσθεί το 1ο θεώρημα ισομορφισμών 2.3.7. □

2.5 ΕΛΕΥΘΕΡΟΙ R-ΜΟΔΙΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΕΙΣ

Η κλάση των διανυσματικών χώρων εμπεριέχεται στην (πολύ ευρύτερη) κλάση των *ελευθέρων μοδίων*.

2.5.1 Ορισμός. Έστω $\mathscr{X}$ ένα μη κενό σύνολο. Ορίζουμε ως **ελεύθερο R-μόδιο επί τού** $\mathscr{X}$ κάθε ζεύγος (F, f) αποτελούμενο από έναν R-μόδιο F και μια απεικόνιση $f : \mathscr{X} \longrightarrow F$ που ικανοποιεί την εξής *καθολική συνθήκη*:

Για κάθε R-μόδιο M και *για κάθε* απεικόνιση $g : \mathscr{X} \longrightarrow M$ υπάρχει *μονοσημάντως ορισμένος* $h \in \mathrm{Hom}_R(F, M)$, ούτως ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{X} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ F \arrow[rr, dashed, "h"'] & {} & M \end{tikzcd}$$

2.5.2 Λήμμα. *Εάν (F, f) είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος επί ενός μη κενού συνόλου $\mathscr{X}$, τότε η απεικόνιση f είναι ενριπτική και $F = \mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}(f))$.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η f είναι ενριπτική, υποθέτουμε ότι $x_1, x_2 \in \mathscr{X}$ με $x_1 \neq x_2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Προς τούτο θεωρούμε τυχόντα μη τετριμμένο R-μόδιο M (π.χ., τον ίδιον τον R ως R-μόδιο[25]) και τυχούσα απεικόνιση $g : \mathscr{X} \longrightarrow M$, τέτοια ώστε να ισχύει $g(x_1) \neq g(x_2)$. Εάν $h : F \longrightarrow M$ είναι ο μοναδικός ομομορφισμός με $h \circ f = g$, τότε

$$h(f(x_1)) = g(x_1) \neq g(x_2) = h(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Έστω τώρα $U := \mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}(f))$ ο υπομόδιος τού F ο παραγόμενος από την εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ τής απεικονίσεως f. Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{X} \arrow[r, two heads, "\check{f}"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[r, hook, "\iota"] & U \arrow[r, hook, "\iota_U"] & F \\ F \arrow[urr, bend right, "h"] \arrow[urrr, bend right, "\iota_U \circ h"'] & & & \end{tikzcd}$$

στο οποίο οι $\iota : \mathrm{Im}(f) \hookrightarrow U$ και $\iota_U : U \hookrightarrow F$ είναι οι συνήθεις ενθέσεις, και $\check{f} : \mathscr{X} \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(f)$ η επίρριψη η προκύπτουσα ύστερα από περιορισμό τού πεδίου τιμών τής f στην εικόνα της. Εν προκειμένω, επειδή το ζεύγος (F, f) είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος επί τού συνόλου $\mathscr{X}$, ο $h \in \mathrm{Hom}_R(F, U)$ είναι ο μοναδικός ομομορφισμός με την ιδιότητα $h \circ f = \iota \circ \check{f}$. Σημειωτέον ότι $\iota_U \circ h \in \mathrm{Hom}_R(F, F)$ με

$$(\iota_U \circ h) \circ f = \iota_U \circ (h \circ f) = \iota_U \circ \iota \circ \check{f}.$$

Και πάλι, λοιπόν, επειδή το ζεύγος (F, f) είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος επί τού συνόλου $\mathscr{X}$, υφίσταται ένας και μόνον $\theta \in \mathrm{Hom}_R(F, F)$ με $\theta \circ f = \iota_U \circ \iota \circ \check{f}$. Προφανώς, $\mathrm{id}_F \circ f = f = \iota_U \circ \iota \circ \check{f} \Rightarrow \theta = \mathrm{id}_F \Rightarrow \iota_U \circ h = \mathrm{id}_F$ (από τη μοναδικότητα τού

[25] Εξ υποθέσεως, $1_R \neq 0_R$.

θ), οπότε η ι_U οφείλει να είναι *και* επιρριπτική (βλ. 2.2.22), πράγμα που σημαίνει ότι $U = F$. $\square$

2.5.3 Θεώρημα (Η μοναδικότητα τού (F, f) μέχρις ισομορφισμού). *Εάν υποθέσουμε ότι (F, f) είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος επί ενός μη κενού συνόλου $\mathscr{X}$, τότε ένα ζεύγος (F', f') (όπου F' είναι ένας R-μόδιος και $f' : \mathscr{X} \longrightarrow F'$ μια απεικόνιση) είναι ωσαύτως ένας ελεύθερος R-μόδιος επί τού $\mathscr{X}$ εάν και μόνον εάν υπάρχει ένας μονοσημάντως ορισμένος ισομορφισμός $j : F \xrightarrow{\cong} F'$ με $j \circ f = f'$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ένα τέτοιο ζεύγος (F', f') είναι ελεύθερος R-μόδιος επί τού $\mathscr{X}$. Τότε υπάρχουν μοναδικοί $j \in \mathrm{Hom}_R(F, F')$ και $j' \in \mathrm{Hom}_R(F', F)$ που καθιστούν τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{X} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ F \arrow[rr, dashed, "j"'] & {} & F' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathscr{X} \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ F' \arrow[rr, dashed, "j'"'] & {} & F \end{tikzcd}$$

μεταθετικά. Επειδή $j' \circ j \circ f = j' \circ f' = f$, προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{X} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ F \arrow[rr, "j' \circ j"'] & {} & F \end{tikzcd}$$

Επειδή το (F, f) είναι ελεύθερος R-μόδιος επί τού συνόλου $\mathscr{X}$ και $\mathrm{id}_F \circ f = f$, έχουμε κατ' ανάγκην $j' \circ j = \mathrm{id}_F$. Παρομοίως, ύστερα από εναλλαγή των ρόλων των F και F', δείχνεται ότι $j \circ j' = \mathrm{id}_{F'}$. Ως εκ τούτου, ο j είναι *ισομορφισμός* με $j^{-1} = j'$.

Και αντιστρόφως· εάν υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $j : F \xrightarrow{\cong} F'$ με $j \circ f = f'$, τότε $f = j^{-1} \circ f'$ και για κάθε R-μόδιο M και για κάθε απεικόνιση $g : \mathscr{X} \longrightarrow M$ προκύπτει ένα διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathscr{X} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, "f"] & M \\ F' \arrow[r, bend right, "j^{-1}"'] & F \arrow[l, "j"'] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

όπου $h \in \mathrm{Hom}_R(F, M)$ είναι ο μοναδικός ομομορφισμός με την ιδιότητα

$$h \circ j^{-1} \circ f' = h \circ f = g.$$

Για να αποδειχθεί ότι το ζεύγος (F', f') είναι ελεύθερος R-μόδιος επί τού $\mathscr{X}$ αρκεί να αποδειχθεί ότι για κάθε $\beta \in \mathrm{Hom}_R(F', M)$ με $\beta \circ f' = g$, έχουμε $\beta = h \circ j^{-1}$. Παρατηρούμε ότι $\beta \circ f' = g \Leftrightarrow \beta \circ j \circ f = g$, οπότε, λόγω τής μοναδικότητας τού h, $\beta \circ j = h \Rightarrow \beta = h \circ j^{-1}$. $\square$

2.5.4 Σημείωση. Για την απόδειξη τής *υπάρξεως* ελευθέρου R-μοδίου επί ενός μη κενού συνόλου $\mathscr{X}$ θεωρούμε τον R-μόδιο $R^{(\mathscr{X})}$ (βλ. 2.1.9 (iv) και (i)) και ορίζουμε την ενριπτική[26] απεικόνιση

$$\boxed{\begin{gathered}\delta : \mathscr{X} \longrightarrow R^{(\mathscr{X})},\ x \longmapsto \delta_x,\\ \mathscr{X} \ni y \longmapsto \delta_x(y) := \delta_{x,y} := \begin{cases} 1_R, & \text{όταν } x = y,\\ 0_R, & \text{όταν } x \neq y,\end{cases}\end{gathered}} \tag{2.17}$$

(Το $\delta_{x,y}$ είναι το σύνηθες **δέλτα τού Kronecker**.)

2.5.5 Θεώρημα (Ύπαρξη ελευθέρου R-μοδίου επί ενός μη κενού συνόλου $\mathscr{X}$). *Εάν $\mathscr{X}$ είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε το ζεύγος $(R^{(\mathscr{X})}, \delta)$ αποτελεί έναν ελεύθερο R-μόδιο επί τού $\mathscr{X}$.*

Απόδειξη. Έστω M τυχών R-μόδιος και έστω $g : \mathscr{X} \longrightarrow M$ τυχούσα απεικόνιση. Ορίζουμε μια απεικόνιση $h : R^{(\mathscr{X})} \longrightarrow M$ μέσω τού τύπου[27]

$$h(\theta) := \sum_{x\in\mathscr{X}} \theta(x)g(x),\ \forall\theta \in R^{(\mathscr{X})}. \tag{2.18}$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι $h \in \mathrm{Hom}_R(R^{(\mathscr{X})}, M)$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathscr{X}$,

$$(h \circ \delta)(x) = h(\delta_x) = \sum_{y\in\mathscr{X}} \delta_x(y)g(y) = g(x),$$

οπότε $h \circ \delta = g$. Απομένει λοιπόν να αποδειχθεί ότι ο h είναι ο μοναδικός ομομορφισμός με αυτήν την ιδιότητα. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $\theta \in R^{(\mathscr{X})}$ και για κάθε $y \in \mathscr{X}$ ισχύει

$$\theta(y) = \theta(y)\, 1_R = \sum_{x\in\mathscr{X}} \theta(x)\,\delta_x(y) = \left(\sum_{x\in\mathscr{X}} \theta(x)\,\delta_x\right)(y),$$

οπότε $\theta = \sum_{x\in\mathscr{X}} \theta(x)\,\delta_x$. Υποθέτοντας τώρα ότι $h' \in \mathrm{Hom}_R(R^{(\mathscr{X})}, M)$ είναι τέτοιος, ώστε $h' \circ \delta = g$, λαμβάνουμε για κάθε $\theta \in R^{(\mathscr{X})}$

$$h'(\theta) = h'\left(\sum_{x\in\mathscr{X}} \theta(x)\,\delta_x\right) = \sum_{x\in\mathscr{X}} \theta(x)h'(\delta_x) = \sum_{x\in\mathscr{X}} \theta(x)g(x) = h(\theta),$$

απ' όπου έπεται ότι $h' = h$. □

2.5.6 Ορισμός. Λέμε ότι ένας R-μόδιος M είναι **ελεύθερος** όταν ο M είναι *είτε* τετριμμένος *είτε* μη τετριμμένος και (ταυτοχρόνως) υπάρχει κάποιο μη κενό σύνολο $\mathscr{X}$ και ένας ισομορφισμός R-μοδίων $M \xrightarrow{\cong} R^{(\mathscr{X})}$. (Πρβλ. 2.5.3 και 2.5.5.)

Οι ελεύθεροι R-μόδιοι χαρακτηρίζονται μέσω τής εννοίας τής *βάσεως*, όπως τη γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα. (Βλ. θεώρημα 2.5.13.)

---

[26] Εάν $\delta_{x_1} = \delta_{x_2}$, τότε $\delta_{x_1}(y) = \delta_{x_2}(y)$, $\forall y \in \mathscr{X}$, οπότε για $y = x_1 \Rightarrow 1 = \delta_{x_1}(x_1) = \delta_{x_2}(x_1) \Rightarrow x_2 = x_1$.

[27] Το εν λόγω άθροισμα είναι *καλώς ορισμένο*, καθότι μόνον πεπερασμένου πλήθους προσθετέοι είναι μη μηδενικοί.

2.5.7 Ορισμός. Έστω M ένας R-μόδιος.

(i) Λέμε ότι ένα υποσύνολο $\mathscr{X} \subseteq M$ είναι (R-)**γραμμικώς ανεξάρτητο** όταν[28] είτε $\mathscr{X} = \varnothing$ είτε $\mathscr{X} \neq \varnothing$ *και* για οιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, ..., x_k\}$ τού $\mathscr{X}$ και $r_1, ..., r_k \in R$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\sum_{j=1}^{k} r_j x_j = 0_M \Rightarrow [r_j = 0_R,\ \forall j \in \{1, ..., k\}] .$$

(ii) Κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο $\mathscr{X} \subseteq M$ το οποίο αποτελεί σύστημα γεννητόρων τού M (δηλ., $\mathrm{Lin}_R(\mathscr{X}) = M$) καλείται **βάση**[29] τού M.

2.5.8 Παραδείγματα. (i) Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $\varnothing \neq \mathscr{X} \subseteq M$. Εάν το $\mathscr{X}$ περιέχει το 0_M, τότε το $\mathscr{X}$ είναι κατ' ανάγκην γραμμικώς εξαρτημένο, διότι για $\{0_M, x_1, ..., x_k\} \subseteq \mathscr{X}$ έχουμε $1_R 0_M + 0_R x_1 + \cdots + 0_R x_k = 0_M$, όπου $1_R \neq 0_R$.

(ii) Ένα μονοσύνολο $\{r\}$, $r \in R \smallsetminus \{0_R\}$, οιουδήποτε μη τετριμμένου μεταθετικού δακτυλίου R είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (με τον R θεωρούμενον ως R-μόδιο) εάν και μόνον εάν το r δεν είναι μηδενοδιαιρέτης εντός τού R.

(iii) Σε κάθε διανυσματικό χώρο V (οριζόμενον υπεράνω ενός σώματος K) κάθε μονοσύνολο $\{x\}$, $x \in V \smallsetminus \{0_V\}$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, καθόσον από την εξίσωση $\lambda x = 0_V$, $\lambda \in K$, έπεται ότι $\lambda = 0_K$.

(iv) Εάν $q, q' \in \mathbb{Q}$, $q \neq q'$, τότε εντός τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Q}$ το δισύνολο $\{q, q'\}$ είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένο. Πράγματι· γράφοντας αυτούς τους ρητούς αριθμούς ως $q = \frac{a}{b}$ και $q' = \frac{a'}{b'}$ για κατάλληλους $a, a' \in \mathbb{Z}$ (με $(a, a') \neq (0, 0)$) και $b, b' \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, και παρατηρούμε ότι $(a'b)q + (-ab')q' = 0$, με τουλάχιστον έναν εκ των συντελεστών $\neq 0$.

2.5.9 Θεώρημα. *Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $\varnothing \neq \mathscr{X} \subseteq M$. Τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Το $\mathscr{X}$ είναι μια βάση τού M.*

(ii) *Κάθε στοιχείο τού M γράφεται κατά τρόπο μονοσήμαντο ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τού $\mathscr{X}$.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εξ ορισμού, κάθε στοιχείο τού M γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τού $\mathscr{X}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x \in M$ υφίσταται πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, ..., x_k\}$ τού $\mathscr{X}$ και $r_1, ..., r_k, s_1, ..., s_k \in R$, ούτως ώστε να ισχύει

$$x = \sum_{j=1}^{k} r_j x_j = \sum_{j=1}^{k} s_j x_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} (r_j - s_j) x_j = 0_M .$$

Επειδή το $\mathscr{X}$ είναι εξ υποθέσεως γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού M, έχουμε κατ' ανάγκην $r_j = s_j$ για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$.

---

[28] Όταν δεν πληρούται καμία εξ αυτών των συνθηκών, τότε λέμε ότι το $\mathscr{X}$ είναι **γραμμικώς εξαρτημένο.**

[29] Προφανώς, το $\varnothing$ αποτελεί βάση τού M εάν και μόνον εάν ο M είναι *τετριμμένος*.

(ii)⇒(i) Αρκεί να αποδειχθεί ότι το $\mathscr{X}$ είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού M. Προς τούτο θεωρούμε τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, ..., x_k\}$ τού $\mathscr{X}$. Από κάθε σχέση τής μορφής $\sum_{j=1}^{k} r_j x_j = 0_M$ (με $r_1, ..., r_k \in R$) προκύπτει ότι

$$\sum_{j=1}^{k} r_j x_j = 0_M = \sum_{j=1}^{k} 0_R x_j \Rightarrow [r_j = 0_R,\ \forall j \in \{1, ..., k\}]$$

λόγω τής προϋποτεθείσας μοναδικότητας τής παραστάσεως οιουδήποτε στοιχείου τού M ως γραμμικού συνδυασμού στοιχείων τού $\mathscr{X}$. □

2.5.10 Πρόταση. *Εάν $f : M \xrightarrow{\cong} N$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ δυο R-μοδίων και $\mathscr{X}$ μια βάση τού M, τότε η εικόνα αυτής $f(\mathscr{X})$ μέσω τού f αποτελεί μια βάση τού N.*

Αποδειξη. Επειδή $N = f(M) = f(\mathrm{Lin}_R(\mathscr{X})) = \mathrm{Lin}_R(f(\mathscr{X}))$, η εικόνα $f(\mathscr{X})$ αποτελεί σύστημα γεννητόρων τού N. Εάν $\mathscr{X} = \varnothing$, τότε αμφότεροι οι M, N είναι τετριμμένοι και $f(\varnothing) = \varnothing$. Εάν $\mathscr{X} \neq \varnothing$, τότε για οιοδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο $\{f(x_1), ..., f(x_k)\}$ τής εικόνας $f(\mathscr{X})$ και $r_1, ..., r_k \in R$ με

$$\sum_{j=1}^{k} r_j f(x_j) = 0_N \quad \left[\Leftrightarrow f\Big(\sum_{j=1}^{k} r_j x_j\Big) = 0_N \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \in \mathrm{Ker}(f)\right]$$

έχουμε $\sum_{j=1}^{k} r_j x_j = 0_M$ (διότι $\mathrm{Ker}(f) = \{0_M\}$), οπότε $r_j = 0_R,\ \forall j \in \{1, ..., k\}$, λόγω τού ότι το $\mathscr{X}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού M. Άρα και η εικόνα $f(\mathscr{X})$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού N. □

2.5.11 Πρόταση. *Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $\mathscr{X} \subseteq M$. Εάν υποτεθεί ότι το $\mathscr{X}$ είναι μια βάση τού M, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Το $\mathscr{X}$ είναι ένα ελαχιστικό σύστημα γεννητόρων*[30] *τού M.*

(ii) *Το $\mathscr{X}$ είναι ένα μεγιστικό*[31] *γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού M.*

Αποδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε «εις άτοπον απαγωγή».

(i) Έστω ότι το $\mathscr{X}$ δεν είναι ελαχιστικό σύστημα γεννητόρων τού M. Τότε $\mathscr{X} \neq \varnothing$ και υπάρχει κάποιο $\mathscr{Y} \in \mathfrak{P}(M) : \mathrm{Lin}_R(\mathscr{Y}) = M$ με $\mathscr{Y} \subsetneqq \mathscr{X}$. Έστω $x \in \mathscr{X} \smallsetminus \mathscr{Y}$. Επειδή $x \in M = \mathrm{Lin}_R(\mathscr{Y})$, υπάρχουν $y_1, ..., y_k \in \mathscr{Y}$ ($k \in \mathbb{N}$) και $s_1, ..., s_k \in R$, ούτως ώστε να ισχύει

$$x = \sum_{j=1}^{k} r_j y_j \Rightarrow 1_R x + \sum_{j=1}^{k} (-r_j) y_j = 0_M \quad (\{x, y_1, ..., y_k\} \subseteq \mathscr{X}).$$

Άρα το $\mathscr{X}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο υποσύνολο τού M. Άτοπο!

(ii) Εάν $\mathscr{X} = \varnothing$, τότε ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής. Ας υποθέσουμε ότι $\mathscr{X} \neq \varnothing$ και ότι το $\mathscr{X}$ δεν είναι μεγιστικό γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού

[31] Αυτό σημαίνει ότι το υποσύνολο $\mathscr{X} \subseteq M$ αποτελεί ένα ελαχιστικό στοιχείο τού μερικώς διατεταγμένου συνόλου $(\{\mathscr{Z} \in \mathfrak{P}(M) |\, \mathrm{Lin}_R(\mathscr{Z}) = M\}, \subseteq)$.

[31] *Μεγιστικό* ως προς τη σχέση "$\subseteq$" τού συνολοθεωρητικού εγκλεισμού.

M. Τότε υπάρχει κάποιο γραμμικώς ανεξάρτητο $\mathscr{Y} \in \mathfrak{P}(M) : \mathscr{X} \subsetneqq \mathscr{Y}$. Έστω ότι $y \in \mathscr{Y} \smallsetminus \mathscr{X}$. Επειδή (εξ υποθέσεως) $M = \mathrm{Lin}_R(\mathscr{X}) \ni y$, υπάρχουν $x_1, ..., x_k \in \mathscr{X}$ ($k \in \mathbb{N}$) και $s_1, ..., s_k \in R$, ούτως ώστε να ισχύει

$$y = \sum_{j=1}^{k} s_j x_j \Rightarrow 1_R y + \sum_{j=1}^{k} (-s_j) x_j = 0_M \ \ (\{y, x_1, ..., x_k\} \subseteq \mathscr{Y}).$$

Άρα το $\mathscr{Y}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο υποσύνολο τού M. Άτοπο! □

2.5.12 Λήμμα. *Εάν $\mathscr{X}$ είναι ένα μη κενό σύνολο, τότε η εικόνα* $\mathrm{Im}(\delta)$ *τής* (2.17) *είναι μια βάση τού $R^{(\mathscr{X})}$.*

Απόδειξη. Κατά το λήμμα 2.5.2 και το θεώρημα 2.5.5, $R^{(\mathscr{X})} = \mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}(\delta))$. Εάν $\{\delta_{x_1}, ..., \delta_{x_k}\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο τής $\mathrm{Im}(\delta)$ και τα $r_1, ..., r_k \in R$ τέτοια, ώστε να ισχύει $\sum_{j=1}^{k} r_j \delta_{x_j} = 0_{R^{(\mathscr{X})}}$, τότε

$$0_R = \left(\sum_{j=1}^{k} r_j \delta_{x_j}\right)(x_\rho) = \sum_{j=1}^{k} r_j \left(\delta_{x_j}(x_\rho)\right) = r_\rho, \ \forall \rho \in \{1, ..., k\}.$$

Άρα η εικόνα $\mathrm{Im}(\delta)$ είναι *και* γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού $R^{(\mathscr{X})}$. □

2.5.13 Θεώρημα. *Για έναν R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) *Ο M είναι ελεύθερος R-μόδιος.*

(ii) *Ο M διαθέτει τουλάχιστον μία βάση.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν ο M είναι τετριμμένος, τότε αυτός έχει το κενό σύνολο ως (μόνη) βάση του. Εάν ο M δεν είναι τετριμμένος, τότε υφίσταται κάποιο σύνολο $\mathscr{X} \neq \varnothing$, τέτοιο ώστε να ισχύει $M \cong R^{(\mathscr{X})}$ και (σύμφωνα με το λήμμα 2.5.12) η εικόνα $\mathrm{Im}(\delta)$ τής (2.17) είναι μια βάση τού $R^{(\mathscr{X})}$. Επομένως η εικόνα αυτής μέσω οιουδήποτε ισομορφισμού μεταξύ τού $R^{(\mathscr{X})}$ και τού M αποτελεί (σύμφωνα με την πρόταση 2.5.10) μια βάση τού M.

(ii)⇒(i) Έστω $\mathscr{X}$ μια βάση τού M. Εάν $\mathscr{X} = \varnothing$, τότε είναι ο M (ως τετριμμένος) είναι ελεύθερος. Εάν $\mathscr{X} \neq \varnothing$, τότε (σύμφωνα με το θεώρημα 2.5.5) υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $h \in \mathrm{Hom}_R(R^{(\mathscr{X})}, M)$, τέτοιος ώστε να ισχύει $h \circ \delta = \iota$, όπου $\iota : \mathscr{X} \hookrightarrow M$ η συνήθης ένθεση. Επειδή η εικόνα $\mathrm{Im}(h)$ τού h είναι ένας υπομόδιος τού M που περιέχει το $\mathscr{X}$ και $\mathrm{Lin}_R(\mathscr{X}) = M$, η πρόταση 2.1.13 μας πληροφορεί ότι $\mathrm{Lin}_R(\mathscr{X}) \subseteq \mathrm{Im}(h) \Rightarrow \mathrm{Im}(h) = M$, οπότε ο h είναι επιμορφισμός. Από την άλλη μεριά, επειδή

$$h(\theta) := \sum_{x \in \mathscr{X}} \theta(x)\iota(x) = \sum_{x \in \mathscr{X}} \theta(x)x, \ \forall \theta \in R^{(\mathscr{X})}$$

(βλ. (2.18)), για κάθε $\theta \in \mathrm{Ker}(h)$ λαμβάνουμε

$$\sum_{x \in \mathscr{X}} \theta(x)x = h(\theta) = 0_M \Rightarrow [\theta(x) = 0_R, \forall x \in \mathscr{X}] \Rightarrow \mathrm{supp}(\theta) = \varnothing \Rightarrow \theta = 0_{R^{(\mathscr{X})}},$$

διότι το $\mathscr{X}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Άρα $\mathrm{Ker}(h) = \{0_{R^{(\mathscr{X})}}\}$ και ο h είναι μονομορφισμός. (Βλ. πρόταση 2.2.13.) Τελικώς λοιπόν ο h είναι *ισομορφισμός* και, ως εκ τούτου, ο M είναι ελεύθερος R-μόδιος. □

2.5.14 Πόρισμα. *Εάν M είναι ένας μη τετριμμένος R-μόδιος έχων το $\mathscr{X}$ ως μια βάση του, τότε $M \cong R^{(\mathscr{X})}$.*

2.5.15 Παραδείγματα. Με τη βοήθεια τής προτάσεως 2.5.11 και τού θεωρήματος 2.5.13 μπορεί κανείς να κατασκευάσει εύκολα *μη ελευθέρους* R-μοδίους.

(i) Εάν $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, τότε ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_k$ δεν είναι ελεύθερος. Πράγματι· το μονοσύνολο $\{[1]_k\}$ είναι ελαχιστικό παράγον υποσύνολο τού $\mathbb{Z}_k$ αλλά δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αφού

$$k[1]_k = [k]_k = [0]_k = 0_{\mathbb{Z}_k}$$

(με $k \neq 0$). Ομοίως, και κάθε άλλο μονοσύνολο που παράγει τον $\mathbb{Z}_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

(ii) Παρομοίως αποδεικνύεται ότι *κάθε μη τετριμμένη, πεπερασμένη αβελιανή ομάδα* δεν είναι ελεύθερος $\mathbb{Z}$-μόδιος.

(iii) Εάν $q, q' \in \mathbb{Q}$, $q \neq q'$, τότε (όπως έχουμε εξηγήσει στο εδ. 2.5.8 (iv)) εντός τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Q}$ το δισύνολο $\{q, q'\}$ είναι πάντοτε γραμμικώς εξαρτημένο. Ως εκ τούτου, εάν ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Q}$ διέθετε κάποια βάση, αυτή θα όφειλε να είναι ένα μονοσύνολο $\{q\}$, όπου $q \in \mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}$. Όμως

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(\{q\}) = \{\, \kappa q |\, \kappa \in \mathbb{Z}\} \subsetneqq \mathbb{Q}.$$

Άρα ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Q}$ δεν είναι ελεύθερος.

(iv) Έστω I ένα μη τετριμμένο ιδεώδες ενός μεταθετικού δακτυλίου R. Το I δεν είναι ελεύθερος R-μόδιος όταν *δεν είναι κύριο* ιδεώδες τού R. Πράγματι· εάν $a, b \in I$ και $a \neq b$, με τουλάχιστον ένα εξ αυτών $\neq 0_R$, τότε

$$(-b)a + ab = 0_R \Rightarrow \text{ το } \{a, b\} \text{ είναι γραμμικώς εξαρτημένο.}$$

Ως εκ τούτου, εάν ο R-μόδιος I διέθετε κάποια βάση, αυτή θα όφειλε να είναι ένα μονοσύνολο $\{x\}$, όπου $x \in I \smallsetminus \{0_R\}$. Όμως $\mathrm{Lin}_R(\{x\}) = \{\, rx |\, r \in R\} = I \Leftrightarrow I = \langle x \rangle$.

2.5.16 Πόρισμα. *Για έναν μη τετριμμένο R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο M είναι ελεύθερος R-μόδιος.*

(ii) *Υπάρχει $\varnothing \neq \mathscr{X} \subseteq M$, τέτοιο ώστε η απεικόνιση $R \ni r \longmapsto rx \in Rx$ να είναι ισομορφισμός για κάθε $x \in \mathscr{X}$ και να ισχύει $M = \bigoplus_{x \in \mathscr{X}} Rx$.*

Αποδειξη. (i)⇒(ii) Κατά το θεώρημα 2.5.13 υπάρχει κάποια βάση $\mathscr{X}$ τού M. Επειδή ο M είναι μη τετριμμένος, $\mathscr{X} \neq \varnothing$. Κάθε στοιχείο τού M γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τού $\mathscr{X}$ (και μάλιστα, σύμφωνα με την πρόταση 2.5.9, κατά τρόπο μονοσήμαντο), οπότε $M = \bigoplus_{x \in \mathscr{X}} Rx$. (Βλ. 2.4.15 και 2.4.16 (iii).) Επίσης, για κάθε $x \in \mathscr{X}$ η απεικόνιση $R \ni r \longmapsto rx \in Rx$ είναι (προφανώς) επιμορφισμός. Η ενριπτικότητά της έπεται άμεσα από το γεγονός ότι το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

(ii)⇒(i) $M = \bigoplus_{x\in\mathscr{X}} Rx \Rightarrow M = \mathrm{Lin}_R(\mathscr{X})$. Επειδή η $R \ni r \longmapsto rx \in Rx$ είναι ισομορφισμός, το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο για κάθε $x \in \mathscr{X}$. Έστω $\{x_1, ..., x_k\}$ τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathscr{X}$. Εάν $r_1, ..., r_k \in R$ είναι τέτοια, ώστε $\sum_{j=1}^k r_j x_j = 0_M$, τότε

$$\left.\begin{array}{r}\sum\limits_{j=1}^{k} \underbrace{r_j x_j}_{\in \mathrm{Lin}_R(\{x_j\})} = 0_M = \underbrace{0_M + \cdots + 0_M}_{k \text{ φορές}} \\ M = \bigoplus\limits_{x\in\mathscr{X}} Rx,\ \forall j \in \{1, ..., \kappa\}\end{array}\right\} \underset{2.4.15,\, 2.4.16\,(\mathrm{iii})}{\Longrightarrow} r_j x_j = 0_M, \forall j \in \{1, ..., k\},$$

οπότε $r_j = 0_R$ (αφού το $\{x_j\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο) για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$. Άρα το $\mathscr{X}$ είναι (καθ' ολοκληρίαν) γραμμικώς ανεξάρτητο και, κατ' επέκταση, μια βάση τού M. Κατά συνέπειαν, ο M είναι ελεύθερος R-μόδιος (εκ νέου δυνάμει τού θεωρήματος 2.5.13). □

2.5.17 Πόρισμα. *Εάν $(M_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια ελευθέρων R-μοδίων, τότε και ο R-μόδιος $M := \bigoplus_{j\in J} M_j$ είναι ελεύθερος. Μάλιστα, εάν $\mathscr{X}_j$ είναι μια βάση τού M_j για κάθε $j \in J$, τότε η ένωση $\bigcup_{j\in J} \mathscr{X}_j$ είναι μια βάση τού M.*

Απόδειξη. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο R-μόδιος M_j είναι μη τετριμμένος για κάθε[32] $j \in J$. Κατά το θεώρημα 2.5.13 υπάρχει βάση $\varnothing \neq \mathscr{X}_j \subseteq M_j$ τού M_j και $M_j = \bigoplus_{x\in\mathscr{X}_j} Rx$. Κατά συνέπειαν,

$$M := \bigoplus_{j\in J} M_j = \bigoplus_{j\in J} \Big(\bigoplus_{x\in\mathscr{X}_j} Rx \Big) \underset{2.4.13\,(\mathrm{i})}{\cong} \bigoplus_{x\in\cup_{j\in J}\mathscr{X}_j} Rx,$$

οπότε ο M είναι όντως ελεύθερος έχων την ένωση $\bigcup_{j\in J} \mathscr{X}_j$ ως μια βάση του. □

2.5.18 Σημείωση. Το αντίστροφο τού πορίσματος 2.5.17 (όπως θα διαπιστώσουμε μέσω τού παραδείγματος 2.5.19) δεν είναι αληθές: Εάν ο $M := \bigoplus_{j\in J} M_j$ είναι ελεύθερος, τότε ο M_j δεν είναι κατ' ανάγκην ελεύθερος *για κάθε* $j \in J$.

2.5.19 Παράδειγμα. Εάν $k, l \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, l \geqslant 2$ και μκδ$(k, l) = 1$, τότε υφίστανται ισομορφισμοί $\mathbb{Z}_{kl}$-μοδίων[33]

$$\mathbb{Z}_{kl} \cong \mathbb{Z}/kl\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l.$$

(Βλ. εδ. 2.4.22.) Ο $\mathbb{Z}_{kl}$-μόδιος $\mathbb{Z}_{kl}$ είναι ελεύθερος. Ωστόσο, οι $\mathbb{Z}_{kl}$-μόδιοι $\mathbb{Z}_k$ και $\mathbb{Z}_l$ *δεν είναι ελεύθεροι*. (Εάν ο -προφανώς, μη τετριμμένος- $\mathbb{Z}_{kl}$-μόδιος $\mathbb{Z}_k$ ήταν ελεύθερος, τότε θα έπρεπε λόγω των πορισμάτων 2.5.14 και 2.5.16 να υπάρχει βάση αυτού $\mathscr{X} \neq \varnothing$ με $\mathbb{Z}_k \cong \mathbb{Z}_{kl}^{(\mathscr{X})}$, κάτι που θα οδηγούσε σε άτοπο, διότι card$(\mathscr{X})kl > k$. Η ίδια επιχειρηματολογία εφαρμόζεται και για τον $\mathbb{Z}_{kl}$-μόδιο $\mathbb{Z}_l$.)

---

[32] Εάν *όλοι* οι M_j είναι τετριμμένοι, τότε ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής. Εάν υπάρχει $\varnothing \neq J' \subsetneqq J$, τέτοιο ώστε οι M_j, $j \in J'$, να είναι μη τετριμμένοι και οι M_j, $j \in J \setminus J'$ να είναι τετριμμένοι, τότε μπορούμε να εργασθούμε με το J' στη θέση τού J.

[33] Οι $\mathbb{Z}_k$ και $\mathbb{Z}_l$ μπορούν να θεωρηθούν (εκτός από $\mathbb{Z}$-μόδιοι) και ως $\mathbb{Z}_{kl}$-μόδιοι μέσω των αριθμητικών πολλαπλασιασμών

$$\mathbb{Z}_{kl} \times \mathbb{Z}_k \ni ([a]_{kl}, [b]_k) \longmapsto [ab]_k \in \mathbb{Z}_k,\ \mathbb{Z}_{kl} \times \mathbb{Z}_l \ni ([a]_{kl}, [b]_l) \longmapsto [ab]_l \in \mathbb{Z}_l.$$

2.5.20 Θεώρημα (Θεώρημα «γραμμικής επεκτάσεως»). *Εάν M, N είναι R-μόδιοι, με τον M μη τετριμμένο και ελεύθερο και το $\mathscr{X} \subseteq M$ μια βάση αυτού, τότε για οιαδήποτε απεικόνιση $\theta : \mathscr{X} \longrightarrow N$ υφίσταται ακριβώς ένας $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ για τον οποίον ισχύει $f|_{\mathscr{X}} = \theta$.*

Απόδειξη. Έστω τυχόν $x \in M$. Επειδή το $\mathscr{X}$ είναι εξ υποθέσεως μια βάση τού M, το x γράφεται κατά τρόπο μοναδικό ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τού $\mathscr{X}$ (βλ. 2.5.9), δηλαδή υπάρχουν μοναδικά στοιχεία $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{X}$ και $r_1, \ldots, r_n \in R$ ($n \in \mathbb{N}$) για τα οποία ισχύει

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i. \tag{2.19}$$

Ως εκ τούτου, θέτοντας

$$\boxed{f(x) := \sum_{i=1}^{n} r_i \theta(x_i)}$$

ορίζουμε (καλώς) μια απεικόνιση $f : M \longrightarrow N$. Σημειωτέον ότι για κάθε στοιχείο $x \in \mathscr{X}$ έχουμε $x = 1_R x$, οπότε $f(x) = 1_R \cdot \theta(x) = \theta(x) \Longrightarrow f|_{\mathscr{X}} = \theta$. Επιπροσθέτως, για οιαδήποτε $r, s \in R$ και οιαδήποτε $x, x' \in M$, γραφόμενα (κατά τρόπο μοναδικό) ως γραμμικοί συνδυασμοί

$$x = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i x_i, \;\; x' = \sum_{j=1}^{m} \xi_j x'_j,$$

$x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_m \in \mathscr{X}$, $\kappa_1, \ldots, \kappa_n, \xi_1, \ldots, \xi_m \in R$ ($n, m \in \mathbb{N}$), έχουμε

$$\begin{aligned} f(rx + sx') &= f\left(r\left(\sum_{i=1}^{n} \kappa_i x_i\right) + s\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j x'_j\right)\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^{n} (r\kappa_i)\, x_i + \sum_{j=1}^{m} (s\xi_j)\, x'_j\right) = \sum_{i=1}^{n} (r\kappa_i)\, \theta(x_i) + \sum_{j=1}^{m} (s\xi_j)\, \theta(x'_j) \\ &= r\left(\sum_{i=1}^{n} \kappa_i \theta(x_i)\right) + s\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j \theta(x'_j)\right) = rf(x) + sf(x'), \end{aligned}$$

οπότε $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ (λόγω τής προτάσεως 2.2.3). Απομένει να αποδειχθεί ότι αυτός είναι ο *μοναδικός* ομομορφισμός από τον M στον N, ο περιορισμός τού οποίου επί τής $\mathscr{X}$ ισούται με την θ. Προς τούτο θεωρούμε *τυχόντα* $g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ για τον οποίο ισχύει $g|_{\mathscr{X}} = \theta$. Εάν γράψουμε οιοδήποτε $x \in M$ υπό τη μορφή (2.19), τότε

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i \theta(x_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i g(x_i) = g\left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right) = g(x),$$

όπου η δεύτερη ισότητα οφείλεται στο ότι $f|_{\mathscr{X}} = \theta = g|_{\mathscr{X}}$ και η τρίτη ισότητα προκύπτει από το ότι η g είναι ομομορφισμός. (Βλ. πρόταση 2.2.4.) Άρα $f = g$. □

2.5.21 Σημείωση. Ο ομομορφισμός f (ο κατασκευασθείς στο θεώρημα 2.5.20), ο οποίος είναι ο μόνος ομομορφισμός από τον M στον N που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathscr{X} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\mathrm{in}_{\mathscr{X},M}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \\ M \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, καλείται, ιδιαιτέρως, (R-)**γραμμική επέκταση** τής θ.

2.5.22 Πόρισμα. *Εάν M, N είναι R-μόδιοι, με τον M μη τετριμμένο και ελεύθερο και το $\mathscr{X} \subseteq M$ μια βάση αυτού, τότε για $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ ισχύει η συνεπαγωγή*

$$f|_{\mathscr{X}} = g|_{\mathscr{X}} \Longrightarrow f = g.$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα κατόπιν εφαρμογής τού θεωρήματος 2.5.20 για την απεικόνιση $\theta := g|_{\mathscr{X}}$. □

2.5.23 Πόρισμα. *Κάθε R-μόδιος M είναι ισόμορφος με έναν πηλικομόδιο F/W, όπου F είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος.*

Απόδειξη. Έστω $\mathscr{X}$ ένα σύστημα γεννητόρων τού M. Εάν $\mathscr{X} = \varnothing$, τότε είναι ο ίδιος ο M (ως τετριμμένος) είναι ελεύθερος και ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής. Εάν $\mathscr{X} \neq \varnothing$, τότε κατά το λήμμα 2.5.12 η εικόνα $\mathrm{Im}(\delta)$ τής (2.17) είναι μια βάση τού R-μοδίου $R^{(\mathscr{X})}$. Έστω $f \in \mathrm{Hom}_R(R^{(\mathscr{X})}, M)$ η γραμμική επέκταση τής απεικονίσεως

$$\theta : \mathrm{Im}(\delta) \longrightarrow M,\ \delta_x \longmapsto \theta(\delta_x) := x.$$

Αυτή είναι *επι*μορφισμός. Πράγματι· εάν x είναι *τυχόν* στοιχείο τού M, τότε υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, ..., x_k\}$ τού $\mathscr{X}$ και $r_1, ..., r_k \in R$, ούτως ώστε να ισχύει $x = \sum_{j=1}^{k} r_j x_j$. Επομένως,

$$f(\sum_{j=1}^{k} r_j \delta_{x_j}) = \sum_{j=1}^{k} r_j f(\delta_{x_j}) = \sum_{j=1}^{k} r_j \theta(\delta_{x_j}) = \sum_{j=1}^{k} r_j x_j = x.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.3.7, έχουμε $R^{(\mathscr{X})}/\mathrm{Ker}(f) \cong M$. Αρκεί λοιπόν να τεθεί $F := R^{(\mathscr{X})}$ και $W := \mathrm{Ker}(f)$. □

▸ **Παρένθετα δεδομένα από τη Θεωρία των Διανυσματικών Χώρων**. Λόγω τού θεωρήματος 2.5.13 η απόδειξη τού ότι *κάθε διανυσματικός χώρος* (ως μόδιος υπεράνω ενός σώματος) *είναι ελεύθερος* αποτελεί άμεσο επακόλουθο τής *υπάρξεως* (τουλάχιστον μιας) *βάσεως*. (Βλ. θεώρημα 2.5.25 και πόρισμα 2.5.26.) Επιπροσθέτως, για την απόδειξη τής *ισοπληθικότητας* όλων των βάσεων ενός ελευθέρου R-μοδίου (βλ. θεώρημα 2.5.38) χρησιμοποιείται ουσιωδώς η *ισοπληθικότητα* όλων των βάσεων ενός διανυσματικού χώρου.

2.5.24 Λήμμα. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος ορισμένος υπεράνω ενός σώματος K και έστω $\mathscr{A} \subseteq V$ ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο. Εάν $\mathrm{Lin}_K(\mathscr{A}) \subsetneqq V$, τότε για κάθε $x \in V \smallsetminus \mathrm{Lin}_K(\mathscr{A})$ το σύνολο $\mathscr{A} \cup \{x\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.*

Αποδειξη. Εάν $\mathscr{A} = \varnothing$, τότε $\mathrm{Lin}_K(\mathscr{A}) = \{0_V\}$, οπότε το $\{x\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο για κάθε $x \in V \smallsetminus \{0_V\}$. Εάν $\mathscr{A} \neq \varnothing$ και

$$\lambda x + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j = 0_V,$$

όπου $\{x_1, ..., x_k\} \subseteq \mathscr{A}$ και $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$, τότε $\lambda = 0_K$, διότι[34] $x \notin \mathrm{Lin}_K(\mathscr{A})$, οπότε η ανωτέρω ισότητα δίδει

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j = 0_V \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0_K,$$

καθότι το $\{x_1, ..., x_k\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Άρα και το σύνολο $\mathscr{A} \cup \{x\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. □

2.5.25 Θεώρημα. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος ορισμένος υπεράνω ενός σώματος K. Εάν το $\mathscr{A} \subseteq V$ είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο και το $\mathscr{E}$ ένα παράγον σύνολο τού V (δηλαδή $\mathrm{Lin}_K(\mathscr{E}) = V$), τότε υπάρχει τουλάχιστον μία βάση $\mathscr{X}$ τού V, τέτοια ώστε να ισχύει*

$$\boxed{\mathscr{A} \subseteq \mathscr{X} \subseteq \mathscr{E}.}$$

Αποδειξη. Έστω $\mathfrak{Q} := \{\mathscr{C} \subseteq V \mid \mathscr{C}$ γραμμικώς ανεξάρτητο $: \mathscr{A} \subseteq \mathscr{C} \subseteq \mathscr{E}\}$. Επειδή $\mathscr{A} \in \mathfrak{Q}$, έχουμε $\mathfrak{Q} \neq \varnothing$. Επιπροσθέτως, το $\mathfrak{Q}$ είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς τη σχέση τού εγκλεισμού "$\subseteq$".

• *Πρώτος ισχυρισμός*: Κάθε αλυσίδα $\mathfrak{C}$ τού $\mathfrak{Q}$ *διαθέτει άνω φράγμα* (ως προς τη σχέση "$\subseteq$"). Πράγματι· εάν η $\mathfrak{C}$ είναι τυχούσα αλυσίδα τού $\mathfrak{Q}$ και εάν θέσουμε

$$\mathscr{Z} := \bigcup \{\mathscr{C} \mid \mathscr{C} \in \mathfrak{C}\},$$

τότε $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{Z}$ για όλα τα $\mathscr{C} \in \mathfrak{C}$, οπότε

$$[\mathscr{A} \subseteq \mathscr{C} \subseteq \mathscr{E},\ \forall \mathscr{C} \in \mathfrak{C}] \Longrightarrow \mathscr{A} \subseteq \mathscr{Z} \subseteq \mathscr{E}. \tag{2.20}$$

Εάν υποθέσουμε ότι το $\{x_1, ..., x_k\} \subseteq \mathscr{Z}$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathscr{Z}$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$, ούτως ώστε να ισχύει

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j = 0_V \tag{2.21}$$

θα υπάρχουν $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, ..., \mathscr{C}_k \in \mathfrak{C}$, τέτοια ώστε $x_j \in \mathscr{C}_j, \forall j \in \{1, ..., k\}$. Η $\mathfrak{C}$ -ούσα αλυσίδα- είναι ένα ολικώς διατεταγμένο σύνολο, πράγμα που σημαίνει ότι τα στοιχεία της θα είναι ανά δύο συγκρίσιμα, οπότε θα υπάρχει κατ' ανάγκην ένα $\mathscr{C} \in \mathfrak{C}$,

[34] Αλλιώς θα είχαμε $x = -\sum_{j=1}^{k} (\lambda^{-1}\lambda_j)\, x_j \in \mathrm{Lin}_K(\mathscr{A})$.

τέτοιο ώστε να ισχύει
$$x_j \in \mathscr{C}_j \subseteq \mathscr{C}, \ \forall j \in \{1, ..., k\}.$$

Επειδή αυτό το $\mathscr{C}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και η (2.21) είναι μια εξίσωση εντός τού $\mathrm{Lin}_K(\mathscr{C})$, λαμβάνουμε $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0_K$. Συνεπώς το $\mathscr{Z}$ είναι *γραμμικώς ανεξάρτητο*. Τούτο, συνδυαζόμενο με την (2.20), μας πληροφορεί ότι το $\mathscr{Z}$ ανήκει στην οικογένεια συνόλων $\mathfrak{Q}$, οπότε, από την ίδια του την κατασκευή, το $\mathscr{Z}$ αποτελεί ένα *άνω φράγμα* τής $\mathfrak{Q}$ (ως προς την "$\subseteq$"). Θέτοντας σε εφαρμογή το λήμμα τού Zorn για την $\mathfrak{Q}$, συμπεραίνουμε ότι η $\mathfrak{Q}$ έχει ένα *μεγιστικό στοιχείο*, ας πούμε το $\mathscr{X}$, ως προς την "$\subseteq$".

• *Δεύτερος ισχυρισμός*: Το εν λόγω $\mathscr{X}$ *είναι μια βάση τού* V.

Επειδή $\mathscr{X} \in \mathfrak{Q}$, το $\mathscr{X}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι $\mathrm{Lin}_K(\mathscr{X}) = V$. Ας υποθέσουμε ότι $\mathrm{Lin}_K(\mathscr{X}) \subsetneqq V$. Τότε $\mathscr{X} \subsetneqq \mathscr{E}$ και θα υπάρχει κάποιο $x \in \mathscr{E} \smallsetminus \mathrm{Lin}_K(\mathscr{X})$. Όμως, δυνάμει τού λήμματος 2.5.24, το $\mathscr{X} \cup \{x\}$ θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και επειδή $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{X} \cup \{x\} \subseteq \mathscr{E}$ θα έχουμε $\mathscr{X} \cup \{x\} \in \mathfrak{Q}$, ήτοι κάτι το οποίο αντίκειται στην προϋποτεθείσα μεγιστικότητα τού $\mathscr{X}$. Άρα τελικώς $\mathrm{Lin}_K(\mathscr{X}) = V$ και το $\mathscr{X}$ είναι μια βάση τού V. □

2.5.26 Πόρισμα (Ύπαρξη βάσεως). *Κάθε K-διανυσματικός χώρος V διαθέτει τουλάχιστον μία βάση* (*οπότε είναι ελεύθερος K-μόδιος,* βλ. θεώρημα 2.5.13).

Απόδειξη. Αρκεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.5.25 για $\mathscr{A} := \varnothing$ και $\mathscr{E} := V$. □

2.5.27 Πόρισμα (Θεώρημα «συμπληρώσεως»). *Κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο $\mathscr{A} \subseteq V$ ενός K-διανυσματικού χώρου V μπορεί να συμπληρωθεί καταλλήλως, ούτως ώστε να καταστεί μία βάση αυτού.*

Απόδειξη. Αρκεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.5.25 για το $\mathscr{A}$ και το $\mathscr{E} := V$. □

2.5.28 Πόρισμα. *Κάθε παράγον σύνολο $\mathscr{E}$ ενός K-διανυσματικού χώρου V εμπεριέχει τουλάχιστον μία βάση τού V.*

Απόδειξη. Αρκεί να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.5.25 για το $\mathscr{A} := \varnothing$ και το $\mathscr{E}$. □

2.5.29 Σημείωση. Τα πορίσματα 2.5.27 και 2.5.28 δεν ισχύουν για *τυχόντες ελεύθερους* R-μοδίους. Επί παραδείγματι, το $\mathscr{A} := \{2\}$ ναι μεν είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού ελευθέρου $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Z}$ αλλά δεν μπορεί να συμπληρωθεί καταλλήλως, ούτως ώστε να προκύψει μια βάση αυτού. Επίσης, το $\mathscr{E} := \{2, 3\}$ είναι ένα σύστημα γεννητόρων τού ιδίου μοδίου (διότι $3n - 2n = n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$) αλλά κανένα εκ των μονοσυνόλων $\{2\}, \{3\}$ δεν αποτελεί βάση[35] αυτού (διότι $2\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Z}$ και $3\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Z}$).

2.5.30 Πόρισμα. *Εάν V είναι ένας K-διανυσματικός χώρος και $\mathscr{X} \subseteq V$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:

[35] Το ίδιο το $\{2, 3\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, καθώς ισχύει $3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 0$.

(i) *Το $\mathscr{X}$ είναι μια βάση τού V.*

(ii) *Το $\mathscr{X}$ είναι ένα ελαχιστικό σύστημα γεννητόρων τού V.*

(iii) *Το $\mathscr{X}$ είναι ένα μεγιστικό γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού V.*

Απόδειξη. Λαμβανομένων υπ' όψιν τού πορίσματος 2.5.26 και τού θεωρήματος 2.5.13, οι συνεπαγωγές (i)⇒(ii) και (i)⇒(iii) έχουν ήδη αποδειχθεί στην πρόταση 2.5.11.

(ii)⇒(i) Το θεώρημα 2.5.25 εγγυάται την ύπαρξη μιας βάσεως $\mathscr{Y}$ τού διανυσματικού χώρου V με

$$\varnothing \subseteq \mathscr{Y} \subseteq \mathscr{X}.$$

Επειδή $\mathrm{Lin}_K(\mathscr{Y}) = V$ και το $\mathscr{X}$ είναι ένα ελαχιστικό σύστημα γεννητόρων τού V, έχουμε κατ' ανάγκην $\mathscr{Y} = \mathscr{X}$.

(iii)⇒(i) Το πόρισμα 2.5.27 εγγυάται την ύπαρξη μιας βάσεως $\mathscr{Y}$ τού V με $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{X}$. Επειδή το $\mathscr{Y}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού V και το $\mathscr{X}$ ένα μεγιστικό γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού V, έχουμε κατ' ανάγκην $\mathscr{Y} = \mathscr{X}$. □

2.5.31 Σημείωση. Οι συνεπαγωγές (ii)⇒(i) και (iii)⇒(i) τού πορίσματος 2.5.30 δεν ισχύουν για *τυχόντες* R-μοδίους. Επί παραδείγματι, εάν $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, τότε το μονοσύνολο $\{[1]_k\}$ είναι ελαχιστικό παράγον υποσύνολο τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Z}_k$, χωρίς να αποτελεί βάση αυτού. (Βλ. 2.5.15 (i).) Επίσης, για κάθε $q \in \mathbb{Q}\smallsetminus\{0\}$ με $q \neq \frac{1}{b}$, όπου $b \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$, το μονοσύνολο $\{q\}$ είναι ένα μεγιστικό γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Q}$, χωρίς να αποτελεί βάση αυτού. (Πρβλ. 2.5.15 (iii).)

Εν συνεχεία, για την απόδειξη τού ότι όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου είναι ισοπληθείς, προτάσσονται ορισμένα αποτελέσματα από τη Θεωρία Συνόλων.

2.5.32 Θεώρημα (Schröder & Bernstein). *Εάν A, B είναι δυο σύνολα, τότε ισχύει η συνεπαγωγή*

$$[\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B) \text{ και } \mathrm{card}(B) \leqslant \mathrm{card}(A)] \Rightarrow \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(B).$$

Απόδειξη. Βλ., π.χ., [1], Κεφ. 22, σελ. 128-132, ή [3], εδ. 16.3, σελ. 246. □

2.5.33 Πρόταση. *Εάν A, B είναι δυο απειροσύνολα, τότε*

$$\mathrm{card}(A \times B) = \sup\{\mathrm{card}(A), \mathrm{card}(B)\}.$$

Απόδειξη. Δίχως βλάβη τής γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mathrm{card}(A) \leqslant \mathrm{card}(B)$. Προφανώς,

$$\mathrm{card}(B) \leqslant \mathrm{card}(A \times B) \leqslant \mathrm{card}(B \times B) = \mathrm{card}(B),$$

οπότε $\mathrm{card}(A \times B) = \mathrm{card}(B)$ δυνάμει τού θεωρήματος 2.5.32. □

2.5.34 Πρόταση. *Έστω A ένα απειροσύνολο και έστω $(B_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια συνόλων με $J \neq \varnothing$, $\mathrm{card}(J) \leqslant \mathrm{card}(A)$ και $\mathrm{card}(B_j) \leqslant \mathrm{card}(A)$ για κάθε $j \in J$. Τότε*

$$\mathrm{card}\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big) \leqslant \mathrm{card}(A). \tag{2.22}$$

Αποδειξη. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B_j \neq \varnothing$ για κάθε $j \in J$. Επειδή $\mathrm{card}(B_j) \leqslant \mathrm{card}(A)$, υπάρχει μια επίρριψη $g_j : A \longrightarrow B_j$. Η απεικόνιση

$$A \times J \ni (a, j) \longmapsto g_j(a) \in \bigcup_{j\in J} B_j$$

είναι ωσαύτως επιρριπτική, οπότε

$$\mathrm{card}(A \times J) \geqslant \mathrm{card}(\bigcup_{j\in J} B_j) \text{ και } \mathrm{card}(A \times J) \leqslant \mathrm{card}(A)$$

(βλ. 2.5.33), απ' όπου έπεται η (2.22). □

2.5.35 Πρόταση. *Έστω M ένας R-μόδιος. Εάν $(x_j)_{j\in J}$ είναι ένα σύστημα γεννητόρων τού M, όπου το σύνολο δεικτών J είναι απειροσύνολο, και $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μια βάση αυτού, τότε*

$$\mathrm{card}(J) \geqslant \mathrm{card}(\Lambda). \tag{2.23}$$

Αποδειξη. Για κάθε $j \in J$ το x_j γράφεται (κατά τρόπο μοναδικό) ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τής οικογενείας $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Για να διευκολυνθούμε εργαζόμενοι με *πεπερασμένα* υποσύνολα τού *απειροσυνόλου* δεικτών J (χωρίς να κάνουμε ευρεία χρήση πολλαπλών υποδεικτών) γράφουμε το x_j ως εξής:

$$x_j = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_j(\lambda) y_\lambda, \tag{2.24}$$

όπου ο συντελεστής $r_j(\lambda) \in R$ είναι η εικόνα τού λ μέσω μιας (μονοσημάντως ορισμένης) $r_j \in R^{(\Lambda)}$. Προφανώς, το «επίτυπο» άθροισμα (2.24) διαθέτει το πολύ πεπερασμένους προσθετέους που είναι $\neq 0_R$ (οπότε επέχει θέση συνήθους αθροίσματος). Ως εκ τούτου, τα $\Lambda_j := \{\lambda \in \Lambda \,|\, r_j(\lambda) \neq 0_R\}$ συγκροτούν ένα σύστημα πεπερασμένων υποσυνόλων τού Λ.

Ισχυρισμός: $\Lambda = \bigcup_{j\in J} \Lambda_j$. Εάν υπήρχε $\lambda_\star \in \Lambda$ με $r_j(\lambda_\star) = 0_R$ για κάθε $j \in J$, τότε, επειδή το $(x_j)_{j\in J}$ είναι ένα σύστημα γεννητόρων τού M, θα υπήρχε $b \in R^{(J)}$, ούτως ώστε να ισχύει

$$\left.\begin{array}{r} y_{\lambda_\star} = \sum\limits_{j\in J} b(j) x_j = \sum\limits_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} \left(b(j) r_j(\lambda)\right) y_\lambda \\ (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \ \text{ βάση τού } \ M \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\sum_{j\in J} b(j) r_j(\lambda_\star) = 1_R \ (\neq 0_R)\right],$$

κάτι που θα αντέκειτο στην υπόθεσή μας (ότι $r_j(\lambda_\star) = 0_R, \forall j \in J$). Άρα ο ισχυρισμός είναι αληθής και εφαρμόζοντας την πρόταση 2.5.34 (για $A = J$ και $B_j = \Lambda_j$) λαμβάνουμε την (2.23). □

2.5.36 Θεώρημα. *Όλες οι βάσεις ενός K-διανυσματικού χώρου είναι ισοπληθείς.*

Αποδειξη. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος ορισμένος υπεράνω ενός σώματος K. Η *ύπαρξη* βάσεων αυτού είναι διασφαλισμένη από το πόρισμα 2.5.27. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο V δεν είναι τετριμμένος[36]. Υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:

[36] Η μόνη βάση ενός τετριμμένου K-διανυσματικού χώρου είναι το $\varnothing$.

Περίπτωση πρώτη: *Ο V έχει μια άπειρη βάση $\mathscr{X} = (x_j)_{j\in J}$*. Ας υποθέσουμε ότι $\mathscr{Y} = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι μια άλλη βάση τού V. Τότε, επειδή το $\mathscr{X}$ παράγει τον V, από την πρόταση 2.5.35

$$\operatorname{card}(\mathscr{X}) = \operatorname{card}(J) \geqslant \operatorname{card}(\Lambda) = \operatorname{card}(\mathscr{Y}). \tag{2.25}$$

Ισχυρισμός: *Το $\mathscr{Y}$ είναι κατ' ανάγκην απειροσύνολο*. Για την επαλήθευσή του θα εργασθούμε μιμούμενοι τη μέθοδο που ακολουθήσαμε στην απόδειξη τής προτάσεως 2.5.35 (αλλά προς την *αντίθετη κατεύθυνση*). Για κάθε $\lambda \in \Lambda$ το y_λ είναι γραμμικός συνδυασμών στοιχείων τής $\mathscr{X}$, οπότε

$$\exists s_\lambda \in K^{(J)} : y_\lambda = \sum_{j\in J} s_\lambda(j)x_j,$$

τα $J_\lambda := \{\, j \in J |\, s_\lambda(j) \neq 0_K\}$ συγκροτούν ένα σύστημα πεπερασμένων υποσυνόλων τού J και $J = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda$. Εάν το $\mathscr{Y}$ ήταν πεπερασμένο, τότε θα είχαμε

$$\operatorname{card}(\mathscr{X}) = \operatorname{card}(J) \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{card}(J_\lambda) \leqslant \underbrace{\operatorname{card}(\Lambda)}_{=\operatorname{card}(\mathscr{Y})} \max\{\operatorname{card}(J_\lambda) |\, \lambda \in \Lambda\}$$

με $\operatorname{card}(\mathscr{Y}) < \infty$ και $\operatorname{card}(J_\lambda) < \infty, \forall \lambda \in \Lambda$, και θα οδηγούμεθα σε άτοπο! Άρα *και* το $\mathscr{Y}$ είναι κατ' ανάγκην απειροσύνολο και, ως εκ τούτου, *εάν ένας K-διανυσματικός χώρος διαθέτει μια άπειρη βάση, τότε και κάθε άλλη βάση του είναι άπειρη*. Άπαξ και αποδείξαμε ότι το $\mathscr{Y}$ οφείλει να είναι άπειρο, είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε εκ νέου την πρόταση 2.5.35 *αφού προηγουμένως έχουμε εναλλάξει τους ρόλους των $\mathscr{X}$ και $\mathscr{Y}$*. Έτσι λαμβάνουμε

$$\operatorname{card}(\mathscr{Y}) = \operatorname{card}(J) \geqslant \operatorname{card}(\Lambda) = \operatorname{card}(\mathscr{X}). \tag{2.26}$$

Λόγω τής ισχύος των σχέσεων (2.25) και (2.26) το θεώρημα 2.5.32 μας πληροφορεί ότι $\operatorname{card}(\mathscr{X}) = \operatorname{card}(\mathscr{Y})$.

Περίπτωση δεύτερη: *Ο V διαθέτει μια πεπερασμένη βάση $\mathscr{X} = \{x_1, ..., x_k\}$*. Εν τοιαύτη περιπτώσει, και κάθε άλλη βάση τού V οφείλει (κατά τα προαναφερθέντα) να είναι πεπερασμένη. Κατά τα πορίσματα 2.5.26 και 2.5.16, $V = \bigoplus_{j=1}^{k} Kx_j$. Επειδή $Kx_j \cong K$, το Kx_j είναι απλός K-μόδιος (βλ. 2.3.17 (i)), καθότι το K, όντας σώμα, δεν διαθέτει άλλα ιδεώδη πέραν τού τετριμμένου και τού ιδίου τού K. Επιπροσθέτως, επειδή

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{\nu} Kx_j\right) / \left(\bigoplus_{j=1}^{\nu-1} Kx_j\right) \cong \left(\bigoplus_{j=1}^{\nu-1} Kx_j \oplus Kx_\nu\right) / \left(\bigoplus_{j=1}^{\nu-1} Kx_j\right) \underset{2.4.20}{\cong} Kx_\nu \cong K$$

για κάθε $\nu \in \{2, ..., k\}$, βλέπουμε ότι ο πύργος γραμμικών υποχώρων

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} Kx_j \supsetneqq \bigoplus_{j=1}^{k-1} Kx_j \supsetneqq \cdots \supsetneqq \bigoplus_{j=1}^{3} Kx_j \supsetneqq \bigoplus_{j=1}^{2} Kx_j \supsetneqq Kx_1 \supsetneqq \{0_V\}$$

τού V είναι ένας πύργος των Jordan και Hölder έχων ύψος ίσο με k. (Βλ. 2.3.17 (ii).) Λόγω *τού αναλλοιώτου τού ύψους* ενός τέτοιου πύργου (βλ. εδ. 2.3.19) *όλες οι βάσεις τού V οφείλουν να έχουν ακριβώς k στοιχεία*[37]. □

[37] Εάν θεωρούσαμε μια άλλη βάση $\mathscr{Y} = \{y_1, ..., y_l\}$ τού V, τότε (χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα) θα καταλήγαμε στο συμπέρασμα ότι $l = k$.

2.5.37 Ορισμός. Ο *κοινός* πληθικός αριθμός των βάσεων ενός K-διανυσματικού χώρου V καλείται **διάσταση** αυτού και συμβολίζεται ως $\dim_K(V)$.

2.5.38 Θεώρημα. *Όλες οι βάσεις ενός ελεύθερου R-μοδίου είναι ισοπληθείς.*

Απόδειξη. Έστω M ένας ελεύθερος R-μόδιος. Εάν ο M είναι τετριμμένος, τότε το $\varnothing$ είναι η μόνη βάση αυτού. Γι' αυτόν τον λόγο θα υποθέσουμε από εδώ και στο εξής ότι ο M δεν είναι τετριμμένος και θα θεωρήσουμε ένα μεγιστικό ιδεώδες $\mathfrak{m}$ τού R. Ως γνωστόν, ο πηλικοδακτύλιος $R/\mathfrak{m}$ είναι ένα σώμα. (Βλ. 1.3.29 (i).) Επίσης, είναι εύκολος ο έλεγχος τού ότι ο πηλικομόδιος $M/\mathfrak{m}M$ είναι *διανυσματικός χώρος* υπεράνω τού $R/\mathfrak{m}$ ως προς τη συνήθη πρόσθεση και τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό[38]

$$(R/\mathfrak{m}) \times (M/\mathfrak{m}M) \ni (r+\mathfrak{m}, x+\mathfrak{m}M) \longmapsto rx+\mathfrak{m}M \in M/\mathfrak{m}M.$$

Ας υποθέσουμε ότι το $\mathscr{X} = (x_j)_{j\in J}$ είναι μια βάση τού R-μοδίου M. Κατά το πόρισμα 2.5.16 έχουμε $M = \bigoplus\limits_{j\in J} Rx_j \Longrightarrow \mathfrak{m}M = \bigoplus\limits_{j\in J} \mathfrak{m}x_j$, οπότε

$$M/\mathfrak{m}M \cong \left(\bigoplus\nolimits_{j\in J} Rx_j\right) / \left(\bigoplus\nolimits_{j\in J} \mathfrak{m}x_j\right) \underset{2.4.24}{\cong} \bigoplus\nolimits_{j\in J}(Rx_j/\mathfrak{m}x_j) \cong \bigoplus\nolimits_{j\in J} R/\mathfrak{m} = (R/\mathfrak{m})^{(J)},$$

διότι $Rx_j \cong R$ και $\mathfrak{m}x_j \cong \mathfrak{m}$ (ως R-μόδιοι) για κάθε $j \in J$. Κατά συνέπειαν,

$$\dim_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M) = \operatorname{card}(J) = \operatorname{card}(\mathscr{X}).$$

Κατ' αναλογίαν, $\dim_{R/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m}M) = \operatorname{card}(\mathscr{Y})$ για οιαδήποτε άλλη βάση $\mathscr{Y}$ τού M. Άρα οι βάσεις $\mathscr{X}$ και $\mathscr{Y}$ είναι κατ' ανάγκην ισοπληθείς (δυνάμει τού θεωρήματος 2.5.36). □

2.5.39 Ορισμός. Ο *κοινός* πληθικός αριθμός όλων των βάσεων ενός ελεύθερου R-μοδίου M καλείται **βαθμίδα** αυτού και συμβολίζεται ως[39] $\operatorname{rank}_R(M)$.

2.5.40 Παραδείγματα. (i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n) = n$.

(ii) Προφανώς, $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\mathsf{X}]) = \aleph_0$.

(iii) Η βαθμίδα τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Z}^{(\mathbb{R})}$ ισούται με την *ισχύ τού συνεχούς* $\mathfrak{c}$.

2.5.41 Πρόταση. *Για δυο ελεύθερους R-μοδίους M, N ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή*

$$M \cong N \Longleftrightarrow \operatorname{rank}_R(M) = \operatorname{rank}_R(N).$$

---

[38] Ο εν λόγω αριθμητικός πολλαπλασιασμός είναι *καλώς ορισμένος*, διότι εάν $r, r' \in R$ και $x, x' \in M$ είναι τέτοια, ώστε να ισχύει $r - r' = a \in \mathfrak{m}$ και $x - x' = a_1y_1 + \cdots + a_ky_k$ για κάποια $a_1, \ldots, a_k \in \mathfrak{m}$ και $y_1, \ldots, y_k \in M$, τότε

$$rx + \mathfrak{m}M = r'x' + \underbrace{ax' + \textstyle\sum_{j=1}^{k}(a+r')a_jy_j}_{\in\mathfrak{m}M} + \mathfrak{m}M = r'x' + \mathfrak{m}M.$$

[39] Προφανώς, $\operatorname{rank}_R(M) = 0$ εάν και μόνον εάν ο M είναι τετριμμένος. Εάν M είναι ένας μη τετριμμένος R-μόδιος έχων το $\mathscr{X}$ ως μια βάση του, τότε $M \cong R^{(\mathscr{X})}$ (βλ. 2.5.14) και $\operatorname{rank}_R(M) = \operatorname{card}(\mathscr{X})$.

Αποδειξη. Εάν οι M και N είναι ισόμορφοι, τότε η βαθμίδα τού ενός θα ισούται με τη βαθμίδα τού άλλου δυνάμει τής προτάσεως 2.5.10. Και αντιστρόφως· εάν οι βαθμίδες των M, N είναι ίσες με το 0, τότε αμφότεροι οι M, N είναι τετριμμένοι (και, ως εκ τούτου, ισόμορφοι). Εάν υποθέσουμε ότι η κοινή βαθμίδα των M, N είναι $\neq 0$ και $\mathscr{X}$ είναι μια βάση τού M, τότε $M \cong R^{(\mathscr{X})}$ (βλ. πόρισμα 2.5.14) και

$$\mathrm{rank}_R(M) = \mathrm{card}(\mathscr{X}).$$

Έστω $\mathscr{Y}$ *τυχούσα* βάση τού N. Εξ υποθέσεως,

$$\mathrm{card}(\mathscr{X}) = \mathrm{rank}_R(M) = \mathrm{rank}_R(N) = \mathrm{card}(\mathscr{Y}),$$

οπότε υπάρχει κάποια αμφίρριψη $\theta : \mathscr{X} \longrightarrow \mathscr{Y} \subseteq N$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η γραμμική επέκταση $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ τής θ αποτελεί έναν ισομορφισμό μεταξύ των M και N. □

2.5.42 Πόρισμα. *Για κάθε ελεύθερο R-μόδιο M με $\mathrm{rank}_R(M) = n \in \mathbb{N}$ έχουμε $M \cong R^n$.*

2.5.43 Πόρισμα. *Εάν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, τότε $R^{n_1} \cong R^{n_2} \Longleftrightarrow n_1 = n_2$.*

2.5.44 Πόρισμα. *Εάν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ και M, N είναι ελεύθεροι R-μόδιοι βαθμίδας n_1 και n_2, αντιστοίχως, τότε ο $M \oplus N$ είναι ελεύθερος βαθμίδας $n_1 + n_2$.*

Αποδειξη. Προφανώς, $[M \cong R^{n_1}$ και $N \cong R^{n_2}] \Rightarrow M \oplus N \cong R^{n_1+n_2}$. □

▸ **Δύο επιπρόσθετα σημαντικά θεωρήματα περί ελευθέρων R-μοδίων.** Η παρούσα ενότητα θα κλείσει με την παράθεση τής αποδείξεως δύο ακόμη θεωρημάτων που αφορούν σε ελεύθερους R-μοδίους. Το πρώτο εξ αυτών (βλ. 2.5.46) διασφαλίζει *την ύπαρξη συμπληρώματος*[40] *ενός υπομοδίου U ενός R-μοδίου M υπό την προϋπόθεση ότι ο πηλικομόδιος M/U είναι ελεύθερος*. Το δεύτερο (βλ. 2.5.47) μας πληροφορεί ότι *οι υπομόδιοι ελευθέρων R-μοδίων είναι ελεύθεροι όταν ο R είναι* Π.Κ.Ι.

2.5.45 Λήμμα. *Για κάθε επιμορφισμό $f : M \twoheadrightarrow N$ από έναν R-μόδιο M επί ενός ελευθέρου R-μοδίου N*

$$\exists g \in \mathrm{Hom}_R(N, M) : [f \circ g = \mathrm{id}_N \;\text{ και }\; M = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)].$$

Αποδειξη. Όταν ο N είναι τετριμμένος, ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής. Ας υποθέσουμε ότι ο N είναι μη τετριμμένος και ότι $\mathscr{X}$ είναι μια βάση αυτού. Κατά το αξίωμα τής επιλογής, για κάθε στοιχείο $x \in \mathscr{X}$ υπάρχει κάποιο $z_x \in M$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f(z_x) = x$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\theta : \mathscr{X} \longrightarrow M, \;\; x \longmapsto \theta(x) := z_x.$$

Δυνάμει τού θεωρήματος 2.5.20 υπάρχει ένας (και μόνον) $g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$ με την ιδιότητα $g(x) = \theta(x) := z_x$, $\forall x \in \mathscr{X}$. Προφανώς,

$$[(f \circ g)(x) = f(z_x) = x, \forall x \in \mathscr{X}] \Rightarrow f \circ g|_{\mathscr{X}} = \mathrm{id}_{\mathscr{X}} \underset{2.5.22}{\Longrightarrow} f \circ g = \mathrm{id}_N.$$

[40] Όπως έχει ήδη αναφερθεί στο εδ. 2.4.19 (i), υπάρχουν υπομόδιοι R-μοδίων που *δεν διαθέτουν κανένα συμπλήρωμα*.

Επομένως ο g είναι *μονομορφισμός* (βλ. 2.2.23 (ii)⇒(i)) και ο $\breve{g} : N \longrightarrow \mathrm{Im}(g)$ (που προκύπτει ύστερα από περιορισμό τού πεδίου τιμών τού g στην εικόνα του, βλ. (2.11)) είναι *ισομορφισμός*, έχων τον περιορισμό $f|_{\mathrm{Im}(g)} : \mathrm{Im}(g) \xrightarrow{\cong} N$ τού f επί τής $\mathrm{Im}(g)$ ως αντίστροφό του. Από την ενριπτικότητα αυτού τού περιορισμού έπεται, ιδιαιτέρως, ότι

$$\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f|_{\mathrm{Im}(g)}) = \{0_M\}. \tag{2.27}$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε $z \in M$ ισχύει

$$z = \underbrace{(z - g(f(z)))}_{\in \mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{g(f(z))}_{\in \mathrm{Im}(g)}, \tag{2.28}$$

διότι $f(z - g(f(z))) = f(z) - (f \circ g)(f(z)) = f(z) - \mathrm{id}_N(f(z)) = f(z) - f(z) = 0_N$. Από τις (2.27) και (2.28) συνάγεται ότι $M = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$. □

2.5.46 Θεώρημα (Συνθήκη διασφαλίζουσα την ύπαρξη συμπληρώματος). *Έστω U ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M. Εάν ο πηλικομόδιος M/U είναι ελεύθερος, τότε υπάρχει υπομόδιος U' τού M, τέτοιος ώστε να ισχύει $M = U \oplus U'$.*

Αποδειξη. Αρκεί η εφαρμογή τού λήμματος 2.5.45 για τους M και $N = M/U$, όπου $f = \pi_U^M$ (διότι $\mathrm{Ker}(\pi_U^M) = U$ με τον π_U^M επιμορφισμό, βλ. 2.3.1 (iii)). □

2.5.47 Θεώρημα (Υπομόδιοι ελευθέρων μοδίων υπεράνω Π.Κ.Ι.). *Εάν M είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος και ο R είναι Π.Κ.Ι., τότε και κάθε υπομόδιος U τού M είναι ελεύθερος και* $\mathrm{rank}_R(U) \leqslant \mathrm{rank}_R(M)$.

Αποδειξη. Έστω U ένας υπομόδιος τυχόντος ελεύθερου R-μοδίου M.

Περίπτωση πρώτη. Εάν $\mathrm{rank}_R(M) = 0$, τότε ο M είναι τετριμμένος και δεν διαθέτει άλλον υπομόδιο πέραν τού εαυτού του.

Περίπτωση δεύτερη. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{rank}_R(M) \neq 0$. Εάν $U = \{0_M\}$, τότε ο U έχει το $\varnothing$ ως βάση του και είναι ελεύθερος έχων βαθμίδα 0. Άρα μπορούμε από τούδε και στο εξής να υποθέσουμε ότι $\{0_M\} \neq U \subseteq M$ και να θεωρήσουμε μια βάση $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ τού R-μοδίου M (με $\mathrm{card}(\Lambda) = \mathrm{rank}_R(M)$). Για κάθε υποσύνολο $J \subseteq \Lambda$ θέτουμε $M_J := \mathrm{Lin}_R((x_j)_{j \in J})$ και $U_J := M_J \cap U$.

Ισχυρισμός πρώτος. Η ακόλουθη οικογένεια τριάδων είναι μη κενή:

$$\mathfrak{N} := \left\{ (J, J', \varphi) \;\middle|\; \begin{array}{c} J' \subseteq J \subseteq \Lambda \text{ και } \varphi : J' \longrightarrow U_J \text{ απεικόνιση τέτοια,} \\ \text{ώστε η } \{\varphi(j) \mid j \in J'\} \text{ να είναι μια βάση τού } U_J \end{array} \right\}.$$

Απόδειξη πρώτου ισχυρισμού. Επειδή $U \neq \{0_M\}$, υπάρχει κάποιο $x \in U \smallsetminus \{0_M\}$. Αυτό γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $x = r_1 x_{j_1} + \cdots + r_\rho x_{j_\rho}$ στοιχείων τής $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ (με τουλάχιστον έναν εκ των συντελεστών $\neq 0_R$). Επομένως, $x \in U_J$, όπου $J := \{j_1, \ldots, j_\rho\} \subseteq \Lambda$. Αυτό σημαίνει ότι *υπάρχουν* πεπερασμένα υποσύνολα $J \subseteq \Lambda$ με $U_J \neq \{0_M\}$. Επιλέγουμε ένα εξ αυτών, ας το πούμε $J := \{j_1, \ldots, j_\nu\}$, ούτως ώστε το πλήθος ν των στοιχείων του να είναι *το ελάχιστο δυνατό* με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή με $U_{\widehat{J}} = \{0_M\}$ για κάθε $\widehat{J} \subsetneqq J \subseteq \Lambda$ (ήτοι για κάθε $\widehat{J}$ με πλήθος στοιχείων

$< \nu$). Έστω τυχόν $x \in U_J \diagdown \{0_M\}$. Αυτό γράφεται ως $x = a_1 x_{j_1} + \cdots + a_\nu x_{j_\nu}$, για κάποια $a_1, ..., a_\nu \in R$ (με τουλάχιστον ένα εξ αυτών να είναι $\neq 0_R$). Έστω τυχών $d \in \text{ΜΚΔ}_R(a_1, ..., a_\nu)$. Τότε $a_1 = db_1, ..., a_\nu = db_\nu$ για κατάλληλα $b_1, ..., b_\nu \in R$ με[41] $1_R \in \text{ΜΚΔ}_R(b_1, ..., b_\nu)$. Θέτοντας

$$x' := b_1 x_{j_1} + \cdots + b_\nu x_{j_\nu} \;\; \text{και} \;\; I := \left\{ r \in R \,|\, rx' \in U \right\},$$

παρατηρούμε ότι το I είναι ένα ιδεώδες τού R, οπότε $I = Ra$ για κάποιο $a \in R$, καθώς ο R είναι Π.Κ.Ι. Προφανώς,

$$[dx' = x \in U_J \diagdown \{0_M\} \;\; \text{και} \;\; U_J \subseteq U] \Rightarrow d \in I \Rightarrow I \neq \{0_R\} \Rightarrow a \neq 0_R.$$

Θα δείξουμε ότι $U_J = \mathrm{Lin}_R(\{y\})$, όπου $y := ax'$ (οπότε το $\{y\}$ θα αποτελεί μια βάση τού U_J). Έστω τυχόν $z \in U_J \diagdown \{0_M\}$. Αυτό εκφράζεται υπό τη μορφή

$$z = c_1 x_{j_1} + \cdots + c_\nu x_{j_\nu}, \;\; \text{για κάποια} \;\; c_1, ..., c_\nu \in R \diagdown \{0_R\}$$

(διότι εάν κάποιο εξ αυτών ήταν $= 0_R$, τότε κάποιος γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τής $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, το πλήθος των οποίων θα ήταν $< \nu$, θα ανήκε στον U, κάτι που θα αντέκειτο στον τρόπο επιλογής τού J). Επειδή

$$\begin{aligned} &ab_1 z - c_1 y = ab_1(c_1 x_{j_1} + \cdots + c_\nu x_{j_\nu}) - c_1 a(b_1 x_{j_1} + \cdots + b_\nu x_{j_\nu}) \\ &= 0_R x_{j_1} + a(b_1 c_2 - c_1 b_2) x_{j_2} + \cdots + a(b_1 c_\nu - c_1 b_\nu) x_{j_\nu} \end{aligned}$$

η διαφορά $ab_1 z - c_1 y \in U_J$ είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τής $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, το πλήθος των οποίων είναι $< \nu$, οπότε ισχύει κατ' ανάγκην

$$\left. \begin{array}{r} 0_R = ab_1 z - c_1 y = a(b_1 z - c_1 x') \\ a \neq 0_R \;\; \text{και } R \text{ ακεραία περιοχή} \end{array} \right\} \Rightarrow b_1 z = c_1 x'$$

και (λόγω των ανωτέρω εξισώσεων) $b_1 c_2 = c_1 b_2, ..., b_1 c_\nu = c_1 b_\nu$. Κατά συνέπειαν,

$$\left. \begin{array}{c} b_1 \mid c_1 b_1 \\ b_1 \mid c_1 b_2 \\ \vdots \\ b_1 \mid c_1 b_\nu \end{array} \right\} \Rightarrow b_1 \mid \mathfrak{d}, \; \forall \mathfrak{d} \in \text{ΜΚΔ}_R(c_1 b_1, ..., c_1 b_\nu),$$

με[42] $\text{ΜΚΔ}_R(c_1 b_1, ..., c_1 b_\nu) = \{c_1 \delta : \delta \in \text{ΜΚΔ}_R(b_1, ..., b_\nu)\}$, απ' όπου έπεται (θέτοντας $\delta = 1_R$) ότι

$$\left. \begin{array}{r} b_1 \mid c_1 \Rightarrow [\exists c_1' \in R : c_1 = b_1 c_1'] \\ 0_R \neq c_1 \Rightarrow b_1 \neq 0_R \;\; \text{και } c_1' \neq 0_R \\ R \text{ ακεραία περιοχή} \end{array} \right\} \Rightarrow z = c_1' x'$$

και, κατ' επέκταση, ότι $c_1' \in I$ (αφού $z \in U$). Επομένως, $c_1' = c_1'' a$ για κάποιο στοιχείο $c_1'' \in R \diagdown \{0_R\}$ και, ως εκ τούτου, $z = c_1' x' = c_1'' a x' = c_1'' y \in \mathrm{Lin}_R(\{y\})$. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι το $\{y\}$ αποτελεί μια βάση τού U_J. Θέτοντας $J' := \{j_1\}$ και

$$\varphi : J' \longrightarrow U_J, \;\; j_1 \longmapsto \varphi(j_1) := y,$$

[41] Για $\nu = 1$ τούτο είναι προφανές, για $\nu = 2$ έπεται από το λήμμα 1.4.27 και για $\nu \geqslant 3$ *επαγωγικώς* κάνοντας χρήση τού λήμματος 1.4.30.

[42] Τούτο έπεται από το (iv) τής προτάσεως 1.4.34 και μαθηματική επαγωγή (όταν $\nu \geqslant 3$, μέσω τού λήμματος 1.4.30).

παρατηρούμε ότι η (συγκεκριμένη) τριάδα (J, J', φ) ανήκει στην $\mathfrak{N}$.

Εφαρμογή τού λήμματος τού Zorn. Η οικογένεια $\mathfrak{N} \neq \varnothing$ καθίσταται μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς την ακόλουθη "$\preceq$":

$$\big(J, J', \varphi\big) \preceq \big(L, L', \theta\big) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} [J \subseteq L,\ J' \subseteq L' \text{ και } \theta|_{J'} = \varphi].$$

Για κάθε αλυσίδα $(J_\lambda, J'_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ τού $(\mathfrak{N}, \preceq)$ η τριάδα $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} J_\lambda, \bigcup_{\lambda\in\Lambda} J'_\lambda, \Phi)$ με $\Phi|_{J'_\lambda} = \varphi_\lambda$ είναι ένα άνω φράγμα αυτής, οπότε το $(\mathfrak{N}, \preceq)$ είναι επαγωγικώς διατεταγμένο. Δυνάμει τού λήμματος τού Zorn το $(\mathfrak{N}, \preceq)$ διαθέτει κάποιο μεγιστικό στοιχείο $(J_\blacksquare, J'_\blacksquare, \varphi_\blacksquare)$.

Ισχυρισμός δεύτερος. $J_\blacksquare = \Lambda$.

Απόδειξη δεύτερου ισχυρισμού. Ας υποθέσουμε ότι $J_\blacksquare \subsetneqq \Lambda$, ας επιλέξουμε ένα $\lambda_\blacksquare \in \Lambda \smallsetminus J_\blacksquare$ και ας θέσουμε $L_\blacksquare := J_\blacksquare \cup \{\lambda_\blacksquare\}$. Εάν $U_{J_\blacksquare} = U_{L_\blacksquare}$, τότε ισχύει $(J_\blacksquare, J'_\blacksquare, \varphi_\blacksquare) \underset{\neq}{\preceq} (L_\blacksquare, J'_\blacksquare, \varphi_\blacksquare)$, κάτι που αντίκειται στη μεγιστικότητα τής τριάδας $(J_\blacksquare, J'_\blacksquare, \varphi_\blacksquare)$ εντός τής $\mathfrak{N}$. Άρα

$$U_{J_\blacksquare} \subsetneqq U_{L_\blacksquare} = (\mathrm{Lin}_R(\{x_{\lambda_\blacksquare}\}) + M_{J_\blacksquare}) \cap U$$

και το $Q := \{r \in R \,|\, r x_{\lambda_\blacksquare} + v \in U, \text{ για } v \in M_{J_\blacksquare}\}$ είναι ένα ιδεώδες τού δακτυλίου R. Επειδή $U_{J_\blacksquare} \subsetneqq U_{L_\blacksquare}$, έχουμε $Q \neq \{0_R\}$, οπότε $Q = Ra$ για κάποιο $a \in R \smallsetminus \{0_R\}$, καθώς ο R είναι Π.Κ.Ι. Άρα υπάρχει κάποιο $w \in M_{J_\blacksquare}$ με $z := a x_{\lambda_\blacksquare} + w \in U$. Θέτοντας $L'_\blacksquare := J'_\blacksquare \cup \{\lambda_\blacksquare\}$, ορίζοντας την απεικόνιση

$$\theta_\blacksquare : L'_\blacksquare \longrightarrow U_{L_\blacksquare},\ \ j \longmapsto \theta_\blacksquare(j) := \begin{cases} \varphi_\blacksquare(j), & \text{όταν } j \in J'_\blacksquare, \\ z, & \text{όταν } j = \lambda_\blacksquare, \end{cases}$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι κάθε $x \in U_{L_\blacksquare}$ γράφεται ως $x = b x_{\lambda_\blacksquare} + v$ για κάποια $b \in R$ και $v \in M_{J_\blacksquare}$, παρατηρούμε ότι

$$b \in Q \Rightarrow [\exists c \in R : b = ac] \Rightarrow x = ac x_{\lambda_\blacksquare} + v = c(a x_{\lambda_\blacksquare}) + v = cz + (v - cw)$$

οπότε

$$\left.\begin{aligned} x - cz = v - cw \in M_{J_\blacksquare} \cap U =: U_{J_\blacksquare} \\ \mathrm{Lin}_R(\{\varphi_\blacksquare(j) \,|\, j \in J'_\blacksquare\}) = U_{J_\blacksquare} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x - cz = s_1 \varphi_\blacksquare(j_1) + \cdots + s_\kappa \varphi_\blacksquare(j_\kappa),$$

για κάποιους $s_1, ..., s_\kappa \in R$ και $\{j_1, ..., j_\kappa\} \subseteq J'_\blacksquare$. Επομένως,

$$x = c\theta_\blacksquare(\lambda_\blacksquare) + s_1\theta_\blacksquare(j_1) + \cdots + s_\kappa\theta_\blacksquare(j_\kappa) \Rightarrow \mathrm{Lin}_R(\{\theta_\blacksquare(j) \,|\, j \in L'_\blacksquare\}) = U_{L_\blacksquare}. \quad (2.29)$$

Από την άλλη μεριά, από κάθε σχέση τής μορφής

$$s_0 \underbrace{\theta_\blacksquare(\lambda_\blacksquare)}_{=z} + s_1\theta_\blacksquare(j_1) + \cdots + s_\nu\theta_\blacksquare(j_\nu) = 0_M \quad (2.30)$$

(για κάποιους $s_0, s_1, ..., s_\nu \in R$ και $\{\lambda_\blacksquare, j_1, ..., j_\nu\} \subseteq L'_\blacksquare$) προκύπτει ότι

$$a s_0 x_{\lambda_\blacksquare} = -(s_0 w + s_1\theta_\blacksquare(j_1) + \cdots + s_\nu\theta_\blacksquare(j_\nu)) \Rightarrow a s_0 x_{\lambda_\blacksquare} \in M_{J_\blacksquare} \cap \mathrm{Lin}_R(\{x_{\lambda_\blacksquare}\}) = \{0_M\}.$$

Επειδή η οικογένεια στοιχείων $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι βάση τού M, έχουμε

$$as_0 x_{\lambda_\blacksquare} = 0_M \Rightarrow as_0 = 0_R \underset{a\neq 0_R}{\Longrightarrow} s_0 = 0_R,$$

οπότε

$$\left.\begin{array}{r} s_1\varphi_\blacksquare(j_1) + \cdots + s_\nu\varphi_\blacksquare(j_\nu) = 0_M \\ \text{και το } \{\,\varphi_\blacksquare(j) \,|\, j \in J'_\blacksquare\} \text{ είναι βάση τού } U_{J_\blacksquare} \end{array}\right\} \Rightarrow s_1 = \cdots = s_\nu = 0_R. \qquad (2.31)$$

Από τις (2.29), (2.30) και (2.31) συνάγεται ότι το $\{\,\theta_\blacksquare(j) \,|\, j \in L'_\blacksquare\}$ αποτελεί μια βάση τού $U_{L_\blacksquare}$. Αυτό σημαίνει ότι $(J_\blacksquare, J'_\blacksquare, \varphi_\blacksquare) \underset{\neq}{\prec} (L_\blacksquare, L'_\blacksquare, \theta_\blacksquare)$, κάτι που αντίκειται εκ νέου στη μεγιστικότητα τής τριάδας $(J_\blacksquare, J'_\blacksquare, \varphi_\blacksquare)$ εντός τής $\mathfrak{N}$. Άτοπο!

Αποπεράτωση αποδείξεως. Επειδή $J_\blacksquare = \Lambda$, έχουμε $M_{J_\blacksquare} = M$, $U_{J_\blacksquare} = U$ και το σύνολο $\{\,\varphi_\blacksquare(j) \,|\, j \in J'\}$ αποτελεί μια βάση τού U. Κατά συνέπειαν, ο U είναι ελεύθερος R-μόδιος και $\mathrm{rank}_R(U) = \mathrm{card}(J') \leqslant \mathrm{card}(\Lambda) = \mathrm{rank}_R(M)$. □

2.5.48 Παράδειγμα. Το θεώρημα 2.5.47 παύει να ισχύει όταν ο R δεν είναι Π.Κ.Ι. Εάν, π.χ., $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, τότε το ιδεώδες $I := \langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle$ (ως υπομόδιος τού R-μοδίου R) δεν είναι ελεύθερος R-μόδιος[43].

2.5.49 Πόρισμα. *Εάν M είναι ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος και ο R είναι Π.Κ.Ι., τότε και κάθε υπομόδιος U τού M είναι πεπερασμένως παραγόμενος.*

Απόδειξη. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M \neq \{0_M\}$ και ότι $M = \mathrm{Lin}_R(x_1, ..., x_k)$ με τα $x_1, ..., x_k$ σαφώς διακεκριμένα και $\neq 0_M$. Εάν U είναι τυχών υπομόδιος τού M, θα δείξουμε ότι ο U διαθέτει ένα σύνολο γεννητόρων έχον πληθικό αριθμό $\leqslant k$. Επειδή $R^{(\{x_1,\dots,x_k\})} \cong R^k$, υφίσταται ισομορφισμός

$$M \xrightarrow[f]{\cong} R^k/W,$$

για κάποιον υπομόδιο W τού R^k. (Βλ. απόδειξη τού πορίσματος 2.5.23.) Επομένως η εικόνα τού U μέσω αυτού τού ισομορφισμού οφείλει να είναι τής μορφής $f(U) = Z/W$, για κάποιον υπομόδιο Z τού R^k περιέχοντα τον W. (Βλ. θεώρημα 2.3.4.) Όμως σύμφωνα με το θεώρημα 2.5.47, ο Z (ως υπομόδιος τού *ελευθέρου* R-μοδίου R^k) είναι ελεύθερος και $l := \mathrm{rank}_R(Z) \leqslant \mathrm{rank}_R(R^k) = k$, οπότε $Z \cong R^l$. (Βλ. 2.5.14 και 2.5.39.) Εάν $\{\,b_j \,|\, 1 \leqslant j \leqslant l\}$ είναι μια βάση τού R^l, τότε είναι προφανές ότι

$$Z/W = \mathrm{Lin}_R(b_1 + W, ..., b_l + W)$$

και ότι ο $U = f^{-1}(Z/W)$ παράγεται από l στοιχεία τού M. □

2.5.50 Παράδειγμα. Το πόρισμα 2.5.49 παύει να ισχύει όταν ο R δεν είναι Π.Κ.Ι. Εάν, π.χ., $R = \mathbb{Z}[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \dots, \mathsf{X}_{m-1}, \mathsf{X}_m, \dots]$ είναι ο πολυωνυμικός δακτύλιος[44]

$$\mathbb{Z}[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2, \dots, \mathsf{X}_{m-1}, \mathsf{X}_m, \dots] := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}[\mathsf{X}_1, \dots, \mathsf{X}_n],$$

[43] Τούτο έπεται από το ότι το εν λόγω ιδεώδες *δεν είναι κύριο*. (Βλ. 2.5.15 (iv) και εδ. 1.3.43.)

[44] Εν προκειμένω, $\mathbb{Z}[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2] := \mathbb{Z}[\mathsf{X}_1][\mathsf{X}_2]$, ..., $\mathbb{Z}[\mathsf{X}_1, ..., \mathsf{X}_{n-1}, \mathsf{X}_n] := \mathbb{Z}[\mathsf{X}_1, ..., \mathsf{X}_{n-1}][\mathsf{X}_n]$, ...

άπειρων (αριθμήσιμων, ανεξάρτητων) απροσδιορίστων (με ακεραίους συντελεστές) που προκύπτει ως ένωση των όρων τής ανιούσας ακολουθίας ακεραίων περιοχών

$$\mathbb{Z}[\mathsf{X}_1] \subsetneqq \mathbb{Z}[\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2] \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathbb{Z}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_{n-1}] \subsetneqq \mathbb{Z}[\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n] \subsetneqq \cdots,$$

τότε το $\langle \{ \mathsf{X}_n \,|\, n \in \mathbb{N} \} \rangle$ δεν είναι πεπερασμένως παραγόμενο ιδεώδες τού R. Ως εκ τούτου, το $\langle \{ \mathsf{X}_n \,|\, n \in \mathbb{N} \} \rangle$ αποτελεί έναν μη πεπερασμένως παραγόμενο υπομόδιο τού R-μοδίου R. (Βλ. 2.1.9 (i).)

2.5.51 Συμβολισμός. Εάν M είναι ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος, θέτουμε $\text{min-g}(M) := \min \{ n \in \mathbb{N} |\, \exists$ σύστημα γεννητόρων $\mathscr{E}$ τού $M : \text{card}(\mathscr{E}) = n \}$.

2.5.52 Πόρισμα. *Έστω ότι M, N είναι R-μόδιοι και $f : M \longrightarrow N$ ένας επιμορφισμός. Εάν ο R είναι Π.Κ.Ι. και ο M πεπερασμένως παραγόμενος, τότε τόσον ο N όσον και ο* $\text{Ker}(f)$ *είναι πεπερασμένως παραγόμενοι, και ισχύει*

$$\text{min-g}(N) \leqslant \text{min-g}(M) \leqslant \text{min-g}(N) + \text{min-g}(\text{Ker}(f)). \tag{2.32}$$

Απόδειξη. Το ότι οι N και $\text{Ker}(f)$ είναι πεπερασμένως παραγόμενοι είναι γνωστό από τα πορίσματα 2.2.8 και 2.5.49, αντιστοίχως, ενώ οι (2.32) προκύπτουν άμεσα από την πρόταση 2.2.7. □

Η παρούσα ενότητα θα κλείσει με την απόδειξη τής ακόλουθης γενικεύσεως τού πορίσματος 2.5.49:

2.5.53 Θεώρημα. *Έστω R ένας ναιτεριανός δακτύλιος.* (Βλ. εδ. 1.3.30.) *Εάν ο M είναι ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος, τότε και κάθε υπομόδιος U τού M είναι πεπερασμένως παραγόμενος.*

Απόδειξη. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M \neq \{0_M\}$ και ότι $M = \text{Lin}_R(x_1, ..., x_k)$ με τα $x_1, ..., x_k$ σαφώς διακεκριμένα και $\neq 0_M$. Εάν U είναι τυχών υπομόδιος τού M, θα δείξουμε ότι ο U διαθέτει ένα *πεπερασμένο* σύνολο γεννητόρων. Επειδή $R^{(\{x_1,...,x_k\})} \cong R^k$, υφίσταται ισομορφισμός $M \xrightarrow[f]{\cong} R^k/W$, για κάποιον υπομόδιο W τού R^k. (Βλ. απόδειξη τού πορίσματος 2.5.23.) Επομένως η εικόνα τού U μέσω αυτού τού ισομορφισμού οφείλει να είναι τής μορφής $f(U) = Z/W$, για κάποιον υπομόδιο Z τού R-μοδίου R^k περιέχοντα τον W. (Βλ. θεώρημα 2.3.4.) Λόγω τού πορίσματος 2.2.8, αρκεί να δειχθεί ότι ο Z είναι πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος τού R^k. Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή επί τού k. Εάν $k = 1$, τότε ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής, διότι ο R είναι εξ υποθέσεως ναιτεριανός. Ας υποθέσουμε εφεξής ότι $k \geqslant 2$. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι το σύνολο $I := \left\{ z_1 |\, z = (z_1, ..., z_k) \in R^k \right\} \subseteq R$ αποτελεί ένα ιδεώδες τού R. Επειδή ο R είναι ναιτεριανός, υπάρχουν $\nu \in \mathbb{N}$ στοιχεία

$$z_1^{(1)}, ..., z_1^{(\nu)} \in R : I = \left\langle z_1^{(1)}, ..., z_1^{(\nu)} \right\rangle.$$

Θεωρούμε για κάθε $j \in \{1, ..., l\}$ στοιχεία $z^{(j)} \in Z$, η «πρώτη συντεταγμένη» των οποίων ισούται με το $z_1^{(j)}$. Τότε για κάθε $z \in Z$ υπάρχουν στοιχεία $r_1, ..., r_l \in R$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$z - r_1 z^{(1)} - \cdots - r_l z^{(l)} = (0_R, z_2', \ldots, z_k'),$$

για κάποια $z_2', \ldots, z_k'$ ανήκοντα στον R. Ταυτίζοντας τον R^{k-1} εντός τού R^k με εκείνον τον υπομόδιο τού R^k που αποτελείται από στοιχεία τού R^k έχοντα ως «πρώτη τους συντεταγμένη» το 0_R, σχηματίζουμε τον υπομόδιο $Z' := Z \cap R^{k-1}$ τού R^{k-1}. Σύμφωνα με την επαγωγική μας υπόθεση, ο Z' είναι πεπερασμένως παραγόμενος. Συγκεκριμένα, εάν $Z' = \mathrm{Lin}_R(\{t_1, \ldots, t_m\})$, τότε έχουμε

$$Z = \mathrm{Lin}_R(\{t_1, \ldots, t_m, z^{(1)}, \ldots, z^{(l)}\})$$

και, κατ' επέκταση, $Z/W = \mathrm{Lin}_R(\{t_1 + W, \ldots, t_m + W, z^{(1)} + W, \ldots, z^{(l)} + W\})$. Επομένως και ο αρχικώς θεωρηθείς υπομόδιος $U = f^{-1}(Z/W)$ τού M διαθέτει όντως ένα *πεπερασμένο* σύνολο γεννητόρων. $\square$

2.6 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΣ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΟΙ ΜΟΔΙΟΙ ΟΡΙΣΜΕΝΟΙ ΥΠΕΡΑΝΩ Π.Κ.Ι.

Οι *πεπερασμένως παραγόμενοι* μόδιοι, οι οποίοι ορίζονται υπεράνω *περιοχών κυρίων ιδεωδών*, είναι ταξινομήσιμοι *μέχρις ισομορφισμού* με τη βοήθεια *διακριτών αναλλοιώτων*. (Συγκεκριμένα, με τη βοήθεια *τής ελεύθερης βαθμίδας τους, τής τάξεως τού υπομοδίου στρέψεώς τους και των εκθετών των στοιχειωδών διαιρετών τους*.) Το σχετικό *δομικό θεώρημα* (βλ. εδ. 2.6.30) είναι λίαν σημαντικό, καθώς γενικεύει *το θεώρημα ταξινομήσεως των πεπερασμένως παραγομένων αβελιανών ομάδων* και υπεισέρχεται σε μια σειρά ενδιαφερουσών εφαρμογών σε πολλούς μαθηματικούς κλάδους, αλλά η απόδειξή του είναι κατά τι μακροσκελής, χωριζόμενη σε αρκετά βήματα.

2.6.1 Ορισμός. Έστω M ένας R-μόδιος, όπου R μια ακεραία περιοχή. Ένα στοιχείο $x \in M$ καλείται **στοιχείο στρέψεως** όταν υπάρχει κάποιο $r \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $rx = 0_M$. Τα στοιχεία στρέψεως τού M συνιστούν έναν υπομόδιο[45] $\mathrm{tors}(M)$ τού M. Ο $\mathrm{tors}(M)$ καλείται[46] **υπομόδιος στρέψεως τού** M. Λέμε ότι ο M είναι R-**μόδιος στρέψεως** όταν $\mathrm{tors}(M) = M$. Κατ' αναλογίαν, λέμε ότι ο M είναι R-**μόδιος χωρίς στρέψη** (ή ότι ο M **δεν διαθέτει στρέψη** ή ότι **στερείται στρέψεως**) όταν $\mathrm{tors}(M) = \{0_M\}$.

2.6.2 Παράδειγμα. Έστω $(G, +)$ μια μη τετριμμένη αβελιανή ομάδα (θεωρούμενη ως $\mathbb{Z}$-μόδιος, βλ. 2.1.4 (i)). Τα στοιχεία στρέψεως αυτής είναι ακριβώς εκείνα τα στοιχεία, η (ομαδοθεωρητική) τάξη των οποίων είναι *πεπερασμένη*.

[45] Εάν υποθέσουμε ότι $s_1, s_2 \in R$ και $x, y \in \mathrm{tors}(M)$, τότε υπάρχουν στοιχεία $r_1, r_2 \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τέτοια ώστε να ισχύει $r_1 x = 0_M = r_2 x$. Επειδή ο δοθείς δακτύλιος R είναι ακεραία περιοχή, έχουμε $r_1 r_2 \in R \smallsetminus \{0_R\}$ και $r_1 r_2 (s_1 x + s_2 y) = 0_M \Rightarrow s_1 x + s_2 y \in \mathrm{tors}(M)$ και το $\mathrm{tors}(M)$ αποτελεί υπομόδιο τού M. (Βλ. πρόταση 2.1.7.)

[46] Το σύμβολο $\mathrm{tors}(M)$ προκύπτει από τον όρο torsion (= στρέψη).

2.6.3 Λήμμα. *Εάν M είναι ένας R-μόδιος, όπου R ακεραία περιοχή, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο M δεν διαθέτει στρέψη.*

(ii) *Τα μονοσύνολα $\{x\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα για κάθε $x \in M \smallsetminus \{0_M\}$.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν $\text{tors}(M) = \{0_M\}$ και $x \in M \smallsetminus \{0_M\} = M \smallsetminus \text{tors}(M)$, τότε για κάθε $r \in R$ με $rx = 0_M$ έχουμε $r = 0_R$ (διότι αλλιώς το x θα ήταν στοιχείο στρέψεως τού M), οπότε το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

(ii)⇒(i) Εάν υπήρχε κάποιο $x \in \text{tors}(M)$ με $x \neq 0_M$, τότε θα υπήρχε κάποιο $r \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $rx = 0_M$, απ' όπου θα έπετο ότι το $\{x\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο. □

2.6.4 Πρόταση. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., τότε κάθε πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος M χωρίς στρέψη είναι ελεύθερος.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_1, ..., x_k\}$ ένα σύστημα γεννητόρων ενός τέτοιου R-μοδίου M. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι[47] $x_j \neq 0_M$ για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$. Επειδή ο M δεν διαθέτει στρέψη, κάθε μονοσύνολο $\{x_j\}$, $j \in \{1, ..., k\}$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. (Βλ. λήμμα 2.6.3.) Από όλα τα γραμμικώς ανεξάρτητα υποσύνολα τού $\{x_1, ..., x_k\}$ επιλέγουμε ένα με το *μέγιστο δυνατό πλήθος στοιχείων*. Δίχως βλάβη τής γενικότητας (ενδεχομένως έπειτα από κάποια αναδιάταξη δεικτών) μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό είναι το $\{x_1, ..., x_l\}$, όπου $l \in \{1, ..., k\}$. Εάν $l = k$, τότε το $\{x_1, ..., x_k\}$ είναι μια βάση τού M, οπότε ο M είναι ελεύθερος. Εάν $l \in \{1, ..., k-1\}$, τότε όλα τα σύνολα $\{x_1, ..., x_l\} \cup \{x_j\}$, $l < j \leqslant k$, είναι (εξ υποθέσεως) γραμμικώς εξαρτημένα. Κατά συνέπειαν,

$$\exists (r_{1,j}, ..., r_{l,j}) \in R^l \text{ και } \exists r_j \in R \smallsetminus \{0_R\} : r_j x_j = \sum_{i=1}^{l} r_{i,j} x_i, \ \forall j \in \{l+1, ..., k\}.$$

Θέτοντας[48] $r := r_{l+1} r_{l+2} \cdots r_k \in R \smallsetminus \{0_R\}$ λαμβάνουμε για κάθε $j \in \{l+1, ..., k\}$

$$r x_j \in R x_1 \oplus R x_2 \oplus \cdots \oplus R x_l =: N.$$

Προφανώς, $r x_j \in N$ *και* για κάθε $j \in \{1, ..., l\}$. Αυτό σημαίνει ότι $rx \in N$ για κάθε $x \in M$, οπότε $\{rx | \, x \in M\} =: rM \subseteq N$. Το rM είναι ελεύθερος R-μόδιος ως υπομόδιος τού ελευθέρου R-μοδίου N. (Βλ. θεώρημα 2.5.47.) Επειδή ο M δεν διαθέτει στρέψη και $r \neq 0_R$, η απεικόνιση $M \ni x \mapsto rx \in rM$ είναι ισομορφισμός. Άρα ο $M \cong rM$ είναι (και σε αυτήν την περίπτωση) ελεύθερος R-μόδιος. □

2.6.5 Λήμμα. *Εάν M είναι ένας R-μόδιος, όπου R ακεραία περιοχή, τότε ο πηλικομόδιος $M/\text{tors}(M)$ δεν διαθέτει στρέψη.*

---

[47] Εάν κάποιο εξ αυτών είναι $= 0_M$, τότε μπορεί να παραλειφθεί. Εάν $k = 1$ και $x_1 = 0_M$, τότε ο M είναι τετριμμένος, οπότε ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής.

[48] Το ότι $r \neq 0_R$ οφείλεται στο ότι ο δακτύλιος R είναι *ακεραία περιοχή*.

Απόδειξη. Θέτοντας $U := \mathrm{tors}(M)$ και υποθέτοντας ότι $x + U \in \mathrm{tors}(M/U)$, όπου $x \in M$, υπάρχει $r \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$rx + U = r(x + U) = 0_{M/U} = U \Rightarrow rx \in U.$$

Κατά συνέπειαν,

$$\exists s \in R \smallsetminus \{0_R\} : s(rx) = (sr)x = 0_M$$

με $sr \neq 0_R$ (διότι ο δακτύλιος R είναι ακεραία περιοχή). Αυτό σημαίνει ότι $x \in U$, ήτοι $x + U = U = 0_{M/U}$ και, κατ' επέκταση, ότι $\mathrm{tors}(M/U) = \{0_{M/U}\}$. □

2.6.6 Θεώρημα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., τότε κάθε πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος M γράφεται ως ευθύ άθροισμα*

$$\boxed{M = \mathrm{tors}\,(M) \oplus \mathrm{frp}(M),}$$

όπου[49] $\mathrm{frp}(M) \cong M/\mathrm{tors}(M)$ *είναι ένας ελεύθερος υπομόδιος τού M (το λεγόμενο **ελεύθερο μέρος** τού M).*

Απόδειξη. Εάν $\{x_1, ..., x_k\}$ είναι ένα σύστημα γεννητόρων ενός τέτοιου R-μοδίου M, τότε το

$$\{x_1 + \mathrm{tors}\,(M)\,, ..., x_k + \mathrm{tors}\,(M)\}$$

αποτελεί ένα σύστημα γεννητόρων τού $M/\mathrm{tors}(M)$. Επομένως ο πηλικομόδιος $M/\mathrm{tors}(M)$ είναι πεπερασμένως παραγόμενος και ταυτοχρόνως (σύμφωνα με το λήμμα 2.6.5) χωρίς στρέψη. Εξ αυτού προκύπτει ότι ο $M/\mathrm{tors}(M)$ είναι ελεύθερος. (Βλ. πρόταση 2.6.4.) Από την άλλη μεριά, υπάρχει υπομόδιος $\mathrm{frp}(M)$ τού M, τέτοιος ώστε $M = \mathrm{tors}(M) \oplus \mathrm{frp}(M)$. (Βλ. θεώρημα 2.5.46.) Ο ισομορφισμός $\mathrm{frp}(M) \cong M/\mathrm{tors}(M)$ προκύπτει από την πρόταση 2.4.20. □

2.6.7 Ορισμός. Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος, τότε ορίζουμε ως **ελεύθερη βαθμίδα** τού M

$$\boxed{\text{fr-rank}_R(M) := \mathrm{rank}_R(\mathrm{frp}\,(M))} \tag{2.33}$$

τη βαθμίδα τού ελεύθερου μέρους του.

2.6.8 Λήμμα. *Εάν $f : M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων, τότε ισχύει ο εγκλεισμός $f(\mathrm{tors}(M)) \subseteq \mathrm{tors}(N)$ και, ως εκ τούτου, ορίζεται καλώς ο «κανονιστικός» ομομορφισμός*

$$f^{\pi\eta\lambda.} : M/\mathrm{tors}(M) \longrightarrow N/\mathrm{tors}(N)$$

$$x + \mathrm{tors}(M) \longmapsto f^{\pi\eta\lambda.}(x + \mathrm{tors}(M)) := f(x) + \mathrm{tors}(N),$$

[49] Επελέγη το σύμβολο “$\mathrm{frp}(M)$” για να θυμίζει το free part of M.

ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi^{M}_{\mathrm{tors}(M)}"'] & & N \arrow[d, two heads, "\pi^{N}_{\mathrm{tors}(N)}"] \\ M/\mathrm{tors}(M) \arrow[rr, dashed, "f^{\pi\eta\lambda.}"'] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & N/\mathrm{tors}(N) \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Επιπροσθέτως, ισχύουν τα ακόλουθα:

(a) *Ο* $f^{\pi\eta\lambda.}$ *είναι μονομορφισμός* $\Longleftrightarrow \mathrm{tors}(M) = f^{-1}(\mathrm{tors}(N))$.

(b) *Ο* $f^{\pi\eta\lambda.}$ *είναι επιμορφισμός* $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) + \mathrm{tors}(N) = N$.

Αποδειξη. Εάν $x \in M$ με $rx = 0_M$ για κάποιο $r \in R \smallsetminus \{0_R\}$, τότε έχουμε

$$rf(x) = f(rx) = f(0_M) = 0_N \Rightarrow f(x) \in \mathrm{tors}(N).$$

Επομένως, $f(\mathrm{tors}(M)) \subseteq \mathrm{tors}(N)$. Οι λοιποί ισχυρισμοί (λαμβανομένης υπ' όψιν τής σημειώσεως 2.3.11) είναι αληθείς δυνάμει τού θεωρήματος 2.3.10. $\square$

2.6.9 Θεώρημα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M, N πεπερασμένως παραγόμενοι R-μόδιοι, τότε οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) $M \cong N$.

(ii) $\mathrm{tors}(M) \cong \mathrm{tors}(N)$ *και* $\mathrm{frp}(M) \cong \mathrm{frp}(N)$.

Αποδειξη. (i)⇒(ii) Έστω $f : M \xrightarrow{\cong} N$ ένας ισομορφισμός. Εφαρμόζοντας το λήμμα 2.6.8 τόσον για τον f όσον και για τον f^{-1} λαμβάνουμε

$$\left.\begin{array}{l} f(\mathrm{tors}(M)) \subseteq \mathrm{tors}(N) \\ f^{-1}(\mathrm{tors}(N)) \subseteq \mathrm{tors}(M) \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathrm{tors}(M)) = \mathrm{tors}(N), \tag{2.34}$$

οπότε η $f|_{\mathrm{tors}(M)} : \mathrm{tors}(M) \longrightarrow \mathrm{tors}(N)$ είναι ισομορφισμός με τον $f^{-1}|_{\mathrm{tors}(N)}$ ως αντίστροφό του. Επίσης, λόγω τής ισότητας (2.34) πληρούται η συνθήκη (a) τού λήμματος 2.6.8 για τον $f^{\pi\eta\lambda.}$. Επειδή δε $\mathrm{Im}(f) = N$, πληρούται *και* η συνθήκη (b) τού λήμματος 2.6.8 για τον $f^{\pi\eta\lambda.}$. Άρα ο $f^{\pi\eta\lambda.}$ είναι ισομορφισμός και ο ισχυρισμός είναι αληθής, διότι (βάσει των αποδειχθέντων στο θεώρημα 2.6.6)

$$\mathrm{frp}(M) \cong M/\mathrm{tors}\,(M) \;\; \text{και} \;\; \mathrm{frp}(N) \cong N/\mathrm{tors}\,(N)\,.$$

(ii)⇒(i) Κατά το θεώρημα 2.6.6, $M \cong \mathrm{tors}\,(M) \oplus \mathrm{frp}\,(M)\,,\; N \cong \mathrm{tors}\,(N) \oplus \mathrm{frp}\,(N)\,.$ Εάν $f_1 : \mathrm{tors}(M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{tors}(N)$ και $f_2 : \mathrm{frp}(M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{frp}(N)$ είναι ισομορφισμοί, τότε ο ομομορφισμός $f_1 \oplus f_2 : M \longrightarrow N$ είναι ωσαύτως ισομορφισμός. $\square$

▸ **Μόδιοι στρέψεως υπεράνω Π.Κ.Ι.** Επειδή (κατά την πρόταση 2.5.41 και τον ορισμό (2.33)) ισχύει

$$\mathrm{frp}\,(M) \cong \mathrm{frp}\,(N) \Leftrightarrow \text{fr-rank}_R(M) = \text{fr-rank}_R(N), \tag{2.35}$$

για να καταλήξουμε σε ένα όμορφο θεώρημα ταξινομήσεως των πεπερασμένως παραγομένων μοδίων υπεράνω Π.Κ.Ι. *μέχρις ισομορφισμού* αρκεί να εστιάσουμε την προσοχή μας στο πότε δυο πεπερασμένως παραγόμενοι μόδιοι *στρέψεως* (υπεράνω Π.Κ.Ι.) είναι ισόμορφοι.

2.6.10 Ορισμός. Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $x \in M$. Το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{Ann}_R(x) := \{r \in R \,|\, rx = 0_M\}}$$

ονομάζεται **μηδενιστής τού στοιχείου** x. Όταν ο R είναι ακεραία περιοχή,

$$\mathrm{tors}\,(M) = \{x \in M \mid \mathrm{Ann}_R(x) \neq \{0_R\}\}\,.$$

Εάν U είναι ένας υπομόδιος τού M, τότε το σύνολο

$$\boxed{\mathrm{Ann}_R(U) := \{r \in R \,|\, ru = 0_M,\ \forall u \in U\}}$$

ονομάζεται **μηδενιστής τού υπομοδίου** U.

2.6.11 Πρόταση. *Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $x \in M$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Το $\mathrm{Ann}_R(x)$ είναι ένα ιδεώδες τού R (και κατ' επέκταση υπομόδιος τού R-μοδίου R) και υφίσταται ένας ισομορφισμός R-μοδίων:*

$$R/\mathrm{Ann}_R(x) \cong Rx. \tag{2.36}$$

(ii) *Εάν U είναι ένας υπομόδιος τού M, τότε το $\mathrm{Ann}_R(U)$ είναι ένα ιδεώδες τού R (και κατ' επέκταση υπομόδιος τού R-μοδίου R).*

(iii) *Εάν ο M είναι πεπερασμένως παραγόμενος και $\{x_1, \ldots, x_k\}$ τυχόν σύστημα γεννητόρων αυτού, τότε*

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ann}_R(x_j).$$

Απόδειξη. (i) Εάν $a_1, a_2, a \in \mathrm{Ann}_R(x)$ και $r \in R$, τότε

$$(a_1 - a_2)x = a_1x - a_2x = 0_M - 0_M = 0_M \Rightarrow a_1 - a_2 \in \mathrm{Ann}_R(x),$$
$$(ra)x = r(ax) = r0_M = 0_M \Rightarrow ra \in \mathrm{Ann}_R(x).$$

Επιπροσθέτως, ο επιμορφισμός R-μοδίων $R \ni r \longmapsto rx \in Rx$ έχει ως πυρήνα του τον μηδενιστή τού x, οπότε ο (2.36) προκύπτει από το 1ο θεώρημα ισομορφισμών 2.3.7.

(ii) Εάν $a_1, a_2, a \in \mathrm{Ann}_R(U)$ και $r \in R$, τότε για κάθε $u \in U$ έχουμε

$$(a_1 - a_2)u = a_1u - a_2u = 0_M - 0_M = 0_M \Rightarrow a_1 - a_2 \in \mathrm{Ann}_R(U),$$
$$(ra)u = r(au) = r0_M = 0_M \Rightarrow ra \in \mathrm{Ann}_R(U).$$

(iii) Εξ ορισμού, $\mathrm{Ann}_R(M) \subseteq \mathrm{Ann}_R(x_j)$ για κάθε δείκτη $j \in \{1, \ldots, k\}$, απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{Ann}_R(M) \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ann}_R(x_j)$. Και αντιστρόφως· εάν $r \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ann}_R(x_j)$ και $x \in M$, τότε υπάρχουν $r_1, \ldots, r_k \in R$, τέτοια ώστε

$$x = \sum_{j=1}^{k} r_jx_j \Rightarrow rx = r\left(\sum_{j=1}^{k} r_jx_j\right) = \sum_{j=1}^{k} r_j(rx_j) = \sum_{j=1}^{k} r_j0_M = 0_M,$$

απ' όπου έπεται ότι $x \in \mathrm{Ann}_R(M)$, οπότε $\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ann}_R(x_j) \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$. □

2.6.12 Ορισμός. Έστω R μια Π.Κ.Ι. και έστω M ένας R-μόδιος.

(i) Για κάθε $s \in R$ ορίζουμε τον υπομόδιο τού M

$$\boxed{M[s] := \{x \in M \,|\, sx = 0_M\}}$$

τον απαρτιζόμενο από εκείνα τα στοιχεία τού M τα οποία μηδενίζονται πολλαπλασιαζόμενα με το s. Εάν $s, s' \in R$ και $s \mid s'$, τότε είναι πρόδηλο ότι $M[s] \subseteq M[s']$. Ιδιαιτέρως, για κάθε $s \in R$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$M[s] \subseteq M[s^2] \subseteq M[s^3] \subseteq \cdots \subseteq M[s^n] \subseteq M[s^{n+1}] \subseteq \cdots \tag{2.37}$$

(ii) Εάν $s \in R$, τότε λόγω τής (2.37) ορίζεται ο υπομόδιος

$$\boxed{M(s) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M[s^n] = \{x \in M \,|\, s^n x = 0_M \text{ για κάποιον } n \in \mathbb{N}\}}$$

τού M που καλείται s-**συνιστώσα τού** M.

(iii) Εάν το p είναι ένα πρώτο στοιχείο τής R (βλ. 1.4.36), τότε ο $M(p)$ ονομάζεται p-**πρωτεύουσα συνιστώσα τού** M.

(iv) Εάν το p είναι ένα πρώτο στοιχείο τής R, τότε ο M καλείται p-**πρωτεύων** (ή p-**περιοδικός**) όταν $M = M(p)$, ήτοι όταν ισούται με την p-πρωτεύουσα συνιστώσα του.

2.6.13 Παρατήρηση. $U(s) = M(s) \cap U$, $\forall s \in R$, για κάθε υπομόδιο U τού M.

2.6.14 Πρόταση. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M ένας R-μόδιος, τότε*

$$\mathrm{tors}(M) = \{0_M\} \Longleftrightarrow (M[s] = \{0_M\},\ \forall s \in R \smallsetminus \{0_R\}).$$

Απόδειξη. "$\Rightarrow$" Έστω ότι υπάρχει $s \in R \smallsetminus \{0_R\}$ με $M[s] \neq \{0_M\}$. Τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο $x \in M[s] \smallsetminus \{0_M\}$. Γι' αυτό το στοιχείο ισχύει $sx = 0_M$, οπότε έχουμε $x \in \mathrm{tors}(M) \smallsetminus \{0_M\}$, απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{tors}(M) \neq \{0_M\}$.

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $\mathrm{tors}(M) \neq \{0_M\}$. Τότε υπάρχει $x \in \mathrm{tors}(M) \smallsetminus \{0_M\}$, οπότε υπάρχει κάποιο $s \in R \smallsetminus \{0_R\}$ με $sx = 0_M$. Εξ αυτού έπεται ότι $x \in M[s] \smallsetminus \{0_M\}$, ήτοι ότι $M[s] \neq \{0_M\}$. □

2.6.15 Πρόταση. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, τα $a_1, a_2, \ldots, a_k \in R$ ανά δύο "σχετικώς πρώτα" (δηλαδή $1_R \in \mathrm{MK\Delta}_R(a_i, a_j)$ για $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ με $i \neq j$) και M ένας R-μόδιος, τότε*

$$M[a_1 a_2 \cdots a_k] = \bigoplus_{j=1}^{k} M[a_j].$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε μαθηματική επαγωγή ως προς τον k. Εάν $k = 2$, τότε

$$\exists (b_1, b_2) \in R \times R : 1_R = a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

οπότε για κάθε $x \in M[a_1a_2]$ έχουμε

$$x = a_1b_1x + a_2b_2x = a_2b_2x + a_1b_1x,$$

απ' όπου έπεται ότι $a_1b_1x \in M[a_2]$ (διότι $a_2(a_1b_1x) = b_1(a_1a_2x) = b_10_M = 0_M$) και (κατ' αναλογίαν) $a_2b_2x \in M[a_1]$. Κατά συνέπειαν,

$$\left.\begin{array}{r} M[a_1a_2] \subseteq M[a_1] + M[a_2] \\ M[a_1] \subseteq M[a_1a_2],\ M[a_2] \subseteq M[a_1a_2] \end{array}\right\} \Rightarrow M[a_1a_2] = M[a_1] + M[a_2].$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε $y \in M[a_1] \cap M[a_2]$ έχουμε

$$y = a_1b_1y + a_2b_2y = b_1(a_1y) + b_2(a_2y) = b_10_M + b_20_M = 0_M,$$

οπότε

$$\left.\begin{array}{r} M[a_1a_2] = M[a_1] + M[a_2] \\ M[a_1] \cap M[a_2] = \{0_M\} \end{array}\right\} \underset{2.4.17}{\Longrightarrow} M[a_1a_2] = M[a_1] \oplus M[a_2].$$

Εάν υποθέσουμε ότι $k \geqslant 3$ και ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για *οιαδήποτε* $k-1$ ανά δύο σχετικώς πρώτα στοιχεία τής R, τότε

$$M = M[a_1a_2\cdots a_{k-1}] \oplus M[a_k] = (\bigoplus_{j=1}^{k-1} M[a_j]) \oplus M[a_k] = \bigoplus_{j=1}^{k} M[a_j],$$

λόγω τής επαγωγικής υποθέσεώς μας (διότι τα $a_1 \cdots a_{k-1}$ και a_k είναι σχετικώς πρώτα). □

2.6.16 Πόρισμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., $r \in R$ και $r \underset{\text{συν.}}{\sim} p_1^{\nu_1}p_2^{\nu_2}\dots p_t^{\nu_t}$ είναι η παράσταση τού r ως γινομένου (κατάλληλων θετικών ακεραίων δυνάμεων) πρώτων στοιχείων $p_1, p_2, ..., p_t$ τής R (που είναι ανά δύο μη συντροφικά όταν $t \geqslant 2$), τότε για κάθε $j \in \{1, ..., t\}$ ισχύει η ισότητα*

$$M[r](p_j) = M[p_j^{\nu_j}]\ (:= \{x \in M\,|p_j^{\nu_j}x = 0_M\}).$$

Απόδειξη. *Περίπτωση πρώτη*. Εάν $t = 1$, τότε[50] $M[r] = M[p_1^{\nu_1}]$ και

$$M[r](p_1) = M[r] \cap M(p_1) = M[p_1^{\nu_1}] \cap M(p_1) = M[p_1^{\nu_1}],$$

διότι είναι προφανές ότι $M[p_1^{\nu_1}] \subseteq M(p_1)$.
Περίπτωση δεύτερη. Εάν $t \geqslant 2$, τότε για κάθε $j \in \{1, ..., t\}$ τα $p_j^{\nu_j}$ και $\prod_{i \in \{1,...,t\} \smallsetminus \{j\}} p_i^{\nu_i}$ είναι σχετικώς πρώτα, οπότε η πρόταση 2.6.15 μας πληροφορεί ότι

$$M[r] = M[p_j^{\nu_j}] \oplus M[\textstyle\prod_{i \in \{1,...,t\} \smallsetminus \{j\}} p_i^{\nu_i}].$$

[50]Προφανώς, $p_1^{\nu_1} \mid r \Rightarrow M[p_1^{\nu_1}] \subseteq M[r]$. Και αντιστρόφως· επειδή $r = up_1^{\nu_1}$ για κάποιο $u \in R^{\times}$, εάν $x \in M[r]$, τότε από την $(up_1^{\nu_1})\,x = 0_M$ έπεται ότι $p_1^{\nu_1}x = 0_M$, ήτοι ότι $x \in M[p_1^{\nu_1}]$.

Επειδή $M[p_j^{\nu_j}] \subseteq M(p_j)$, $\forall j \in \{1,...,t\}$, έχουμε

$$\begin{aligned} M[r](p_j) &= M[r] \cap M(p_j) \\ &= \left(M[p_j^{\nu_j}] \oplus M[\textstyle\prod_{i\in\{1,\dots,t\}\smallsetminus\{j\}} p_i^{\nu_i}]\right) \cap M(p_j) \\ &\underset{2.1.20}{=} \left(M(p_j) \cap M[\textstyle\prod_{i\in\{1,\dots,t\}\smallsetminus\{j\}} p_i^{\nu_i}]\right) + M[p_j^{\nu_j}]. \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι

$$M(p_j) \cap M[\textstyle\prod_{i\in\{1,\dots,t\}\smallsetminus\{j\}} p_i^{\nu_i}] = \{0_M\}. \tag{2.38}$$

Επειδή *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ ισχύει[51]

$$1_R \in \text{ΜΚΔ}_R(p_j, \prod_{i\in\{1,\dots,t\}\smallsetminus\{j\}} p_i^{\nu_i}) \Longrightarrow 1_R \in \text{ΜΚΔ}_R(p_j^n, \prod_{i\in\{1,\dots,t\}\smallsetminus\{j\}} p_i^{\nu_i})$$

$$\Longrightarrow \exists (a,b) \in R \times R : 1_R = ap_j^n + b\left(\textstyle\prod_{i\in\{1,\dots,t\}\smallsetminus\{j\}} p_i^{\nu_i}\right),$$

υπάρχει *για κάθε* $y \in M(p_j) \cap M[\prod_{i\in\{1,\dots,t\}\smallsetminus\{j\}} p_i^{\nu_i}]$ *αρκούντως μεγάλος* $n_{\blacksquare} \in \mathbb{N}$ με

$$y = a\left(p_j^{n_{\blacksquare}} y\right) + b\left(\textstyle\prod_{i\in\{1,\dots,t\}\smallsetminus\{j\}} p_i^{\nu_i}\right) y = a0_M + b0_M = 0_M,$$

οπότε η ισότητα (2.38) είναι όντως αληθής. □

2.6.17 Θεώρημα («Θεώρημα πρωτεύουσας αποσυνθέσεως»). *Έστω R μια Π.Κ.Ι. και έστω M ένας μη τετριμμένος πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος στρέψεως. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Ο μηδενιστής τού M είναι ένα μη τετριμμένο, γνήσιο και κύριο ιδεώδες $\text{Ann}_R(M) = \langle r \rangle$ τής R, όπου το $r \in R\smallsetminus(R^\times \cup \{0_R\})$ (για τον δοθέντα M) είναι μονοσημάντως ορισμένο μέχρις συντροφικότητας.*

(ii) *Εάν $r \underset{\text{συν.}}{\sim} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_t^{\nu_t}$ είναι η παράσταση τού r ως γινομένου (κατάλληλων θετικών ακεραίων δυνάμεων) πρώτων στοιχείων $p_1, p_2, ..., p_t$ τής R (που είναι ανά δύο μη συντροφικά όταν $t \geqslant 2$), τότε $M(p_j) \neq \{0_M\}$ για κάθε $j \in \{1, ..., t\}$ και*

$$\boxed{M = M(p_1) \oplus M(p_2) \oplus \cdots \oplus M(p_t),} \tag{2.39}$$

όπου η εν λόγω αποσύνθεση τού M στα ευθέα αθροίσματα των πρωτευουσών συνιστωσών του είναι μοναδική.

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε τον μηδενιστή $\text{Ann}_R(M)$ τού M. Σύμφωνα με το (ii) τής προτάσεως 2.6.11 ο $\text{Ann}_R(M)$ αποτελεί ένα *ιδεώδες* τής R. Το ιδεώδες αυτό είναι αφ' ενός μεν *γνήσιο*, διότι ο M είναι μη τετριμμένος, αφ' ετέρου δε *μη τετριμμένο*, διότι εάν $\{x_1, ..., x_n\}$ είναι τυχόν σύστημα γεννητόρων τού M, υπάρχει $r_j \in R\smallsetminus\{0_R\}$ με $r_j x_j = 0_M$ για κάθε $j \in \{1, ..., n\}$, οπότε $0_R \neq \prod_{j=1}^{n} r_j \in \text{Ann}_R(M)$. Έστω τώρα

[51] Πρβλ. πόρισμα 1.4.16.

$\{x_1, ..., x_k\}$ ένα σύστημα γεννητόρων τού M με το *ελάχιστο δυνατό πλήθος στοιχείων*[52]. Επειδή ο M είναι R-μόδιος στρέψεως, υπάρχει $r_j \in R\smallsetminus\{0_R\}$ με $r_j x_j = 0_M$ για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$, οπότε

$$[\mathrm{Ann}_R(x_j) \neq \{0_R\},\ \forall j \in \{1, ..., k\}] \text{ και } \mathrm{Ann}_R(M) = \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ann}_R(x_j).$$

(Βλ. 2.6.11 (iii).) Επειδή ο δακτύλιος αναφοράς R είναι Π.Κ.Ι., υπάρχει ένα (μέχρι συντροφικότητας μονοσημάντως ορισμένο[53]) $s_j \in R\smallsetminus\{0_R\}$ με $\mathrm{Ann}_R(x_j) = \langle s_j \rangle$ για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$. Επομένως, $\mathrm{Ann}_R(M) = \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ann}_R(x_j) = \bigcap_{j=1}^{k} \langle s_j \rangle = \langle r \rangle$ για κάποιο[54] $r \in \text{ΕΚΠ}_R(s_1, ..., s_k)$. Το[55] $r \in R\smallsetminus(R^\times \cup \{0_R\})$ είναι ωσαύτως μονοσημάντως ορισμένο μέχρι συντροφικότητας.

(ii) Επειδή (βάσει των προαναφερθέντων στο (i)) $M = M[r]$, έχουμε (δυνάμει τής προτάσεως 2.6.15 και τού πορίσματος 2.6.16)

$$M = M[r] = M[p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots p_t^{\nu_t}] = \bigoplus_{j=1}^{t} M[p_j^{\nu_j}] = \bigoplus_{j=1}^{t} M(p_j).$$

Εάν $t = 1$, τότε $M(p_1) = M \neq \{0_M\}$. Έστω ότι $t \geqslant 2$. Εάν υπήρχε κάποιος δείκτης $j_\blacksquare \in \{1, ..., t\}$ με $M(p_{j_\blacksquare}) = \{0_M\}$, τότε θα είχαμε

$$M = \bigoplus_{i \in \{1,...,t\}\smallsetminus\{j_\blacksquare\}} M(p_i) = \bigoplus_{i \in \{1,...,t\}\smallsetminus\{j_\blacksquare\}} M[p_i^{\nu_i}] = M[\textstyle\prod_{i \in \{1,...,t\}\smallsetminus\{j_\blacksquare\}} p_i^{\nu_i}],$$

απ' όπου θα έπετο ότι

$$\prod_{i \in \{1,...,t\}\smallsetminus\{j_\blacksquare\}} p_i^{\nu_i} \in \mathrm{Ann}_R(M) = \langle r \rangle \Rightarrow r \mid \prod_{i \in \{1,...,t\}\smallsetminus\{j_\blacksquare\}} p_i^{\nu_i}$$

και, κατ' επέκταση, και $p_{j_\blacksquare} \mid \prod_{i \in \{1,...,t\}\smallsetminus\{j_\blacksquare\}} p_i^{\nu_i}$ (αφού $p_{j_\blacksquare} \mid r$), κάτι που είναι άτοπο! Άρα $M(p_j) \neq \{0_M\}$ για κάθε $j \in \{1, ..., t\}$. Τέλος, σε ό,τι αφορά στη *μοναδικότητα* τής ανωτέρω αποσυνθέσεως, θεωρούμε *τυχόν* πρώτο στοιχείο q τής R με $M(q) \neq \{0_M\}$ καθώς και *τυχόν* $x \in M(q)\smallsetminus\{0_M\}$. Επειδή ο δακτύλιος αναφοράς R είναι εξ υποθέσεως Π.Κ.Ι., υπάρχει ένα[56] (μέχρι συντροφικότητας μονοσημάντως ορισμένο[57]) $d \in R\smallsetminus(R^\times \cup \{0_R\})$ με $\mathrm{Ann}_R(x) = \langle d \rangle$. Το ιδεώδες $\langle d \rangle$ περιέχει τόσον το[58] r όσον και το q^n για κάποιον κατάλληλο $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $d \mid q^n$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant m \leqslant n$, τέτοιο ώστε να ισχύει $d = q^m$. Επιπροσθέτως, επειδή το q είναι πρώτο στοιχείο τής R, έχουμε $q^m = d \mid r \Rightarrow q \mid r$ και $q \underset{\text{συν.}}{\sim} p_j$ για κάποιο $j \in \{1, ..., t\}$. Εξ αυτού συνάγεται ότι $M(q) = M(p_j)$. □

[52] Αυτό σημαίνει, ιδιαιτέρως, ότι $x_j \neq 0_M$ για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$.

[53] Βλ. το (ii) τής προτάσεως 1.4.3.

[54] Βλ. θεώρημα 1.4.23.

[55] Για το ότι $r \neq 0_R$, βλ. πόρισμα 1.4.25. Επίσης, το ότι $r \notin R^\times$ είναι άμεσο επακολούθημα τού γνησίου εγκλεισμού $\mathrm{Ann}_R(M) \subsetneqq R$.

[56] Εάν ίσχυε $d \in R^\times$, τότε θα είχαμε (λόγω τού (2.36)) $\mathrm{Ann}_R(x) = R \Rightarrow x = 0_M$ (ήτοι κάτι εξ υποθέσεως αποκλεισθέν).

[57] Βλ. το (ii) τής προτάσεως 1.4.3.

[58] $r \in \langle d \rangle$, διότι εξ ορισμού $\mathrm{Ann}_R(M) \subseteq \mathrm{Ann}_R(x)$.

2.6.18 Ορισμός. Έστω R μια Π.Κ.Ι. και έστω M ένας μη τετριμμένος πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος στρέψεως.

(i) Έστω $r \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ το μέχρι συντροφικότητας μονοσημάντως ορισμένο στοιχείο για το οποίο (σύμφωνα με το (i) τού θεωρήματος 2.6.17) ισχύει η ισότητα $\mathrm{Ann}_R(M) = \langle r \rangle$. Η κλάση ισοδυναμίας τού r ως προς την "$\underset{\text{συν.}}{\sim}$" καλείται **τάξη**[59] **τού** M και συμβολίζεται ως $\mathrm{ord}(M)$. Είθισται να γράφουμε (για λόγους συντομίας) $\mathrm{ord}(M) = r$ (υπονοώντας, ωστόσο, ότι "$r \in \mathrm{ord}(M)$").

(ii) Έστω $x \in M \smallsetminus \{0_M\}$ και έστω $s \in R \smallsetminus \{0_R\}$ το μέχρι συντροφικότητας μονοσημάντως ορισμένο στοιχείο, για το οποίο ισχύει $\mathrm{Ann}_R(x) = \langle s \rangle$. Η κλάση ισοδυναμίας αυτού τού s ως προς την "$\underset{\text{συν.}}{\sim}$" καλείται **τάξη τού** x και συμβολίζεται ως $\mathrm{ord}(x)$. Είθισται (και σε αυτήν την περίπτωση, κυρίως για λόγους συντομίας) να γράφουμε απλώς $\mathrm{ord}(x) = s$. Εξ ορισμού, $\mathrm{Ann}_R(M) \subseteq \mathrm{Ann}_R(x)$, οπότε

$$\langle r \rangle \subseteq \langle s \rangle \Rightarrow s \mid r. \tag{2.40}$$

2.6.19 Παραδείγματα. (i) Έστω $(G, +)$ μια μη τετριμμένη αβελιανή ομάδα (θεωρούμενη ως $\mathbb{Z}$-μόδιος, βλ. 2.1.4 (i)). Είναι γνωστό (από τη Θεωρία Ομάδων) ότι η G είναι πεπερασμένως παραγόμενη ομάδα στρέψεως εάν και μόνον εάν είναι *πεπερασμένη ομάδα*. Υποθέτοντας, λοιπόν, ότι $|G| < \infty$ και θεωρώντας ένα στοιχείο $x \in G \smallsetminus \{0_G\}$ παρατηρούμε ότι ο μηδενιστής αυτού $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(x)$, όντας ένα (κατ' ανάγκην κύριο) ιδεώδες τής Π.Κ.Ι. $\mathbb{Z}$, οφείλει να ισούται με $\langle n \rangle = n\mathbb{Z}$ για κάποιον $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$. Επειδή $\langle n \rangle = \langle -n \rangle$, ο θετικός ακέραιος

$$|n| = \min\{ l \in \mathbb{N} \,|\, l \in n\mathbb{Z}\}$$

είναι ο *μοναδικός θετικός γεννήτορας* τού $n\mathbb{Z}$. (Σημειωτέον ότι $\mathbb{Z}^{\times} = \{\pm 1\}$, οπότε οι n και $-n$ είναι οι μοναδικοί γεννήτορες τού ιδεώδους $n\mathbb{Z}$.) Εν προκειμένω, ο (2.36) δίδει

$$\mathbb{Z}x \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\,|n|\,\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{|n|}.$$

Ως εκ τούτου, ο $|n| = |\mathbb{Z}x|$ ισούται με την *ομαδοθεωρητική τάξη* τού στοιχείου x (και μπορεί να εκληφθεί ως *ο πλέον βολικός εκπρόσωπος* τής $\mathrm{ord}(x)$, όπως αυτή ορίζεται στο γενικότερο πλαίσιο τού εδ. 2.6.18 (ii)). Επιπροσθέτως, ο *ομαδοθεωρητικός εκθέτης*[60] $\exp(G)$ *τής ίδιας τής* G ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των ομαδοθεωρητικών τάξεων των στοιχείων της (και μπορεί να εκληφθεί ως *ο πλέον βολικός εκπρόσωπος* τής *μοδιοθεωρητικής τάξεως* $\mathrm{ord}(G)$, όπως αυτή ορίζεται στο εδ. 2.6.18 (i)).

(ii) Εάν $R := K[\mathsf{X}]$, όπου K τυχόν σώμα, τότε ο δακτύλιος R είναι Π.Κ.Ι. (βλ. 1.3.42) και ο πηλικοδακτύλιος $M_{\lambda} := R/\langle \mathsf{X} - \lambda \rangle$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, αποτελεί έναν R-μόδιο (βλ. 2.1.5 (ii)). Η τάξη τού M_{λ} είναι το $\mathsf{X} - \lambda$ (ή, ακριβέστερα, ολόκληρη η κλάση $[\mathsf{X} - \lambda]_{\sim_{\text{συν.}}} = \{ a(\mathsf{X} - \lambda) \,|\, a \in K \smallsetminus \{0_K\}\}$).

[59] Ορισμένοι συγγραφείς αντί τού όρου *τάξη* χρησιμοποιούν τον όρο *εκθέτης* (τού M). Πρβλ. 2.6.19 (i).

[60] $\exp(G) := \min\{ l \in \mathbb{N} \,|\, lx = 0_G, \forall x \in G\}$.

2.6.20 Πόρισμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M ένας μη τετριμμένος και πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος στρέψεως, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Οι πρωτεύουσες συνιστώσες τού M είναι μονοσημάντως ορισμένες μέσω τής τάξεως* $\mathrm{ord}(M) = r \in R \smallsetminus (R^{\times} \cup \{0_R\})$ *τού M.*

(ii) *Εάν $r \underset{\text{συν.}}{\sim} p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \ldots p_t^{\nu_t}$ είναι η παράσταση τής τάξεως* $\mathrm{ord}(M) = r$ *ως γινομένου (κατάλληλων θετικών ακεραίων δυνάμεων) πρώτων στοιχείων $p_1, p_2, ..., p_t$ τής R (που είναι ανά δύο μη συντροφικά όταν $t \geqslant 2$), τότε η πρωτεύουσα συνιστώσα $M(p_j)$ έχει ως τάξη της το $p_j^{\nu_j}$ για κάθε $j \in \{1, ..., t\}$.*

Απόδειξη. (i) Έπεται από τον ορισμό 2.6.18 (i), το θεώρημα 2.6.17 και το γεγονός ότι κάθε Π.Κ.Ι. είναι Π.Μ.Π.

(ii) Τούτο έπεται από τον ορισμό 2.6.12 (ii), το (iii) τής προτάσεως 2.6.11 και το θεώρημα 2.6.17. □

2.6.21 Λήμμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., M, N δυο R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, τότε $f(M(p)) \subseteq N(p)$ για κάθε πρώτο στοιχείο p τής R. Επιπροσθέτως, στην περίπτωση όπου ο f είναι ισομορφισμός, $f(M(p)) = N(p)$.*

Απόδειξη. Εάν $x \in M(p)$, τότε $p^n x = 0_M$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, οπότε

$$p^n f(x) = f(p^n x) = f(0_M) = 0_N \Rightarrow f(x) \in N(p).$$

Στην περίπτωση όπου ο f είναι ισομορφισμός, έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} f(M(p)) \subseteq N(p) \\ f^{-1}(N(p)) \subseteq M(p) \end{array}\right\} \Rightarrow f(M(p)) = N(p),$$

οπότε ο $f|_{M(p)} : M(p) \longrightarrow N(p)$ είναι ισομορφισμός με τον $f^{-1}|_{N(p)}$ ως αντίστροφό του. □

2.6.22 Πρόταση. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν M, N είναι δυο μη τετριμμένοι και πεπερασμένως παραγόμενοι R-μόδιοι στρέψεως, τότε*

$$M \cong N \Longleftrightarrow [M(p) \cong N(p) \text{ για κάθε πρώτο στοιχείο } p \text{ τής } R].$$

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή "⇒" έπεται άμεσα από το προηγηθέν λήμμα 2.6.21. Για την "⇐" υποθέτουμε ότι υπάρχουν ισομορφισμοί $f_{(p)} : M(p) \xrightarrow{\cong} N(p)$ για κάθε πρώτο στοιχείο $p \in R$. Έστω ότι $M = M(p_1) \oplus M(p_2) \oplus \cdots \oplus M(p_t)$ είναι η μοναδική αποσύνθεση (2.39) τού M στα ευθέα αθροίσματα των πρωτευουσών συνιστωσών του. Τότε $M(p) = \{0_M\}$ για κάθε πρώτο στοιχείο $p \in R \smallsetminus \{p_1, ..., p_t\}$. Κατά συνέπειαν,

$$M = \bigoplus_{j=1}^{t} M(p_j) \cong \bigoplus_{p \text{ πρώτο στοιχείο}} M(p),$$

Κατ' αναλογίαν, $N \cong \bigoplus_{p \text{ πρώτο στοιχείο}} N(p)$, οπότε

$$M \cong \bigoplus_{p \text{ πρώτο στοιχείο}} M(p) \xrightarrow[f]{\cong} \bigoplus_{p \text{ πρώτο στοιχείο}} N(p) \cong N,$$

όπου $f((x_p)_{p \text{ πρώτο στοιχείο}}) := (f_{(p)}(x_p))_{p \text{ πρώτο στοιχείο}}$. $\square$

2.6.23 Πόρισμα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν M, N είναι δυο μη τετριμμένοι και πεπερασμένως παραγόμενοι R-μόδιοι στρέψεως και*

$$M = M(p_1) \oplus M(p_2) \oplus \cdots \oplus M(p_t),\ N = N(q_1) \oplus N(q_2) \oplus \cdots \oplus N(q_{t'})$$

οι μοναδικές αποσυνθέσεις τους (2.39) στα ευθέα αθροίσματα των πρωτευουσών συνιστωσών τους, τότε[61]

$$M \cong N \Longleftrightarrow [t = t' \text{ και } \exists \sigma \in \mathfrak{S}_t : M(p_j) \cong N(q_{\sigma(j)}) = N(p_j),\ \forall j \in \{1, ..., t\}].$$

▸ p-**πρωτεύοντες μόδιοι υπεράνω Π.Κ.Ι.** Λόγω τού θεωρήματος 2.6.17 και των πορισμάτων 2.6.20 και 2.6.23 είναι αρκετό, από τούδε και στο εξής, να επικεντρωθούμε στη μελέτη των μη τετριμμένων, *πεπερασμένως παραγομένων p-πρωτευόντων* μοδίων που ορίζονται υπεράνω Π.Κ.Ι. (Βλ. 2.6.12 (iv).)

2.6.24 Λήμμα. *Ας υποθέσουμε ότι p είναι ένα πρώτο στοιχείο μιας Π.Κ.Ι. R και M ένας μη τετριμμένος, πεπερασμένως παραγόμενος, p-πρωτεύων R-μόδιος τάξεως* $\mathrm{ord}(M) = p^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. *Τότε υπάρχει ένα $x \in M \setminus \{0_M\}$ τάξεως* $\mathrm{ord}(x) = p^\nu$ *και ένας υπομόδιος U τού M, ούτως ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα*:

(i) $M = U \oplus Rx$, *όπου* $Rx \cong R/\langle p^\nu \rangle$.

(ii) *Ο U παράγεται από ένα σύνολο, ο πληθικός αριθμός τού οποίου είναι μικρότερος τού πληθικού αριθμού οιουδήποτε συστήματος γεννητόρων τού M.*

Απόδειξη. Έστω $\mathscr{X} = \{x_1, ..., x_k\}$ ένα σύστημα γεννητόρων τού $M = M(p)$ με το *ελάχιστο δυνατό πλήθος στοιχείων*[62]. Επειδή $\mathrm{ord}(M) = p^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, έχουμε $\mathrm{ord}(x_j) = p^{e_j}$, $e_j \in \mathbb{N}$, όπου $e_j \leqslant \nu$ για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$. (Βλ. (2.40).) Κάθε στοιχείο τού M γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $\sum_{j=1}^k r_j x_j$ των στοιχείων τού $\mathscr{X}$ (για κατάλληλα $r_1, ..., r_k \in R$). Ως εκ τούτου, υπάρχει τουλάχιστον ένας δείκτης $j_\blacksquare \in \{1, ..., k\}$ με[63] $\mathrm{ord}(x_{j_\blacksquare}) = p^\nu$. Αρκεί να θέσουμε $x := x_{j_\blacksquare}$.

(i) Θεωρούμε την οικογένεια υπομοδίων

$$\mathfrak{W} := \{W \,|W \text{ υπομόδιος τού } M : W \cap Rx = \{0_M\}\}\,.$$

Επειδή η $\mathfrak{W}$ περιέχει τον τετριμμένο υπομόδιο $\{0_M\}$ τού M, έχουμε $\mathfrak{W} \neq \varnothing$. Η $\mathfrak{W}$ καθίσταται μερικώς διατεταγμένο σύνολο ως προς τον συνήθη (συνολοθεωρητικό) εγκλεισμό. Για κάθε αλυσίδα $(W_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ τού $(\mathfrak{W}, \subseteq)$ έχουμε[64]

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$$

[61] Το $\mathfrak{S}_t$ συμβολίζει το σύνολο των αμφιρρίψεων $\sigma : \{1, ..., t\} \longrightarrow \{1, ..., t\}$.

[62] Αυτό σημαίνει, ιδιαιτέρως, ότι $x_j \neq 0_M$ για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$.

[63] Αλλιώς, $p^\nu \notin \text{ΕΚΠ}_R(p^{e_1}, ..., p^{e_k})$. Βλ. απόδειξη τού (i) τού θεωρήματος 2.6.17 και θεώρημα 1.4.54.

[64] Εξ ορισμού, $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda \subseteq \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$. Κάθε στοιχείο τού $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ γράφεται υπό τη μορφή $w_{\lambda_1} + \cdots + w_{\lambda_n}$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \subseteq \Lambda$. (Βλ. 2.1.16 και 2.1.17.) Επειδή η αλυσίδα $(W_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι εξ ορισμού ένα *ολικώς* διατεταγμένο υποσύνολο τού $\mathfrak{W}$, υπάρχει κάποιος δείκτης $\rho \in \{1, ..., n\} : W_{\lambda_j} \subseteq W_{\lambda_\rho}, \forall\, j \in \{1, ..., n\}$. Επομένως, $w_{\lambda_1} + \cdots + w_{\lambda_n} \in W_{\lambda_\rho} \subseteq \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ και ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda \subseteq \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$.

(όπου $\sum_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$ είναι ένας υπομόδιος τού M) και

$$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda) \cap Rx = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (W_\lambda \cap Rx) = \{0_M\},$$

οπότε $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda \in \mathfrak{W}$ και η εν λόγω ένωση είναι ένα άνω φράγμα τής $(W_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Κατά συνέπειαν, το $(\mathfrak{W}, \subseteq)$ είναι επαγωγικώς διατεταγμένο και (σύμφωνα με το λήμμα τού Zorn) υφίσταται ένας υπομόδιος τού M, ας τον πούμε U, ο οποίος είναι *μεγιστικός* (ως προς τον συνήθη συνολοθεωρητικό εγκλεισμό) εντός τής $\mathfrak{W}$. Θα δείξουμε ότι $M = M'$, όπου

$$M' := U \oplus Rx.$$

Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε «εις άτοπον απαγωγή». Ας υποθέσουμε ότι ισχύει $M' \subsetneqq M$. Τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο $z \in M \smallsetminus M'$. Επειδή $p^\nu z = 0_M \in M'$, μπορούμε να ορίσουμε τον

$$\xi := \min \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, p^{n+1} z \in M' \text{ και } p^n z \notin M' \right\}.$$

Θέτοντας $y := p^\xi z$ παρατηρούμε ότι $y \in M \smallsetminus M'$ και $py \in M'$. Γι' αυτόν τον λόγο

$$\exists! (u, r) \in U \times R : py = u + rx.$$

Επειδή $p^\nu = \mathrm{ord}(M)$, έχουμε $0_M = p^\nu y = p^{\nu-1}(py) = p^{\nu-1}u + (p^{\nu-1}r)x$, οπότε

$$\left(p^{\nu-1}r\right) x = -p^{\nu-1}u \in U \cap Rx = \{0_M\} \Rightarrow p^{\nu-1}r \in \mathrm{Ann}_R(x) = \langle p^\nu \rangle,$$

απ' όπου προκύπτει ότι $p^{\nu-1}r = p^\nu r' \Rightarrow r = pr'$ για κάποιο $r' \in R$. Θέτοντας $v := y - r'x$ λαμβάνουμε

$$pv = p(y - r'x) = py - pr'x = rx + u - rx = u. \tag{2.41}$$

Όμως $y \notin M' \Rightarrow v \notin M'$ (διότι $r'x \in M'$) και, ως εκ τούτου, $v \notin U$. Αυτό σημαίνει ότι[65] $(U + Rv) \cap Rx \neq \{0_M\}$, οπότε υπάρχουν $u' \in U$ και $s, s' \in R$ με

$$0_M \neq sx = u' + s'v \in (U + Rv) \cap Rx. \tag{2.42}$$

Επομένως, $s'v = -u' + sx \in U \oplus Rx =: M'$. Εάν το p δεν διαιρούσε το s', θα είχαμε

$$\begin{aligned} &1_R \in \mathrm{MK}\Delta_R(p, s') \Rightarrow [\exists (a, b) \in R \times R : ap + bs' = 1_R] \\ &\Rightarrow v = 1_R v = a\,(pv) + b\,(s'v) \underset{(2.41)}{=} au + b\,(s'v) \in U + M' = M', \end{aligned}$$

κάτι που θα αντέκειτο στο ότι $v \notin M'$. Κατά συνέπειαν, $s' = s''p$ για κάποιο $s'' \in R$. Από τις (2.41) και (2.42) λαμβάνουμε

$$0_M \neq sx = u' + s'v = u' + s''(pv) = u' + s''u \in U \cap Rx = \{0_M\}.$$

Άτοπο! Άρα $M = M'$. Τέλος, ο ισομορφισμός $Rx \cong R/\langle p^\nu \rangle$ έπεται από τον (2.36), καθώς $\mathrm{Ann}_R(x) = \langle p^\nu \rangle$.

[65] Εάν ίσχυε $(U + Rv) \cap Rx = \{0_M\}$, τότε θα είχαμε $U + Rv \in \mathfrak{W}$ με $U \subsetneqq U + Rv$, κάτι που θα αντέκειτο στη μεγιστικότητα τού U.

(ii) Επειδή $x := x_{j_\blacksquare}$, ο M/Rx παράγεται από τα $k-1$ στοιχεία[66] $x_\rho + Rx$, $\rho \in \{1,...,k\} \smallsetminus \{j_\blacksquare\}$. Κατά την πρόταση 2.4.20, $U \cong M/Rx$. Άρα ο υπομόδιος U παράγεται από ένα σύνολο με πληθικό αριθμό[67] $k-1<k$. □

2.6.25 Λήμμα. *Εάν R είναι μια ακεραία περιοχή και $a \in R \smallsetminus \{0_R\}, b \in R$, τότε υφίσταται ισομορφισμός R-μοδίων*

$$\boxed{Ra/R(ab) \cong R/Rb.} \tag{2.43}$$

Απόδειξη. Η επιρριπτική απεικόνιση

$$f : R \longrightarrow Ra/R(ab),\ r \longmapsto f(r) := ra + R(ab),$$

είναι επιμορφισμός R-μοδίων, διότι

$$\begin{aligned} f(s_1r_1 + s_2r_2) &= (s_1r_1 + s_2r_2)a + R(ab) \\ &= s_1(r_1a + R(ab)) + s_2(r_2a + R(ab)) = s_1 f(r_1) + s_2 f(r_2), \end{aligned}$$

για οιαδήποτε $s_1, s_2, r_1, r_2 \in R$ (βλ. πρόταση 2.2.3), ο δε πυρήνας αυτού είναι ο

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{r \in R \mid \exists c \in R : ra = cab\} \\ &= \{r \in R \mid \exists c \in R : r = cb\} = \langle b \rangle = Rb, \end{aligned}$$

καθόσον ο δακτύλιος R είναι ακεραία περιοχή και $a \neq 0_R$. Αρκεί λοιπόν να εφαρμοσθεί το 1ο θεώρημα ισομορφισμών 2.3.7. □

2.6.26 Λήμμα. *Έστω p ένα πρώτο στοιχείο μιας Π.Κ.Ι. R και έστω M ένας μη τετριμμένος, πεπερασμένως παραγόμενος, p-πρωτεύων R-μόδιος. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Ο πηλικοδακτύλιος $R/\langle p \rangle$ είναι ένα σώμα.*

(ii) *Ο υπομόδιος $M[p]$ τού M αποτελεί έναν $(R/\langle p \rangle)$-διανυσματικό χώρο διαστάσεως $\dim_{R/\langle p \rangle}(M[p]) = k$, όπου k είναι ο ελάχιστος εκ των πληθικών αριθμών όλων των πεπερασμένων συστημάτων γεννητόρων τού M.*

Απόδειξη. (i) Το $\langle p \rangle$ ως πρώτο ιδεώδες μιας Π.Κ.Ι. είναι και μεγιστικό ιδεώδες[68]. Επομένως ο πηλικοδακτύλιος $R/\langle p \rangle$ είναι ένα σώμα. (Βλ. 1.3.29 (i).)

(ii) Προφανώς, $\mathrm{ord}(M) = p^\nu$ για κάποιον $\nu \in \mathbb{N}$. Ο υπομόδιος $M[p]$ τού $M = M(p)$, εφοδιαζόμενος με τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό[69]

$$R/\langle p \rangle \times M[p] \ni (r + \langle p \rangle, x) \longmapsto rx \in M[p],$$

[66] Εφαρμόζοντας το (i) τής προτάσεως 2.2.7 και το πόρισμα για τον φυσικό επιμορφισμό $\pi^M_{Rx} : M \longrightarrow M/Rx$ λαμβάνουμε $M/Rx = \mathrm{Lin}_R(x_1 + Rx, ..., x_k + Rx)$. Επειδή $x_{j_\blacksquare} = x \in Rx$, ο γεννήτορας $x_{j_\blacksquare} + Rx$ μπορεί να αφαιρεθεί.

[67] Αυτό το σύνολο είναι το κενό (και ο U τετριμμένος) όταν $k = 1$.

[68] Βλ. πρόταση 1.3.44.

[69] Αυτός είναι *καλώς ορισμένος*, διότι εάν $r, r' \in R$ είναι τέτοια, ώστε να ισχύει $r + \langle p \rangle = r' + \langle p \rangle$ ή, ισοδυνάμως, $r - r' = sp$ για κάποιο $s \in R$, τότε για κάθε $x \in M[p]$ λαμβάνουμε

$$rx - r'x = (r - r')\,x = s(px) = s0_M = 0_M \Rightarrow rx = r'x.$$

καθίσταται διανυσματικός χώρος υπεράνω τού σώματος $R/\langle p\rangle$. Έστω $\{x_1, ..., x_k\}$ ένα σύστημα γεννητόρων τού M με το *ελάχιστο δυνατό πλήθος στοιχείων* (ήτοι με min-g$(M) = k$, βλ. 2.5.51). Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή ως προς τον k. Εάν $k = 1$, τότε ο ισχυρισμός είναι αληθής, καθώς $M = Rx_1 \cong R/\langle p^\nu\rangle$, $\mathrm{ord}(x_1) = p^\nu$ και[70]

$$M[p] \cong (R/\langle p^\nu\rangle)[p] \cong Rp^{\nu-1}/Rp^\nu = Rp^{\nu-1}/R(p^{\nu-1}p) \underset{(2.43)}{\cong} R/pR = R/\langle p\rangle,$$

οπότε

$$\dim_{R/\langle p\rangle}(M[p]) = 1.$$

Εάν υποθέσουμε ότι $k \geqslant 2$ και ότι αυτός είναι αληθής και για όλους τους R-μοδίους αυτού τού είδους που διαθέτουν συστήματα γεννητόρων με ελάχιστο δυνατό πλήθος στοιχείων $< k$, τότε (σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στην απόδειξη τού (i) τού λήμματος 2.6.24) υπάρχει κάποιο $x \in \{x_1, ..., x_k\}$ τάξεως $\mathrm{ord}(x) = p^\nu$, καθώς και ένας υπομόδιος U τού M με $M = U \oplus Rx$, όπου $Rx \cong R/\langle p^\nu\rangle$. Ο U είναι μη τετριμμένος (αφού $k \geqslant 2$) και (ως υπομόδιος τού M) p-πρωτεύων και πεπερασμένως παραγόμενος (κατά το πόρισμα 2.5.49). Επιπροσθέτως, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στην απόδειξη τού 2.6.24 (ii), ο U παράγεται από ένα σύνολο, ο πληθικός αριθμός τού οποίου είναι $k - 1 < k$.

Ισχυρισμός. Δεν υφίσταται σύστημα γεννητόρων τού U με πληθικό αριθμό $< k - 1$. Πράγματι· επειδή (κατά την πρόταση 2.4.20) υφίσταται ισομορφισμός $M/Rx \cong U$, εάν ίσχυε min-g$(U) < k - 1$, τότε εφαρμόζοντας το πόρισμα 2.5.52 για τον φυσικό επιμορφισμό $\pi^M_{Rx} : M \longrightarrow M/Rx$ (όπου $\mathrm{Ker}(\pi^M_{Rx}) = Rx$) θα καταλήγαμε σε άτοπο:

$$k = \text{min-g}(M) \leqslant \text{min-g}(U) + \text{min-g}(Rx) < (k - 1) + 1 = k.$$

Επομένως ισχύει η ισότητα min-g$(U) = k - 1$. Ο $U[p]$ αποτελεί γραμμικό υπόχωρο τού $(R/\langle p\rangle)$-διανυσματικού χώρου $M[p]$ και από την επαγωγική μας υπόθεση λαμβάνουμε

$$\dim_{R/\langle p\rangle}(U[p]) = \text{min-g}(U) = k - 1.$$

Αποπεράτωση αποδείξεως. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι

$$M[p] = U[p] \oplus (Rx)[p],$$

όπου $(Rx)[p] \cong (R/\langle p^\nu\rangle)[p] \cong R/\langle p\rangle$. Κατά συνέπειαν,

$$\dim_{R/\langle p\rangle}(M[p]) = \dim_{R/\langle p\rangle}(U[p]) + \dim_{R/\langle p\rangle}((Rx)[p]) = (k - 1) + 1 = k,$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

2.6.27 Θεώρημα. *Ας υποθέσουμε ότι p είναι ένα πρώτο στοιχείο μιας Π.Κ.Ι. R και M ένας μη τετριμμένος, πεπερασμένως παραγόμενος, p-πρωτεύων R-μόδιος τάξεως* $\mathrm{ord}(M) = p^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. *Τότε ισχύουν τα εξής:*

[70] Η απεικόνιση $Rp^{\nu-1} \ni rp^{\nu-1} \longmapsto rp^{\nu-1} + \langle p^\nu\rangle \in (R/\langle p^\nu\rangle)[p]$ είναι επιμορφισμός R-μοδίων έχων ως πυρήνα του το Rp^ν.

(i) *Ο M είναι το ευθύ άθροισμα*

$$\boxed{M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k,} \tag{2.44}$$

κυκλικών p-πρωτευόντων υπομοδίων M_j, $j \in \{1, ..., k\}$, όπου $k = \dim_{R/\langle p\rangle}(M[p])$.
(ii) $M_j \cong R/\left\langle p^{\ell_j}\right\rangle$, *όπου ο $\ell_j \in \mathbb{N}$ είναι μονοσημάντως ορισμένος μέσω τής τάξεως* $\mathrm{ord}(M_j)$ *για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$, και $1 \leqslant \ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \cdots \leqslant \ell_k = \nu$.*
(iii) *Η αποσύνθεση* (2.44) *είναι μονοσημάντως ορισμένη υπό την εξής έννοια: Εάν*

$$M = M_1' \oplus M_2' \oplus \cdots \oplus M_{k'}'$$

είναι μια άλλη ομοειδής αποσύνθεση τού M με $M_i' \cong R/\left\langle p^{\ell_i'}\right\rangle$, $\forall i \in \{1, ..., k'\}$, και

$$1 \leqslant \ell_1' \leqslant \ell_2' \leqslant \cdots \leqslant \ell_{k'}' = \nu,$$

και εάν θέσουμε για κάθε[71] $\rho \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{d}_\rho(M) := \mathrm{card}(\{ j \in \{1, ..., k\} | \, \ell_j = \rho\})$ *και*

$$\mathfrak{d}_\rho'(M) := \mathrm{card}\left(\left\{ i \in \{1, ..., k'\} \middle| \, \ell_i' = \rho\right\}\right),$$

τότε $k = k'$, $\ell_j = \ell_j'$, $\forall j \in \{1, ..., k\}$, και

$$\mathfrak{d}_\rho(M) = \mathfrak{d}_\rho'(M), \ \forall \rho \in \{1, ..., \nu\}. \tag{2.45}$$

Αποδειξη. (i)-(ii) Έστω $\{x_1, ..., x_k\}$ ένα σύστημα γεννητόρων τού M με το *ελάχιστο δυνατό πλήθος στοιχείων*. Γνωρίζουμε ότι $k = \dim_{R/\langle p\rangle}(M[p])$ (από το λήμμα 2.6.26). Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή ως προς τον k. Όταν $k = 1$ ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής. Εάν υποθέσουμε ότι $k \geqslant 2$ και ότι αυτός είναι αληθής και για όλους τους R-μοδίους αυτού τού είδους που διαθέτουν συστήματα γεννητόρων με ελάχιστο δυνατό πλήθος στοιχείων $< k$, τότε (σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στην απόδειξη τού (i) τού λήμματος 2.6.24) υπάρχει κάποιο $x \in \{x_1, ..., x_k\}$ τάξεως $\mathrm{ord}(x) = \mathrm{ord}(M) = p^\nu$, καθώς και ένας υπομόδιος U τού M με $M = U \oplus Rx$, όπου $Rx \cong R/\langle p^\nu\rangle$. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε (ενδεχομένως ύστερα από κάποια αναδιάταξη δεικτών) να υποθέσουμε ότι $x = x_k$. Επιπροσθέτως, θέτουμε $\ell_k := \nu$. Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στην απόδειξη τού λήμματος 2.6.26, ο U είναι μη τετριμμένος, πεπερασμένως παραγόμενος και p-πρωτεύων με

$$\dim_{R/\langle p\rangle}(U[p]) = \text{min-g}(U) = k - 1.$$

Βάσει τής επαγωγικής μας υποθέσεως, $U = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_{k-1}$, όπου ο $M_j \cong R/\left\langle p^{\ell_j}\right\rangle$ είναι κυκλικός υπομόδιος τού U και ο $\ell_j \in \mathbb{N}$ είναι μονοσημάντως ορισμένος μέσω τής τάξεως $\mathrm{ord}(M_j) = p^{\ell_j}$, $\forall j \in \{1, .., k-1\}$, και $\ell_1 \leqslant \cdots \leqslant \ell_{k-1}$ με $\mathrm{ord}(U) = \mathrm{ord}(M/Rx_k) = p^{\ell_{k-1}}$. Ο U είναι υπομόδιος τού M. Άρα $\mathrm{ord}(U) | \, \mathrm{ord}(M)$ και $\ell_{k-1} \leqslant \ell_k$, και καταλήγουμε στην (2.44) θέτοντας $M_k := Rx_k$.

(iii) Προφανώς, $k = \dim_{R/\langle p\rangle}(M[p]) = k'$, καθώς αυτός ο αριθμός είναι μοναδικός,

[71] Προφανώς, $\mathfrak{d}_\rho(M) = \mathfrak{d}_\rho'(M) = 0$ όταν $\rho > \nu$.

εξαρτώμενος μόνον από τον ίδιον τον M:

$$k = \sum_{\rho=1}^{\nu} \mathfrak{d}_\rho(M) = \sum_{\rho=1}^{\nu} \mathfrak{d}'_\rho(M) = k'. \tag{2.46}$$

Εν συνεχεία, για την επαλήθευση των λοιπών ισχυρισμών θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή ως προς τον ν. Όταν $\nu = 1$ έχουμε

$$\ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_k = 1 = \ell'_1 = \ell'_2 = \cdots = \ell'_k \ \text{ και } \ \mathfrak{d}_1(M) = k = \mathfrak{d}'_1(M).$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\nu \geqslant 2$. Θεωρώντας τόν $pM := \{p\,x |\, x \in M\}$ στη θέση τού M λαμβάνουμε τις αποσυνθέσεις

$$pM = pM_1 \oplus pM_2 \oplus \cdots \oplus pM_k = pM'_1 \oplus pM'_2 \oplus \cdots \oplus pM'_k.$$

Προφανώς,

$$pM \cong Rp/Rp^{\ell_1} \oplus Rp/Rp^{\ell_2} \oplus \cdots \oplus Rp/Rp^{\ell_k} \underset{(2.43)}{\cong} R/Rp^{\ell_1 - 1} \oplus R/Rp^{\ell_2 - 1} \oplus \cdots \oplus R/Rp^{\ell_k - 1}$$

με τους πρώτους $\mathfrak{d}_1(M)$ ευθείς προσθετέους τετριμμένους (καθώς εξ υποθέσεως ισχύει $\ell_1 = \ell_2 = \cdots = \ell_{\mathfrak{d}_1(M)} = 1$),

$$pM \cong R/Rp^{\ell_{\mathfrak{d}_1(M)+1} - 1} \oplus R/Rp^{\ell_{\mathfrak{d}_1(M)+2} - 1} \oplus \cdots \oplus R/Rp^{\ell_k - 1}$$

και $1 \leqslant \ell_{\mathfrak{d}_1(M)+1} - 1 \leqslant \ell_{\mathfrak{d}_1(M)+2} - 1 \leqslant \cdots \leqslant \ell_k - 1 = \nu - 1$. Κατ' αναλογίαν,

$$pM \cong R/Rp^{\ell'_{\mathfrak{d}'_1(M)+1} - 1} \oplus R/Rp^{\ell'_{\mathfrak{d}'_1(M)+2} - 1} \oplus \cdots \oplus R/Rp^{\ell'_k - 1},$$

όπου

$$1 \leqslant \ell'_{\mathfrak{d}'_1(M)+1} - 1 \leqslant \ell'_{\mathfrak{d}'_1(M)+2} - 1 \leqslant \cdots \leqslant \ell'_k - 1 = \nu - 1.$$

Επειδή ο τελευταίος αριθμός είναι $< \nu$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική μας υπόθεση για τον pM και να λάβουμε

$$k - \mathfrak{d}_1(M) = \dim_{R/\langle p \rangle}(pM[p]) = k - \mathfrak{d}'_1(M) \Rightarrow \mathfrak{d}_1(M) = \mathfrak{d}'_1(M) \tag{2.47}$$

και $\ell_j - 1 = \ell'_j - 1 \Rightarrow \ell_j = \ell'_j$ για κάθε[72] $j \in \{\mathfrak{d}_1(M) + 1, \ldots, k\}$. Οι (2.46) και (2.47) δίδουν

$$\sum_{\rho=2}^{\nu} \mathfrak{d}_\rho(M) = \sum_{\rho=2}^{\nu} \mathfrak{d}'_\rho(M). \tag{2.48}$$

Κατόπιν επαναλήψεως αυτής τής διαδικασίας (με τον p^2M στη θέση τού pM, τον p^3M στη θέση τού p^2M κ.ο.κ) καταλήγουμε στις ισότητες

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{\rho=3}^{\nu} \mathfrak{d}_\rho(M) = \sum_{\rho=3}^{\nu} \mathfrak{d}'_\rho(M), \\ \vdots \\ \mathfrak{d}_{\nu-1}(M) + \mathfrak{d}_\nu(M) = \mathfrak{d}'_{\nu-1}(M) + \mathfrak{d}'_\nu(M), \\ \mathfrak{d}_\nu(M) = \mathfrak{d}'_\nu(M). \end{array} \right\} \tag{2.49}$$

Η (2.45) προκύπτει άμεσα από τις (2.46), (2.48) και (2.49). □

[72]Επειδή $\mathfrak{d}_1(M) = \mathfrak{d}'_1(M)$, έχουμε ήδη εξ αρχής $\ell_j = \ell'_j = 1,\ \forall j \in \{1, \ldots, \mathfrak{d}_1(M)\}$.

2.6.28 Ορισμός. Ένας M όπως στο θεώρημα 2.6.27 ονομάζεται p-**πρωτεύων** R-**μόδιος τύπου** $(\ell_1, \ell_2, ..., \ell_k)$. Οι μονοσημάντως ορισμένοι ευθείς προσθετέοι στην (2.44) καλούνται **στοιχειώδεις κυκλικοί προσθετέτοι**, οι δε τάξεις αυτών $p^{\ell_1}, p^{\ell_2}, ..., p^{\ell_k}$ **στοιχειώδεις διαιρέτες τού** M. Η γνώση των στοιχειωδών διαιρετών (ή, ισοδυνάμως, των εκθετών τού p που συγκροτούν τον τύπο του) επαρκεί για τον *μέχρις ισομορφισμού* χαρακτηρισμό τού M.

2.6.29 Πρόταση. *Έστω p ένα πρώτο στοιχείο μιας Π.Κ.Ι. R. Για δυο μη τετριμμένους, πεπερασμένως παραγομένους, p-πρωτεύοντες R-μοδίους M, N οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) $M \cong N$.

(ii) *Οι M και N διαθέτουν τους ίδιους στοιχειώδεις διαιρέτες $p^{\ell_1}, p^{\ell_2}, ..., p^{\ell_k}$.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν $M \cong N$, τότε οι $M[p], N[p]$ είναι ισόμορφοι ως διανυσματικοί χώροι υπεράνω τού σώματος $R/\langle p\rangle$, οπότε

$$\dim_{R/\langle p\rangle}(M[p]) = k = \dim_{R/\langle p\rangle}(N[p]),$$

όπου k είναι ο αριθμός των στοιχειωδών διαιρετών τού M και, κατ' επέκταση, και τού N. Επειδή $M \cong N$, οι τάξεις των M και N (σύμφωνα με το πόρισμα 2.6.23 και το (i) τού πορίσματος 2.6.20) είναι ίσες, ας πούμε

$$\operatorname{ord}(M) = p^{\nu} = \operatorname{ord}(N),$$

για κάποιον $\nu \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι οι τελευταίοι τους στοιχειώδεις διαιρέτες είναι ίσοι. Αρκεί λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή ως προς τον k. Εάν $k = 1$, τότε οι M, N είναι κυκλικοί και ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής. Εάν υποθέσουμε ότι $k \geqslant 2$ και ότι αυτός είναι αληθής και για όλους τους R-μοδίους αυτού τού είδους με αριθμό στοιχειωδών διαιρετών $< k$, τότε (σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στην απόδειξη τού (i) τού λήμματος 2.6.24) υπάρχουν κάποια $x \in M$ και $y \in N$ με

$$\operatorname{ord}(x) = \operatorname{ord}(M) = p^{\nu} = \operatorname{ord}(N) = \operatorname{ord}(y),$$

καθώς και υπομόδιοι U και W των M και N, αντιστοίχως, τέτοιοι ώστε

$$M = U \oplus Rx \;\text{ και }\; N = W \oplus Ry, \;\text{ όπου }\; Rx \cong R/\langle p^{\nu}\rangle \cong Ry.$$

Επειδή $M \cong N \Rightarrow M/Rx \cong N/Ry \underset{2.4.20}{\Longrightarrow} U \cong W$ και (βάσει των προαναφερθέντων στο λήμμα 2.6.26 και στο (i) τού θεωρήματος 2.6.27) ισχύουν οι ισότητες

$$\dim_{R/\langle p\rangle}(U[p]) = \text{min-g}(U) = k-1 = \text{min-g}(W) = \dim_{R/\langle p\rangle}(W[p]),$$

από την επαγωγική μας υπόθεση έπεται ότι οι U και W διαθέτουν τους ίδιους στοιχειώδεις διαιρέτες $p^{\ell_1}, p^{\ell_2}, ..., p^{\ell_{k-1}}$. Κατά συνέπειαν, και οι M και N διαθέτουν τους ίδιους στοιχειώδεις διαιρέτες $p^{\ell_1}, p^{\ell_2}, ..., p^{\ell_{k-1}}, p^{\ell_k}$, όπου $\ell_k = \nu$.

(ii)⇒(i) Εν τοιαύτη περιπτώσει, $M \cong \bigoplus_{j=1}^{k} R/\langle p^{\ell_j}\rangle \cong N$ βάσει τού θεωρήματος 2.6.27. □

2.6.30 Θεώρημα («Δομικό θεώρημα» περί των πεπερασμένως παραγομένων μοδίων υπεράνω Π.Κ.Ι.[73]). *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) $M = \mathrm{tors}(M) \oplus \mathrm{frp}(M)$.

(ii) *Εάν ο υπομόδιος στρέψεως* $\mathrm{tors}\,(M)$ *τού* M *δεν είναι τετριμμένος, τότε διαθέτει μια ευθεία αποσύνθεση*

$$\boxed{\mathrm{tors}\,(M) = \mathrm{tors}\,(M)\,(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{tors}\,(M)\,(p_t)}$$

στις πρωτεύουσες συνιστώσες του (μοναδική, μέχρις αναδιατάξεως αυτών) και

$$\exists \nu_j \in \mathbb{N} : \mathrm{ord}(\mathrm{tors}\,(M)\,(p_j)) = p_j^{\nu_j},\ \forall j \in \{1, ..., t\}.$$

(iii) *Εάν* $\mathrm{tors}\,(M) \neq \{0_M\}$, *τότε κάθε πρωτεύουσα συνιστώσα* $\mathrm{tors}\,(M)\,(p_j)$ *τού* $\mathrm{tors}\,(M)$ *διαθέτει μια (μέχρις ισομορφισμού μονοσημάντως ορισμένη) αποσύνθεση σε ευθέα αθροίσματα κυκλικών υπομοδίων:*

$$\boxed{\mathrm{tors}\,(M)\,(p_j) \cong \left(R/\left\langle p_j^{\ell_{j,1}}\right\rangle\right) \oplus \left(R/\left\langle p_j^{\ell_{j,2}}\right\rangle\right) \oplus \cdots \oplus \left(R/\left\langle p_j^{\ell_{j,k_j}}\right\rangle\right),}$$

$$\text{με}\quad 1 \leqslant \ell_{j,1} \leqslant \ell_{j,2} \leqslant \cdots \leqslant \ell_{j,k_j} = \nu_j,\ \forall j \in \{1, ..., t\}.$$

(iv) *Ο* M *είναι μονοσημάντως ορισμένος μέχρις ισομορφισμού μέσω των ακολούθων «αναλλοιώτων» του*[74]

- τής ελεύθερης βαθμίδας $\text{fr-rank}_R(M) \in \mathbb{N}_0$,
- τής τάξεως $\mathrm{ord}(\mathrm{tors}\,(M)) = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots p_t^{\nu_t}$,
- των εκθετών $\ell_{j,1}, \ell_{j,2}, ..., \ell_{j,k_j},\ \forall j \in \{1, ..., t\}$.

Αποδειξη. Για το (i) βλ. θεώρημα 2.6.6. Για το (ii) αρκεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα 2.6.17 για τον $\mathrm{tors}(M)$. Το (iii) έπεται από το θεώρημα 2.6.27 (εφαρμοζόμενο για καθεμιά εκ των πρωτευουσών συνιστωσών τού υπομοδίου στρέψεως τού M).

(iv) Βλ. (2.35), το θεώρημα 2.6.9, τα πορίσματα 2.6.20 και 2.6.23, και την πρόταση 2.6.29. □

2.6.31 Συμβολισμός. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $k \in \{1, \ldots, n\}$ συμβολίζουμε ως

$$\Pi_k\,(n) := \left\{(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_k) \in \mathbb{N}^k \mid \ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \cdots \leqslant \ell_k,\ \text{με}\ \ell_1 + \cdots + \ell_k = n\right\}$$

το σύνολο *όλων των διαμερίσεων τού* n (ως προς την πρόσθεση τού $\mathbb{N}$) *σε* k *φυσικούς αριθμούς*. Επίσης, συμβολίζουμε ως $\Pi\,(n) := \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_k\,(n)$ το σύνολο *όλων των δυνατών διαμερίσεων* τού n και θέτουμε $\varpi\,(n) := \mathrm{card}(\Pi\,(n))$.

[73] Μέσω αυτού τού θεωρήματος δεν καθίσταται εφικτή μόνον η ταξινόμηση των πεπερασμένως παραγομένων αβελιανών ομάδων (βλ. 2.6.32) αλλά και το πώς κανείς αποκτά τη ρητή, την κλασική και κατά Jordan διευθετημένη μορφή ενός ενδομορφισμού ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διαστάσεως (ή, αντιστοίχως, ενός τετραγωνικού πίνακα με εγγραφές ανήκουσες σε ένα σώμα). Βλ. σχετικώς [12], §3.7 και §4.4, [14], Chapters 18-20, [15], Chapter 12, και [17], §IV.6 και §VII.4.

[74] Εδώ αναφερόμαστε στη γενική περίπτωση (όπου $\mathrm{tors}(M) \neq \{0_M\}$). Όταν ο M δεν διαθέτει στρέψη, τότε είναι ελεύθερος, οπότε αρκεί μόνον η γνώση τής βαθμίδας του για τη μέχρις ισομορφισμού ταξινόμησή του.

2.6.32 Θεώρημα (Ταξινόμηση πεπερασμένως παραγομένων αβελιανών ομάδων). *Έστω $(G,+)$ μια μη τετριμμένη, μη ελεύθερη*[75]*, πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή ομάδα.*

(i) *Εάν* $\exp(\mathrm{tors}\,(G)) := \min\{l \in \mathbb{N} | \, lx = 0_G, \forall x \in \mathrm{tors}\,(G)\} = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots p_t^{\nu_t}$ *(όπου* $t \in \mathbb{N}$, $\nu_1, \ldots, \nu_t \in \mathbb{N}$*) είναι η κανονική παράσταση τού ομαδοθεωρητικού εκθέτη τής υποομάδας* $\mathrm{tors}\,(G)$ *ως γινομένου (κατάλληλων δυνάμεων) πρώτων αριθμών* $p_1, \ldots, p_t$ (με $p_1 < \cdots < p_t$, *όταν* $t \geqslant 2$), $|\mathrm{tors}\,(G)| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}$ *η αντίστοιχη παράσταση τής τάξεως τής* $\mathrm{tors}\,(G)$ *(όπου* $1 \leqslant \nu_j \leqslant n_j$*) και* $G\,(p_j)$ *η υποομάδα τής* G *η απαρτιζόμενη από εκείνα τα στοιχεία τής* G*, η ομαδοθεωρητική τάξη των οποίων ανήκει στο σύνολο* $\{p_j^i \, | i \in \{0, 1, \ldots, n_j\}\}$ *για κάθε* $j \in \{1, \ldots, t\}$*, τότε*

$$\boxed{G \cong \left(\bigoplus_{j=1}^{t} G\,(p_j) \right) \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\text{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(G) \text{ φορές}},}$$

όπου $\exp(G\,(p_j)) = p_j^{\nu_j}$ *και* $|G\,(p_j)| = p_j^{n_j}$, $\forall j \in \{1, \ldots, t\}$.

(ii) *Για κάθε* $j \in \{1, .., t\}$ *υπάρχουν* $k_j \in \{1, .., n_j\}$ *και* $(\ell_{j,1}, \ldots, \ell_{j,k_j}) \in \Pi_{k_j}(n_j)$ *με* $\ell_{j,k_j} = \nu_j$*, ούτως ώστε να υφίστανται ισομορφισμοί*

$$\boxed{G\,(p_j) \cong \mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,2}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,k_j}}}.}$$

(iii) *Η* G *είναι μονοσημάντως ορισμένη μέχρις ισομορφισμού μέσω των «αναλλοιώτων» της*: $\text{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(G)$, $|\mathrm{tors}\,(G)|$ *και* $(\ell_{j,1}, \ell_{j,2}, \ldots, \ell_{j,k_j})$ *για κάθε* $j \in \{1, \ldots, t\}$.

Αποδειξη. Θεωρούμε την G ως $\mathbb{Z}$-μόδιο (βλ. 2.1.4 (i)) και λαμβάνουμε υπ' όψιν τις συμβάσεις τού εδ. 2.6.19 (i) για την $\mathrm{tors}(G)$. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι

$$G\,(p_j) = \mathrm{tors}(G)\,(p_j) \cong \mathbb{Z}/p_j^{\ell_{j,1}}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_j^{\ell_{j,2}}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_j^{\ell_{j,k_j}}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,1}}} \oplus \mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,2}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,k_j}}}$$

όπου $1 \leqslant \ell_{j,1} \leqslant \ell_{j,2} \leqslant \cdots \leqslant \ell_{j,k_j} = \nu_j$, $k_j = \dim_{\mathbb{Z}_{p_j}}(\mathrm{tors}(G)[p_j]), \forall j \in \{1, .., t\}$ (με τον πρώτον εκ των ανωτέρω ισομορφισμών οφειλόμενον στα (i) και (ii) τού θεωρήματος 2.6.27). Επειδή $|G\,(p_j)| = p_j^{n_j} = p^{\ell_{j,1}+\ell_{j,2}+\cdots+\ell_{j,k_j}} = \left|\bigoplus_{j=1}^{t} G\,(p_j)\right|$, λαμβάνουμε $1 \leqslant k_j \leqslant n_j = \ell_{j,1} + \ell_{j,2} + \cdots + \ell_{j,k_j}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, t\}$. Για την επαλήθευση των λοιπών ισχυρισμών βλ. θεώρημα 2.6.30. □

2.6.33 Πόρισμα. *Το πλήθος των ανά ζεύγη μη ισομόρφων πεπερασμένων αβελιανών ομάδων τάξεως* $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}$ ($t \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_t \in \mathbb{N}$)*, όπου οι* $p_1, \ldots, p_t$ *είναι πρώτοι αριθμοί* (με $p_1 < \cdots < p_t$, *όταν* $t \geqslant 2$)*, ισούται με* $\prod_{j=1}^{t} \varpi(n_j)$.

[75] Εάν η $(G,+)$ είναι ελεύθερη και πεπερασμένως παραγόμενη, τότε $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(G) \text{ φορές}}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ακριβείς ακολουθίες και μόδιοι ομολογίας και συνομολογίας

Στα κεφάλαια 3, 4 και 5 εισάγονται μόνον ορισμένες *θεμελιώδεις έννοιες* και αποδεικνύονται μόνον κάποια *βασικά θεωρήματα* από τη λεγομένη *Ομολογική Άλγεβρα*[1] που απαιτούνται για την απρόσκοπτη ανάγνωση των κατοπινών κεφαλαίων.

3.1 ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Ακολουθίες R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων καλούνται *ακριβείς* όταν ο πυρήνας καθενός των υπεισερχόμενων ομομορφισμών ισούται με την εικόνα τού προηγούμενου ομομορφισμού. Τέτοιου είδους ακολουθίες συναντώνται κατά τρόπο φυσικό σε πληθώρα σημαντικών θεωρημάτων τής Ομολογικής Άλγεβρας και τής Αλγεβρικής Τοπολογίας.

3.1.1 Ορισμός. Μια ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} \cdots \tag{3.1}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, η οποία είναι *είτε* πεπερασμένη (και διαθέτει τουλάχιστον τρεις R-μοδίους) *είτε* μονοπλεύρως ή αμφιπλεύρως απείρως εκτεινόμενη, καλείται **ακριβής στην** n**-οστή θέση** M_n (όπου $n \in \mathbb{Z}$) όταν ισχύει η ισότητα $\mathrm{Im}(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$. Η (3.1) λέγεται **ακριβής ακολουθία** όταν είναι ακριβής σε κάθε μη ληκτικό (εκ των άνω ή εκ των κάτω) R-μόδιο.

3.1.2 Σημείωση. (i) Προφανώς,

$$\mathrm{Im}(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n) \Leftrightarrow [f_n \circ f_{n-1} = 0 \ \text{ και } \ \mathrm{Ker}(f_n) \subseteq \mathrm{Im}(f_{n-1})].$$

[1] Για τη συγγραφή των κεφαλαίων 3, 4 και 5 χρησιμοποιήθηκαν κατά κύριο λόγο οι σημειώσεις παραδόσεων [24] (από τα «Θέματα Άλγεβρας» τα διδαχθέντα κατά το χειμερινό εξάμηνο 2006-2007 και το εαρινό εξάμηνο 2020), εν συνδυασμώ με τα εισαγωγικά βιβλία των Hu [21] και Vermani [27], και με αποτελέσματα ολίγων συναφών άρθρων. Για πιο προκεχωρημένα συγγράμματα συνιστώνται, για περαιτέρω μελέτη, αυτά των Bourbaki [28], Cartan & Eilenberg [29], Gelfand & Manin [30], Hilton & Stammbach [32], Mac Lane [33], Osborne [34], Rotman [35] και Weibel [36].

(ii) Ο ορισμός 3.1.1 παραμένει εν ισχύ ακόμη και όταν οι δείκτες είναι «κατιόντες», αρκεί ο πυρήνας καθενός ομομορφισμού να ισούται με την εικόνα τού προηγουμένου του. Επίσης, ορισμένες φορές (σε διαγράμματα) οι ακριβείς ακολουθίες παρατίθενται κατακορύφως εν είδει «στηλών».

(iii) Οιαδήποτε ακριβής ακολουθία τής μορφής[2]

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

καλείται **βραχεία ακριβής ακολουθία**.

3.1.3 Παραδείγματα. (i) Ένας ομομορφισμός R-μοδίων $f : M \longrightarrow N$ είναι

- μονομορφισμός $\Longleftrightarrow$ η $\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$ είναι ακριβής,
- επιμορφισμός $\Longleftrightarrow$ η $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \{0\}$ είναι ακριβής,
- ισομορφισμός $\Longleftrightarrow$ η $\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow \{0\}$ είναι ακριβής.

Επίσης, εάν μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\cdots \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{h} \cdots$$

είναι ακριβής, τότε ο f είναι μονομορφισμός $\Leftrightarrow g = 0$, επιμορφισμός $\Leftrightarrow h = 0$, και ισομορφισμός $\Leftrightarrow [g = 0$ και $h = 0]$.

(ii) Εάν $f : M \longrightarrow N$ είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων, τότε υφίστανται πάντοτε δύο βραχείες ακολουθίες: Η

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \overset{\iota}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{\pi^{M}_{\mathrm{Ker}(f)}} \mathrm{Coim}(f) \longrightarrow \{0\}\ ,$$

όπου ι η συνήθης ένθεση και $\mathrm{Coim}(f) := M/\mathrm{Ker}(f)$ η λεγόμενη **συνεικόνα τού** f, και η

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \hookrightarrow N \xrightarrow{\pi^{N}_{\mathrm{Im}(f)}} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \{0\}\ ,$$

όπου $\mathrm{Coker}(f) := N/\mathrm{Im}(f)$ είναι ο λεγόμενος **συμπυρήνας τού** f. Εξ αυτών προκύπτει και η ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \overset{\iota}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi^{N}_{\mathrm{Im}(f)}} \mathrm{Coker}(f) \longrightarrow \{0\}\ . \tag{3.2}$$

(iii) Έστω $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$. Εάν επιλέξουμε έναν γεννήτορα $[a]_k$ τής (προσθετικής, αβελιανής) ομάδας $\mathbb{Z}_k$ και έναν γεννήτορα $[b]_{k^2}$ τής $\mathbb{Z}_{k^2}$, τότε σχηματίζεται μια βραχεία ακριβής ακολουθία $\mathbb{Z}$-μοδίων και ομομορφισμών $\mathbb{Z}$-μοδίων

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_k \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{k^2} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}\,,$$

όπου $f([a]_k) := k[b]_{k^2}$ (απεικόνιση επεκτεινόμενη γραμμικώς επί ολοκλήρου τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Z}_k$) και $g([b]_{k^2}) := [a]_k$ (επεκτεινόμενη γραμμικώς επί τού $\mathbb{Z}_{k^2}$).

[2] Ως $\{0\} \longrightarrow M'$ συμβολίζεται η *συνήθης ένθεση* (που απεικονίζει το μοναδικό στοιχείο ενός τετριμμένου R-μοδίου στο $0_{M'}$) και ως $M'' \longrightarrow \{0\}$ ο *μηδενικός ομομορφισμός* (που απεικονίζει κάθε στοιχείο τού M'' στο μοναδικό στοιχείο ενός τετριμμένου R-μοδίου).

(iv) Εάν $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, τότε υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία $\mathbb{Z}$-μοδίων και ομομορφισμών $\mathbb{Z}$-μοδίων $\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}$, όπου $f := k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, ήτοι $f(\xi) := k\xi$ και $g(\xi) := [\xi]_k$ για κάθε $\xi \in \mathbb{Z}$.

(v) Εάν $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, και $l \in \mathbb{Z}$ με $l \mid k$, τότε θεωρώντας τήν υποομάδα $l\mathbb{Z}_k$ τής $\mathbb{Z}_k$ έχουμε τη δυνατότητα κατασκευής μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας $\mathbb{Z}_k$-μοδίων και ομομορφισμών $\mathbb{Z}_k$-μοδίων $\{0\} \longrightarrow \frac{k}{l}\,\mathbb{Z}_k \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}_k \xrightarrow{g} l\mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}$, όπου $g([\xi]_k) := l[\xi]_k$ για κάθε $\xi \in \mathbb{Z}$, καθώς ο g είναι επιμορφισμός και

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(g) &= \{\,[\xi]_k \in \mathbb{Z}_k \mid \xi \in \mathbb{Z} \text{ με } l[\xi]_k = [l\xi]_k = [0]_k\} \\ &= \{\,[\xi]_k \in \mathbb{Z}_k \mid \xi \in \mathbb{Z} \text{ με } l\xi = mk, \text{ για κάποιον } m \in \{0,1,\ldots,k-1\}\} \\ &= \tfrac{k}{l}\,\mathbb{Z}_k = \mathrm{Im}(\iota).\end{aligned}$$

(vi) Έστω K τυχόν σώμα. Η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \langle \mathsf{X} \rangle \overset{\iota}{\hookrightarrow} K[\mathsf{X}] \xrightarrow{g} K \longrightarrow \{0\},$$

όπου $g(\varphi(\mathsf{X})) :=$ ο σταθερός όρος τού πολυωνύμου $\varphi(\mathsf{X})$ για κάθε $\varphi(\mathsf{X}) \in K[\mathsf{X}]$, είναι ακριβής τόσον όταν οι όροι της θεωρηθούν K-μόδιοι (ήτοι K-διανυσματικοί χώροι) όσον και όταν οι όροι της θεωρηθούν $K[\mathsf{X}]$-μόδιοι[3].

(vii) Εάν I_1, I_2 είναι δυο ιδεώδη ενός μεταθετικού δακτυλίου R, τότε η

$$\{0\} \longrightarrow I_1 \cap I_2 \overset{\iota}{\hookrightarrow} R \xrightarrow{f} (R/I_1) \times (R/I_2) \xrightarrow{g} R/(I_1 + I_2) \longrightarrow \{0\},$$

όπου $f(r) := (r + I_1, r + I_2),\ \forall r \in R$, και

$$g(r_1 + I_1, r_2 + I_2) := (r_1 + r_2) + (I_1 + I_2),\ \forall\,(r_1, r_2) \in R \times R,$$

αποτελεί μια ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων.

3.1.4 Πρόταση. (i) *Οιαδήποτε ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \tag{3.3}$$

είναι ακριβής εάν και μόνον εάν $A \cong \mathrm{Ker}(\beta)$.
(ii) *Οιαδήποτε ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow \{0\} \tag{3.4}$$

είναι ακριβής εάν και μόνον εάν $\mathrm{Coker}(\alpha) \cong C$.

[3]Γενικότερα, εάν V είναι ένας K-διανυσματικός χώρος και $T : V \to V$ τυχών *ενδομορφισμός* του, τότε ο V καθίσταται $K[\mathsf{X}]$-μόδιος μέσω τής συνήθους προσθέσεως τού V και μέσω τού βαθμωτού πολλαπλασιασμού

$$K[\mathsf{X}] \times V \longrightarrow V,\ (\sum_{j=0}^{n} a_j \mathsf{X}^j, v) \longmapsto \sum_{j=0}^{n} a_j T^j(v).$$

Απόδειξη. (i) Εάν η (3.3) είναι ακριβής, τότε ο ομομορφισμός α είναι μονομορφισμός και $A \xrightarrow[\breve{\alpha}]{\cong} \mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta)$ (όπου $\breve{\alpha}$ όπως στο 2.2.14 (iii)). Και αντιστρόφως· εάν υπάρχει ένας ισομορφισμός R-μοδίων $f : A \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}(\beta)$, τότε δημιουργείται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\beta) \arrow[r, "\mathrm{in}_{\mathrm{Ker}(\beta),B}"'] & B \arrow[u, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[u, "\mathrm{id}_C"']
\end{tikzcd}$$

με την κάτω του γραμμή ακριβή. Ο $\alpha = \mathrm{id}_B \circ \mathrm{in}_{\mathrm{Ker}(\beta),B} \circ f$ είναι μονομορφισμός (ως σύνθεση τριών μονομορφισμών) και

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{id}_B(\mathrm{in}_{\mathrm{Ker}(\beta),B}(f(A))) = \mathrm{id}_B(\mathrm{in}_{\mathrm{Ker}(\beta),B}(\mathrm{Ker}(\beta))) = \mathrm{id}_B(\mathrm{Ker}(\beta)) = \mathrm{Ker}(\beta),$$

οπότε η (3.3) είναι ακριβής.

(ii) Εάν η (3.4) είναι ακριβής, τότε ο β είναι επιμορφισμός και

$$\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\beta) \Rightarrow \mathrm{Coker}(\alpha) := B/\,\mathrm{Im}(\alpha) = B/\mathrm{Ker}(\beta) \xrightarrow[2.3.7]{\cong} \mathrm{Im}(\beta) = C.$$

Και αντιστρόφως· εάν υπάρχει ισομορφισμός $f : \mathrm{Coker}(\alpha) \xrightarrow{\cong} C$, τότε τότε δημιουργείται ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] & \{0\} \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\pi^B_{\mathrm{Im}(\alpha)}"'] & \mathrm{Coker}(\alpha) \arrow[u, "f", "\cong"'] \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

με την κάτω του γραμμή ακριβή. Ο $\beta = f \circ \pi^B_{\mathrm{Im}(\alpha)} \circ \mathrm{id}_B$ είναι επιμορφισμός (ως σύνθεση τριών επιμορφισμών) και

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\beta) &= \mathrm{Ker}(f \circ \pi^B_{\mathrm{Im}(\alpha)} \circ id_B) = \mathrm{Ker}(f \circ \pi^B_{\mathrm{Im}(\alpha)}) = \left\{x \in B \mid f(\pi^B_{\mathrm{Im}(\alpha)}(x)) = 0_C\right\} \\
&= \left\{x \in B \mid \pi^B_{\mathrm{Im}(\alpha)}(x) = 0_{\mathrm{Coker}(\alpha)}\right\} = \{x \in B \mid x \in \mathrm{Im}(\alpha)\} = \mathrm{Im}(\alpha),
\end{aligned}$$

οπότε η (3.4) είναι ακριβής. □

3.1.5 Πρόταση. *Δοθείσας μιας ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής $A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \xrightarrow{f_3} A_4 \xrightarrow{f_4} A_5$ είναι δυνατός ο σχηματισμός τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Coker}(f_1) \overset{\alpha}{\hookrightarrow} A_3 \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Ker}(f_4) \longrightarrow \{0\} \tag{3.5}$$

όπου $\alpha(x + \mathrm{Im}(f_1)) := f_2(x),\ \forall x \in A_2$, και $\beta(y) := f_3(y),\ \forall y \in A_3$.

Αποδειξη. Δημιουργείται προδήλως ένας *μονο*μορφισμός $\mathrm{Coker}(f_1) \overset{\alpha}{\hookrightarrow} A_3$:

$$\mathrm{Coker}(f_1) := A_2/\,\mathrm{Im}(f_1) = A_2/\mathrm{Ker}(f_2) \xrightarrow[2.3.7]{\cong} \mathrm{Im}(f_2) \hookrightarrow A_3.$$

Επιπροσθέτως, μέσω τού f_3 επάγεται ένας επιμορφισμός $\beta : A_3 \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(f_2)$. Τέλος, η (3.5) είναι ακριβής *και* στον A_3, διότι $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Im}(f_2) = \mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Ker}(\beta)$. □

3.1.6 Πρόταση. *Έστω ότι οι $(f'_j : M'_j \longrightarrow M_j)_{j\in J}$, $(f_j : M_j \longrightarrow M''_j)_{j\in J}$ είναι δυο οικογένειες ομομορφισμών R-μοδίων (με το ίδιο σύνολο δεικτών). Εάν οι ακολουθίες $M'_j \xrightarrow[f'_j]{} M_j \xrightarrow[f_j]{} M''_j$ είναι ακριβείς για κάθε $j \in J$, τότε και οι ακολουθίες*

$$\prod_{j\in J} M'_j \xrightarrow{\ \prod_{j\in J} f'_j\ } \prod_{j\in J} M_j \xrightarrow{\ \prod_{j\in J} f_j\ } \prod_{j\in J} M''_j$$

και

$$\bigoplus_{j\in J} M'_j \xrightarrow{\ \bigoplus_{j\in J} f'_j\ } \bigoplus_{j\in J} M_j \xrightarrow{\ \bigoplus_{j\in J} f_j\ } \bigoplus_{j\in J} M''_j$$

είναι ακριβείς.

Αποδειξη. Έπεται άμεσα από τις ισότητες (2.15) και (2.16). □

▸ **Τεχνικές χειρισμού μεταθετικών διαγραμμάτων και ακριβών ακολουθιών**. Παρατίθεται μια σειρά από χρήσιμα θεωρητικά λήμματα τα οποία αποσκοπούν στη διευκόλυνση των χειρισμών που απαιτούνται κατά την επίλυση προβλημάτων σχετιζομένων με τη μελέτη *μεγάλων* μεταθετικών διαγραμμάτων.

3.1.7 Λήμμα («Λήμμα των τεσσάρων»). *Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[d, "\delta"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D'
\end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, ισχύουν τα εξής:

(i) *Εάν οι α και γ είναι επιμορφισμοί και ο δ μονομορφισμός, τότε ο β είναι επιμορφισμός.*

(ii) *Εάν ο α είναι επιμορφισμός και οι β και δ μονομορφισμοί, τότε ο γ είναι μονομορφισμός.*

Αποδειξη. (i) Έστω τυχόν στοιχείο $b' \in B'$. Επειδή η απεικόνιση γ είναι επιρριπτική, υπάρχει $c \in C : g'(b') = \gamma(c)$. Λόγω τής μεταθετικότητας στο δεξιό τετράγωνο, $\delta(h(c)) = h'(\gamma(c)) = h'(g'(b')) = (\underbrace{h' \circ g'}_{=0})(b') = 0_{D'}$. Άρα $h(c) \in \mathrm{Ker}(\delta) = \{0_D\}$

(διότι ο δ είναι μονομορφισμός), απ' όπου έπεται ότι

$$h(c) = 0_D \Rightarrow c \in \operatorname{Ker}(h) = \operatorname{Im}(g) \Rightarrow [\exists b \in B : c = g(b)].$$

Λόγω τής μεταθετικότητας στο μεσαίο τετράγωνο λαμβάνουμε

$$g'(b') = \gamma(c) = \gamma(g(b)) = g'(\beta(b)) \Rightarrow b' - \beta(b) \in \operatorname{Ker}(g') = \operatorname{Im}(f'),$$

οπότε $[\exists a' \in A' : b' - \beta(b) = f'(a')]$. Επειδή η απεικόνιση α είναι επιρριπτική, υπάρχει $a \in A : a' = \alpha(a)$. Η μεταθετικότητα στο αριστερό τετράγωνο δίδει

$$b' - \beta(b) = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)) \Rightarrow b' = \beta(b + f(a)) \in \operatorname{Im}(\beta).$$

Κατά συνέπειαν, ο ομομορφισμός β είναι όντως επιμορφισμός.

(ii) Έστω τυχόν $c \in \operatorname{Ker}(\gamma)$. Προφανώς, $\delta\,(h(c)) = h'(\gamma(c)) = h'(0_{C'}) = 0_{D'}$, οπότε $h(c) \in \operatorname{Ker}(\delta) = \{0_D\}$ και $c \in \operatorname{Ker}(h) = \operatorname{Im}(g) \Rightarrow [\exists b \in B : c = g(b)]$. Ως εκ τούτου,

$$0_{C'} = \gamma(c) = \gamma(g(b)) = g'(\beta(b)) \Rightarrow \beta(b) \in \operatorname{Ker}(g') = \operatorname{Im}(f'),$$

απ' όπου έπεται η ύπαρξη ενός $a' \in A'$ με $\beta(b) = f'(a')$. Επειδή η απεικόνιση α είναι επιρριπτική, υπάρχει $a \in A : a' = \alpha(a)$, οπότε

$$\beta(b) = f'(a') = \beta(f(a)) \Rightarrow b - f(a) \in \operatorname{Ker}(\beta) = \{0_B\} \Rightarrow b = f(a) \Rightarrow c = g(b) = (\underbrace{g \circ f}_{=0})(a) = 0_C.$$

Άρα ο ομομορφισμός γ είναι όντως μονομορφισμός. □

3.1.8 Λήμμα («Λήμμα των πέντε»). *Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, ισχύουν τα εξής:

(i) *Εάν ο α είναι επιμορφισμός και οι β και δ μονομορφισμοί, τότε ο γ είναι μονομορφισμός.*

(ii) *Εάν οι β και δ είναι επιμορφισμοί και ο ε μονομορφισμός, τότε ο γ είναι επιμορφισμός.*

(iii) *Εάν οι α, β, δ και ε είναι ισομορφισμοί, τότε και ο γ είναι ισομορφισμός.*

Αποδειξη. (i) Αρκεί η εφαρμογή τού (ii) τού λήμματος 3.1.7 για το υποδιάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[d, "\delta"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \end{tikzcd}$$

(ii) Τούτο έπεται ύστερα από εφαρμογή τού (i) τού λήμματος 3.1.7 για το υποδιάγραμμα

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

Τέλος, το (iii) έπεται άμεσα από τα (i) και (ii). □

3.1.9 Πόρισμα («Βραχύ λήμμα των πέντε»). *Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \{0\} \arrow[d, equal] \\ \{0\} \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, ισχύουν τα εξής:

(i) *Εάν οι α και γ μονομορφισμοί, τότε και ο β είναι μονομορφισμός.*

(ii) *Εάν οι α και γ επιμορφισμοί, τότε και ο β είναι επιμορφισμός.*

(iii) *Εάν οι α και γ ισομορφισμοί, τότε και ο β είναι ισομορφισμός.*

3.1.10 Λήμμα («Λήμμα των 3×3», [33], II.5.1, σελ. 49-50).
Έστω ότι το διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd} & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\ \{0\} \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "g''"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & C' \arrow[r, "\alpha''"'] \arrow[d] & C \arrow[r, "\beta''"'] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\ & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό με τις τρεις στήλες του ακριβείς. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) *Εάν οι δύο άνω γραμμές του είναι ακριβείς, τότε και η τρίτη του γραμμή είναι ακριβής.*

(ii) *Εάν οι δύο κάτω γραμμές του είναι ακριβείς, τότε και η τρίτη του γραμμή είναι ακριβής.*

Απόδειξη. (i) (a) *Ακρίβεια στη θέση C'.* Εάν $c' \in \operatorname{Ker}(\alpha'')$, τότε λόγω τής επιρριπτικότητας τού g' υπάρχει κάποιο $b' \in B'$, τέτοιο ώστε να ισχύει $g'(b') = c'$, οπότε

$$g(\alpha(b')) = \alpha''(g'(b')) = \alpha''(c') = 0_{C'} \Rightarrow \alpha(b') \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) \Rightarrow [\exists a \in A : \alpha(b') = f(a)].$$

Από την άλλη μεριά,

$$0_{B''} = (\underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0})(b') = \beta(\alpha(b')) = \beta(f(a)) = f''(\beta'(a)) \Rightarrow \beta'(a) \in \mathrm{Ker}(f'') = \{0_{A''}\}$$
$$\Rightarrow \beta'(a) = 0_{A''} \Rightarrow a \in \mathrm{Ker}(\beta') = \mathrm{Im}(\alpha') \Rightarrow [\exists a' \in A' : \alpha'(a') = a],$$

οπότε $\alpha(b') = f(a) = f(\alpha'(a')) = \alpha(f'(a'))$, απ' όπου έπεται ότι

$$b' - f'(a') \in \mathrm{Ker}(\alpha) = \{0_{B'}\} \Rightarrow b' = f'(a')$$
$$\Rightarrow c' = g'(b') = (\underbrace{g' \circ f'}_{=0})(a') = 0_{C'} \Rightarrow \mathrm{Ker}(\alpha'') = \{0_{C'}\}.$$

(b) *Ακρίβεια στη θέση* C. Εάν $c' \in C'$, τότε λόγω τής επιρριπτικότητας τού g' υπάρχει κάποιο $b' \in B'$, τέτοιο ώστε να ισχύει $g'(b') = c'$, οπότε

$$(\beta'' \circ \alpha'')(c') = \beta''(\alpha''(c')) = \beta''(\alpha''(g'(b'))) = \beta''(g(\alpha(b')))$$
$$= g''(\beta(\alpha(b'))) = g''((\underbrace{\beta \circ \alpha}_{=0})(b')) = g''(0_{B''}) = 0_{C''}$$
$$\Rightarrow \beta'' \circ \alpha'' = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(\alpha'') \subseteq \mathrm{Ker}(\beta'').$$

Και αντιστρόφως· εάν $c \in \mathrm{Ker}(\beta'')$, τότε λόγω τής επιρριπτικότητας τού g υπάρχει κάποιο $b \in B$, τέτοιο ώστε να ισχύει $g(b) = c$. Προφανώς,

$$0_C = \beta''(c) = \beta''(g(b)) = g''(\beta(b))$$
$$\Rightarrow \beta(b) \in \mathrm{Ker}(g'') = \mathrm{Im}(f'') \Rightarrow [\exists a'' \in A'' : \beta(b) = f''(a'')].$$

Επίσης, λόγω τής επιρριπτικότητας τού β' υπάρχει κάποιο $a \in A$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\beta'(a) = a''$. Κατά συνέπειαν,

$$\beta(b) = f''(a'') = f''(\beta'(a)) = \beta(f(a)) \Rightarrow b - f(a) \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$$
$$\Rightarrow [\exists b' \in B' : \alpha(b') = b - f(a)] \Rightarrow c = g(b) = g(b) - (\underbrace{g \circ f}_{=0})(a) = g(b - f(a))$$
$$= g(\alpha(b')) = \alpha''(g'(b')) \in \mathrm{Im}(\alpha'') \Rightarrow \mathrm{Ker}(\beta'') \subseteq \mathrm{Im}(\alpha'').$$

(c) *Ακρίβεια στη θέση* C''. Εάν $c'' \in C''$, τότε λόγω τής επιρριπτικότητας τού g'' υπάρχει κάποιο $b'' \in B''$, τέτοιο ώστε να ισχύει $g''(b'') = c''$. Επίσης, λόγω τής επιρριπτικότητας τού β, $\exists b \in B : b'' = \beta(b)$. Επομένως,

$$c'' = g''(b'') = g''(\beta(b)) = \beta''(g(b)) \in \mathrm{Im}(\beta'') \Rightarrow C'' = \mathrm{Im}(\beta'').$$

(ii) Τούτο αποδεικνύεται παρομοίως (μόνον μέσω *κυνηγητού στο διάγραμμα*). □

▸ **Το λήμμα τού φιδιού.** Εν συνεχεία, διατυπώνεται και αποδεικνύεται το λεγόμενο *λήμμα τού φιδιού* (που είναι γνωστό και ως *λήμμα πυρήνων και συμπυρήνων* ή ως *λήμμα τού ζικ-ζακ συνδετικού ομομορφισμού*), μέσω τού οποίου κατασκευάζεται η μακρά ακριβής ακολουθία R-μοδίων ομολογίας που επάγεται από μια βραχεία ακριβή ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. (Βλ. θεώρημα 3.2.13.) Επειδή η κλασική απόδειξή του[4] (μόνον μέσω *κυνηγητού στο διάγραμμα*) είναι μακροσκελής, παρατίθεται εδώ μια διαφορετική, κομψή και *σύντομη* απόδειξη που οφείλεται στον J. Lambek[5] και κάνει χρήση τού *λήμματος* 3.1.18 *των δύο τετραγώνων*. Προηγούνται οι αποδείξεις κάποιων *στοιχειωδών* βοηθητικών προτάσεων.

3.1.11 Πρόταση. *Δοθέντων R-μοδίων M, M', M'', N, N', N'' και ακριβών ακολουθιών*

$$M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \text{ και } \{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'',$$

καθώς και $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, $\phi'' \in \mathrm{Hom}_R(M'',N'')$ με $\phi'' \circ f = g \circ \phi$, υφίσταται μονοσημάντως ορισμένος $\phi' \in \mathrm{Hom}_R(M',N')$ που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, dashed, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[d, "\phi''"] \\
\{0\} \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r, "g"'] & N''
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in M'$. Προφανώς,

$$g(\phi(f'(x))) = ((g \circ \phi) \circ f')(x) = ((\phi'' \circ f) \circ f')(x) = (\phi'' \circ (\underbrace{f \circ f'}_{=0}))(x) = 0_{N''}$$

$$\Rightarrow \phi(f'(x)) \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(g') \Rightarrow \mathrm{Im}(\phi \circ f') \subseteq \mathrm{Im}(g').$$

Επειδή ο g' είναι μονομορφισμός (βλ. 3.1.3 (i)), αρκεί η εφαρμογή τού θεωρήματος 2.2.25 για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[dl, dashed, "\exists!\phi'"'] \arrow[dr, "\phi\circ f'"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
N' \arrow[rr, "g'"'] & {} & N
\end{tikzcd}$$

(βάσει τού οποίου $\exists!\, \phi' \in \mathrm{Hom}_R(M',N') : g' \circ \phi' = \phi \circ f'$). □

3.1.12 Πόρισμα. *Δοθέντων R-μοδίων M, N, M', N' και ομομορφισμών*

$$f \in \mathrm{Hom}_R(M,M'), \qquad g \in \mathrm{Hom}_R(N,N'),$$
$$\phi \in \mathrm{Hom}_R(M,N), \qquad \phi' \in \mathrm{Hom}_R(M',N'),$$

με $\phi' \circ f = g \circ \phi$, υφίσταται μονοσημάντως ορισμένος

$$\boxed{\overline{\phi} \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ker}(f), \mathrm{Ker}(g))}$$

[4] Για την κλασική απόδειξη βλ., π.χ., MacLane [8], σελ. 202-204, Brunner [19], σελ. 69-79, Vermani [27], Theorem 4.1.4, σελ. 101-109, ή Bourbaki [28], §1.2, σελ. 3-7.

[5] Βλ.J. Lambek: *Goursat's theorem and homological algebra,* Canadian Mathematical Bulletin **7** (1964), 597-608.

που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, dashed, "\overline{\phi}"] \arrow[d, "\iota_f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[d, "\iota_g"] \\ M \arrow[r, "\phi"'] & N \end{tikzcd}$$

(Οι ι_f, ι_g είναι οι συνήθεις ενθέσεις.)

Απόδειξη. Αρκεί να εφαρμοσθεί η πρόταση 3.1.11 στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\iota_f"] \arrow[d, dashed, "\exists!\, \overline{\phi}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M' \arrow[d, "\phi'"] \\ \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g) \arrow[r, "\iota_g"'] & N \arrow[r, "g"'] & N' \end{tikzcd}$$

Σημειωτέον ότι $\overline{\phi}(x) := \phi(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{Ker}(f)$. □

3.1.13 Πρόταση. *Δοθέντων R-μοδίων M, M', M'', N, N', N'' και ακριβών ακολουθιών*

$$M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow \{0\} \text{ και } N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'',$$

καθώς και $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N), \phi' \in \mathrm{Hom}_R(M', N')$ με $\phi \circ f' = g' \circ \phi'$, υφίσταται μονοσημάντως ορισμένος $\phi'' \in \mathrm{Hom}_R(M'', N'')$ που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\phi''"] & \{0\} \\ N' \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r, "g"'] & N'' & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έστω $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Επειδή $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f')$, υπάρχει κάποιο $x \in M'$, τέτοιο ώστε να ισχύει $y = f'(x)$, οπότε

$$\begin{aligned} &\phi(y) = \phi(f'(x)) = (\phi \circ f')(x) = (g' \circ \phi')(x) = g'(\phi'(x)) \\ &\Rightarrow (g \circ \phi)(y) = g(\phi(y)) = g(g'(\phi'(x))) = (\underbrace{g \circ g'}_{=0} \circ \phi')(x) = 0_{N''}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g \circ \phi)$. Επειδή (κατά το 3.1.3 (i)) ο f είναι επιμορφισμός, αρκεί η εφαρμογή τού θεωρήματος 2.2.24 για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N'' \\ M'' \arrow[ur, dashed, "\exists!\phi''"'] & \end{tikzcd}$$

(βάσει τού οποίου $\exists! \, \phi'' \in \mathrm{Hom}_R(M'', N'') : \phi'' \circ f = g \circ \phi$). □

3.1.14 Πόρισμα. *Έστω ότι οι*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow \{0\}$$

$$\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$$

είναι δυο βραχείες ακριβείς ακολουθίες και ότι

$$\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N), \;\; \phi' \in \mathrm{Hom}_R(M', N')$$

είναι τέτοιοι, ώστε να ισχύει $\phi \circ f' = g' \circ \phi'$. Βάσει τής προτάσεως 3.1.13 υπάρχει ένας και μόνον $\phi'' \in \mathrm{Hom}_R(M'', N'')$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\phi''"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r, "g"'] & N'' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Εν προκειμένω, $\mathrm{Ker}(\phi'') = f(\phi^{-1}(\mathrm{Ker}(g))), \;\; \mathrm{Im}(\phi'') = \mathrm{Im}(g \circ \phi)$, *Εξ αυτών συνάγεται ότι*

(i) *ο ϕ'' είναι μονομορφισμός εάν και μόνον εάν $\phi^{-1}(\mathrm{Ker}(g)) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, και*

(ii) *ο ϕ'' είναι επιμορφισμός εάν και μόνον εάν ο $g \circ \phi$ είναι επιμορφισμός.*

Αποδειξη. Προφανώς,

$$\phi^{-1}(\mathrm{Ker}(g)) = \phi^{-1}(g^{-1}(\{0_{N''}\})) = (g \circ \phi)^{-1}(\{0_{N''}\}) = \mathrm{Ker}(\phi'' \circ f)$$

$$\Rightarrow f(\phi^{-1}(\mathrm{Ker}(g))) = f(\mathrm{Ker}(\phi'' \circ f)) \underset{2.2.11}{=} \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(\phi'') = M'' \cap \mathrm{Ker}(\phi'') = \mathrm{Ker}(\phi'')$$

και $\mathrm{Im}(g \circ \phi) = \mathrm{Im}(\phi'' \circ f) = (\phi'' \circ f)(M) = \phi''(f(M)) = \phi''(M'') = \mathrm{Im}(\phi'')$.

(i) Ο ϕ'' είναι μονομορφισμός εάν και μόνον εάν

$$\mathrm{Ker}(\phi'') = \{0_{M''}\} \Leftrightarrow f(\phi^{-1}(\mathrm{Ker}(g))) = \{0_{M''}\} \Leftrightarrow \phi^{-1}(\mathrm{Ker}(g)) \subseteq \mathrm{Ker}(f).$$

(ii) Τούτο είναι προφανές από την ισότητα $\mathrm{Im}(\phi'') = \mathrm{Im}(g \circ \phi)$. □

3.1.15 Πόρισμα. *Δοθέντων R-μοδίων M, N, M', N' και ομομορφισμών*

$$f \in \mathrm{Hom}_R(M', M), \qquad g \in \mathrm{Hom}_R(N', N),$$

$$\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N), \qquad \phi' \in \mathrm{Hom}_R(M', N'),$$

με $\phi \circ f = g \circ \phi'$, υφίσταται μονοσημάντως ορισμένος

$$\boxed{\underline{\phi} \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{Coker}(g))}$$

που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi^M_{\mathrm{Im}(f)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "\pi^N_{\mathrm{Im}(g)}"] \\ \mathrm{Coker}(f) \arrow[r, dashed, "\underline{\phi}"'] & \mathrm{Coker}(g) \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Αρκεί να εφαρμοσθεί η πρόταση 3.1.13 στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "\pi^M_{\mathrm{Im}(f)}"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!\underline{\phi}"] & \{0\} \\ N' \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r, "\pi^N_{\mathrm{Im}(g)}"'] & \mathrm{Coker}(g) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

Σημειωτέον ότι $\underline{\phi}(m + \mathrm{Im}(f)) := \phi(m) + \mathrm{Im}(g)$ για κάθε $m \in M$. □

3.1.16 Ορισμός. Έστω "□" ένα τετράγωνο μεταθετικό διάγραμμα ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "g"'] & D \end{tikzcd}$$

Ορίζουμε ως **λόγο εικόνων** (image ratio) **τού** □ τον πηλικομόδιο[6]

$$\boxed{\mathrm{Im.rat.}(\square) := (\mathrm{Im}(\beta) \cap \mathrm{Im}(g)) / \mathrm{Im}(g \circ \alpha)}$$

και ως **λόγο πυρήνων** (kernel ratio) **τού** □ τον πηλικομόδιο[7]

$$\boxed{\mathrm{Ker.rat.}(\square) := \mathrm{Ker}(g \circ \alpha) / (\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(f)).}$$

3.1.17 Σημείωση. Για διαγράμματα "□′" τής μορφής

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "\square'"] & B \\ C \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "g"'] & D \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

[6] Εάν $y \in \mathrm{Im}(g \circ \alpha)$, τότε υπάρχει $x \in A : y = g(\alpha(x))$, οπότε $y \in \mathrm{Im}(g)$. Εξάλλου, επειδή (εξ υποθέσεως) $y = g(\alpha(x)) = \beta(f(x))$, έχουμε $y \in \mathrm{Im}(\beta)$. Επομένως, $y \in \mathrm{Im}(\beta) \cap \mathrm{Im}(g)$.

[7] Εάν $x \in \mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(f)$, τότε $x = x_1 + x_2$, για κάποια $x_1 \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ και $x_2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Επειδή

$$g(\alpha(x)) = g(\underbrace{\alpha(x_1)}_{=0_C} + \alpha(x_2)) = g(\alpha(x_2)) = \beta(f(x_2)) = \beta(0_B) = 0_D,$$

συνάγεται ότι $x \in \mathrm{Ker}(g \circ \alpha)$. Άρα $\mathrm{Ker}(\alpha) + \mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g \circ \alpha)$.

(με τα κατακόρυφα βέλη στραμμένα *προς τα άνω*) ορίζουμε κατ' αναλογίαν

$$\boxed{\text{Im.rat.}(\square') := (\text{Im}(\beta) \cap \text{Im}(f)) / \text{Im}(f \circ \alpha)}$$

και

$$\boxed{\text{Ker.rat.}(\square') := \text{Ker}(f \circ \alpha)/(\text{Ker}(\alpha) + \text{Ker}(g)).}$$

3.1.18 Λήμμα («Λήμμα των δύο τετραγώνων», J. Lambek, 1964). *Για οιοδήποτε μεταθετικό διάγραμμα ομομορφισμών R-μοδίων αποτελούμενο από δύο τετράγωνα τής μορφής*

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "2"] & M'' \arrow[d, "\gamma"] \\ N' \arrow[r, "f'"'] & N \arrow[r, "g'"'] & N'' \end{tikzcd}$$

και έχον αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, υφίσταται ισομορφισμός

$$\boxed{\text{Im.rat.}(1) \cong \text{Ker.rat.}(2).}$$

Αποδειξη. Λόγω τής ακριβείας των γραμμών έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Im}(\beta) \cap \ \text{Im}(f') &= \text{Im}(\beta) \cap \ \text{Ker}(g') = \left\{\beta(x) \,\middle|\, x \in M \text{ με } g'(\beta(x)) = 0_{N''}\right\} \\ &= \beta(\text{Ker}(g' \circ \beta)) \end{aligned} \tag{3.6}$$

και

$$\text{Im}(\beta \circ f) = \beta(\text{Im}(f)) = \beta(\text{Ker}(g)) = \beta(\text{Ker}(\beta) + \text{Ker}(g)). \tag{3.7}$$

Κατά συνέπειαν,

$$\begin{array}{ll} \text{Ker.rat.}(2) := \ \text{Ker}(g' \circ \beta)/(\text{Ker}(\beta) + \text{Ker}(g)) & (\text{εξ ορισμού}) \\ \cong \ (\text{Ker}(g' \circ \beta)/\text{Ker}(\beta))/((\text{Ker}(\beta) + \text{Ker}(g))/\text{Ker}(\beta)) & (\text{βλ. θεώρημα 2.3.13}) \\ \cong \ \beta\,(\text{Ker}(g' \circ \beta))\,/\beta(\text{Ker}(\beta) + \text{Ker}(g)) & (\text{βλ. θεώρημα 2.3.7}) \\ = (\text{Im}(\beta) \cap \ \text{Im}(f'))/\,\text{Im}(\beta \circ f) & (\text{από τις (3.6) και (3.7)}) \\ = \text{Im.rat.}(1) & (\text{εξ ορισμού}) \end{array}$$

και ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

3.1.19 Παρατήρηση. Το λήμμα 3.1.18 (Im.rat.(1) ≅ Ker.rat.(2)) εξακολουθεί να ισχύει και για διαγράμματα τής μορφής

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "1"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "2"] & M'' \\ N' \arrow[r, "f'"'] \arrow[u, "\alpha"] & N \arrow[r, "g'"'] \arrow[u, "\beta"'] & N'' \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

(που στρέφουν τα κατακόρυφα βέλη *προς τα άνω*) υπό την προϋπόθεση τού ορισμού των λόγων εικόνων και πυρήνων όπως στο εδ. 3.1.17.

3.1.20 Θεώρημα («Λήμμα τού φιδιού»). *Εάν δοθούν δυο τριάδες R-μοδίων*

$$M, M', M'' \text{ και } N, N', N'',$$

δυο ακριβείς ακολουθίες

$$M' \xrightarrow{\alpha'} M \xrightarrow{\alpha} M'' \longrightarrow \{0\} \text{ και } \{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{\beta'} N \xrightarrow{\beta} N''$$

και τρεις ομομορφισμοί $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, $\phi' \in \mathrm{Hom}_R(M', N')$, $\phi'' \in \mathrm{Hom}_R(M'', N'')$, *και εάν υποτεθεί ότι το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό*

$$\begin{tikzcd}
& \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
& \mathrm{Ker}(\phi') \arrow[r, "\overline{\alpha}'"] \arrow[d, "\iota_{\phi'}"'] & \mathrm{Ker}(\phi) \arrow[r, "\overline{\alpha}"] \arrow[d, "\iota_{\phi}"'] & \mathrm{Ker}(\phi'') \arrow[d, "\iota_{\phi''}"'] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
& M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\phi'"'] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & N' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}"'] & N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}"'] & N'' \arrow[d, "\pi^{N''}_{\mathrm{Im}(\phi'')}"'] & \\
& \mathrm{Coker}(\phi') \arrow[r, "\underline{\beta}'"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\phi) \arrow[r, "\underline{\beta}"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\phi'') \arrow[d] & \\
& \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

όπου οι τρεις στήλες του είναι οι ακριβείς ακολουθίες (3.2) οι επαγόμενες από τους ϕ, ϕ', ϕ'' *και* $\underline{\beta}, \underline{\beta}', \overline{\alpha}, \overline{\alpha}'$ *οι μονοσημάντως ορισμένοι ομομορφισμοί που αποκτώνται μέσω των πορισμάτων 3.1.12 και 3.1.15, τότε υπάρχει ομομορφισμός* δ *που καθιστά την ακολουθία*

$$\boxed{\mathrm{Ker}(\phi') \xrightarrow{\overline{\alpha}'} \mathrm{Ker}(\phi) \xrightarrow{\overline{\alpha}} \mathrm{Ker}(\phi'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\phi') \xrightarrow{\underline{\beta}'} \mathrm{Coker}(\phi) \xrightarrow{\underline{\beta}} \mathrm{Coker}(\phi'')}$$

ακριβή (και υποδηλούται μέσω τού οφιοειδούς βέλους στο διάγραμμα).

Απόδειξη. (i) *Η ανωτέρω ακολουθία είναι ακριβής στη θέση* $\mathrm{Ker}(\phi)$. Έστω τυχόν $y \in \mathrm{Im}(\overline{\alpha} \circ \overline{\alpha}')$. Επειδή $\exists x \in \mathrm{Ker}(\phi') : y = (\overline{\alpha} \circ \overline{\alpha}')(x)$ και $\iota_{\phi''}(y) \in M'' = \mathrm{Im}(\alpha)$, υπάρχει $z \in M$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned}
&\alpha(z) = \iota_{\phi''}(y) = (\iota_{\phi''} \circ \overline{\alpha})(\overline{\alpha}'(x)) = (\alpha \circ \iota_{\phi})(\overline{\alpha}'(x)) \\
&= \alpha((\iota_{\phi} \circ \overline{\alpha}')(x)) = \alpha((\alpha' \circ \iota_{\phi'})(x)) = ((\underbrace{\alpha \circ \alpha'}_{=0}) \circ \iota_{\phi})(x) = 0_{M''} \\
&\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(\iota_{\phi''}) = \{0_{M''}\} \Rightarrow y = 0_{M''}
\end{aligned}$$

(λόγω τής μεταθετικότητας τού διαγράμματος και τής ακριβείας τής δεύτερης γραμμής του). Επομένως, $\overline{\alpha} \circ \overline{\alpha}' = 0 \Longrightarrow \mathrm{Im}(\overline{\alpha}') \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{\alpha})$. Και αντιστρόφως· εάν θεωρήσουμε ένα $x \in \mathrm{Ker}(\overline{\alpha})$, τότε

$$\begin{aligned}
&0_{M''} = \iota_{\phi''}(0_{M''}) = \iota_{\phi''}(\overline{\alpha}(x)) = (\iota_{\phi''} \circ \overline{\alpha})(x) = (\alpha \circ \iota_{\phi})(x) = \alpha(\iota_{\phi}(x)) \\
&\Rightarrow \iota_{\phi}(x) \in \mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha') \Rightarrow [\exists y \in M' : \iota_{\phi}(x) = \alpha'(y)] \\
&\Rightarrow (\beta' \circ \phi')(y) = (\phi \circ \alpha')(y) = \phi(\alpha'(y)) = \phi(\iota_{\phi}(x)) = \underbrace{(\phi \circ \iota_{\phi})}_{=0}(x) = 0_N \\
&\Rightarrow \phi'(y) \in \mathrm{Ker}(\beta') = \{0_{N'}\} \Rightarrow \phi'(y) = 0_{N'} \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(\phi') = \mathrm{Im}(\iota_{\phi'}) \\
&\Rightarrow [\exists x' \in \mathrm{Ker}(\phi') : y = \iota_{\phi'}(x')] \Rightarrow \iota_{\phi}(x) = \alpha'(y) = (\alpha' \circ \iota_{\phi'})(x') = (\iota_{\phi} \circ \overline{\alpha}')(x') \\
&\Rightarrow x - \overline{\alpha}'(x') \in \mathrm{Ker}(\iota_{\phi}) = \{0_M\} \Rightarrow x = \overline{\alpha}'(x') \in \mathrm{Im}(\overline{\alpha}'),
\end{aligned}$$

οπότε ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathrm{Ker}(\overline{\alpha}) \subseteq \mathrm{Im}(\overline{\alpha}')$.

(ii) *Η ανωτέρω ακολουθία είναι ακριβής στη θέση* $\mathrm{Coker}(\phi)$. Έστω τυχόν στοιχείο $x \in \mathrm{Coker}(\phi')$. Επειδή η απεικόνιση $\pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}$ είναι επιρριπτική,

$$\exists z \in N' : \pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}(z) = z + \mathrm{Im}(\phi') = x,$$

οπότε

$$\begin{aligned}
&(\underline{\beta} \circ \underline{\beta}')(x) = (\underline{\beta} \circ (\underline{\beta}' \circ \pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}))(z) = (\underline{\beta} \circ (\pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)} \circ \beta'))(z) \\
&= ((\underline{\beta} \circ \pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}) \circ \beta')(z) = ((\pi^{N''}_{\mathrm{Im}(\phi'')} \circ \beta) \circ \beta')(z) \\
&= (\pi^{N''}_{\mathrm{Im}(\phi'')} \circ \underbrace{(\beta \circ \beta')}_{=0})(z) = 0_{\mathrm{Coker}(\phi'')} \Rightarrow \underline{\beta} \circ \underline{\beta}' = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(\underline{\beta}') \subseteq \mathrm{Ker}(\underline{\beta}).
\end{aligned}$$

Και αντιστρόφως· εάν $x \in \mathrm{Ker}(\underline{\beta})$, τότε (επειδή η $\pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}$ είναι επιρριπτική)

$$\exists y \in N : x = \pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}(y),$$

οπότε

$$\begin{aligned}
&0_{\mathrm{Coker}(\phi)} = \underline{\beta}(x) = (\underline{\beta} \circ \pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)})(y) = (\pi^{N''}_{\mathrm{Im}(\phi'')} \circ \beta)(y) \\
&\Rightarrow \beta(y) \in \mathrm{Ker}(\pi^{N''}_{\mathrm{Im}(\phi'')}) = \mathrm{Im}(\phi'') \\
&\Rightarrow [\exists w \in M'' : \phi''(w) = \beta(y)] \underset{\mathrm{Im}(\alpha)=M''}{\Longrightarrow} [\exists u \in M : w = \alpha(u)] \\
&\Rightarrow [\exists u \in M : \phi''(w) = \phi''(\alpha(u)) = \beta(\phi(u))] \Rightarrow \beta(y) = \beta(\phi(u)) \\
&\Rightarrow y - \phi(u) \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\beta') \Rightarrow [\exists v \in N' : y - \phi(u) = \beta'(v)] \\
&\Rightarrow \pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}(y) - \underbrace{(\pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)} \circ \phi)}_{=0}(u) = (\pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)} \circ \beta')(v) = (\underline{\beta}' \circ \pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')})(v) \\
&\Rightarrow x = \pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}(y) = \underline{\beta}'(\pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}(v)) \in \mathrm{Im}(\underline{\beta}') \Rightarrow \mathrm{Ker}(\underline{\beta}) \subseteq \mathrm{Im}(\underline{\beta}').
\end{aligned}$$

(iii) *Για να είναι η ανωτέρω ακολουθία ακριβής και στις θέσεις* $\mathrm{Ker}(\phi'')$ *και* $\mathrm{Coker}(\phi')$ *αρκεί να υφίσταται ισομορφισμός*

$$\boxed{\mathrm{Coker}(\overline{\alpha}) \xrightarrow[\theta]{\cong} \mathrm{Ker}(\underline{\beta}').} \tag{3.8}$$

Πράγματι· εν τοιαύτη περιπτώσει, θέτοντας $\delta := j \circ \theta \circ \pi^{\mathrm{Ker}(\phi'')}_{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}$ (όπου j η συνήθης ένθεση) συμπεραίνουμε μέσω τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\phi) \arrow[r, "\overline{\alpha}"] & \mathrm{Ker}(\phi'') \arrow[r, dashed, "\delta"] \arrow[d, "\pi^{\mathrm{Ker}(\phi'')}_{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Coker}(\phi') \arrow[r, "\underline{\beta}'"] & \mathrm{Coker}(\phi) \\
\mathrm{Ker}(\phi'')/\mathrm{Im}(\overline{\alpha}) \arrow[r, equal] & \mathrm{Coker}(\overline{\alpha}) \arrow[r, "\cong", "\theta"'] & \mathrm{Ker}(\underline{\beta}') \arrow[u, hook, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\delta) &= \left\{ x \in \mathrm{Ker}(\phi'') \,\middle|\, j(\theta(\pi^{\mathrm{Ker}(\phi'')}_{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}(x))) = \theta(\pi^{\mathrm{Ker}(\phi'')}_{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}(x)) = 0_{\mathrm{Coker}(\phi')} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathrm{Ker}(\phi'') \,\middle|\, \pi^{\mathrm{Ker}(\phi'')}_{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}(x) \in \mathrm{Ker}(\theta) = \{0_{\mathrm{Coker}(\overline{\alpha})}\} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathrm{Ker}(\phi'') \,|\, x + \mathrm{Im}(\overline{\alpha}) = \mathrm{Im}(\overline{\alpha}) \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathrm{Ker}(\phi'') \,|\, x \in \mathrm{Im}(\overline{\alpha}) \right\} = \mathrm{Im}(\overline{\alpha})
\end{aligned}$$

και

$$\mathrm{Im}(\delta) = j(\theta(\pi^{\mathrm{Ker}(\phi'')}_{\mathrm{Im}(\overline{\alpha})}(\mathrm{Ker}(\phi'')))) = j(\theta(\mathrm{Coker}(\overline{\alpha}))) = j(\mathrm{Ker}(\underline{\beta}')) = \mathrm{Ker}(\underline{\beta}').$$

(iv) *Απόδειξη υπάρξεως ενός ισομορφισμού* (3.8). Προς τούτο θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα το οποίο έχει την 2η, 3η, 4η και 5η γραμμή του, καθώς και όλες τις στήλες του ακριβείς.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \{0\} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{1}"] & \mathrm{Coker}(\overline{\alpha}) \arrow[d, equal] \\
 & & \mathrm{Ker}(\phi) \arrow[r, "\overline{\alpha}"] \arrow[d, "\iota_\phi"] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{3}"] & \mathrm{Ker}(\phi'') \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\iota_{\phi''}"] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{2}"] & \mathrm{Coker}(\overline{\alpha}) \arrow[d] \\
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{5}"] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{4}"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{7}"] & N' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}"'] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{6}"] & N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\pi^{N}_{\mathrm{Im}(\phi)}"] & N'' & \\
\mathrm{Ker}(\underline{\beta}') \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\textcircled{8}"] & \mathrm{Coker}(\phi') \arrow[r, "\underline{\beta}'"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\phi) & & \\
\mathrm{Ker}(\underline{\beta}') \arrow[r] & \{0\} & & &
\end{tikzcd}$$

Επειδή (εκ κατασκευής) $\mathrm{Coker}(\overline{\alpha}) = \mathrm{Im.rat.}(①)$, εφαρμόζοντας διαδοχικώς το λήμμα 3.1.18 των δύο τετραγώνων (*και στις δύο του εκδοχές*, βλ. 3.1.19) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im.rat.}\big(①\big) \cong \mathrm{Ker.rat.}\big(②\big) \cong \mathrm{Im.rat.}\big(③\big) \\ &\cong \mathrm{Ker.rat.}\big(④\big) \cong \mathrm{Im.rat.}\big(⑤\big) \cong \mathrm{Ker.rat.}\big(⑥\big) \\ &\cong \mathrm{Im.rat.}\big(⑦\big) \cong \mathrm{Ker.rat.}\big(⑧\big), \end{aligned}$$

όπου (εκ νέου, εκ κατασκευής) $\mathrm{Ker.rat.}(⑧) = \mathrm{Ker}(\underline{\beta}')$. □

3.1.21 Παρατήρηση. (i) Έστω τυχόν στοιχείο $y \in \mathrm{Ker}(\phi'') \hookrightarrow M''$. Επειδή ο α είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο $x \in M$ με $\alpha(x) = \iota_{\phi''}(y) = y$ και[8] $\phi(x) \in \mathrm{Im}(\beta')$. Επειδή ο β' είναι μονομορφισμός, η ίνα $\beta'^{-1}(\{\phi(x)\})$ αυτού υπεράνω τού $\phi(x)$ είναι ένα *μονοσύνολο,* ας πούμε το $\{z\}$. Είναι εύκολο να ελεγχθεί (είτε βάσει των προαναφερθέντων διαδοχικών ισομορφισμών είτε απευθείας) ότι ως

$$\mathrm{Ker}(\phi'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\phi')$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ομομορφισμός ο οριζόμενος μέσω τού τύπου[9]

$$\boxed{\delta(y) := \pi^{N'}_{\mathrm{Im}(\phi')}(z) = z + \mathrm{Im}(\phi').} \tag{3.9}$$

(ii) Εάν ο $\overline{\alpha}'$ είναι μονομορφισμός, τότε και ο α' είναι μονομορφισμός. (Και αντιστοίχως, εάν ο α' είναι επιμορφισμός, τότε και ο $\overline{\alpha}'$είναι επιμορφισμός.) Τούτο (επειδή ο β' είναι εξ υποθέσεως μονομορφισμός) έπεται ύστερα από εφαρμογή τού λήμματος 3.1.7 των τεσσάρων στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ker}(\phi') \arrow[r, hook] \arrow[d, "\overline{\alpha}'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\alpha'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N' \arrow[d, "\beta'"] \\ \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\phi) \arrow[r, hook] & M \arrow[r, "\phi"'] & N \end{tikzcd}$$

---

[8] Προφανώς, $\beta(\phi(x)) = \phi''(\alpha(x)) = \phi''(y) = 0_{N''}$, οπότε $\phi(x) \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\beta')$.

[9] Λαμβάνοντας υπ' όψιν το εξής τμήμα τού διαγράμματός μας:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"] & M'' \\ N' \arrow[r, "\beta'"] & N & \end{tikzcd}$$

διαπιστώνουμε ότι ο εν λόγω ορισμός τού δ είναι *ανεξάρτητος* τής επιλογής τού x. Πράγματι· εάν $x_1, x_2 \in \alpha^{-1}(\{y\})$, τότε για $j = 1, 2$ έχουμε $\phi(x_j) \in \mathrm{Im}(\beta')$, οπότε υπάρχει *μοναδικό* $z_j \in N'$ με $\beta'(z_j) = \phi(x_j)$ (ή, ισοδυνάμως, με το μονοσύνολο $\{z_j\}$ ως την ίνα τού β' υπεράνω τού $\phi(x_j)$). Επειδή $x_1 - x_2 \in \mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Im}(\alpha')$, υπάρχει $u \in M'$ με $\alpha'(u) = x_1 - x_2$, απ' όπου έπεται ότι

$$\beta'(z_1 - z_2) = \phi(x_1 - x_2) = \phi(\alpha'(u)) = \beta'(\phi'(u)) \underset{\mathrm{Ker}(\beta') = \{0_{N'}\}}{\Longrightarrow} z_1 - z_2 = \phi'(u),$$

ήτοι $z_1 - z_2 \in \mathrm{Im}(\phi')$ ή, ισοδυνάμως, $z_1 + \mathrm{Im}(\phi') = z_2 + \mathrm{Im}(\phi')$.

(iii) Εάν ο $\underline{\beta}$ είναι επιμορφισμός, τότε και ο β είναι επιμορφισμός. (Και αντιστοίχως, εάν ο β είναι μονομορφισμός, τότε και ο $\underline{\beta}$ είναι μονομορφισμός.) Τούτο (επειδή ο α είναι εξ υποθέσεως επιμορφισμός) έπεται ύστερα από εφαρμογή τού λήμματος 3.1.7 των τεσσάρων στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Coker}(\phi) \arrow[r] \arrow[d, "\underline{\beta}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \{0\} \arrow[d, equal] \\
M'' \arrow[r, "\phi''"'] & N'' \arrow[r, two heads] & \mathrm{Coker}(\phi'') \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

(iv) Εάν ο ϕ' είναι επιμορφισμός, τότε προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$\mathrm{Ker}(\phi') \xrightarrow{\overline{\alpha}'} \mathrm{Ker}(\phi) \overset{\overline{\alpha}}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Ker}(\phi'') \longrightarrow \{0\}\,.$$

(v) Εάν ο ϕ'' είναι μονομορφισμός, τότε προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Coker}(\phi') \overset{\underline{\beta}'}{\hookrightarrow} \mathrm{Coker}(\phi) \xrightarrow{\underline{\beta}} \mathrm{Coker}(\phi'').$$

▸ **Αλληλοεμπλεκόμενες ακριβείς ακολουθίες**. Υπάρχει πληθώρα μεγάλων και περίπλοκων διαγραμμάτων (πέραν αυτού τού λήμματος τού φιδιού) που οδηγούν στη δημιουργία λίαν χρήσιμων ακριβών ακολουθιών. Θα περιορισθούμε εδώ στην παράθεση τού λήμματος 3.1.25 των Barratt και Whitehead, τού θεωρήματος 3.1.26 και τού θεωρήματος 3.1.27 τού Wall.

3.1.22 Λήμμα. *Εάν δοθεί ένα διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\begin{tikzcd}
M_1' & & M_2' \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & L \arrow[ul, "j_1"'] \arrow[ur, "j_2"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \\
M_1 \arrow[uu, "k_1"] \arrow[ur, "i_1"'] & & M_2 \arrow[uu, "k_2"'] \arrow[ul, "i_2"]
\end{tikzcd}$$

με $j_1 \circ i_1 = k_1$ και $j_2 \circ i_2 = k_2$, όπου

$$\{0\} \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i_1} L \xrightarrow{j_2} M_2' \longrightarrow \{0\}\,,\ \{0\} \longrightarrow M_2 \xrightarrow{i_2} L \xrightarrow{j_1} M_1' \longrightarrow \{0\}$$

είναι βραχείες ακριβείς ακολουθίες και ο ομομορφισμός

$$\varphi : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow L,\ (x_1, x_2) \longmapsto \varphi(x_1, x_2) := (i_1 \oplus i_2)(x_1, x_2) = i_1(x_1) + i_2(x_2)$$

ισομορφισμός, τότε αμφότεροι οι k_1, k_2 οφείλουν να είναι ισομορφισμοί.

Απόδειξη. Έστω τυχόν στοιχείο $z \in M_1'$. Επειδή ο j_1 είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο $y \in L$, τέτοιο ώστε να ισχύει $j_1(y) = z$. Επίσης, επειδή ο φ είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο ζεύγος $(x_1, x_2) \in M_1 \oplus M_2$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$y = \varphi(x_1, x_2).$$

Επομένως, $z = j_1(y) = j_1(i_1(x_1) + i_2(x_2)) = (j_1 \circ i_1)(x_1) + (j_1 \circ i_2)(x_2) = k_1(x_1)$. Παρομοίως (κατόπιν εναλλαγής των ρόλων των j_1 και j_2) αποδεικνύεται ότι *και* ο k_2 είναι επιμορφισμός. Εν συνεχεία, θεωρούμε τυχόν $x \in \mathrm{Ker}(k_1)$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} & j_1(i_1(x)) = 0_{M_1} \Rightarrow i_1(x) \in \mathrm{Ker}(j_1) = \mathrm{Im}(i_2) \Rightarrow [\exists x' \in M_2 : i_1(x) = i_2(x')] \\ & \Rightarrow 0_L = i_1(-x) + i_2(x') = \varphi(x, x') \underset{\mathrm{Ker}(\varphi)=\{(0_{M_1},0_{M_2})\}}{\Longrightarrow} (x, x') = (0_{M_1}, 0_{M_2}). \end{aligned}$$

Άρα ο k_1 είναι μονομορφισμός. Η απόδειξη τής ενριπτικότητας τού k_2 είναι παρόμοια. □

3.1.23 Λήμμα. *Εάν δοθεί ένα διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\begin{tikzcd} M_1' & & M_2' \\ & L \arrow[ul, "j_1"'] \arrow[ur, "j_2"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \\ M_1 \arrow[uu, "k_1", "\cong"'] \arrow[ur, "i_1"'] & & M_2 \arrow[uu, "k_2"', "\cong"] \arrow[ul, "i_2"] \end{tikzcd}$$

με $j_1 \circ i_1 = k_1$ και $j_2 \circ i_2 = k_2$, στο οποίο οι $M_1 \xrightarrow{i_1} L \xrightarrow{j_2} M_2'$, $M_2 \xrightarrow{i_2} L \xrightarrow{j_1} M_1'$ είναι ακριβείς και οι k_1, k_2 ισομορφισμοί, τότε οι ομομορφισμοί

$$\varphi : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow L,\ (x_1, x_2) \longmapsto \varphi(x_1, x_2) := (i_1 \oplus i_2)(x_1, x_2) = i_1(x_1) + i_2(x_2)$$

και $\psi : L \longrightarrow M_1' \times M_2'$, $x \longmapsto \psi(x) := (j_1(x), j_2(x))$ είναι ισομορφισμοί έχοντες ως σύνθεσή τους την $\psi \circ \varphi = k_1 \times k_2$. Επιπροσθέτως,

$$i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 + i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2 = \mathrm{id}_L. \tag{3.10}$$

Απόδειξη. Επειδή η σύνθεση $j_1 \circ i_1 = k_1$ είναι ένας ισομορφισμός, από την πρόταση 2.2.11 έπεται ότι $L = \mathrm{Im}\,(i_1) \oplus \mathrm{Ker}(j_1)$. Επομένως,

$$\mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) = \mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Im}\,(i_1) = \{0_L\}. \tag{3.11}$$

(i) Ο φ είναι *μονομορφισμός*. Εάν $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, τότε

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1(x_1) = j_1(i_1(x_1)) = j_1(i_1(x_1) + i_2(x_2)) = j_1(\varphi(x_1, x_2)) = j_1(0_L) = 0_{M_1'} \\ k_2(x_2) = j_2(i_2(x_2)) = j_2(i_1(x_1) + i_2(x_2)) = j_2(\varphi(x_1, x_2)) = j_2(0_L) = 0_{M_2'} \end{array} \right\}$$

και επειδή οι k_1, k_2 είναι ισομορφισμοί, $(x_1, x_2) = (0_{M_1}, 0_{M_2})$.
(ii) Ο φ είναι *επιμορφισμός*. Έστω τυχόν στοιχείο $x \in L$. Θέτοντας

$$x_1 := k_1^{-1}(j_1(x)),\ x_2 := k_2^{-1}(j_2(x)),\ y := \varphi(x_1, x_2) - x = i_1(x_1) + i_2(x_2) - x,$$

παρατηρούμε ότι $(x_1, x_2) \in M_1 \oplus M_2$ και ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} j_1(y) = j_1(i_1(x_1) + i_2(x_2) - x) = (j_1 \circ i_1)(x) - j_1(x) = k_1(x) - j_1(x) = 0_{M_1'} \\ j_2(y) = j_2(i_1(x_1) + i_2(x_2) - x) = (j_2 \circ i_2)(x) - j_2(x) = k_2(x) - j_2(x) = 0_{M_2'} \end{array} \right\},$$

οπότε $y \in \mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) \underset{(3.11)}{=} \{0_L\} \Rightarrow \varphi(x_1, x_2) = x$.

(iii) Ο ψ είναι *μονομορφισμός*. Εάν $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$, τότε

$$(0_{M_1'}, 0_{M_2'}) = \psi(x) = (j_1(x), j_2(x)) \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) \underset{(3.11)}{=} \{0_L\}.$$

(iv) Ο ψ είναι *επιμορφισμός*. Θεωρούμε τυχόν ζεύγος $(z_1, z_2) \in M_1' \times M_2'$. Θέτοντας $x := i_1(k_1^{-1}(z_1)) + i_2(k_2^{-1}(z_2))$ λαμβάνουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} j_1(x) = j_1(i_1(k_1^{-1}(z_1)) + i_2(k_2^{-1}(z_2))) = (j_1 \circ i_1)(k_1^{-1}(z_1)) = z_1 \\ j_2(x) = j_2(i_1(k_1^{-1}(z_1)) + i_2(k_2^{-1}(z_2))) = (j_2 \circ i_2)(k_2^{-1}(z_2)) = z_2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \psi(x) = (z_1, z_2).$$

(v) $\psi \circ \varphi = k_1 \times k_2$. Προφανώς, για κάθε $(x_1, x_2) \in M_1 \oplus M_2$,

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(x_1, x_2)) &= (j_1(i_1(x_1) + i_2(x_2)), j_2(i_1(x_1) + i_2(x_2))) \\ &= ((j_1 \circ i_1)(x_1), (j_2 \circ i_2)(x_2)) = (k_1(x_1), k_2(x_2)) = (k_1 \times k_2)(x_1, x_2). \end{aligned}$$

(vi) Για *κάθε* $x \in L$ το $j_1((\mathrm{id}_L - i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 - i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2)(x))$ ισούται με

$$j_1(x) - (\underbrace{j_1 \circ i_1}_{=k_1} \circ k_1^{-1} \circ j_1)(x) - (\underbrace{j_1 \circ i_2}_{=0} \circ k_2^{-1} \circ j_2)(x) = j_1(x) - j_1(x) = 0_{M_1'}$$

και κατ' αναλογίαν $j_2((\mathrm{id}_L - i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 - i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2)(x)) = 0_{M_2'}$. Άρα

$$(\mathrm{id}_L - i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 - i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2)(x) \in \mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) \underset{(3.11)}{=} \{0_L\}.$$

και η (3.10) είναι αληθής. □

3.1.24 Λήμμα («Λημμα τού εξαγώνου», [62], I.15.1, σελ. 38). *Εάν δοθεί ένα «εξαγωνικό» διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\begin{tikzcd}
& & M_0' \arrow[dll, "\beta_1"'] \arrow[drr, "\beta_2"] \arrow[dd, "i_0"] & & \\
M_1' & & & & M_2' \\
& & L \arrow[ull, "j_1"] \arrow[urr, "j_2"'] \arrow[dd, "j_0"] & & \\
M_1 \arrow[uu, "k_1", "\cong"'] \arrow[urr, "i_1"] \arrow[drr, "\alpha_1"'] & & & & M_2 \arrow[uu, "k_2"', "\cong"] \arrow[ull, "i_2"'] \arrow[dll, "\alpha_2"] \\
& & M_0 & &
\end{tikzcd}$$

στο οποίο κάθε τρίγωνο είναι μεταθετικό[10], *οι* $M_1 \xrightarrow{i_1} L \xrightarrow{j_2} M_2'$, $M_2 \xrightarrow{i_2} L \xrightarrow{j_1} M_1'$ *είναι ακριβείς και οι* k_1, k_2 *ισομορφισμοί, τότε ισχύουν τα εξής*:

(i) $\mathrm{Ker}(j_1) \cap \mathrm{Ker}(j_2) = \{0_L\}$,

(ii) $L = \mathrm{Im}\,(i_1) \oplus \mathrm{Im}\,(i_2)$, και

(iii) $\alpha_1 \circ k_1^{-1} \circ \beta_1 + \alpha_2 \circ k_2^{-1} \circ \beta_2 = j_0 \circ i_0$. Ιδιαιτέρως, ισχύει η συνεπαγωγή

$$j_0 \circ i_0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \circ k_1^{-1} \circ \beta_1 = -\alpha_2 \circ k_2^{-1} \circ \beta_2.$$

Απόδειξη. Το (i) είναι προφανές (βάσει των προαναφερθέντων στην αρχή τής αποδείξεως τού λήμματος 3.1.23), ενώ το (ii) έπεται από την (3.11) καθώς έχουμε (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Ker}(j_1) = \mathrm{Im}(i_2)$. Για την απόδειξη τού (iii) εφαρμόζουμε την (3.10) στο στοιχείο $i_0(x)$ *για κάθε* $x \in M_0'$ και λαμβάνουμε

$$i_0(x) = (i_1 \circ k_1^{-1} \circ j_1 + i_2 \circ k_2^{-1} \circ j_2)(i_0(x)) = (i_1 \circ k_1^{-1} \circ \underbrace{j_1 \circ i_0}_{=\beta_1} + i_2 \circ k_2^{-1} \circ \underbrace{j_2 \circ i_0}_{=\beta_2})(x)$$

$$\Rightarrow (j_0 \circ i_0)(x) = j_0(i_0(x)) = j_0((i_1 \circ k_1^{-1} \circ \beta_1 + i_2 \circ k_2^{-1} \circ \beta_2)(x))$$
$$= (\underbrace{j_0 \circ i_1}_{=\alpha_1} \circ k_1^{-1} \circ \beta_1 + \underbrace{j_0 \circ i_2}_{=\alpha_2} \circ k_2^{-1} \circ \beta_2)(x) = (\alpha_1 \circ k_1^{-1} \circ \beta_1 + \alpha_2 \circ k_2^{-1} \circ \beta_2)(x),$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι όντως αληθής. □

3.1.25 Λήμμα (M.G. Barratt και J.H.C. Whitehead[11], 1956). *Για οιοδήποτε (κλιμακωτό) μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων (απείρως εκτεινόμενο προς τα δεξιά και προς τα αριστερά) τής μορφής*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "h_{n+1}"] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\alpha_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\beta_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[d, "\gamma_n", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "h'_{n+1}"'] & A'_n \arrow[r, "f'_n"'] & B'_n \arrow[r, "g'_n"'] & C'_n \arrow[r, "h'_n"'] & A'_{n-1} \arrow[r, "f'_{n-1}"'] & B'_{n-1} \arrow[r, "g'_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς και τον γ_n ισομορφισμό, $\forall n \in \mathbb{Z}$, υφίσταται μια ακριβής ακολουθία

$$\boxed{\cdots \xrightarrow{\mathfrak{D}_{n+1}} A_n \xrightarrow{\psi_n} A'_n \oplus B_n \xrightarrow{\varphi_n} B'_n \xrightarrow{\mathfrak{D}_n} A_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \cdots}$$

όπου $\mathfrak{D}_n := h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ g'_n$ *και* $A_n \ni x \longmapsto \psi_n(x) := (\alpha_n(x), f_n(x)) \in A'_n \oplus B_n$,

$$A'_n \oplus B_n \ni (x,y) \longmapsto \varphi_n(x,y) := (f'_n \oplus (-\beta_n))(x,y) = f'_n(x) - \beta_n(y) \in B'_n.$$

Απόδειξη. Σε έξι βήματα, μέσω κυνηγητού στο διάγραμμα.

(i) $\psi_n \circ \mathfrak{D}_{n+1} = 0$. Επειδή $f_n \circ \mathfrak{D}_{n+1} = \underbrace{f_n \circ h_{n+1}}_{=0} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1} = 0$ και

$$\alpha_n \circ \mathfrak{D}_{n+1} = \underbrace{\alpha_n \circ h_{n+1}}_{=h'_{n+1} \circ \gamma_{n+1}} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1} = h'_{n+1} \circ g'_{n+1} = 0,$$

συμπεραίνουμε ότι $\psi_n \circ \mathfrak{D}_{n+1} = 0$.

---

[10]Προσοχή! Το εν λόγω διάγραμμα ναι μεν έχει *όλα* τα τρίγωνά του μεταθετικά, αλλά δεν είναι *καθ' ολοκληρίαν* μεταθετικό (όπως δείχνει η σχέση στο (iii)).

[11]Βλ. M.G. Barratt & J.H.C. Whitehead:: *The first nonvanishing of an (n+1)-ad*, Proceedings of the London Mathematical Society **6** (1956), 417-439.

(ii) $\mathrm{Ker}(\psi_n) \subseteq \mathrm{Im}(\mathfrak{D}_{n+1})$. Εάν $x \in \mathrm{Ker}(\psi_n)$, τότε $x \in \mathrm{Ker}(\alpha_n) \cap \mathrm{Ker}(f_n)$. Και επειδή (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Ker}(f_n) = \mathrm{Im}(h_{n+1})$, υπάρχει κάποιο $z \in C_{n+1}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $x = h_{n+1}(z)$. Επιπροσθέτως, επειδή $\mathrm{Im}(\gamma_{n+1}^{-1}) = C_{n+1}$, υπάρχει $z' \in C'_{n+1}$, τέτοιο ώστε $z = \gamma_{n+1}^{-1}(z')$. Ως εκ τούτου,

$$
\begin{aligned}
&0_{A'_n} = \alpha_n(x) = (\underbrace{\alpha_n \circ h_{n+1}}_{=h'_{n+1}\circ\gamma_{n+1}} \circ \gamma_{n+1}^{-1})(z') = h'_{n+1}(z') \\
&\Rightarrow z' \in \mathrm{Ker}(h'_{n+1}) = \mathrm{Im}(g'_{n+1}) \Rightarrow [\exists w \in B'_{n+1} : z' = g'_{n+1}(w)] \\
&\Rightarrow x = h_{n+1}(z) = (h_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1})(w) = \mathfrak{D}_{n+1}(w) \in \mathrm{Im}(\mathfrak{D}_{n+1}).
\end{aligned}
$$

(iii) $\varphi_n \circ \psi_n = 0$. Για κάθε $x \in A_n$ έχουμε $\varphi_n(\psi_n(x)) = \varphi_n(\alpha_n(x), f_n(x))$, οπότε

$$
\varphi_n(\psi_n(x)) \quad = \quad f'_n(\alpha_n(x)) - \beta_n(f_n(x)) = (\underbrace{f'_n \circ \alpha_n - \beta_n \circ f_n}_{=0})(x) = 0_{A_n}.
$$

(iv) $\mathrm{Ker}(\varphi_n) \subseteq \mathrm{Im}(\psi_n)$. Έστω τυχόν στοιχείο $(x, y) \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$. Προφανώς,

$$
\begin{aligned}
&f'_n(x) = \beta_n(y) \Rightarrow 0_{C'_n} = g'_n(f'_n(x)) = g'_n(\beta_n(y)) = \gamma_n(g_n(y)) \\
&\Rightarrow g_n(y) \in \mathrm{Ker}(\gamma_n) = \{0_{C_n}\} \Rightarrow g_n(y) = 0_{C_n} \\
&\Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Im}(f_n) \Rightarrow [\exists z \in A_n : y = f_n(z)] \\
&\Rightarrow f'_n(x) = \beta_n(f_n(z)) = f'_n(\alpha_n(z)) \Rightarrow x - \alpha_n(z) \in \mathrm{Ker}(f'_n) = \mathrm{Im}(h'_{n+1}) \\
&\Rightarrow [\exists w \in C'_{n+1} : x - \alpha_n(z) = h'_{n+1}(w)].
\end{aligned}
$$

Επειδή $\mathrm{Im}(\gamma_{n+1}) = C'_{n+1}$,

$$
[\exists u \in C_{n+1} : w = \gamma_{n+1}(u)] \Rightarrow h'_{n+1}(w) = h'_{n+1}(\gamma_{n+1}(u)) = \alpha_n(h_{n+1}(u)),
$$

οπότε

$$
\left.\begin{aligned}
x = \alpha_n(z + h_{n+1}(u)) \\
f_n \circ h_{n+1} = 0 \Rightarrow y = f_n(z) = f_n(z + h_{n+1}(u))
\end{aligned}\right\} \Rightarrow (x, y) \in \mathrm{Im}(\psi_n).
$$

(v) $\mathfrak{D}_n \circ \varphi_n = 0$. Για κάθε $(x, y) \in A'_n \oplus B_n$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{D}_n(\varphi_n(x, y)) = \mathfrak{D}_n(f'_n(x) - \beta_n(y)) = \mathfrak{D}_n(f'_n(x)) - \mathfrak{D}_n(\beta_n(y)) \\
&= (h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ \underbrace{g'_n \circ f'_n}_{=0})(x) - (h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ \underbrace{g'_n \circ \beta_n}_{=\gamma_n \circ g_n})(y) = \underbrace{h_n \circ g_n}_{=0}(y) = 0_{A_{n-1}}.
\end{aligned}
$$

(vi) $\mathrm{Ker}(\mathfrak{D}_n) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi_n)$. Εάν $x \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{D}_n)$, τότε

$$
\begin{aligned}
&h_n(\gamma_n^{-1}(g'_n(x))) = 0_{A_{n-1}} \Rightarrow \gamma_n^{-1}(g'_n(x)) \in \mathrm{Ker}(h_n) = \mathrm{Im}(g_n) \\
&\Rightarrow [\exists y \in B_n : \gamma_n^{-1}(g'_n(x)) = g_n(y)] \Rightarrow g'_n(x) = (\gamma_n \circ g_n)(y) = (g'_n \circ \beta_n)(y) \\
&\Rightarrow x - \beta_n(y) \in \mathrm{Ker}(g'_n) = \mathrm{Im}(f'_n) \Rightarrow [\exists w \in A'_n : x - \beta_n(y) = f'_n(w)],
\end{aligned}
$$

οπότε $x = \beta_n(y) + f'_n(w) = f'_n(w) - \beta_n(-y) = \varphi_n(w, -y) \in \mathrm{Im}(\varphi_n)$. $\square$

3.1.26 Θεώρημα (1η αλγεβρική εκδοχή τού θεωρήματος των Mayer και Vietoris). *Δοθέντος ενός διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων (απείρως εκτεινομένου προς τα άνω και προς τα κάτω) τής μορφής*

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "h_{n+1}"] & \\
{} \arrow[r, "s'_{n+1}"] & A_n \arrow[dl, "\alpha_n"'] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, "\alpha'_n"] & {} \arrow[l, "s_{n+1}"'] \\
Y_n \arrow[dr, "\beta_n"'] \arrow[dddd, bend right=60, "\gamma_n"'] & & Y'_n \arrow[dl, "\beta'_n"] \arrow[dddd, bend left=60, "\gamma'_n"] \\
 & B_n \arrow[dl, "l_n"'] \arrow[d, "g_n"] \arrow[dr, "l'_n"] & \\
Z_n & & Z'_n \\
 & C_n \arrow[ul, "j_n"] \arrow[ur, "j'_n"'] \arrow[dd, "h_n"] & \\
U_n \arrow[uu, "k_n", "\cong"'] \arrow[ur, "i_n"'] \arrow[dr, "s_n"'] & & U'_n \arrow[uu, "k'_n"', "\cong"] \arrow[ul, "i'_n"] \arrow[dl, "s'_n"] \\
 & A_{n-1} \arrow[dl, "\alpha'_{n-1}"'] \arrow[dd, "f_{n-1}"] \arrow[dr, "\alpha_{n-1}"] & \\
Y'_{n-1} & & Y_{n-1} \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}$$

με τους k_n, k'_n ισομορφισμούς, όλα τα τρίγωνά του μεταθετικά, $g_n \circ \beta_n = i_n \circ \gamma_n$, $g_n \circ \beta'_n = i'_n \circ \gamma'_n$, και με την ακολουθία την ευρισκομένη στην κατακόρυφη (κεντρική) γραμμή του, τις ακολουθίες

$$\cdots \xrightarrow{s_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} Y_n \xrightarrow{\gamma_n} U_n \xrightarrow{s_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} Y_{n-1} \xrightarrow{\gamma_{n-1}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{s'_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha'_n} Y'_n \xrightarrow{\gamma'_n} U'_n \xrightarrow{s'_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha'_{n-1}} Y'_{n-1} \xrightarrow{\gamma'_{n-1}} \cdots$$

τις ευρισκόμενες στο πλευρικό του περίγραμμα, καθώς και τις ακολουθίες (τριών όρων)

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{j'_n} Z'_n, \\ U'_n \xrightarrow{i'_n} C_n \xrightarrow{j_n} Z_n, \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_n \xrightarrow{\beta_n} B_n \xrightarrow{l'_n} Z'_n, \\ Y'_n \xrightarrow{\beta'_n} B_n \xrightarrow{l_n} Z_n, \end{array} \right\}$$

ακριβείς, υφίσταται μια ακριβής ακολουθία

$$\boxed{\cdots \xrightarrow{\mathfrak{D}_{n+1}} A_n \xrightarrow{\psi_n} Y'_n \oplus Y_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\mathfrak{D}_n} A_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \cdots,} \tag{3.12}$$

όπου

$$\left\{ \begin{array}{c} A_n \ni x \longmapsto \psi_n(x) := (\alpha'_n(x), \alpha_n(x)) \in Y'_n \oplus Y_n, \\ Y'_n \oplus Y_n \ni (x,y) \longmapsto \varphi_n(x,y) := (\beta'_n \oplus (-\beta_n))(x,y) = \beta'_n(x) - \beta_n(y) \in B_n, \end{array} \right\}$$

και $\mathfrak{D}_n := s_n \circ k_n^{-1} \circ l_n$, *καθώς και μια ακριβής ακολουθία*

$$\boxed{\cdots \xrightarrow{\mathfrak{D}'_{n+1}} A_n \xrightarrow{\psi'_n} Y_n \oplus Y'_n \xrightarrow{\varphi'_n} B_n \xrightarrow{\mathfrak{D}'_n} A_{n-1} \xrightarrow{\psi'_{n-1}} \cdots,} \tag{3.13}$$

όπου

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n \ni x \longmapsto \psi'_n(x) := (\alpha_n(x), \alpha'_n(x)) \in Y_n \oplus Y'_n, \\ Y_n \oplus Y'_n \ni (x,y) \longmapsto \varphi'_n(x,y) := (\beta_n \oplus (-\beta'_n))(x,y) = \beta_n(x) - \beta'_n(y) \in B_n, \end{array} \right\}$$

και $\mathfrak{D}'_n := s'_n \circ k'^{-1}_n \circ l'_n = -\mathfrak{D}_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$g_n \circ \beta_n = i_n \circ \gamma_n \Rightarrow k_n \circ \gamma_n = j_n \circ i_n \circ \gamma_n = j_n \circ g_n \circ \beta_n = l_n \circ \beta_n$$

και (κατ' αναλογίαν) $k'_n \circ \gamma'_n = l'_n \circ \beta'_n$. Το κλιμακωτό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\alpha'_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_n \arrow[r, "\gamma_n"] \arrow[d, "\beta_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U_n \arrow[r, "s_n"] \arrow[d, "k_n"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{n-1} \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha'_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_{n-1} \arrow[r, "\gamma_{n-1}"] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y'_n \arrow[r, "\beta'_n"'] & B_n \arrow[r, "l_n"'] & Z_n \arrow[r, "\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1}"'] & Y'_{n-1} \arrow[r, "\beta'_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[r, "l_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι (εκ κατασκευής) μεταθετικό με την άνω γραμμή του ακριβή. Θα αποδείξουμε ότι η κάτω του γραμμή είναι ωσαύτως ακριβής.

(i) *Ακρίβεια στη θέση* B_n. Προφανώς, $l_n \circ \beta'_n = j_n \circ i'_n \circ \gamma'_n = 0$ (αφού εξ υποθέσεως $j_n \circ i'_n = 0$). Επίσης, για οιοδήποτε $x \in \operatorname{Ker}(l_n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
& 0_{Z_n} = l_n(x) = j_n(g_n(x)) \Rightarrow g_n(x) \in \operatorname{Ker}(j_n) = \operatorname{Im}(i'_n) \\
& \Rightarrow [\exists y \in U'_n : g_n(x) = i'_n(y)] \Rightarrow 0_{A_{n-1}} = h_n(g_n(x)) = h_n(i'_n(y)) = s'_n(y) \\
& \Rightarrow y \in \operatorname{Ker}(s'_n) = \operatorname{Im}(\gamma'_n) \Rightarrow [\exists z \in Y'_n : y = \gamma'_n(z) = (k'^{-1}_n \circ l'_n \circ \beta'_n)(z)] \\
& \Rightarrow g_n(x) = i'_n(y) = (i'_n \circ k'^{-1}_n \circ l'_n \circ \beta'_n)(z) = ((i'_n \circ k'^{-1}_n \circ j'_n) \circ g_n \circ \beta'_n)(z).
\end{aligned}$$

Από το λήμμα 3.1.23 γνωρίζουμε ότι $i'_n \circ k'^{-1}_n \circ j'_n = \mathrm{id}_{C_n} - i_n \circ k_n^{-1} \circ j_n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
& (i'_n \circ k'^{-1}_n \circ j'_n) \circ g_n \circ \beta'_n = (\mathrm{id}_{C_n} - i_n \circ k_n^{-1} \circ j_n) \circ g_n \circ \beta'_n \\
& = g_n \circ \beta'_n - i_n \circ k_n^{-1} \circ \underbrace{j_n \circ g_n}_{= l_n} \circ \beta'_n = g_n \circ \beta'_n - i_n \circ k_n^{-1} \circ \underbrace{l_n \circ \beta'_n}_{=0} = g_n \circ \beta'_n
\end{aligned}$$

και, κατ' επέκταση, $g_n(x) = g_n(\beta'_n(z)) \Rightarrow x - \beta'_n(z) \in \mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Im}(f_n)$, οπότε

$$[\exists w \in A_n : x - \beta'_n(z) = f_n(w) = \beta'_n(\alpha'_n(w))] \Rightarrow x = \beta'_n(z + \alpha'_n(w)) \in \mathrm{Im}(\beta'_n),$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Ker}(l_n) \subseteq \mathrm{Im}(\beta'_n)$.

(ii) *Ακρίβεια στη θέση* Z_n. Επειδή $s_n = h_n \circ i_n$ και $l_n = j_n \circ g_n$, έχουμε

$$(\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1}) \circ l_n = \alpha'_{n-1} \circ h_n \circ (i_n \circ k_n^{-1} \circ j_n) \circ g_n.$$

Από το λήμμα 3.1.23 γνωρίζουμε ότι $i_n \circ k_n^{-1} \circ j_n = \mathrm{id}_{C_n} - i'_n \circ k'^{-1}_n \circ j'_n$. Λόγω τής ακριβείας τής κατακόρυφης γραμμής και τού δεξιού περιγράμματος λαμβάνουμε

$$(\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1}) \circ l_n = \alpha'_{n-1} \circ \underbrace{h_n \circ g_n}_{=0} - \alpha'_{n-1} \circ \underbrace{h_n \circ i'_n}_{=s'_n} \circ k'^{-1}_n \circ j'_n = -\underbrace{\alpha'_{n-1} \circ s'_n}_{=0} \circ k'^{-1}_n \circ j'_n = 0.$$

Επίσης, εάν $x \in \mathrm{Ker}(\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1})$, τότε $0_{Y'_{n-1}} = \alpha'_{n-1}(s_n(k_n^{-1}(x)))$, οπότε

$$\begin{aligned}
& s_n(k_n^{-1}(x)) \in \mathrm{Ker}(\alpha'_{n-1}) = \mathrm{Im}(s'_n) \Rightarrow [\exists y \in U'_n : s_n(k_n^{-1}(x)) = s'_n(y)] \\
& \Rightarrow h_n(i_n(k_n^{-1}(x))) = s_n(k_n^{-1}(x)) = s'_n(y) = h_n(i'_n(y)) \\
& \Rightarrow i'_n(y) - i_n(k_n^{-1}(x)) \in \mathrm{Ker}(h_n) = \mathrm{Im}(g_n) \Rightarrow [\exists z \in B_n : i'_n(y) - i_n(k_n^{-1}(x)) = g_n(z)] \\
& x = (\underbrace{j_n \circ i'_n}_{=0})(y) - (\underbrace{j_n \circ i_n}_{=k_n} \circ k_n^{-1})(x) = j_n(i'_n(y) - i_n(k_n^{-1}(x))) = j_n(g_n(z)) = l_n(z) \\
& \Rightarrow x \in \mathrm{Im}(l_n) \Rightarrow \mathrm{Ker}(\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1}) \subseteq \mathrm{Im}(l_n).
\end{aligned}$$

(iii) *Ακρίβεια στη θέση* Y'_{n-1}. Προφανώς,

$$\beta'_{n-1} \circ \alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1} = f_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1} = \underbrace{f_{n-1} \circ h_n}_{=0} \circ i_n \circ k_n^{-1} = 0.$$

Επίσης, εάν $x \in \mathrm{Ker}(\beta'_{n-1})$, τότε $l'_{n-1}(\beta'_{n-1}(x)) = l'_{n-1}(0_{B_{n-1}}) = 0_{Z'_{n-1}}$, οπότε

$$k'_{n-1}(\gamma'_{n-1}(x)) = 0_{Z'_{n-1}} \Rightarrow \gamma'_{n-1}(x) \in \mathrm{Ker}(k'_{n-1}) = \{0_{U'_{n-1}}\}$$

και, ως εκ τούτου, $x \in \mathrm{Ker}(\gamma'_{n-1}) = \mathrm{Im}(\alpha'_{n-1}) \Rightarrow [\exists y \in A_{n-1} : x = \alpha'_{n-1}(y)]$. Επομένως,

$$0_{B_{n-1}} = \beta'_{n-1}(x) = \beta'_{n-1}(\alpha'_{n-1}(y)) = f_{n-1}(y) \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(f_{n-1}) = \mathrm{Im}(h_n) \Rightarrow [\exists z \in C_n : y = h_n(z)].$$

Από το λήμμα 3.1.23 γνωρίζουμε ότι $\mathrm{id}_{C_n} = i_n \circ k_n^{-1} \circ j_n + i'_n \circ k'^{-1}_n \circ j'_n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
& y = h_n(\mathrm{id}_{C_n}(z)) = h_n((i_n \circ k_n^{-1} \circ j_n + i'_n \circ k'^{-1}_n \circ j'_n)(z)) \\
& = (\underbrace{h_n \circ i_n}_{=s_n} \circ k_n^{-1} \circ j_n)(z) + (\underbrace{h_n \circ i'_n}_{=s'_n} \circ k'^{-1}_n \circ j'_n)(z) \\
& \Rightarrow x = \alpha'_{n-1}(y) = (\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1})(j_n(z)) + (\underbrace{\alpha'_{n-1} \circ s'_n}_{=0} \circ k'^{-1}_n)(j'_n(z)) \\
& \Rightarrow x = (\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1})(j_n(z)) \in \mathrm{Im}(\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1}),
\end{aligned}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Ker}(\beta'_{n-1}) \subseteq \mathrm{Im}(\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1})$. Λόγω των (i), (ii) και (iii) είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε το λήμμα 3.1.25 των Barratt και Whitehead.

Μέσω αυτού κατασκευάζουμε την ακριβή ακολουθία (3.12). Εν συνεχεία, εκτελώντας τή «συμμετρική» διαδικασία τής προηγηθείσας (με πρόδηλες εναλλαγές ρόλων σε ζεύγη γραμμάτων που δηλούν R-μοδίους και ομομορφισμούς R-μοδίων και εμφανίζονται *και* με *και* χωρίς τόνους) για το κλιμακωτό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\alpha'_n"] \arrow[d, "\alpha_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y'_n \arrow[r, "\gamma'_n"] \arrow[d, "\beta'_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U'_n \arrow[r, "s'_n"] \arrow[d, "k'_n"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{n-1} \arrow[r, "\alpha'_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y'_{n-1} \arrow[r, "\gamma'_{n-1}"] \arrow[d, "\beta'_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_n \arrow[r, "\beta_n"'] & B_n \arrow[r, "l'_n"'] & Z'_n \arrow[r, "\alpha_{n-1}\circ s'_n\circ k'^{-1}_n"'] & Y_{n-1} \arrow[r, "\beta_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[r, "l'_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ελέγχουμε την ακρίβεια τής κάτω του γραμμής και καταλήγουμε στην κατασκευή τής ακριβούς ακολουθίας (3.13). Τέλος, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ακριβεία τής ακολουθίας τής ευρισκομένης στην κατακόρυφη (κεντρική) γραμμή τού αρχικού διαγράμματος, συμπεραίνουμε από τη συνεπαγωγή στο (iii) τού λήμματος 3.1.24 (εφαρμοζόμενου για το εξάγωνο το καθοριζόμενο από τους R-μοδίους Z_n, B_n, Z'_n, U'_n, A_{n-1} και U_n) ότι $\mathfrak{D}'_n = -\mathfrak{D}_n, \forall n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Το μεγάλο διάγραμμα τού θεωρήματος 3.1.26 ανήκει σε μια κατηγορία διαγραμμάτων που είναι γνωστά ως *αλληλεμπλεκόμενες ακολουθίες* (interlocking sequences) ή ως *διαγράμματα πλεξιδίων* (braid diagrams). Ένα εξίσου χρήσιμο θεώρημα που αφορά σε τέτοιου είδους διαγράμματα (οφειλόμενο στον C.T.C. Wall[12]) είναι το εξής:

3.1.27 Θεώρημα (C.T.C. Wall, 1966). *Εάν δοθεί ένα μεταθετικό διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
D_{n+1} \arrow[rr, bend left, "\delta^{(1)}_{n+1}"] \arrow[dr, "i^{(2)}_{n+1}"'] & & A_n \arrow[rr, bend left, "i^{(3)}_n"] \arrow[dr, "i^{(1)}_n"'] & & B_n \arrow[rr, bend left, "j^{(4)}_n"] \arrow[dr, "j^{(3)}_n"'] & & C_n \arrow[rr, bend left, "\delta^{(2)}_n"] \arrow[dr, "\delta^{(4)}_n"'] & & D_{n-1} \\
\cdots & N_{n+1} \arrow[ur, "\delta^{(3)}_{n+1}"'] \arrow[dr, "j^{(2)}_{n+1}"] & & M_n \arrow[ur, "i^{(4)}_n"'] \arrow[dr, "j^{(1)}_n"] & & N_n \arrow[ur, "j^{(2)}_n"'] \arrow[dr, "\delta^{(3)}_n"] & & M_{n-1} \arrow[ur, "j^{(1)}_{n-1}"'] \arrow[dr, "i^{(4)}_{n-1}"] & \cdots \\
B_{n+1} \arrow[rr, bend right, "j^{(4)}_{n+1}"'] \arrow[ur, "j^{(3)}_{n+1}"] & & C_{n+1} \arrow[rr, bend right, "\delta^{(2)}_{n+1}"'] \arrow[ur, "\delta^{(4)}_{n+1}"] & & D_n \arrow[rr, bend right, "\delta^{(1)}_n"'] \arrow[ur, "i^{(2)}_n"] & & A_{n-1} \arrow[rr, bend right, "i^{(3)}_{n-1}"'] \arrow[ur, "i^{(1)}_{n-1}"] & & B_{n-1}
\end{tikzcd}$$

τεσσάρων αλληλοεμπλεκομένων ακολουθιών ομομορφισμών R-μοδίων

$$\cdots \xrightarrow{j^{(1)}_{n+1}} D_{n+1} \xrightarrow{\delta^{(1)}_{n+1}} A_n \xrightarrow{i^{(1)}_n} M_n \xrightarrow{j^{(1)}_n} D_n \xrightarrow{\delta^{(1)}_n} A_{n-1} \xrightarrow{i^{(1)}_{n-1}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{(2)}_{n+2}} D_{n+1} \xrightarrow{i^{(2)}_{n+1}} N_{n+1} \xrightarrow{j^{(2)}_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{\delta^{(2)}_{n+1}} D_n \xrightarrow{i^{(2)}_n} N_n \xrightarrow{j^{(2)}_n} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{i^{(3)}_{n+1}} B_{n+1} \xrightarrow{j^{(3)}_{n+1}} N_{n+1} \xrightarrow{\delta^{(3)}_{n+1}} A_n \xrightarrow{i^{(3)}_n} B_n \xrightarrow{j^{(3)}_n} N_n \xrightarrow{\delta^{(3)}_n} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{i^{(4)}_{n+1}} B_{n+1} \xrightarrow{j^{(4)}_{n+1}} C_{n+1} \xrightarrow{\delta^{(4)}_{n+1}} M_n \xrightarrow{i^{(4)}_n} B_n \xrightarrow{j^{(4)}_n} C_n \xrightarrow{\delta^{(4)}_n} \cdots$$

[12] Βλ. C.T.C. Wall: *On the exactness of interlocking sequences*, L' Enseignement Mathématique **12** (1966), 95-100.

(απείρως εκτεινόμενο προς τα δεξιά και προς τα αριστερά) και εάν υποτεθεί ότι η δεύτερη, η τρίτη και η τέταρτη εξ αυτών είναι ακριβείς, και ότι[13] $j_n^{(1)} \circ i_n^{(1)} = 0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$, *τότε και η πρώτη είναι κατ' ανάγκην ακριβής.*

Αποδειξη. *Και* αυτή η απόδειξη κάνει χρήση (αδυσώπητου) κυνηγητού στο διάγραμμα.

(i) *Ακρίβεια τής πρώτης ακολουθίας στη θέση* A_{n-1}. Προφανώς,

$$\begin{aligned} i_{n-1}^{(1)} \circ \delta_n^{(1)} &= i_{n-1}^{(1)} \circ (\delta_n^{(3)} \circ i_n^{(2)}) = (i_{n-1}^{(1)} \circ \delta_n^{(3)}) \circ i_n^{(2)} = (\delta_n^{(4)} \circ j_n^{(2)}) \circ i_n^{(2)} \\ &= \delta_n^{(4)} \circ \underbrace{(j_n^{(2)} \circ i_n^{(2)})}_{=0} = 0 \Longrightarrow \mathrm{Im}(\delta_n^{(1)}) \subseteq \mathrm{Ker}(i_{n-1}^{(1)}). \end{aligned}$$

Έστω τώρα *τυχόν* στοιχείο $y \in \mathrm{Ker}(i_{n-1}^{(1)})$. Από το δοθέν μεταθετικό διάγραμμα αλληλοεμπλεκομένων ακολουθιών ομομορφισμών R-μοδίων λαμβάνουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} & 0_{M_{n-1}} = i_{n-1}^{(1)}(y) \Longrightarrow 0_{B_{n-1}} = i_{n-1}^{(4)}(0_{M_{n-1}}) = i_{n-1}^{(4)}(i_{n-1}^{(1)}(y)) = i_{n-1}^{(3)}(y) \\ & \Longrightarrow y \in \mathrm{Ker}(i_{n-1}^{(3)}) = \mathrm{Im}(\delta_n^{(3)}) \Longrightarrow [\exists x \in N_n : y = \delta_n^{(3)}(x)] \\ & \Longrightarrow 0_{M_{n-1}} = i_{n-1}^{(1)}(y) = i_{n-1}^{(1)}(\delta_n^{(3)}(x)) = \delta_n^{(4)}(j_n^{(2)}(x)) \\ & \Rightarrow j_n^{(2)}(x) \in \mathrm{Ker}(i_{n-1}^{(3)}) = \mathrm{Im}(\delta_n^{(3)}) \Rightarrow [\exists z \in B_n : j_n^{(2)}(x) = j_n^{(4)}(z)]. \end{aligned}$$

Επειδή $j_n^{(4)} = j_n^{(2)} \circ j_n^{(3)}$, έχουμε $x - j_n^{(3)}(z) \in \mathrm{Ker}(j_n^{(2)}) = \mathrm{Im}(i_n^{(2)})$, οπότε υπάρχει κάποιο στοιχείο $w \in D_n$, τέτοιο ώστε να ισχύει $x - j_n^{(3)}(z) = i_n^{(2)}(w)$. Επομένως,

$$\delta_n^{(1)}(w) = \delta_n^{(3)}(i_n^{(2)}(w)) = \delta_n^{(3)}(x - j_n^{(3)}(z)) = \delta_n^{(3)}(x) - (\underbrace{\delta_n^{(3)} \circ j_n^{(3)}}_{=0})(z) = \delta_n^{(3)}(x) = y,$$

απ' όπου έπεται ότι $y \in \mathrm{Im}(\delta_n^{(1)})$. Κατά συνέπειαν, $\mathrm{Ker}(i_{n-1}^{(1)}) \subseteq \mathrm{Im}(\delta_n^{(1)})$.

(ii) *Ακρίβεια τής πρώτης ακολουθίας στη θέση* D_n. Προφανώς,

$$\begin{aligned} \delta_n^{(1)} \circ j_n^{(1)} &= (\delta_n^{(3)} \circ i_n^{(2)}) \circ j_n^{(1)} = \delta_n^{(3)} \circ (i_n^{(2)} \circ j_n^{(1)}) = \delta_n^{(3)} \circ (j_n^{(3)} \circ i_n^{(4)}) \\ &= (\underbrace{\delta_n^{(3)} \circ j_n^{(3)}}_{=0}) \circ i_n^{(4)} = 0 \Longrightarrow \mathrm{Im}(j_n^{(1)}) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta_n^{(1)}). \end{aligned}$$

Έστω τώρα *τυχόν* στοιχείο $y \in \mathrm{Ker}(\delta_n^{(1)})$. Από το δοθέν μεταθετικό διάγραμμα λαμβάνουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} & 0_{A_{n-1}} = \delta_n^{(1)}(y) = (\delta_n^{(3)} \circ i_n^{(2)})(y) \Longrightarrow i_n^{(2)}(y) \in \mathrm{Ker}(\delta_n^{(3)}) = \mathrm{Im}(j_n^{(3)}) \\ & \Longrightarrow [\exists x \in B_n : i_n^{(2)}(y) = j_n^{(3)}(x)] \Longrightarrow 0_{C_n} = j_n^{(2)}(i_n^{(2)}(y)) = j_n^{(2)}(j_n^{(3)}(x)) = j_n^{(4)}(x) \\ & \Longrightarrow x \in \mathrm{Ker}(j_n^{(4)}) = \mathrm{Im}(i_n^{(4)}) \Longrightarrow [\exists z \in M_n : x = i_n^{(4)}(z)] \\ & \Longrightarrow i_n^{(2)}(y) = j_n^{(3)}(x) = j_n^{(3)}(i_n^{(4)}(z)) = i_n^{(2)}(j_n^{(1)}(z)) \\ & \Longrightarrow y - j_n^{(1)}(z) \in \mathrm{Ker}(i_n^{(2)}) = \mathrm{Im}(j_n^{(1)}). \end{aligned}$$

[13] Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται όταν η πρώτη ακολουθία αποτελεί *αλυσωτό σύμπλοκο* (υπό την έννοια τού ορισμού 3.2.1).

Αυτό σημαίνει ότι $[y - j_n^{(1)}(z) \in \mathrm{Im}(j_n^{(1)})$ και $j_n^{(1)}(z) \in \mathrm{Im}(j_n^{(1)})] \Rightarrow y \in \mathrm{Im}(j_n^{(1)})$. Άρα ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathrm{Ker}(\delta_n^{(1)}) \subseteq \mathrm{Im}(j_n^{(1)})$.

(iii) *Ακρίβεια τής πρώτης ακολουθίας στη θέση M_n.* Εξ υποθέσεως,

$$j_n^{(1)} \circ i_n^{(1)} = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(i_n^{(1)}) \subseteq \mathrm{Ker}(j_n^{(1)}).$$

Θεωρούμε *τυχόν* στοιχείο $y \in \mathrm{Ker}(j_n^{(1)})$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} 0_{D_n} = j_n^{(1)}(y) &\Longrightarrow 0_{N_n} = i_n^{(2)}(0_{D_n}) = i_n^{(2)}(j_n^{(1)}(y)) = j_n^{(3)}(i_n^{(4)}(y)) \\ &\Longrightarrow i_n^{(4)}(y) \in \mathrm{Ker}(j_n^{(3)}) = \mathrm{Im}(i_n^{(3)}) \\ &\Longrightarrow [\exists x \in A_n : i_n^{(4)}(y) = i_n^{(3)}(x) = i_n^{(4)}(i_n^{(1)}(x))] \\ &\Longrightarrow y - i_n^{(1)}(x) \in \mathrm{Ker}(j_n^{(3)}) = \mathrm{Im}(\delta_{n+1}^{(4)}). \end{aligned}$$

Συνεπώς υπάρχει κάποιο $z \in C_{n+1}$ με $y - i_n^{(1)}(x) = \delta_{n+1}^{(4)}(z)$. Εξάλλου,

$$\delta_{n+1}^{(2)}(z) = j_n^{(1)}(\delta_{n+1}^{(4)}(z)) = j_n^{(1)}(y - i_n^{(1)}(x)) = \underbrace{j_n^{(1)}(y)}_{=0_{D_n}} - (\underbrace{j_n^{(1)} \circ i_n^{(1)}}_{=0})(x) = 0_{D_n},$$

οπότε $z \in \mathrm{Ker}(\delta_{n+1}^{(2)}) = \mathrm{Im}(j_{n+1}^{(2)}) \Rightarrow [\exists w \in N_{n+1} : z = j_{n+1}^{(2)}(w)]$. Επειδή

$$\begin{aligned} i_n^{(1)}(\delta_{n+1}^{(3)}(w) + x) &= (i_n^{(1)} \circ \delta_{n+1}^{(3)})(w) + i_n^{(1)}(x) = (\delta_{n+1}^{(4)} \circ j_{n+1}^{(2)})(w) + i_n^{(1)}(x) \\ &= \delta_{n+1}^{(4)}(z) + i_n^{(1)}(x) = (y - i_n^{(1)}(x)) + i_n^{(1)}(x) = y \Rightarrow y \in \mathrm{Im}(i_n^{(1)}), \end{aligned}$$

ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathrm{Ker}(j_n^{(1)}) \subseteq \mathrm{Im}(i_n^{(1)})$. □

▸ **Διασπώμενες βραχείες ακριβείς ακολουθίες**. Για οιουσδήποτε R-μοδίους A, C ορίζεται η βραχεία ακριβής ακολουθία $\{0\} \longrightarrow A \overset{\mathrm{in}_A}{\hookrightarrow} A \oplus C \overset{\mathrm{pr}_C}{\twoheadrightarrow} C \longrightarrow \{0\}$. Βραχείες ακριβείς ακολουθίες που τής «ομοιάζουν» με *προσέγγιση ισομορφισμού όρων* (κάτι που αποσαφηνίζεται μέσω τού θεωρήματος 3.1.29 που ακολουθεί) χαρακτηρίζονται ως *διασπώμενες*.

3.1.28 Ορισμός. Λέμε ότι μια ακριβής ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \xrightarrow{f_{n+2}} \cdots$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων **διασπάται στην n-οστή θέση** όταν ο M_n δεν είναι ληκτικός και όταν ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f_n)$ $(= \mathrm{Im}(f_{n-1}))$ είναι ευθύς προσθετέος τού M_n. (Βλ. 2.4.18 (ii).) Ιδιαιτέρως, λέμε ότι μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

είναι **διασπώμενη** όταν διασπάται στον κεντρικό της όρο[14] B.

[14]Προφανώς, στους όρους A και C αυτή διασπάται *πάντοτε*.

3.1.29 Θεώρημα. *Για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\} \tag{3.14}$$

οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:
(i) $\exists \beta \in \mathrm{Hom}_R(C,B) : g \circ \beta = \mathrm{id}_C$.
(ii) $\exists \alpha \in \mathrm{Hom}_R(B,A) : \alpha \circ f = \mathrm{id}_A$.
(iii) *Η* (3.14) *είναι διασπώμενη.*
Επιπροσθέτως, όταν η (3.14) *είναι διασπώμενη, με τους* β *και* α *όπως στα* (i) *και* (ii), *αντιστοίχως, τότε*[15]

$$A \oplus C \cong B = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(\beta),$$

όπου $f \circ \alpha + \beta \circ g = \mathrm{id}_B$ *και* $\alpha \circ \beta = 0$.

Απόδειξη. (i)⇒(iii) Έστω $\varphi : A \oplus C \longrightarrow B$ ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$\varphi(a,c) := (f \oplus \beta)(a,c) = f(a) + \beta(c),\ \forall (a,c) \in A \oplus C.$$

Τότε το ακόλουθο διάγραμμα (με ακριβείς γραμμές) είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, hook, "\mathrm{in}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & A \oplus C \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_C"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_C"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & \{0\} \arrow[d, equal] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
\{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "f"'] & B \arrow[r, two heads, "g"'] & C \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

καθώς ισχύει $\varphi(\mathrm{in}_A(a)) = \varphi((a, 0_C)) = f(a) = f(\mathrm{id}_A(a)), \forall a \in A$, και

$$g(\varphi(a,c)) = (\underbrace{g \circ f}_{=0})(a) + (\underbrace{g \circ \beta}_{=\mathrm{id}_C})(c) = c = (\mathrm{id}_C \circ\ \mathrm{pr}_C)(a,c)$$

για κάθε $(a,c) \in A \oplus C$. Επειδή οι ταυτοτικές απεικονίσεις id_A και id_C είναι ισομορφισμοί, *και* ο φ είναι κατ' ανάγκην ισομορφισμός. (Βλ. 3.1.9 (iii).) Έστω τυχόν στοιχείο $b \in B$. Προφανώς, υπάρχουν *μονοσημάντως ορισμένα* $a \in A$ και $c \in C$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$b = \varphi(a,c) = f(a) + \beta(c)$$

με $f(a) \in \mathrm{Im}(f) (= \mathrm{Ker}(g))$ και $\beta(c) \in \mathrm{Im}(\beta)$. Άρα $B = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(\beta)$.

[15] Εν τοιαύτη περιπτώσει, *κάθε* $y \in B$ γράφεται υπό τη μορφή $y = f(x) + z$, όπου $x \in A$ και $z \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ είναι *μονοσημάντως ορισμένα*. Μάλιστα, επειδή $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$, το z ανήκει κατ' ανάγκην στην εικόνα τού β, οπότε $z = \beta(w)$, για κάποιο $w \in C$. Επομένως,

$$(f \circ \alpha + \beta \circ g)(y) = f((\underbrace{\alpha \circ f}_{=\mathrm{id}_A})(x) + \alpha(z)) + \beta((\underbrace{g \circ f}_{=0})(x) + (\underbrace{g \circ \beta}_{=\mathrm{id}_C})(w)) = f(x) + z = y$$

και $\underbrace{\alpha \circ f}_{=\mathrm{id}_A} \circ \alpha + \alpha \circ \beta \circ g = \alpha \Rightarrow \alpha \circ \beta \circ g = 0 \Rightarrow (\alpha \circ \beta)|_{\mathrm{Im}(g)} = 0$, όπου $\mathrm{Im}(g) = C$.

(iii)⇒(i) Εάν υποτεθεί ότι η (3.14) είναι διασπώμενη, τότε $B = \mathrm{Ker}(g) \oplus D$, για κάποιον υπομόδιο D τού B. Επομένως κάθε $b \in B$ γράφεται *μονοσημάντως* ως άθροισμα $b = y+d$, όπου $y \in \mathrm{Ker}(g)$ και $d \in D$. Επειδή ο ομομορφισμός $g : B \longrightarrow C$ είναι επιμορφισμός και $g(b) = g(d)$, ο $g|_D : D \longrightarrow C$ είναι ωσαύτως επιμορφισμός. Όμως ο $g|_D$ είναι *και* μονομορφισμός, διότι

$$\mathrm{Ker}(g|_D) = \mathrm{Ker}(g) \cap D = \{0_B\}.$$

Άρα ο $g|_D$ είναι ισομορφισμός. Αρκεί λοιπόν να τεθεί $\beta(c) := (g|_D)^{-1}(c)$ για κάθε $c \in C$.

(ii)⇒(iii) Έστω $\psi : B \longrightarrow A \oplus C$ ο ομομορφισμός R-μοδίων ο οριζόμενος μέσω τού τύπου $\psi(b) := \alpha(b) + g(b)$ για κάθε $b \in B$. Το ακόλουθο διάγραμμα (με ακριβείς γραμμές) είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\psi"'] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_C"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & \{0\} \arrow[d, equal] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \\
\{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "\mathrm{in}_A"'] & A \oplus C \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_C"'] & C \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Επειδή οι ταυτοτικές απεικονίσεις id_A και id_C είναι ισομορφισμοί, *και* ο ψ είναι κατ' ανάγκην ισομορφισμός. (Βλ. 3.1.9 (iii).). Έστω τώρα τυχόν $b \in B$. Αυτό γράφεται ως

$$b = \underbrace{f(\alpha(b))}_{\in \mathrm{Im}(f)} + (\underbrace{b - f(\alpha(b))}_{\in \mathrm{Ker}(\alpha)}),$$

διότι $\alpha(b - f(\alpha(b))) = \alpha(b) - (\underbrace{\alpha \circ f}_{= \mathrm{id}_A})(\alpha(b)) = 0_B$. Άρα $B = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(\alpha)$. Εξάλλου, εάν $y \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(\alpha)$, τότε υπάρχει κάποιο $x \in A$ με $y = f(x)$, οπότε

$$0_A = \alpha(y) = (\underbrace{\alpha \circ f}_{= \mathrm{id}_A})(x) = x$$

και $y = f(0_A) = 0_B$, απ' όπου έπεται ότι

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(\alpha) = \{0_B\} \Rightarrow B = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(\alpha).$$

(iii)⇒(ii) Εάν υποτεθεί ότι η (3.14) είναι διασπώμενη, τότε $B = \mathrm{Im}(f) \oplus E$, για κάποιον υπομόδιο E τού B. Επομένως κάθε $b \in B$ γράφεται *μονοσημάντως* ως άθροισμα $b = y + e$, όπου $y \in \mathrm{Im}(f)$ και $e \in E$. Επειδή ο f είναι μονομορφισμός, η ίνα $f^{-1}(\{y\})$ αυτού υπεράνω τού στοιχείου y είναι ένα μονοσύνολο, ας πούμε το $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$. Ορίζοντας λοιπόν την απεικόνιση $\alpha : B \longrightarrow A$ μέσω τού τύπου

$$\alpha(b) = \alpha(y+e) := x,$$

παρατηρούμε ότι αυτή αποτελεί ομομορφισμό R-μοδίων και για κάθε $a \in A$ ισχύει

$$\alpha(f(a)) = f^{-1}(\{f(a)\}) = a.$$

Κατά συνέπειαν, $\alpha \circ f = \mathrm{id}_A$. □

3.1.30 Παραδείγματα. (i) Η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}$$

η κατασκευασθείσα στο εδ. 3.1.3 (iv) δεν είναι διασπώμενη, διότι η f δεν διαθέτει κανέναν ομομορφισμό $\mathbb{Z}$-μοδίων ως αριστερό αντίστροφό της. (Βλ. 2.2.21 (i).)

(ii) Παρατηρούμε ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \langle \mathsf{X} \rangle \overset{\iota}{\hookrightarrow} K[\mathsf{X}] \xrightarrow{g} K \longrightarrow \{0\}\,,$$

(η ορισθείσα στο (vi) τού εδαφίου 3.1.3) είναι διασπώμενη ως ακολουθία ομομορφισμών K-μοδίων (ήτοι K-διανυσματικών χώρων), διότι η απεικόνιση

$$\alpha : K[\mathsf{X}] \longrightarrow \langle \mathsf{X} \rangle, \quad \sum_{j=0}^{\nu} \lambda_j \mathsf{X}^j \longmapsto \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j \mathsf{X}^j,$$

είναι ομομορφισμός K-διανυσματικών χώρων με $\alpha \circ \iota = \mathrm{id}_{\langle \mathsf{X} \rangle}$. Ωστόσο, *η ίδια* βραχεία ακριβής ακολουθία, θεωρούμενη ως ακολουθία ομομορφισμών $K[\mathsf{X}]$-μοδίων, *δεν είναι διασπώμενη*. Πράγματι· εάν υπήρχε κάποιος $\alpha \in \mathrm{Hom}_{K[\mathsf{X}]}(K[\mathsf{X}], \langle \mathsf{X} \rangle)$ με

$$\alpha \circ \iota = \mathrm{id}_{\langle \mathsf{X} \rangle}$$

(ή, ισοδυνάμως, με $\alpha|_{\langle \mathsf{X} \rangle} = \mathrm{id}_{\langle \mathsf{X} \rangle}$), τότε η εικόνα τού 1_K $(= \mathsf{X}^0)$ μέσω τού α θα εγράφετο υπό τη μορφή $\alpha(1_K) = \mathsf{X}\,\varphi(\mathsf{X})$ για κατάλληλο $\varphi(\mathsf{X}) \in K[\mathsf{X}]$ και θα ίσχυε

$$\mathsf{X} = \alpha(\mathsf{X}) = \alpha(\mathsf{X}\,1_K) = \mathsf{X}\,\alpha(1_K) = \mathsf{X}^2\,\varphi(\mathsf{X}),$$

ήτοι κάτι που είναι αδύνατο.

3.1.31 Πόρισμα. *Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}\,, \tag{3.15}$$

όπου C ένας ελεύθερος R-μόδιος, είναι διασπώμενη.

Αποδειξη. Έστω $(c_j)_{j \in J}$ μια βάση τού C. Επειδή ο g είναι επιμορφισμός, υπάρχει $b_j \in B$, τέτοιο ώστε $g(b_j) = c_j$ για κάθε $j \in J$. Εάν επί τού συνόλου των στοιχείων τής θεωρηθείσας βάσεως ορίσουμε την απεικόνιση φ θέτοντας $\varphi(c_j) := b_j$, $\forall\, j \in J$, και κατόπιν (μέσω τού θεωρήματος 2.5.20) την επεκτείνουμε γραμμικώς, κατασκευάζουμε έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$\beta : C \longrightarrow B \;\text{ με }\; \beta|_{(c_j)_{j \in J}} = \varphi \;\text{ και }\; g \circ \beta = \mathrm{id}_C.$$

Άρα οιαδήποτε βραχεία ακριβής ακολουθία (3.15) αυτού τού είδους διασπάται στον όρο B λόγω τού θεωρήματος 3.1.29. $\square$

3.2 (ΣΥΝ)ΑΛΥΣΩΤΑ ΣΥΜΠΛΟΚΑ ΚΑΙ ΜΟΔΙΟΙ (ΣΥΝ)ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

Έστω

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots \tag{3.16}$$

μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων με κατιόν σύνολο δεικτών. Ως γνωστόν, η (3.16) είναι ακριβής εάν και μόνον εάν

$$[d_n \circ d_{n+1} = 0 \;\text{ και }\; \mathrm{Ker}(d_n) \subseteq \mathrm{Im}(d_{n+1})], \;\forall n \in \mathbb{Z}.$$

Η έννοια τού *αλυσωτού συμπλόκου* γενικεύει την έννοια τής ακριβούς ακολουθίας ως εξής:

3.2.1 Ορισμός. Μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής (3.16) καλείται **αλυσωτό σύμπλοκο** (ή **ημιακριβής ακολουθία με κατιόν σύνολο δεικτών**) όταν $d_n \circ d_{n+1} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Για ένα αλυσωτό σύμπλοκο (3.16) εισάγεται η συντομογραφία: $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Οι ομομορφισμοί $d_n^{\mathbf{M}_\bullet} := d_n$, $n \in \mathbb{Z}$, καλούνται ενίοτε **συνοριακοί τελεστές** ή **διαφορικά** τού αλυσωτού συμπλόκου (που είναι όροι κληρονομηθέντες από την κλασική Συνδυαστική Τοπολογία). Στην ειδική περίπτωση όπου οι M_n είναι τετριμμένοι και $d_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, το $\mathbf{M}_\bullet$ συμβολίζεται απλώς ως $\mathbf{0}_\bullet$.

3.2.2 Ορισμός. Έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο τής μορφής (3.16). Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ θέτουμε

$$\boxed{B_n(\mathbf{M}_\bullet) := \mathrm{Im}(d_{n+1})} \quad \text{και} \quad \boxed{Z_n(\mathbf{M}_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n).}$$

Προφανώς, αμφότεροι οι $B_n(\mathbf{M}_\bullet)$ και $Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι υπομόδιοι τού R-μοδίου M_n και $B_n(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$. Τα στοιχεία τού $B_n(\mathbf{M}_\bullet)$ καλούνται n-**οστά σύνορα** και τα στοιχεία τού $Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ n-**οστά κυκλήματα**[16] τού αλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{M}_\bullet$. Ο πηλικομόδιος

$$\boxed{H_n(\mathbf{M}_\bullet) := Z_n(\mathbf{M}_\bullet)/B_n(\mathbf{M}_\bullet)}$$

καλείται n-**οστός μόδιος ομολογίας τού αλυσωτού συμπλόκου** $\mathbf{M}_\bullet$. (Στην περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$, είθισται να ονομάζεται n-**οστή ομάδα ομολογίας τού** $\mathbf{M}_\bullet$.)

3.2.3 Παρατήρηση. Προφανώς, $H_n(\mathbf{M}_\bullet) = \{0_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)/B_n(\mathbf{M}_\bullet)}\} = \{B_n(\mathbf{M}_\bullet)\}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, εάν και μόνον εάν η ακολουθία (3.16) είναι ακριβής[17]. Ως εκ τούτου, οι μόδιοι ομολογίας μπορούν να εκληφθούν ως εκείνοι οι μόδιοι που εκφράζουν *το πόσο απέχει το αλυσωτό σύμπλοκο* $\mathbf{M}_\bullet$ *από το να είναι ακριβής ακολουθία*.

[16] Πρόκειται και πάλι για «παραδοσιακή» ορολογία τοπολογικής προελεύσεως.

[17] Εν τοιαύτη περιπτώσει, $Z_n(\mathbf{M}_\bullet) = B_n(\mathbf{M}_\bullet)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, ήτοι δεν υπάρχουν κυκλήματα που να μην είναι σύνορα και γι' αυτό το $\mathbf{M}_\bullet$ ονομάζεται ενίοτε και **ακυκληματικό αλυσωτό σύμπλοκο**. (Βλ. [86], σελ. 163, ή [35], σελ. 330.)

3.2.4 Ορισμός. Έστω ότι τα

$$\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \quad \cdots \xrightarrow{d_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

$$\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \quad \cdots \xrightarrow{d'_{n+2}} M'_{n+1} \xrightarrow{d'_{n+1}} M'_n \xrightarrow{d'_n} M'_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} \cdots$$

είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Μια **απεικόνιση** $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ είναι μια ακολουθία απεικονίσεων $(f_n : M_n \longrightarrow M'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ως **σύνθεση** $(g \circ f)_\bullet$ δυο απεικονίσεων $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''_\bullet$ ορίζεται η $(g_n \circ f_n : M_n \longrightarrow M''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Μια απεικόνιση αλυσωτών συμπλόκων $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ καλείται **αλυσωτός μετασχηματισμός** όταν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η $f_n : M_n \longrightarrow M'_n$ είναι ομομορφισμός R-μοδίων και (ταυτοχρόνως) το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
M'_n \arrow[r, "d'_n"'] & M'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

3.2.5 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *και* $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα, τότε για κάθε αλυσωτό μετασχηματισμό* $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ *ισχύει*

$$f_n(Z_n(\mathbf{M}_\bullet)) \subseteq Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \ \ \textit{και} \ \ f_n(B_n(\mathbf{M}_\bullet)) \subseteq B_n(\mathbf{M}'_\bullet), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ως εκ τούτου, υπάρχει ένας και μόνον ομομορφισμός R*-μοδίων*

$$\boxed{H_n(f_\bullet) : H_n(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{M}'_\bullet),}$$

με την ιδιότητα $\pi^{Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)}_{B_n(\mathbf{M}'_\bullet)} \circ f_n|_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)} = H_n(f_\bullet) \circ \pi^{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}$, *ήτοι αυτός που ορίζεται από τον τύπο*

$$\boxed{H_n(f_\bullet)(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) := f_n(x) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet), \ \forall x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet).}$$

Απόδειξη. Εξ ορισμού, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & M'_n \arrow[r, "d'_n"'] & M'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Έστω τυχόν στοιχείο $x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$. Προφανώς,

$$d_n(x) = 0_{M_{n-1}} \Rightarrow d'_n(f_n(x)) = f_{n-1}(d_n(x)) = f_{n-1}(0_{M_{n-1}}) = 0_{M'_{n-1}}$$

$$\Rightarrow f_n(x) \in \mathrm{Ker}(d'_n) =: Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \Rightarrow f_n(Z_n(\mathbf{M}_\bullet)) \subseteq Z_n(\mathbf{M}'_\bullet).$$

Εξάλλου, για οιοδήποτε $y \in \mathrm{Im}(d_{n+1}) =: B_n(\mathbf{M}_\bullet)$ υπάρχει στοιχείο $z \in M_{n+1}$ με $y = d_{n+1}(z)$, οπότε

$$f_n(y) = f_n(d_{n+1}(z)) = d'_{n+1}(f_{n+1}(z)) \in \mathrm{Im}(d'_{n+1}) =: B_n(\mathbf{M}'_\bullet).$$

Η ύπαρξη, καθώς και ο συγκεκριμένος τύπος ορισμού τού ομομορφισμού $H_n(f_\bullet)$, ο οποίος είναι ο μόνος ομομορφισμός που συμπληρώνει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "f_n|_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}"] \arrow[d, two heads, "\pi^{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[d, two heads, "\pi^{Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)}_{B_n(\mathbf{M}'_\bullet)}"] \\ H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, dashed, "H_n(f_\bullet)"'] & H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \end{tikzcd}$$

καθιστώντας το μεταθετικό, έπεται από το θεώρημα 2.3.10. □

3.2.6 Πρόταση. *Εάν* $f_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$, $g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''_\bullet$ *είναι αλυσωτοί μετασχηματισμοί, όπου* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *και* $\mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, *τότε*

$$H_n((g \circ f)_\bullet) = H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη. Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dd, bend right=60, "(g\circ f)_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M'_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dd, bend left=60, "(g\circ f)_{n-1}"] \\ M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_{n-1} \arrow[d, "g_{n-1}"] \\ M''_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"'] & M''_n \arrow[r, "d''_n"'] & M''_{n-1} \end{tikzcd}$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned} H_n((g \circ f)_\bullet)(x + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) &= (g_n \circ f_n)(x) + B_n(\mathbf{M}''_\bullet) \\ &= H_n(g_\bullet)(f_n(x) + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = (H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet))(x + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)), \end{aligned}$$

για κάθε $x \in Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

3.2.7 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι ένα αλυσωτό σύμπλοκο, τότε*

$$H_n(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}) = \mathrm{id}_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)},\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

όπου $\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$ *ο ταυτοτικός*[18] *αλυσωτός μετασχηματισμός.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ έχουμε

$$H_n(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet})(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = \mathrm{id}_{M_n}(x) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = \mathrm{id}_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)}(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)),$$

οπότε πράγματι $H_n(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}) = \mathrm{id}_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

[18] $\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} := (\mathrm{id}_{M_n} : M_n \longrightarrow M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

3.2.8 Σημείωση. Εάν ένας αλυσωτός μετασχηματισμός $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ είναι **ισομορφισμός** (μεταξύ των $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{M}'_\bullet$), δηλαδή εάν ο $f_n : M_n \longrightarrow M'_n$ είναι ισομορφισμός R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε (λόγω των προτάσεων 3.2.6 και 3.2.7) ο $H_n(f_\bullet) : H_n(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{M}'_\bullet)$ είναι ισομορφισμός R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

3.2.9 Ορισμός. Εάν $(\mathbf{M}_{j,\bullet} = (M_{j,n}, d_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}})_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια αλυσωτών συμπλόκων, τότε τόσον το

$$\bigoplus_{j\in J} \mathbf{M}_{j,\bullet} := (\bigoplus_{j\in J} M_{j,n}, \bigoplus_{j\in J} d_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}} \text{ όσον και το } \prod_{j\in J} \mathbf{M}_{j,\bullet} := (\prod_{j\in J} M_{j,n}, \prod_{j\in J} d_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}}$$

είναι αλυσωτά σύμπλοκα. Το μεν πρώτο καλείται **ευθύ άθροισμα**, το δε δεύτερο **ευθύ γινόμενο** των μελών τής εν λόγω οικογενείας.

3.2.10 Πρόταση. *Εάν $(\mathbf{M}_{j,\bullet} = (M_{j,n}, d_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}})_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια αλυσωτών συμπλόκων, τότε υφίστανται ισομορφισμοί*

$$\boxed{H_n(\bigoplus_{j\in J} \mathbf{M}_{j,\bullet}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{j\in J} H_n(\mathbf{M}_{j,\bullet})}$$

και

$$\boxed{H_n(\prod_{j\in J} \mathbf{M}_{j,\bullet}) \xrightarrow{\cong} \prod_{j\in J} H_n(\mathbf{M}_{j,\bullet})}$$

καθοριζόμενοι μέσω των τύπων

$$(x_j)_{j\in J} + \left(\bigoplus_{j\in J} \mathrm{Im}(d_{j,n+1})\right) \longmapsto (x_j + \mathrm{Im}(d_{j,n+1}))_{j\in J}$$

και

$$(x_j)_{j\in J} + \left(\prod_{j\in J} \mathrm{Im}(d_{j,n+1})\right) \longmapsto (x_j + \mathrm{Im}(d_{j,n+1}))_{j\in J}\,.$$

Αποδειξη. Επειδή $Z_n(\bigoplus_{j\in J} \mathbf{M}_{j,\bullet}) = \mathrm{Ker}\left(\bigoplus_{j\in J} d_{j,n}\right) = \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Ker}(d_{j,n})$ και

$$B_n(\bigoplus_{j\in J} \mathbf{M}_{j,\bullet}) = \mathrm{Im}\left(\bigoplus_{j\in J} d_{j,n+1}\right) = \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Im}\,(d_{j,n+1})$$

(βλ. 2.4.23), έχουμε

$$H_n(\bigoplus_{j\in J} \mathbf{M}_{j,\bullet}) = Z_n(\bigoplus_{j\in J} \mathbf{M}_{j,\bullet})/B_n(\bigoplus_{j\in J} \mathbf{M}_{j,\bullet}) = \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Ker}\,(d_{j,n}) \,/ \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Im}\,(d_{j,n+1})\,.$$

Μέσω τής προτάσεως 2.4.24 ορίζεται ο ισομορφισμός

$$\bigoplus_{j\in J} \mathrm{Ker}\,(d_{j,n}) \,/ \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Im}\,(d_{j,n+1}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{j\in J} (\mathrm{Ker}\,(d_{j,n}) \,/\, \mathrm{Im}\,(d_{j,n+1}))$$

$$(x_j)_{j\in J} + \left(\bigoplus_{j\in J} \mathrm{Im}(d_{j,n+1})\right) \longmapsto (x_j + \mathrm{Im}(d_{j,n+1}))_{j\in J}\,,$$

όπου $\bigoplus_{j\in J}(\mathrm{Ker}\,(d_{j,n})\,/\,\mathrm{Im}\,(d_{j,n+1})) = \bigoplus_{j\in J}(Z_n(\mathbf{M}_{j,\bullet})/B_n(\mathbf{M}_{j,\bullet})) = \bigoplus_{j\in J} H_n(\mathbf{M}_{j,\bullet})$. Η αντίστοιχη απόδειξη για το ευθύ γινόμενο είναι πανομοιότυπη. $\square$

3.2.11 Ορισμός. Μια ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων και αλυσωτών μετασχηματισμών τής μορφής

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{M}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet,$$

όπου $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, καλείται **βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων** όταν η

$$\{0\} \longrightarrow M'_n \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{g_n} M''_n \longrightarrow \{0\}$$

είναι βραχεία ακριβής ακολουθία (υπό την έννοια τού εδ. 3.1.2 (iii)), $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3.2.12 Λήμμα. *Δοθέντων τριών αλυσωτών συμπλόκων*

$$\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}\ \ \textit{και}\ \ \mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

και μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας $\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{M}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$, *η*

$$H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(\mathbf{M}''_\bullet)$$

είναι ακριβής για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα (με ακριβείς στήλες)

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M''_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"'] \arrow[d] & M''_n \arrow[r, "d''_n"'] \arrow[d] & M''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

(i) $H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet) = 0$. Για κάθε $x \in Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)$ έχουμε

$$(H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet))(x + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) = (\underbrace{g_n \circ f_n}_{=0})(x) + B_n(\mathbf{M}''_\bullet) = B_n(\mathbf{M}''_\bullet) = 0_{H_n(\mathbf{M}''_\bullet)}.$$

(ii) $\mathrm{Ker}(H_n(g_\bullet)) \subseteq \mathrm{Im}(H_n(f_\bullet))$. Για κάθε $y \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ με $y + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \in \mathrm{Ker}(H_n(g_\bullet))$,

$$H_n(g_\bullet)(y + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = B_n(\mathbf{M}''_\bullet) \Rightarrow g_n(y) \in B_n(\mathbf{M}''_\bullet) = \mathrm{Im}(d''_{n+1}),$$

οπότε

$$\left.\begin{array}{l} \exists z \in M''_{n+1} : g_n(y) = d''_{n+1}(z) \\ \mathrm{Im}(g_{n+1}) = M''_{n+1} \Rightarrow [\exists w \in M_{n+1} : g_{n+1}(w) = z] \end{array}\right\} \Rightarrow (\underbrace{d''_{n+1} \circ g_{n+1}}_{=g_n \circ d_{n+1}})(w) = g_n(y)$$

και, ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} & y - d_{n+1}(w) \in \mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Im}(f_n) \Rightarrow [\exists x \in M'_n : f_n(x) = y - d_{n+1}(w)] \\ & \Rightarrow f_n(x) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = (y - \underbrace{d_{n+1}(w)}_{\in B_n(\mathbf{M}_\bullet)}) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = y + B_n(\mathbf{M}_\bullet). \end{aligned}$$

Επιπροσθέτως, επειδη $y \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n)$, έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x) = y - d_{n+1}(w) \Rightarrow f_{n-1}(d'_n(x)) = d_n(f_n(x)) \\ = d_n(y) - (\underbrace{d_n \circ d_{n+1}}_{=0})(w) = d_n(y) = 0_{M_{n-1}} \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(f_{n-1} \circ d'_n), \\ \mathrm{Ker}(f_{n-1}) = \{0_{M'_{n-1}}\} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f_{n-1} \circ d'_n) \subseteq \mathrm{Ker}(d'_n) =: Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \end{array}\right\} \Rightarrow x \in Z_n(\mathbf{M}'_\bullet).$$

Αυτό σημαίνει ότι $y + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = H_n(f_\bullet)(x + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) \in \mathrm{Im}(H_n(f_\bullet))$. □

3.2.13 Θεώρημα (Κατασκευή μακράς ακριβούς ακολουθίας ομολογίας). *Εάν δοθούν τρία αλυσωτά σύμπλοκα*

$$\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}\ \textit{και}\ \mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

και μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{M}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet, \tag{3.17}$$

τότε υφίσταται για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ένας ομομορφισμός R-μοδίων

$$\partial_n : H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)$$

*(ο λεγόμενος **συνδετικός ομομορφισμός** για την (3.17)), μέσω τού οποίου επάγεται μια ακριβής ακολουθία*

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow H_{n+1}(\mathbf{M}'_\bullet) \xrightarrow{H_{n+1}(f_\bullet)} H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{H_{n+1}(g_\bullet)} H_{n+1}(\mathbf{M}''_\bullet) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \\ \hookrightarrow H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} \\ \hookrightarrow H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(f_\bullet)} \cdots \end{array}$$

*(η λεγόμενη **μακρά ακριβής ακολουθία ομολογίας** για την (3.17)).*

Απόδειξη. (i) Το ότι η ανωτέρω ακολουθία είναι ακριβής στη θέση $H_n(\mathbf{M}_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχει αποδειχθεί στο λήμμα 3.2.12. Αρκεί λοιπόν να κατασκευασθεί ο ∂_n και να ελεγχθεί η ακρίβεια στις θέσεις $H_n(\mathbf{M}''_\bullet)$ και $H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Εισάγονται οι συντομογραφίες $N_n := \mathrm{Coker}(d_{n+1})\,(= M_n/B_n(\mathbf{M}_\bullet))$,

$$N'_n := \mathrm{Coker}(d'_{n+1})\,(= M'_n/B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) \ \text{ και } \ N''_n := \mathrm{Coker}(d''_{n+1})\,(= M''_n/B_n(\mathbf{M}''_\bullet)).$$

Επειδή τα $\mathbf{M}_\bullet$, $\mathbf{M}'_\bullet$ και $\mathbf{M}''_\bullet$ είναι αλυσωτά σύμπλοκα, έχουμε

$$B_n(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq Z_n(\mathbf{M}_\bullet),\ B_n(\mathbf{M}'_\bullet) \subseteq Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)) \ \text{ και } \ B_n(\mathbf{M}''_\bullet) \subseteq Z_n(\mathbf{M}''_\bullet),$$

οπότε μέσω τής προτάσεως 2.3.6 διασφαλίζεται η ύπαρξη μοναδικών ομομορφισμών $\widetilde{d}_n, \widetilde{d}'_n$ και $\widetilde{d}''_n$ που καθιστούν το κάτωθι διάγραμμα και τα αντίστοιχα διαγράμματα με τόνους και τους δίστονους μεταθετικά.

$$\begin{tikzcd} & M_n \arrow[dl, "\pi^{M_n}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}"'] \arrow[dr, "d_n"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ N_n \arrow[rr, dashed, "\widetilde{d}_n"'] & {} & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq M_{n-1} \end{tikzcd}$$

Συγκεκριμένα, $\widetilde{d}_n(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) := d_n(x)$, $\widetilde{d}'_n(x' + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) := d'_n(x')$ και

$$\widetilde{d}''_n(x'' + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)) := d''_n(x''), \quad \forall (x, x', x'') \in M_n \times M'_n \times M''_n,$$

με $\mathrm{Im}(\widetilde{d}_n) = \mathrm{Im}(d_n)$, $\mathrm{Im}(\widetilde{d}'_n) = \mathrm{Im}(d'_n)$ και $\mathrm{Im}(\widetilde{d}''_n) = \mathrm{Im}(d''_n)$.

(iii) Κατά το πόρισμα 3.1.12 (και λόγω τής ακριβείας τής (3.17)) κατασκευάζεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "\overline{f_{n-1}}"] \arrow[d, "\iota_{d'_{n-1}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\overline{g_{n-1}}"] \arrow[d, "\iota_{d_{n-1}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[d, "\iota_{d''_{n-1}}"'] & \\ \{0\} \arrow[r] & M'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & M_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"'] & M''_{n-1} \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

που έχει την κάτω του γραμμή ακριβή. Θα αποδείξουμε ότι η εξ αριστερών συμπληρωμένη άνω του γραμμή

$$\{0\} \longrightarrow Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \overset{\overline{f_{n-1}}}{\longrightarrow} Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \overset{\overline{g_{n-1}}}{\longrightarrow} Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \tag{3.18}$$

είναι ωσαύτως ακριβής.

(a) Επειδή η $\iota_{d_{n-1}} \circ \overline{f_{n-1}} = f_{n-1} \circ \iota_{d'_{n-1}}$ (ως σύνθεση των μονομορφισμών $\iota_{d'_{n-1}}$ και f_{n-1}) είναι μονομορφισμός και η $\iota_{d_{n-1}}$ είναι μονομορφισμός, *και η ίδια* η $\overline{f_{n-1}}$ οφείλει να είναι μονομορφισμός.

(b) Έστω τυχόν στοιχείο $y \in \mathrm{Im}(\overline{g_{n-1}} \circ \overline{f_{n-1}})$. Επειδή

$$\exists x \in Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) : y = (\overline{g_{n-1}} \circ \overline{f_{n-1}})(x)$$

και $\iota_{d''_{n-1}}(y) \in M''_{n-1} = \mathrm{Im}(g_{n-1})$, υπάρχει $z \in M_{n-1}$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\begin{aligned} & g_{n-1}(z) = \iota_{d''_{n-1}}(y) = (\iota_{d''_{n-1}} \circ \overline{g_{n-1}})(\overline{f_{n-1}}(x)) = (g_{n-1} \circ \iota_{d_{n-1}})(\overline{f_{n-1}}(x)) \\ & = g_{n-1}((\iota_{d_{n-1}} \circ \overline{f_{n-1}})(x)) = g_{n-1}((f_{n-1} \circ \iota_{d'_{n-1}})(x)) = ((\underbrace{g_{n-1} \circ f_{n-1}}_{=0}) \circ \iota_{d'_{n-1}})(x) = 0_{Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)} \\ & \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(\iota_{d''_{n-1}}) = \{0_{Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet)}\} \Rightarrow y = 0_{Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet)} = 0_{M''_{n-1}}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπειαν, $\overline{g_{n-1}} \circ \overline{f_{n-1}} = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(\overline{f_{n-1}}) \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{g_{n-1}})$. Και αντιστρόφως· εάν θεωρήσουμε τυχόν $x \in \mathrm{Ker}(\overline{g_{n-1}})$, τότε

$$
\begin{aligned}
& 0_{M''_{n-1}} = \iota_{d''_{n-1}}(0_{M''_{n-1}}) = \iota_{d''_{n-1}}(\overline{g_{n-1}}(x)) = (\iota_{d''_{n-1}} \circ \overline{g_{n-1}})(x) \\
& = (g_{n-1} \circ \iota_{d_{n-1}})(x) = g_{n-1}(\iota_{d_{n-1}}(x)) \\
& \Rightarrow \iota_{d_{n-1}}(x) \in \mathrm{Ker}(g_{n-1}) = \mathrm{Im}(f_{n-1}) \Rightarrow [\exists y \in M'_{n-1} : \iota_{d_{n-1}}(x) = f_{n-1}(y)] \\
& \Rightarrow (f_{n-2} \circ d'_{n-1})(y) = (d_{n-1} \circ f_{n-1})(y) = d_{n-1}(f_{n-1}(y)) \\
& = d_{n-1}(\iota_{d_{n-1}}(x)) = (\underbrace{d_{n-1} \circ \iota_{d_{n-1}}}_{=0})(x) = 0_{M_{n-2}} \\
& \Rightarrow d'_{n-1}(y) \in \mathrm{Ker}(f_{n-2}) = \{0_{M'_{n-2}}\} \Rightarrow d'_{n-1}(y) = 0_{M'_{n-2}} \\
& \Rightarrow y \in \mathrm{Ker}(d'_{n-1}) = \mathrm{Im}(\iota_{d'_{n-1}}) \Rightarrow [\exists x' \in \mathrm{Ker}(d'_{n-1}) : y = \iota_{d'_{n-1}}(x')] \\
& \Rightarrow \iota_{d_{n-1}}(x) = f_{n-1}(y) = (f_{n-1} \circ \iota_{d'_{n-1}})(x') = (\iota_{d_{n-1}} \circ \overline{f_{n-1}})(x') \\
& \Rightarrow x - \overline{f_{n-1}}(x') \in \mathrm{Ker}(\iota_{d_{n-1}}) = \{0_{M_{n-1}}\} \Rightarrow x = \overline{f_{n-1}}(x') \in \mathrm{Im}(\overline{f_{n-1}}),
\end{aligned}
$$

οπότε ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathrm{Ker}(\overline{g_{n-1}}) \subseteq \mathrm{Im}(\overline{f_{n-1}})$.

(iv) Κατά το πόρισμα 3.1.15 (και λόγω τής ακριβείας τής (3.17)) κατασκευάζεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & M'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, two heads, "\pi^{M'_n}_{\mathrm{Im}(d'_{n+1})}"'] & M_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, two heads, "\pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M''_n \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})}"] & \{0\} \\
& N'_n \arrow[r, "\underline{f_n}"'] & N_n \arrow[r, "\underline{g_n}"'] & N''_n &
\end{tikzcd}
$$

που έχει την άνω του γραμμή ακριβή. Θα αποδείξουμε ότι η εκ δεξιών συμπληρωμένη κάτω του γραμμή

$$N'_n \xrightarrow{\underline{f_n}} N_n \xrightarrow{\underline{g_n}} N''_n \longrightarrow \{0\} \tag{3.19}$$

είναι ωσαύτως ακριβής.

(a) Επειδή η $\underline{g_n} \circ \pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})} = \pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})} \circ g_n$ (ως σύνθεση των επιμορφισμών g_n και $\pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})}$) είναι επιμορφισμός και η $\pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}$ είναι επιμορφισμός, *και η ίδια* η $\underline{g_n}$ οφείλει να είναι επιμορφισμός.

(b) Έστω τυχόν στοιχείο $x \in N'_n$. Επειδή η $\pi^{M'_n}_{\mathrm{Im}(d'_{n+1})}$ είναι επιρριπτική,

$$\exists z \in M'_n : \pi^{M'_n}_{\mathrm{Im}(d'_{n+1})}(z) = z + \mathrm{Im}(d'_{n+1}) = x,$$

οπότε

$$
\begin{aligned}
& (\underline{g_n} \circ \underline{f_n})(x) = (\underline{g_n} \circ (\underline{f_n} \circ \pi^{M'_n}_{\mathrm{Im}(d'_{n+1})}))(z) = (\underline{g_n} \circ (\pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})} \circ f_n))(z) \\
& = ((\underline{g_n} \circ \pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}) \circ f_n)(z) = ((\pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})} \circ g_n) \circ f_n)(z) \\
& = (\pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})} \circ (\underbrace{g_n \circ f_n}_{=0}))(z) = 0_{N'_n} \Rightarrow \underline{g_n} \circ \underline{f_n} = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(\underline{f_n}) \subseteq \mathrm{Ker}(\underline{g_n}).
\end{aligned}
$$

Και αντιστρόφως· εάν θεωρήσουμε τυχόν $x \in \mathrm{Ker}(\underline{g_n})$, τότε (επειδή η $\pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}$ είναι επιρριπτική) έχουμε $x = \pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}(y)$ για κάποιο στοιχείο $y \in M_n$, οπότε

$$
\begin{aligned}
&0_{N_n} = \underline{g_n}(x) = (\underline{g_n} \circ \pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})})(y) = (\pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})} \circ g_n)(y) \\
&\Rightarrow g_n(y) \in \mathrm{Ker}(\pi^{M''_n}_{\mathrm{Im}(d''_{n+1})}) = \mathrm{Im}(d''_{n+1}) \\
&\Rightarrow [\exists w \in M''_{n+1} : d''_{n+1}(w) = g_n(y)] \underset{\mathrm{Im}(g_{n+1})=M''}{\Longrightarrow} [\exists u \in M_{n+1} : w = g_{n+1}(u)] \\
&\Rightarrow [\exists u \in M_{n+1} : d''_{n+1}(w) = d''_{n+1}(g_{n+1}(u)) = g_n(d_{n+1}(u))] \Rightarrow g_n(y) = g_n(d_{n+1}(u)) \\
&\Rightarrow y - d_{n+1}(u) \in \mathrm{Ker}(g_n) = \mathrm{Im}(f_n) \Rightarrow [\exists v \in M'_n : y - d_{n+1}(u) = f_n(v)] \\
&\Rightarrow \pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}(y) - \underbrace{(\pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})} \circ d_{n+1})}_{=0}(u) = (\pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})} \circ f_n)(v) = (\underline{f_n} \circ \pi^{M'_n}_{\mathrm{Im}(d'_{n+1})})(v) \\
&\Rightarrow x = \pi^{M_n}_{\mathrm{Im}(d_{n+1})}(y) = \underline{f_n}(\pi^{M'_n}_{\mathrm{Im}(d'_{n+1})}(v)) \in \mathrm{Im}(\underline{f_n}) \\
&\Rightarrow \mathrm{Ker}(\underline{g_n}) \subseteq \mathrm{Im}(\underline{f_n}).
\end{aligned}
$$

(v) Τοποθετώντας τήν (3.19) υπεράνω τής (3.18) και χρησιμοποιώντας τούς συνδέοντες ομομορφισμούς $\widetilde{d}_n, \widetilde{d}'_n$ και $\widetilde{d}''_n$ (τους ορισθέντες στο (ii)) λαμβάνουμε το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
 & N'_n \arrow[r, "\underline{f_n}"] \arrow[d, "\widetilde{d}'_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N_n \arrow[r, "\underline{g_n}"] \arrow[d, "\widetilde{d}_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N''_n \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d}''_n"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "\overline{f_{n-1}}"'] & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\overline{g_{n-1}}"'] & Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) &
\end{tikzcd}
\tag{3.20}
$$

(με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς), το οποίο είναι μεταθετικό, διότι για κάθε $z \in M'_n$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{d}_n(\underline{f_n}(z + B_n(\mathbf{M}'_\bullet))) = \widetilde{d}_n(f_n(z) + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = d_n(f_n(z)) \\
&= f_{n-1}(\underbrace{d'_n(z)}_{\in B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)}) \underset{3.1.12}{=} \overline{f_{n-1}}(d'_n(z)) = \overline{f_{n-1}}(\widetilde{d}'_n(z + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)))
\end{aligned}
$$

και για κάθε $w \in M_n$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{d}''_n(\underline{g_n}(w + B_n(\mathbf{M}_\bullet))) = \widetilde{d}''_n(g_n(w) + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)) = d''_n(g_n(w)) \\
&= g_{n-1}(\underbrace{d_n(w)}_{\in B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}) \underset{3.1.12}{=} \overline{g_{n-1}}(d_n(w)) = \overline{g_{n-1}}(\widetilde{d}_n(w + B_n(\mathbf{M}_\bullet))).
\end{aligned}
$$

(vi) Εφαρμόζοντας το λήμμα τού φιδιού 3.1.20 για το διάγραμμα (3.20) λαμβάνουμε έναν οφιοειδή συνδετικό ομομορφισμό $\partial_n : \mathrm{Ker}(\widetilde{d}''_n) \longrightarrow \mathrm{Coker}(\widetilde{d}'_n)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Ker}(\widetilde{d}'_n) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\widetilde{d}'_n}"'] & \mathrm{Ker}(\widetilde{d}_n) \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\widetilde{d}_n}"'] & \mathrm{Ker}(\widetilde{d}''_n) \arrow[d, "\iota_{\widetilde{d}''_n}"'] \arrow[dddll, rounded corners, "\partial_n"] & \\
 & N'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\widetilde{d}'_n"'] & N_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\widetilde{d}_n"'] & N''_n \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d}''_n"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "\overline{f_{n-1}}"] \arrow[d, "\pi^{Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)}_{\mathrm{Im}(\widetilde{d}'_n)}"'] & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\overline{g_{n-1}}"] \arrow[d, "\pi^{Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}_{\mathrm{Im}(\widetilde{d}_n)}"'] & Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[d, "\pi^{Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet)}_{\mathrm{Im}(\widetilde{d}''_n)}"'] & \\
 & \mathrm{Coker}(\widetilde{d}'_n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\widetilde{d}_n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\widetilde{d}''_n) \arrow[d] & \\
 & \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}
$$

(vii) Ταυτίζουμε τους πυρήνες και τους συμπυρήνες που περιλαμβάνονται στο ανωτέρω διάγραμμα με τους επιθυμητούς μοδίους ομολογίας ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\widetilde{d}_n) &= \left\{ x + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \in N_n \,\middle|\, x \in M_n \;\text{ και }\; \widetilde{d}_n(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = 0_{M_{n-1}} \right\} \\
&= \left\{ x + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \in N_n \,|\, x \in M_n \;\text{ και }\; d_n(x) = 0_{M_{n-1}} \right\} \\
&= \left\{ x + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \in N_n \,|\, x \in M_n \;\text{ και }\; x \in \mathrm{Ker}(d_n)\,(=: Z_n(\mathbf{M}_\bullet)) \right\} \\
&= Z_n(\mathbf{M}_\bullet)/B_n(\mathbf{M}_\bullet) = H_n(\mathbf{M}_\bullet)
\end{aligned}
$$

και $\mathrm{Coker}(\widetilde{d}_n) = Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)/\operatorname{Im}(\widetilde{d}_n) \overset{\text{(i)}}{=} Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)/\operatorname{Im}(d_n) = H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)$. Κατ' αναλογίαν, δείχνεται ότι

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Ker}(\widetilde{d}'_n) = H_n(\mathbf{M}'_\bullet),\ \mathrm{Ker}(\widetilde{d}''_n) = H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \;\text{ και} \\
\mathrm{Coker}(\widetilde{d}'_n) = H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet),\ \mathrm{Coker}(\widetilde{d}''_n) = H_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet).
\end{gathered}
$$

(viii) Το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
H_n(\mathbf{M'}_\bullet) \arrow[r, dashed, "H_n(f_\bullet)"] \arrow[d, hook, "\iota_{\widetilde{d}'_n}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, dashed, "H_n(g_\bullet)"] \arrow[d, hook, "\iota_{\widetilde{d}_n}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(\mathbf{M''}_\bullet) \arrow[d, hook, "\iota_{\widetilde{d}''_n}"'] \\
N'_n \arrow[r, "f_n"'] & N_n \arrow[r, "g_n"'] & N''_n
\end{tikzcd}
$$

είναι μεταθετικό, διότι για κάθε $\xi \in Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)$ έχουμε

$$
\begin{gathered}
\iota_{\widetilde{d}_n}(H_n(f_\bullet)(\xi + B_n(\mathbf{M}'_\bullet))) = H_n(f_\bullet)(\xi + \mathrm{Im}(d'_{n+1})) \\
= f_n(\xi) + \mathrm{Im}(d_{n+1}) = \underline{f_n}(\xi + \mathrm{Im}(d'_{n+1})) = \underline{f_n}(\iota_{\widetilde{d}'_n}(\xi + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)))
\end{gathered}
$$

και για κάθε $\nu \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ έχουμε $H_n(g_\bullet)(\iota_{\widetilde{d}''_n}(\nu + B_n(\mathbf{M}_\bullet))) = H_n(g_\bullet)(\nu + \mathrm{Im}(d_{n+1}))$ και

$$g_n(\nu) + \mathrm{Im}(d''_{n+1}) = \underline{g_n}(\nu + \mathrm{Im}(d_{n+1})) = \underline{g_n}(\iota_{\widetilde{d}_n}(\nu + B_n(\mathbf{M}_\bullet))).$$

Παρομοίως αποδεικνύεται ότι *και* το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "\overline{f_{n-1}}"] \arrow[d, two heads, "\pi^{Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)}_{\mathrm{Im}(\widetilde{d}'_n)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\overline{g_{n-1}}"] \arrow[d, two heads, "\pi^{Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}_{\mathrm{Im}(\widetilde{d}_n)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[d, two heads, "\pi^{Z_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet)}_{\mathrm{Im}(\widetilde{d}''_n)}"] \\
H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, dashed, "H_{n-1}(f_\bullet)"'] & H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, dashed, "H_{n-1}(g_\bullet)"'] & H_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Από την ιδιότητα *τής μοναδικότητας* (των ομομορφισμών συμπληρώσεως, βλ. πορίσματα 3.1.12 και 3.1.15) συμπεραίνουμε ότι οι $H_n(f_\bullet)$, $H_n(g_\bullet)$ (και αντιστοίχως, οι $H_{n-1}(f_\bullet)$, $H_{n-1}(g_\bullet)$) είναι αυτοί οι ομομορφισμοί που οφείλουν να εγγραφούν στην 2η (και αντιστοίχως, στην 4η) γραμμή τού διαγράμματος τού παρατεθέντος στο (vi). Κατ' αυτόν τον τρόπο οδηγούμεθα στον πλήρη σχηματισμό τής *μακράς ακριβούς ακολουθία ομολογίας* για την (3.17). □

3.2.14 Παρατήρηση. Παρότι ο ∂_n καθορίζεται *μέχρις ενός ισομορφισμού*

$$\mathrm{Coker}(H_n(g_\bullet)) \cong \mathrm{Ker}(H_{n-1}(f_\bullet))$$

(πρβλ. (3.8)), ο πλέον «φυσικός» τύπος ορισμού του είναι ο αυτός που εδόθη στο εδάφιο 3.1.21 (i): Εάν $y \in Z_n(\mathbf{M}''_\bullet)$, τότε

$$\exists x \in M_n : y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet) = \underline{g_n}(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = g_n(x) + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)$$

και $\widetilde{d}_n\,(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) \in \mathrm{Im}(\overline{f_{n-1}})$, όπου $\overline{f_{n-1}}^{\,-1}(\{\widetilde{d}_n\,(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet))\}) = \{z\}$ (ένα *μονοσύνολο* ανήκον στο $Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \subseteq M'_{n-1}$). Αρκεί λοιπόν να θέσουμε

$$\boxed{\partial_n\,(y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)) := z + B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet).} \tag{3.21}$$

3.2.15 Ορισμός. Έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο. Εάν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ το M'_n παριστά έναν υπομόδιο τού M_n και ισχύει $d_n(M'_n) \subseteq M'_{n-1}$, τότε το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d_n|_{M'_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ ονομάζεται **υποσύμπλοκο τού** $\mathbf{M}_\bullet$, ενώ το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{M}_\bullet/\mathbf{M}'_\bullet = (M_n/M'_n, d_n^{\text{πηλ.}})_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου $d_n^{\text{πηλ.}}$ είναι ο μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, two heads, "\pi^{M_n}_{M'_n}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[d, two heads, "\pi^{M_{n-1}}_{M'_{n-1}}"] \\
M_n/M'_n \arrow[r, "d_n^{\text{πηλ.}}"'] & M_{n-1}/M'_{n-1}
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό (βλ. 2.3.10-2.3.11), καλείται **πηλικοσύμπλοκο τού $\mathbf{M}_\bullet$ ως προς το $\mathbf{M}'_\bullet$**.

3.2.16 Σημείωση. Εάν $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d_n|_{M'_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ένα υποσύμπλοκο ενός αλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, τότε η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow M'_n \overset{\iota_n}{\hookrightarrow} M_n \overset{\pi_n}{\twoheadrightarrow} M_n/M'_n \longrightarrow \{0\}$$

(όπου ι_n η συνήθης ένθεση και $\pi_n := \pi^{M_n}_{M'_n}$) είναι ακριβής για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οπότε προκύπτει μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{\iota_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} \mathbf{M}_\bullet/\mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet. \tag{3.22}$$

Μέσω αυτής επάγεται (σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.13) *η μακρά ακριβής ακολουθία ομολογίας* για την (3.22):

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_{n+1}(\iota_\bullet)"] & H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_{n+1}(\pi_\bullet)"] & H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet/\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, "\partial_{n+1}"] \\
& H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_n(\iota_\bullet)"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_n(\pi_\bullet)"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet/\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, "\partial_n"] \\
& H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}(\iota_\bullet)"] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

3.2.17 Πρόταση. *Εάν υποτεθεί ότι το*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{M}'_\bullet \arrow[r, "f'_\bullet"] \arrow[d, "\phi'_\bullet"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{M}_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d, "\phi_\bullet"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{M}''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\phi''_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{L}'_\bullet \arrow[r, "g'_\bullet"'] & \mathbf{L}_\bullet \arrow[r, "g_\bullet"'] & \mathbf{L}''_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα αλυσωτών συμπλόκων και αλυσωτών μετασχηματισμών με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, τότε το επαγόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_n(f'_\bullet)"] \arrow[d, "H_n(\phi'_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_n(f_\bullet)"] \arrow[d, "H_n(\phi_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[r, "\partial_n^{(1)}"] \arrow[d, "H_n(\phi''_\bullet)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(\phi'_\bullet)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(\mathbf{L}'_\bullet) \arrow[r, "H_n(g'_\bullet)"'] & H_n(\mathbf{L}_\bullet) \arrow[r, "H_n(g_\bullet)"'] & H_n(\mathbf{L}''_\bullet) \arrow[r, "\partial_n^{(2)}"'] & H_{n-1}(\mathbf{L}'_\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

το έχον τις μακρές ακριβείς ακολουθίες ως γραμμές (με τους $\partial_n^{(1)}, \partial_n^{(2)}$ ως συνδετικούς ομομορφισμούς) είναι ωσαύτως μεταθετικό.

Αποδειξη. Ας συμβολίσουμε τους συνοριακούς τελεστές ως $d_n^{\mathbf{M}_\bullet}, d_n^{\mathbf{M}'_\bullet}, d_n^{\mathbf{M}''_\bullet}$ και $d_n^{\mathbf{L}_\bullet}, d_n^{\mathbf{L}'_\bullet}, d_n^{\mathbf{L}''_\bullet}$, αντιστοίχως. Η μεταθετικότητα στα πρώτα δύο τετράγωνα έπεται άμεσα από την πρόταση 3.2.6. Για την απόδειξη τής μεταθετικότητας στο τρίτο τετράγωνο θεωρούμε τυχόν στοιχείο $y \in Z_n(\mathbf{M}''_\bullet) \subseteq M''_n$. Επειδή

$$\exists x \in M_n : y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet) = \underline{f_n}(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = f_n(x) + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)$$

με $\widetilde{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) \in \mathrm{Im}(\overline{f'_{n-1}})$ και

$$\exists! z \in Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \subseteq M'_{n-1} : \overline{f'_{n-1}}^{-1}(\{\widetilde{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet))\}) = f'^{-1}_{n-1}(\{d_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x)\}) = \{z\},$$

έχουμε

$$\begin{aligned}&(H_{n-1}(\phi'_\bullet) \circ \partial_n^{(1)})(y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)) = H_{n-1}(\phi'_\bullet)(\partial_n^{(1)}(y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)))\\ &= H_{n-1}(\phi'_\bullet)(z + B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)) = \phi'_{n-1}(z) + B_{n-1}(\mathbf{L}'_\bullet).\end{aligned}$$

(Πρβλ. (3.21).) Εξάλλου, $f'_{n-1}(z) = \overline{f'_{n-1}}(z) = \widetilde{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = d_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x)$,

$$g'_{n-1} \circ \phi'_{n-1} = \phi_{n-1} \circ f'_{n-1} \ \text{ και } \ \phi_{n-1} \circ d_n^{\mathbf{M}_\bullet} = d_n^{\mathbf{L}_\bullet} \circ \phi_n$$

(διότι ο $\phi_\bullet$ είναι αλυσωτός μετασχηματισμός), οπότε η ενριπτικότητα των f'_{n-1} και g'_{n-1} δίδει

$$\begin{aligned}&\phi'_{n-1}(z) = \phi'_{n-1}(f'^{-1}_{n-1}(\{d_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x)\})) = g'^{-1}_{n-1}(\{\phi_{n-1}(d_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x))\}) = g'^{-1}_{n-1}(\{d_n^{\mathbf{L}_\bullet}(\phi_n(x))\})\\ &\Rightarrow (H_{n-1}(\phi'_\bullet) \circ \partial_n^{(1)})(y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet)) = g'^{-1}_{n-1}(\{d_n^{\mathbf{L}_\bullet}(\phi_n(x))\}) + B_{n-1}(\mathbf{L}'_\bullet)\\ &= \partial_n^{(2)}(g_n(\phi_n(x)) + B_n(\mathbf{L}''_\bullet)) = \partial_n^{(2)}(\phi''_n(f_n(x)) + B_n(\mathbf{L}''_\bullet))\\ &= \partial_n^{(2)}(H_n(\phi''_\bullet)(f_n(x) + B_n(\mathbf{M}''_\bullet))) = \partial_n^{(2)}(H_n(\phi''_\bullet)(y + B_n(\mathbf{M}''_\bullet))),\end{aligned}$$

διότι $g_n \circ \phi_n = \phi''_n \circ f_n$. □

3.2.18 Πρόταση. *Δοθέντων τεσσάρων αλυσωτών συμπλόκων* $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{M}''_\bullet, \mathbf{M}'''_\bullet$ *και μιας ακριβούς ακολουθίας αλυσωτών συμπλόκων*

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}'''_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{h_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{3.23}$$

με $H_n(\mathbf{M}'''_\bullet) \cong \{0\}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$, *υφίσταται μια ακριβής ακολουθία* R*-μοδίων ομολογίας τής μορφής*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_{n+1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_{n+1}(h_\bullet)"] & H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[dll, "\xi_{n+1}"] \\
& H_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[r, "\delta_n"] & H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_n(h_\bullet)"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[dll, "\xi_n"] \\
& H_{n-2}(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[r, "\delta_{n-1}"] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

Αποδειξη. Η (3.23) διασπάται σε δύο βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}'''_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathrm{Im}(g_\bullet) \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{3.24}$$

και

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Im}(g_\bullet) \xrightarrow{\iota_\bullet} \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{h_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet, \tag{3.25}$$

με $\mathrm{Im}(g_\bullet) := (\mathrm{Im}(g_n))_{n\in\mathbb{Z}}$, $g_n = \iota_n \circ \breve{g}_n$, όπου

$$\mathrm{Ker}(f_n) = \mathrm{Im}(g_n) \overset{\iota_n}{\hookrightarrow} M'_n$$

η συνήθης ένθεση και $\breve{g}_n : M'''_n \longrightarrow \mathrm{Im}(g_n)$ ο επιμορφισμός R-μοδίων που προκύπτει ύστερα από περιορισμό τού πεδίου τιμών τού g_n στην εικόνα του. (Βλ. 2.2.14 (iii).) Έστω ότι

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[r, "H_{n+1}(f_\bullet)"] & H_{n+1}(\mathbf{M}'''_\bullet) \arrow[r, "H_{n+1}(\breve{g}_\bullet)"] & H_{n+1}(\mathrm{Im}(g_\bullet)) \arrow[dll, "\partial^{(1)}_{n+1}"] \\
& H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[r, "H_n(f_\bullet)"] & H_n(\mathbf{M}'''_\bullet) \arrow[r, "H_n(\breve{g}_\bullet)"] & H_n(\mathrm{Im}(g_\bullet)) \arrow[dll, "\partial^{(1)}_{n}"] \\
& H_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}(f_\bullet)"] & \cdots &
\end{tikzcd} \tag{3.26}$$

και

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{n+1}(\mathrm{Im}(g_\bullet)) \arrow[r, "H_{n+1}(\iota_\bullet)"] & H_{n+1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_{n+1}(h_\bullet)"] & H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[dll, "\partial^{(2)}_{n+1}"] \\
& H_n(\mathrm{Im}(g_\bullet)) \arrow[r, "H_n(\iota_\bullet)"] & H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[r, "H_n(h_\bullet)"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[dll, "\partial^{(2)}_{n}"] \\
& H_{n-1}(\mathrm{Im}(g_\bullet)) \arrow[r, "H_{n-1}(\iota_\bullet)"] & \cdots &
\end{tikzcd} \tag{3.27}$$

είναι οι μακρές ακριβείς ακολουθίες για τις (3.26) και (3.27) οι κατασκευαζόμενες μέσω τού θεωρήματος 3.2.13 και έχουσες τους

$$\partial^{(1)}_n : H_n(\mathrm{Im}(g_\bullet)) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet), \;\; \partial^{(2)}_n : H_n(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(\mathrm{Im}(g_\bullet)),$$

ως συνδετικούς τους ομομορφισμούς. Επειδή $H_n(\mathbf{M}'''_\bullet) \cong \{0\}$, οι $\partial^{(1)}_n$ είναι *ισομορφισμοί* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. 3.1.3 (i).) Θέτοντας

$$\xi_{n+1} := \partial^{(1)}_n \circ \partial^{(2)}_{n+1} \;\; \text{και} \;\; \delta_n := H_n(\iota_\bullet) \circ (\partial^{(1)}_n)^{-1} :$$

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\partial^{(2)}_{n+1}"] \arrow[dr, dashed, "\xi_{n+1}"'] & H_n(\mathrm{Im}(g_\bullet)) \arrow[r, "H_n(\iota_\bullet)"] \arrow[d, bend right, "\partial^{(1)}_n"', "\cong"] & H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \\
& H_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[u, bend right, "(\partial^{(1)}_n)^{-1}"', "\cong"] \arrow[ur, dashed, "\delta_n"'] &
\end{tikzcd}$$

λαμβάνουμε (μέσω τής (3.27)) τη ζητούμενη μακρά ακριβή ακολουθία. □

▸ **Μόδιοι συνομολογίας**. Αυτοί ορίζονται όπως οι μόδιοι ομολογίας *αλλά* εκκινώντας από ημιακριβείς ακολουθίες με *ανιόντα* σύνολα δεικτών.

3.2.19 Ορισμός. Έστω

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-2}} M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^{n} \xrightarrow{d^{n}} M^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} M^{n+2} \xrightarrow{d^{n+2}} \cdots \tag{3.28}$$

μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων με ανιόν σύνολο δεικτών και με τους δείκτες αναγραφόμενους «εν είδει δυνάμεων». Αυτή καλείται **συναλυσωτό σύμπλοκο** (ή **ημιακριβής ακολουθία με ανιόν σύνολο δεικτών**) όταν $d^n \circ d^{n-1} = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, και συμβολίζεται -εν συντομία- ως $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Οι ομομορφισμοί $d^n_{\mathbf{M}^\bullet} := d^n$, $n \in \mathbb{Z}$, καλούνται ενίοτε **συσσυνοριακοί τελεστές** ή **συνδιαφορικά** τού συναλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{M}^\bullet$. Στην ειδική περίπτωση όπου οι M^n είναι τετριμμένοι και $d^n = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, το $\mathbf{M}^\bullet$ συμβολίζεται απλώς ως $\mathbf{0}^\bullet$.

3.2.20 Ορισμός. Έστω $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα συναλυσωτό σύμπλοκο τής μορφής (3.28). Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ θέτουμε

$$\boxed{B^n(\mathbf{M}^\bullet) := \mathrm{Im}(d^{n-1})} \quad \text{και} \quad \boxed{Z^n(\mathbf{M}^\bullet) := \mathrm{Ker}(d^n).}$$

Προφανώς, αμφότεροι οι $B^n(\mathbf{M}^\bullet)$ και $Z^n(\mathbf{M}^\bullet)$ είναι υπομόδιοι τού R-μοδίου M^n και $B^n(\mathbf{M}^\bullet) \subseteq Z^n(\mathbf{M}^\bullet)$. Τα στοιχεία τού $B^n(\mathbf{M}^\bullet)$ καλούνται n-**οστά συσσύνορα** και τα στοιχεία τού $Z^n(\mathbf{M}^\bullet)$ n-**οστά συγκυκλήματα**[19] τού $\mathbf{M}^\bullet$. Ο πηλικομόδιος

$$\boxed{H^n(\mathbf{M}^\bullet) := Z^n(\mathbf{M}^\bullet)/B^n(\mathbf{M}^\bullet)}$$

καλείται n-**οστός μόδιος συνομολογίας τού** $\mathbf{M}^\bullet$. (Στην περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$, είθισται να ονομάζεται n-**οστή ομάδα συνομολογίας τού** $\mathbf{M}^\bullet$.)

3.2.21 Παρατήρηση. Προφανώς, $H^n(\mathbf{M}^\bullet) = 0_{Z^n(\mathbf{M}^\bullet)/B^n(\mathbf{M}^\bullet)} = B^n(\mathbf{M}^\bullet)$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, εάν και μόνον εάν η ακολουθία (3.28) είναι ακριβής[20]. Ως εκ τούτου, οι μόδιοι συνομολογίας μπορούν να εκληφθούν ως εκείνοι οι μόδιοι που εκφράζουν *το πόσο απέχει το συναλυσωτό σύμπλοκο* $\mathbf{M}^\bullet$ *από το να είναι ακριβής ακολουθία*.

3.2.22 Ορισμός. Έστω ότι τα

$$\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}} : \quad \cdots \xrightarrow{d^{n-2}} M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^{n} \xrightarrow{d^{n}} M^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

$$\mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}} : \quad \cdots \xrightarrow{d'^{n-2}} M'^{n-1} \xrightarrow{d'^{n-1}} M'^{n} \xrightarrow{d'^{n}} M'^{n+1} \xrightarrow{d'^{n+1}} \cdots$$

[19] Πρόκειται και πάλι για «παραδοσιακή» ορολογία τοπολογικής προελεύσεως.

[20] Εν τοιαύτη περιπτώσει, $Z^n(\mathbf{M}^\bullet) = B^n(\mathbf{M}^\bullet)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, ήτοι δεν υπάρχουν συγκυκλήματα που να μην είναι συσσύνορα και γι' αυτό το $\mathbf{M}^\bullet$ ονομάζεται ενίοτε και **ακυκληματικό συναλυσωτό σύμπλοκο**.

είναι συναλυσωτά σύμπλοκα. Μια **απεικόνιση** $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$ είναι μια ακολουθία απεικονίσεων $(f^n : M^n \longrightarrow M'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ως **σύνθεση** $(g \circ f)^\bullet$ δυο απεικονίσεων $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \to \mathbf{M}'^\bullet$ και $g^\bullet : \mathbf{M}'^\bullet \to \mathbf{M}''^\bullet$ ορίζεται η

$$(g^n \circ f^n : M^n \to M''^n)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Μια απεικόνιση συναλυσωτών συμπλόκων $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$ καλείται **συναλυσωτός μετασχηματισμός** όταν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η $f^n : M^n \longrightarrow M'^n$ είναι ομομορφισμός R-μοδίων και (ταυτοχρόνως) το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
M^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\
M'^n \arrow[r, "d'^n"'] & M'^{n+1}
\end{tikzcd}$$

3.2.23 Πρόταση. *Εάν $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο συναλυσωτά σύμπλοκα, τότε για κάθε συναλυσωτό μετασχηματισμό*

$$f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$$

ισχύει $f^n(Z^n(\mathbf{M}^\bullet)) \subseteq Z^n(\mathbf{M}'^\bullet)$ και $f^n(B^n(\mathbf{M}^\bullet)) \subseteq B^n(\mathbf{M}'^\bullet)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Ως εκ τούτου, υπάρχει ένας και μόνον ομομορφισμός R-μοδίων

$$\boxed{H^n(f^\bullet) : H^n(\mathbf{M}^\bullet) \longrightarrow H^n(\mathbf{M}'^\bullet),}$$

με την ιδιότητα

$$\pi^{Z^n(\mathbf{M}'^\bullet)}_{B^n(\mathbf{M}'^\bullet)} \circ f^n|_{Z^n(\mathbf{M}^\bullet)} = H^n(f^\bullet) \circ \pi^{Z^n(\mathbf{M}^\bullet)}_{B^n(\mathbf{M}^\bullet)},$$

ήτοι αυτός που ορίζεται από τον τύπο

$$\boxed{H^n(f^\bullet)(x + B^n(\mathbf{M}^\bullet)) := f^n(x) + B^n(\mathbf{M}'_\bullet), \ \forall x \in Z^n(\mathbf{M}^\bullet).}$$

Απόδειξη. Εξ ορισμού, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\
M'^{n-1} \arrow[r, "d'^{n-1}"'] & M'^n \arrow[r, "d'^n"'] & M'^{n+1}
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Έστω τυχόν στοιχείο $x \in Z^n(\mathbf{M}^\bullet)$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
& d^n(x) = 0_{M^{n+1}} \Rightarrow 0_{M'^{n+1}} = f^{n+1}(0_{M^{n+1}}) = f^{n+1}(d^n(x)) = d'^n(f^n(x)) \\
& \Rightarrow f^n(x) \in \mathrm{Ker}(d'^n) =: Z^n(\mathbf{M}'^\bullet) \Rightarrow f^n(Z^n(\mathbf{M}^\bullet)) \subseteq Z^n(\mathbf{M}'^\bullet).
\end{aligned}$$

Εξάλλου, για οιοδήποτε στοιχείο

$$y \in \mathrm{Im}(d^{n-1}) =: B^n(\mathbf{M}^\bullet)$$

υπάρχει $z \in M^{n-1}$ με $y = d^{n-1}(z)$, οπότε

$$f^n(y) = f^n(d^{n-1}(z)) = d'^{n-1}(f^{n-1}(z)) \in \mathrm{Im}(d'^{n-1}) =: B^n(\mathbf{M}'^\bullet).$$

Η ύπαρξη, καθώς και ο συγκεκριμένος τύπος ορισμού τού ομομορφισμού $H^n(f^\bullet)$, ο οποίος είναι ο μόνος ομομορφισμός που συμπληρώνει το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Z^n(\mathbf{M}^\bullet) \arrow[r, "f^n|_{Z^n(\mathbf{M}^\bullet)}"] \arrow[d, two heads, "\pi^{Z^n(\mathbf{M}^\bullet)}_{B^n(\mathbf{M}^\bullet)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z^n(\mathbf{M}'^\bullet) \arrow[d, two heads, "\pi^{Z^n(\mathbf{M}'^\bullet)}_{B^n(\mathbf{M}'^\bullet)}"] \\
H^n(\mathbf{M}^\bullet) \arrow[r, dashed, "H^n(f^\bullet)"'] & H^n(\mathbf{M}'^\bullet)
\end{tikzcd}$$

καθιστώντας το μεταθετικό, έπεται από το θεώρημα 2.3.10. □

3.2.24 Πρόταση. *Δοθέντων δυο συναλυσωτών μετασχηματισμών* $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$, $g^\bullet : \mathbf{M}'^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''^\bullet$, *όπου*

$$\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \mathbf{M}''^\bullet = (M''^n, d''^n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

έχουμε

$$H^n((g\circ f)^\bullet) = H^n(g^\bullet)\circ H^n(f^\bullet),\ \forall n\in\mathbb{Z}.$$

Απόδειξη. Παρόμοια εκείνης τής προτάσεως 3.2.6. □

3.2.25 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι ένα συναλυσωτό σύμπλοκο, τότε*

$$H^n(\mathrm{id}_{\mathbf{M}^\bullet}) = \mathrm{id}_{H^n(\mathbf{M}^\bullet)},\ \forall n\in\mathbb{Z},$$

όπου $\mathrm{id}_{\mathbf{M}^\bullet} : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}^\bullet$ *ο ταυτοτικός*[21] *συναλυσωτός μετασχηματισμός.*

Απόδειξη. Παρόμοια εκείνης τής προτάσεως 3.2.7. □

3.2.26 Ορισμός. Εάν $(\mathbf{M}^{j,\bullet} = (M^{j,n}, d^{j,n})_{n\in\mathbb{Z}})_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια συναλυσωτών συμπλόκων, τότε τόσον το

$$\bigoplus_{j\in J}\mathbf{M}^{j,\bullet} := (\bigoplus_{j\in J} M^{j,n}, \bigoplus_{j\in J} d^{j,n})_{n\in\mathbb{Z}}$$

όσον και το

$$\prod_{j\in J}\mathbf{M}^{j,\bullet} := (\prod_{j\in J} M^{j,n}, \prod_{j\in J} d^{j,n})_{n\in\mathbb{Z}}$$

είναι συναλυσωτά σύμπλοκα. Το μεν πρώτο καλείται **ευθύ άθροισμα**, το δε δεύτερο **ευθύ γινόμενο** των μελών τής εν λόγω οικογενείας.

3.2.27 Πρόταση. *Εάν* $(\mathbf{M}^{j,\bullet} = (M^{j,n}, d^{j,n})_{n\in\mathbb{Z}})_{j\in J}$ *είναι μια οικογένεια συναλυσω-*

[21] $\mathrm{id}_{\mathbf{M}^\bullet} := (\mathrm{id}_{M^n} : M^n \longrightarrow M^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

τών συμπλόκων, τότε υφίστανται ισομορφισμοί

$$\boxed{H^n(\bigoplus_{j\in J}\mathbf{M}^{j,\bullet}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{j\in J} H^n(\mathbf{M}^{j,\bullet})}$$

και

$$\boxed{H^n(\prod_{j\in J}\mathbf{M}^{j,\bullet}) \xrightarrow{\cong} \prod_{j\in J} H^n(\mathbf{M}^{j,\bullet})}$$

καθοριζόμενοι μέσω των τύπων

$$(x_j)_{j\in J} + \left(\bigoplus_{j\in J}\mathrm{Im}(d^{j,n-1})\right) \longmapsto \left(x_j + \mathrm{Im}(d^{j,n-1})\right)_{j\in J}$$

και

$$(x_j)_{j\in J} + \left(\prod_{j\in J}\mathrm{Im}(d^{j,n-1})\right) \longmapsto \left(x_j + \mathrm{Im}(d^{j,n-1})\right)_{j\in J}.$$

Αποδειξη. Παρόμοια εκείνης τής προτάσεως 3.2.10. □

3.2.28 Ορισμός. Μια ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων και συναλυσωτών μετασχηματισμών τής μορφής

$$\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \mathbf{M}^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} \mathbf{M}''^\bullet \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet,$$

όπου

$$\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ και } \mathbf{M}''^\bullet = (M''^n, d''^n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

καλείται **βραχεία ακριβής ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων** όταν η

$$\{0\} \longrightarrow M'^n \xrightarrow{f^n} M^n \xrightarrow{g^n} M''^n \longrightarrow \{0\}$$

είναι βραχεία ακριβής ακολουθία (υπό την έννοια τού εδ. 3.1.2 (iii)), $\forall n \in \mathbb{Z}$.

3.2.29 Λήμμα. *Εάν δοθούν τρία συναλυσωτά σύμπλοκα* $\mathbf{M}^\bullet, \mathbf{M}'^\bullet$ *και* $\mathbf{M}''^\bullet$ *και μια βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} \mathbf{M}^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} \mathbf{M}''^\bullet \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet,$$

η

$$H^n(\mathbf{M}'^\bullet) \xrightarrow{H^n(f^\bullet)} H^n(\mathbf{M}^\bullet) \xrightarrow{H^n(g^\bullet)} H^n(\mathbf{M}''^\bullet)$$

είναι ακριβής για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Αποδειξη. Παρόμοια εκείνης τού λήμματος 3.2.12. □

3.2.30 Θεώρημα (Κατασκευή μακράς ακριβούς ακολουθίας συνομολογίας). *Εάν δοθούν τρία συναλυσωτά σύμπλοκα* $\mathbf{M}^{\bullet}, \mathbf{M}'^{\bullet}$ *και* $\mathbf{M}''^{\bullet}$ *και μια βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\mathbf{0}^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{M}'^{\bullet} \xrightarrow{f^{\bullet}} \mathbf{M}^{\bullet} \xrightarrow{g^{\bullet}} \mathbf{M}''^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{0}^{\bullet}, \tag{3.29}$$

υφίσταται για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ *ένας ομομορφισμός*

$$\partial^n : H^n(\mathbf{M}''^{\bullet}) \longrightarrow H^{n+1}(\mathbf{M}'^{\bullet})$$

(*ο λεγόμενος* ***συνδετικός ομομορφισμός*** *για την* (3.29)), *μέσω τού οποίου επάγεται μια ακριβής ακολουθία*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{n-1}(\mathbf{M}'^{\bullet}) \arrow[r, "H^{n-1}(f^{\bullet})"] & H^{n-1}(\mathbf{M}^{\bullet}) \arrow[r, "H^{n-1}(g^{\bullet})"] & H^{n-1}(\mathbf{M}''^{\bullet}) \arrow[dll, "\partial^{n-1}"] \\
& H^{n}(\mathbf{M}'^{\bullet}) \arrow[r, "H^{n}(f^{\bullet})"] & H^{n}(\mathbf{M}^{\bullet}) \arrow[r, "H^{n}(g^{\bullet})"] & H^{n}(\mathbf{M}''^{\bullet}) \arrow[dll, "\partial^{n}"] \\
& H^{n+1}(\mathbf{M}'^{\bullet}) \arrow[r, "H^{n+1}(f^{\bullet})"] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

(*η λεγόμενη* ***μακρά ακριβής ακολουθία συνομολογίας*** *για την* (3.29)).

Απόδειξη. Παρόμοια εκείνης τού θεωρήματος 3.2.13 (κάνοντας χρήση τόσον τού λήμματος 3.2.29 όσον και τού λήμματος 3.1.20 τού φιδιού). □

3.2.31 Σημείωση. Αναλόγως παραλλάσσονται και οι διατυπώσεις τού ορισμού 3.2.15, τής σημειώσεως 3.2.16 και τής προτάσεως 3.2.17 για *συναλυσωτά* σύμπλοκα και μοδίους *συνομολογίας*. Αξίζει, μάλιστα, να επισημανθεί ότι κάθε συναλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{M}^{\bullet} = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ μπορεί να μετατραπεί σε ένα αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{N}_{\bullet} = (N_n, \delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ με

$$H^{-n}(\mathbf{M}^{\bullet}) = H_n(\mathbf{N}_{\bullet})$$

εάν κανείς θέσει (για κάθε $n \in \mathbb{Z}$)[22]

$$N_n := M^{-n} \text{ και } \delta_n := d^{-n}.$$

Είναι λοιπόν εύλογο το ερώτημα τού *γιατί να χρησιμοποιούνται* αμφότερες οι έννοιες *αλυσωτό* και *συναλυσωτό* σύμπλοκο, και μόδιοι *ομολογίας* και *συνομολογίας*, αντιστοίχως. Ένας εκ των κυρίων λόγων χρησιμοποιήσεως αμφοτέρων είναι ο εξής: Αφ' ενός μεν οι ημιακριβείς ακολουθίες με *ανιόν* σύνολο δεικτών συναντώνται συχνά στην *Άλγεβρα*, ενώ οι ημιακριβείς ακολουθίες με *κατιόν* σύνολο δεικτών συναντώνται συχνά στην *Αλγεβρική Τοπολογία*, αφ' ετέρου δε οι ομάδες (ή οι μόδιοι) συνομολογίας (που χειρίζεται κανείς εντός τού πλαισίου τής Αλγεβρικής Τοπολογίας) *δεν προέρχονται από απλή αλλαγή προσήμου δεικτών* των ομάδων (ή μοδίων) ομολογίας ενός αλυσωτού συμπλόκου, αλλά *από την εφαρμογή τού δυϊκού συναρτητή* "Hom" σε κάποιο κατάλληλο αλυσωτό σύμπλοκο (όπως, π.χ., στο σύμπλοκο των

[22] Παρομοίως ένα αλυσωτό σύμπλοκο μπορεί να μετατραπεί σε συναλυσωτό.

ιδιαζουσών αλυσίδων ενός τοπολογικού χώρου). Ως εκ τούτου, παρατηρείται *μετάβαση από συναλλοίωτους σε ανταλλοίωτους συναρτητές* (στην κατηγορία $\mathfrak{Abgroups}$ ή στην κατηγορία $\mathfrak{Mod}_R$). Ένας άλλος λόγος θα αναφανεί αργότερα στη σελ. 756.

3.3 ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΚΔΟΧΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ MAYER-VIETORIS

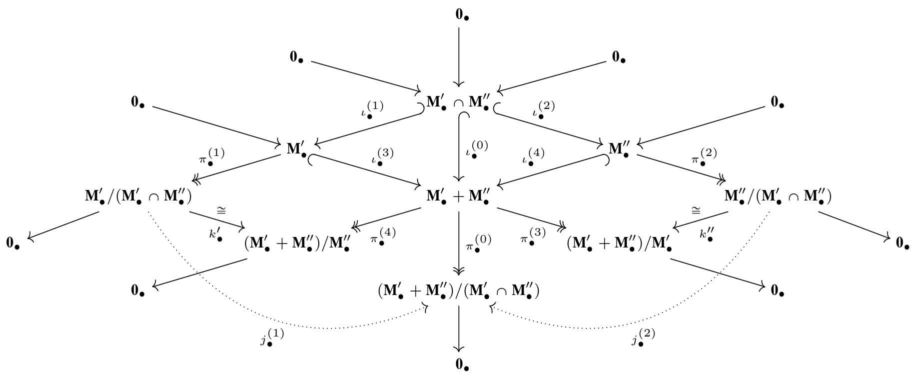
Έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο. Εάν $\mathbf{M}'_\bullet$ και $\mathbf{M}''_\bullet$ είναι δυο υποσύμπλοκά του (υπό την έννοια τού ορισμού 3.2.15), τότε τα

$$\boxed{\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet := \quad (M'_n \cap M''_n,\, d_n|_{M'_n \cap M''_n})_{n\in\mathbb{Z}}}$$

και

$$\boxed{\mathbf{M}'_\bullet + \mathbf{M}''_\bullet := \quad (M'_n + M''_n,\, d_n|_{M'_n + M''_n})_{n\in\mathbb{Z}}}$$

είναι ωσαύτως υποσύμπλοκά του. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις πέντε βραχείες ακριβείς ακολουθίες αλυσωτών συμπλόκων (βλ. (3.22))



οι οποίες προκύπτουν από την (κατά φυσικό τρόπο) δόμηση των πηλικοσυμπλόκων

$$(\mathbf{M}'_\bullet + \mathbf{M}''_\bullet)/(\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet),\ \mathbf{M}'_\bullet/(\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet),\ \mathbf{M}''_\bullet/(\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet),\ (\mathbf{M}'_\bullet + \mathbf{M}''_\bullet)/\mathbf{M}'_\bullet,\ (\mathbf{M}'_\bullet + \mathbf{M}''_\bullet)/\mathbf{M}''_\bullet$$

(και έχουν αριθμηθεί κατ' αυτήν τη σειρά), καθώς και τις ενθέσεις $j^{(1)}_\bullet, j^{(2)}_\bullet$ και τους ισομορφισμούς $k'_n, k''_n,\ n \in \mathbb{Z}$ (τους απορρέοντες από το 2ο θεώρημα ισομορφισμών μοδίων 2.3.12), έχουμε τη δυνατότητα μεταβάσεώς μας στις αντίστοιχες μακρές ακριβείς ακολουθίες ομολογίας (τις κατασκευαζόμενες μέσω τού θεωρήματος τού 3.2.13). Εάν $\partial^{(\nu)}_n, \nu \in \{0,1,2,3,4\}, n \in \mathbb{Z}$, είναι οι συνδετικοί ομομορφισμοί των πέντε επαγομένων ακριβών ακολουθιών ομολογίας, τότε το ευμεγέθες διάγραμμα αλληλοεμπλεκομένων ακολουθιών που σχηματίζεται είναι το εξής:

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[dd, "\partial^{(0)}_{n+1}"] & \\
{} \arrow[dr, "\partial^{(2)}_{n+1}"'] & & {} \arrow[dl, "\partial^{(1)}_{n+1}"] \\
 & H_n(\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet) \arrow[dl, "H_n(\iota^{(1)}_\bullet)"] \arrow[dd, "H_n(\iota^{(0)}_\bullet)"] \arrow[dr, "H_n(\iota^{(2)}_\bullet)"'] & \\
H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[dr, "H_n(\iota^{(3)}_\bullet)"'] \arrow[dddd, bend right, "H_n(\pi^{(1)}_\bullet)"'] & & H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[dl, "H_n(\iota^{(4)}_\bullet)"] \arrow[dddd, bend left, "H_n(\pi^{(2)}_\bullet)"] \\
 & H_n(\mathbf{M}'_\bullet + \mathbf{M}''_\bullet) \arrow[dl, "H_n(\pi^{(4)}_\bullet)"'] \arrow[dd, "H_n(\pi^{(0)}_\bullet)"] \arrow[dr, "H_n(\pi^{(3)}_\bullet)"] & \\
H_n((\mathbf{M}'_\bullet + \mathbf{M}''_\bullet)/\mathbf{M}''_\bullet) \arrow[dddd, bend right, "\partial^{(4)}_n"'] & & H_n((\mathbf{M}'_\bullet + \mathbf{M}''_\bullet)/\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[dddd, bend left, "\partial^{(3)}_n"] \\
 & H_n((\mathbf{M}'_\bullet + \mathbf{M}''_\bullet)/(\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet)) \arrow[ul, "H_n(j^{(1)}_\bullet)\circ H_n(k'_\bullet)^{-1}"'] \arrow[ur, "H_n(j^{(1)}_\bullet)\circ H_n(k''_\bullet)^{-1}"] \arrow[dd, "\partial^{(0)}_n"] & \\
H_n(\mathbf{M}'_\bullet/(\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet)) \arrow[uu, "H_n(k'_\bullet)", "\cong"'] \arrow[ur, dotted, "H_n(j^{(1)}_\bullet)"'] \arrow[dr, "\partial^{(1)}_n"] & & H_n(\mathbf{M}''_\bullet/(\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet)) \arrow[uu, "H_n(k''_\bullet)"', "\cong"] \arrow[ul, dotted, "H_n(j^{(2)}_\bullet)"] \arrow[dl, "\partial^{(2)}_n"'] \\
 & H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet) \arrow[dl, "H_{n-1}(\iota^{(2)}_\bullet)"'] \arrow[dd, "H_{n-1}(\iota^{(0)}_\bullet)"] \arrow[dr, "H_{n-1}(\iota^{(1)}_\bullet)"] & \\
H_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) & & H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \\
 & \vdots &
\end{tikzcd}
$$

3.3.1 Θεώρημα (2η αλγεβρική εκδοχή τού θεωρήματος των Mayer και Vietoris). *Μέσω τού ανωτέρω διαγράμματος κατασκευάζεται μια ακριβής ακολουθία*

$$\cdots \xrightarrow{\mathfrak{D}_{n+1}} H_n(\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet) \xrightarrow{\Psi_n} H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \oplus H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \xrightarrow{\Phi_n} H_n(\mathbf{M}'_\bullet + \mathbf{M}''_\bullet) \xrightarrow{\mathfrak{D}_n} H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet) \xrightarrow{\Psi_{n-1}} H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \oplus H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \xrightarrow{\Phi_{n-1}} \cdots,$$

*η επονομαζόμενη **ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris** για τα $\mathbf{M}'_\bullet$ και $\mathbf{M}''_\bullet$, στην οποία*

$$\left\{ \begin{array}{l} H_n(\mathbf{M}'_\bullet \cap \mathbf{M}''_\bullet) \ni x \longmapsto \Psi_n(x) := (H_n(\iota^{(1)}_\bullet)(x), H_n(\iota^{(2)}_\bullet)(x)) \in H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \oplus H_n(\mathbf{M}''_\bullet), \\ H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \oplus H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \ni (x, y) \longmapsto \Phi_n(x, y) := H_n(\iota^{(3)}_\bullet)(x) - H_n(\iota^{(4)}_\bullet)(y) \in H_n(\mathbf{M}'_\bullet + \mathbf{M}''_\bullet), \end{array} \right\}$$

και $\mathfrak{D}_n := \partial^{(2)}_n \circ H_n(k''_\bullet)^{-1} \circ H_n(\pi^{(3)}_\bullet), \forall n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Είναι εύκολος ο έλεγχος τού ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned}
&H_n(\iota^{(3)}_\bullet) \circ H_n(\iota^{(1)}_\bullet) = H_n(\iota^{(0)}_\bullet) = H_n(\iota^{(4)}_\bullet) \circ H_n(\iota^{(2)}_\bullet),\\
&\partial^{(0)}_n \circ H_n(j^{(1)}_\bullet) = \partial^{(1)}_n, \;\; \partial^{(0)}_n \circ H_n(j^{(2)}_\bullet) = \partial^{(2)}_n,\\
&H_n(j^{(1)}_\bullet) \circ H_n(k'_\bullet)^{-1} \circ H_n(\pi^{(0)}_\bullet) = H_n(\pi^{(4)}_\bullet),\\
&H_n(j^{(2)}_\bullet) \circ H_n(k''_\bullet)^{-1} \circ H_n(\pi^{(0)}_\bullet) = H_n(\pi^{(3)}_\bullet),\\
&H_n(\pi^{(0)}_\bullet) \circ H_n(\iota^{(3)}_\bullet) = H_n(j^{(1)}_\bullet) \circ H_n(\pi^{(1)}_\bullet),\\
&H_n(\pi^{(0)}_\bullet) \circ H_n(\iota^{(4)}_\bullet) = H_n(j^{(2)}_\bullet) \circ H_n(\pi^{(2)}_\bullet),\\
&\mathrm{Im}(H_n(j^{(1)}_\bullet)) = \mathrm{Ker}(H_n(j^{(2)}_\bullet) \circ H_n(k''_\bullet)^{-1}),\\
&\mathrm{Im}(H_n(j^{(2)}_\bullet)) = \mathrm{Ker}(H_n(j^{(1)}_\bullet) \circ H_n(k'_\bullet)^{-1}),\\
&\mathrm{Im}(H_n(\iota^{(3)}_\bullet)) = \mathrm{Ker}(H_n(\pi^{(3)}_\bullet)),\\
&\mathrm{Im}(H_n(\iota^{(4)}_\bullet)) = \mathrm{Ker}(H_n(\pi^{(4)}_\bullet)).
\end{aligned}$$

Λόγω αυτών μας είναι επιτρεπτό να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 3.1.26 (σε ό,τι απομένει στο παρατεθέν ευμεγέθες διάγραμμα ύστερα από αφαίρεση των $\partial^{(3)}_n$ και $\partial^{(4)}_n$) και να καταλήξουμε άμεσα στην επαλήθευση τού ισχυρισμού. □

3.3.2 Παρατήρηση. *Αντίστοιχη* ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris κατασκευάζεται *και* για δυο υποσύμπλοκα *συναλυσωτών* συμπλόκων. (Αρκεί κανείς να αντιστρέψει τη φορά των βελών τού παρατεθέντος ευμεγέθους διαγράμματος. Μάλιστα, εάν αυτό γυρίσει κατά 180° και γίνει εναλλαγή των συνδετικών ομομορφισμών, τότε καταλήγουμε απευθείας στο ζητούμενο.)

3.4 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΤΟΥ EULER

Εάν R είναι μια περιοχή κυρίων ιδεωδών και M ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος, τότε $M = \text{tors}(M) \oplus \text{frp}(M)$, όπου $\text{tors}(M)$ ο υπομόδιος στρέψεως[23] τού M και $\text{frp}(M) \cong M/\text{tors}(M)$ το ελεύθερο μέρος του, έχων ως ελεύθερη βαθμίδα του $\text{fr-rank}(M) := \text{rank}(\text{frp}(M))$ τον κοινό πληθικό αριθμό όλων των βάσεων τού $\text{frp}(M)$. (Βλ. 2.5.39 και 2.6.6.)

3.4.1 Λήμμα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι και έστω M ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος. Εάν $M = \sum_{j=1}^{k} Rm_j$ ($k \in \mathbb{N}, m_1, \ldots, m_k \in M$), τότε υπάρχει ένας $l \in \mathbb{N}_0$, $l \leqslant k$, καθώς και κάποια βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής*

$$\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \twoheadrightarrow M \longrightarrow \{0\}.$$

(Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία αυτής τής μορφής καλείται, ιδιαιτέρως, ***παράσταση*** τού M).

Απόδειξη. Έστω $\{b_j \mid 1 \leqslant j \leqslant k\}$ μια βάση τού R^k και έστω $f : R^k \longrightarrow M$ ο επιμορφισμός ο οριζόμενος επί ολοκλήρου τού R^k θέτοντας $f(b_j) := m_j$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, k\}$ και χρησιμοποιώντας γραμμική επέκταση. (Βλ. θεώρημα 2.5.20.) Ο πυρήνας του $\text{Ker}(f)$, ως υπομόδιος τού R^k, είναι ελεύθερος και πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος και, ως εκ τούτου, $\text{Ker}(f) \cong R^l$ για κάποιον $l \in \mathbb{N}_0$, $l \leqslant k$. (Βλ. 2.5.47 και 2.5.49.) Η

$$\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \overset{f}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία τής ζητούμενης μορφής. □

3.4.2 Παρατήρηση. (i) Εάν

$$\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \overset{f}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}$$

είναι τυχούσα παράσταση τού M και $\text{Ker}(f) \overset{\iota}{\hookrightarrow} R^k$ η συνήθης ένθεση, τότε από την πρόταση 3.1.13 γνωρίζουμε ότι υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός $M \dashrightarrow \text{Coker}(\iota)$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & R^l \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R^k \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \text{Ker}(f) \arrow[r, hook, "\iota"'] & R^k \arrow[r, two heads, "\pi^{R^k}_{\text{Ker}(f)}"'] & \text{Coker}(\iota) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd} \tag{3.30}$$

μεταθετικό. Επειδή $\text{id}_{R^k}^{-1}(\text{Ker}(f)) = \text{Ker}(f)$, *και* ο $\text{id}_{R^k} \circ \pi^{R^k}_{\text{Ker}(f)}$ είναι επιμορφισμός, ο εν λόγω ομομορφισμός είναι *ισομορφισμός*. (Βλ. πόρισμα 3.1.14). Επιπροσθέτως, εάν h_1 είναι ένας αυτομορφισμός τού R^l και h_2 ένας αυτομορφισμός τού R^k, τότε

$$\text{Coker}(h_2 \circ \iota \circ h_1) \cong \text{Coker}(\iota) \cong M. \tag{3.31}$$

[23] $\text{tors}(M) := \{m \in M \mid \exists r \in R \smallsetminus \{0_R\} : rm = 0_M\}$.

3.4.3 Λήμμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος, τότε η διαφορά $k - l$ σε οιαδήποτε παράσταση*

$$\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \twoheadrightarrow M \longrightarrow \{0\}$$

τού M είναι σταθερή. Μάλιστα, ισχύει $k - l = \text{fr-rank}_R(M)$.

Αποδειξη. **Βήμα 1ο**. Ας υποθέσουμε ότι

$$\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \overset{f}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\} \;\text{ και }\; \{0\} \longrightarrow R^{l'} \hookrightarrow R^{k'} \overset{g}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}$$

είναι δυο τυχούσες παραστάσεις τού M. Τότε υφίσταται προφανώς και μια τρίτη παράσταση τού M:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[dr] & & & \{0\} \arrow[d] & & & \{0\} \arrow[dl] \\
& R^l \cong \mathrm{Ker}(f) \arrow[rr, hook, "j_1 := \iota_1|_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{Ker}(f \oplus g) \arrow[d] & & \mathrm{Ker}(g) \cong R^{l'} \arrow[ll, hook', "j_2 := \iota_2|_{\mathrm{Ker}(g)}"'] \arrow[dl, hook'] & \\
& & R^k \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[dr, two heads, "f"'] & R^k \oplus R^{k'} \arrow[d, two heads, "f \oplus g"] & R^{k'} \arrow[l, hook', "\iota_2"'] \arrow[dl, two heads, "g"] & & \\
& & & M \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
& & \{0\} & \{0\} & \{0\} & &
\end{tikzcd}$$

όπου $(f \oplus g)(x, y) := f(x) + g(y), \forall (x, y) \in R^k \times R^{k'}$, και ι_1, ι_2 οι συνήθεις ενθέσεις. Εν συνεχεία θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \cong R^l \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R^k \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "\iota_1"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f \oplus g) \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R^k \oplus R^{k'} \arrow[r, two heads, "f \oplus g"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Coker}(j_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\iota_1) \cong R^{k'} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
& \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

με τις τρεις του στήλες ακριβείς. Επειδή οι δύο άνω γραμμές του είναι ακριβείς, η τρίτη γραμμή είναι ωσαύτως αληθής (δυνάμει τού (i) τού λήμματος 3.1.10 των 3×3).

Επομένως, $\mathrm{Coker}(j_1) \cong \mathrm{Coker}(\iota_1) \cong R^{k'}$ και ο συμπυρήνας $\mathrm{Coker}(j_1)$ είναι ελεύθερος R-μόδιος. Σύμφωνα με την πρόταση 3.1.31 η πρώτη στήλη είναι *διασπώμενη* βραχεία ακριβής ακολουθία. Ως εκ τούτου,

$$\mathrm{Ker}(f \oplus g) \cong \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Coker}(j_1) \cong R^l \oplus R^{k'} \cong R^{l+k'}. \tag{3.32}$$

(Βλ. θεώρημα 3.1.29.) Κατ' αναλογίαν, από το μεταθετικό διάγραμμα (με ακριβείς στήλες):

$$\begin{tikzcd}
& \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g) \cong R^{l'} \arrow[r, hook] \arrow[d, "j_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R^{k'} \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d, "\iota_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f \oplus g) \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R^k \oplus R^{k'} \arrow[r, two heads, "f\oplus g"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Coker}(j_2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\iota_2) \cong R^k \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
& \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

λαμβάνουμε

$$\mathrm{Ker}(f \oplus g) \cong \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Coker}(j_2) \cong R^{l'} \oplus R^k \cong R^{l'+k}. \tag{3.33}$$

Λόγω των (3.32) και (3.33) το θεώρημα 2.5.38 δίδει $l' + k = l + k' \Rightarrow k - l = k' - l'$.

Βήμα 2ο. Έστω $\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \overset{f}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}$ τυχούσα παράσταση τού M και έστω $R^l \cong \mathrm{Ker}(f) \overset{\iota}{\hookrightarrow} R^k$ η συνήθης ένθεση. Ως γνωστόν, $M \cong \mathrm{Coker}(\iota)$ (βλ. (3.30)). Εάν υποτεθεί ότι ο $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{k\times l}(R)$ είναι ο πίνακας παραστάσεως τού μονομορφισμού $\iota \in \mathrm{Hom}_R(R^l, R^k)$ ως προς δυο διατεταγμένες βάσεις $(v_1, ..., v_l)$ και $(w_1, ..., w_k)$ των R^l και R^k, αντιστοίχως[24], τότε ο συμπυρήνας τού ι είναι ισόμορφος με τον συμπυρήνα *οιουδήποτε ισοδύναμού του* (βλ. (3.31)), οπότε η αντικατάσταση τού $\mathbf{A}$ με έναν ισοδύναμό του *δεν επηρεάζει* την παράσταση τού M. Ως γνωστόν[25], υπάρχουν διατεταγμένες βάσεις $(v'_1, ..., v'_l)$ και $(w'_1, ..., w'_k)$ των R^l και R^k, τέτοιες ώστε

$$\iota(v'_j) = \begin{cases} d_j w'_j, & \text{όταν } 1 \leqslant j \leqslant r, \\ 0_R, & \text{όταν } r < j \leqslant l, \end{cases}$$

όπου $d_1, ..., d_r \in R \smallsetminus \{0_R\}$ με $d_\varrho \mid d_{\varrho+1}$, $\forall \varrho \in \{1, ..., r-1\}$, και $r := \mathrm{rank}(\mathbf{A})$. Κατά συνέπειαν, ο νέος πίνακας παραστάσεως τού ι ως προς αυτές (που είναι ισοδύναμος

[24] Εξ ορισμού, $\iota(v_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} w_i$ για κάθε $j \in \{1, ..., l\}$.

[25] Βλ., π.χ., [15], Ch. 12, §1, Theorem 4, σελ. 460, ή [17], Proposition VII.2.11, σελ. 339.

τού **A**) είναι ο

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{D} & \mathbf{0}_{r\times(l-r)} \\ \hline \mathbf{0}_{(k-r)\times r} & \mathbf{0}_{(k-r)\times(l-r)} \end{array}\right), \quad \text{όπου } \mathbf{D} := \mathrm{diag}(d_1, ..., d_r).$$

Τούτο σημαίνει ότι $\mathrm{Im}(\iota) = Rd_1w_1' \oplus \cdots \oplus Rd_rw_r'$, οπότε

$$\begin{aligned} M &\cong \mathrm{Coker}(\iota) = R^k / Rd_1w_1' \oplus \cdots \oplus Rd_rw_r' \\ &\cong Rw_1' \oplus \cdots \oplus Rw_k' \,/ Rd_1w_1' \oplus \cdots \oplus Rd_rw_r' \oplus \underbrace{\{0\} \oplus \cdots \oplus \{0\}}_{k-r \text{ φορές}} \\ &\cong (Rw_1'/Rd_1w_1') \oplus \cdots \oplus (Rw_r'/Rd_rw_r') \oplus Rw_{r+1}' \oplus \cdots \oplus Rw_k' \\ &\underset{(2.43)}{\cong} (R/Rd_1) \oplus \cdots \oplus (R/Rd_r) \oplus Rw_{r+1}' \oplus \cdots \oplus Rw_k' \cong (\bigoplus_{\nu=1}^{r} R/Rd_\nu) \oplus R^{k-r}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{tors}(M) \cong \bigoplus_{\nu=1}^{r} R/Rd_\nu$ και $\mathrm{frp}(M) \cong R^{k-r}$. Εάν για τυχούσα βάση $\{b_1, ..., b_k\}$ τού R^k θεωρήσουμε (για οιαδήποτε $a_1, ..., a_k \in R$) τον επιμορφισμό

$$h : R^k \longrightarrow (\bigoplus_{\nu=1}^{r} R/Rd_\nu) \oplus R^{k-r},$$
$$h(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i) := (a_1 + Rd_1, ..., a_r + Rd_r, a_{r+1}, ..., a_k)$$

με πυρήνα

$$\mathrm{Ker}(h) = Rd_1b_1 \oplus \cdots \oplus Rd_rb_r \cong R^r,$$

τότε η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(h) \cong R^r \hookrightarrow R^k \overset{h}{\twoheadrightarrow} (\bigoplus_{\nu=1}^{r} R/Rd_\nu) \oplus R^{k-r} \cong M \longrightarrow \{0\}$$

μπορεί να ιδωθεί ως μια νέα παράσταση τού M. Από τα προαναφερθέντα στο 1ο βήμα συνάγεται ότι $k - l = k - r \Rightarrow r = l$ και ότι $\text{fr-rank}(M) = k - l$. □

3.4.4 Λήμμα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν*

$$\{0\} \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{f_2} M_1 \xrightarrow{f_1} M_0 \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής ακολουθία πεπερασμένως παραγομένων R-μοδίων (όπου $n \in \mathbb{N}$), τότε

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \text{fr-rank}_R(M_j) = 0. \tag{3.34}$$

Απόδειξη. Για $n = 1$ η (3.34) είναι προφανής. Όταν $n = 2$ θεωρούμε παραστάσεις

$$\{0\} \longrightarrow R^l \hookrightarrow R^k \overset{g}{\twoheadrightarrow} M_0 \longrightarrow \{0\} \ \text{ και } \{0\} \longrightarrow R^{l'} \hookrightarrow R^{k'} \overset{g'}{\twoheadrightarrow} M_2 \longrightarrow \{0\}$$

των M_0 και M_2, αντιστοίχως. Μέσω αυτών κατασκευάζεται μια παράσταση

$$\{0\} \longrightarrow R^{l+l'} \hookrightarrow R^{k+k'} \twoheadrightarrow M_1 \longrightarrow \{0\}$$

τού M_1. Πράγματι· ας θεωρήσουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(g') \cong R^{l'} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ker}(\alpha \oplus \beta) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ker}(g) \cong R^{l} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & R^{k'} \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads, "g'"'] \arrow[dr, "\alpha"] & R^{k+k'} \arrow[r, two heads, "\pi^{R^{k+k'}}_{R^{k'}}"] \arrow[d, two heads, "\alpha\oplus\beta"] & R^{k} \cong R^{k+k'}/R^{k'} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "g"] \arrow[dl, "\beta"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d] & M_1 \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d] & M_0 \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
 & \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

όπου $\alpha := f_2 \circ g'$ και $\beta \in \mathrm{Hom}_R(R^k, M_1)$ ο μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός για τον οποίο ισχύει[26] $f_1 \circ \beta = g$. (Βλ. θεώρημα 2.2.25.) Αυτό έχει *και τις τρεις του στήλες* ακριβείς. Επειδή οι δύο κάτω γραμμές είναι ακριβείς, η πρώτη γραμμή είναι ωσαύτως ακριβής (δυνάμει τού (ii) τού λήμματος 3.1.10 των 3×3). Επιπλέον, σύμφωνα με την πρόταση 3.1.31 η πρώτη γραμμή είναι *διασπώμενη* βραχεία ακριβής ακολουθία, διότι ο $\mathrm{Ker}(g) \cong R^l$ είναι ελεύθερος R-μόδιος. Κατά το θεώρημα 3.1.29,

$$\mathrm{Ker}(\alpha \oplus \beta) \cong R^{l'} \oplus R^{l} \cong R^{l+l'}.$$

Από το λήμμα 3.4.3 συνάγεται ότι

$$\text{fr-rank}_R(M_1) = (k + k') - (l + l') = (k - l) + (k' - l') = \text{fr-rank}_R(M_0) + \text{fr-rank}_R(M_2),$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής και για $n = 2$. Για $n \geqslant 3$ εργαζόμαστε επαγωγικώς: Διασπούμε την αρχική ακριβή ακολουθία σε δύο ακριβείς ακολουθίες

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & M_n \arrow[r, "f_n"] & M_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r, "f_3"] & M_2 \arrow[r, two heads, "f_2'"] & \mathrm{Im}(f_2) = \mathrm{Ker}(f_1) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \{0\} \\
 & & & & & M_1 \arrow[d, two heads, "f_1"'] & \\
 & & & & & M_0 \arrow[d] & \\
 & & & & & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

[26] Προφανώς, $\mathrm{Im}(g) \subseteq M_0 = \mathrm{Im}(f_1)$.

(όπου f_2' είναι ο επιμορφισμός ο προκύπτων από τον ομομορφισμό f_2 ύστερα από περιορισμό τού πεδίου τιμών τού τελευταίου στην εικόνα του). Από την επαγωγική υπόθεση για καθεμιά εξ αυτών λαμβάνουμε

$$\sum_{j=2}^{n} (-1)^j \text{ fr-rank}_R(M_j) - \text{ fr-rank}_R(\text{Im}(f_2)) = 0 \tag{3.35}$$

και

$$\text{fr-rank}_R(M_0) - \text{ fr-rank}_R(M_1) + \text{ fr-rank}_R(\text{Im}(f_2)) = 0. \tag{3.36}$$

Κατόπιν προσθέσεως των (3.35) και (3.36) κατά μέλη προκύπτει η (3.34). □

3.4.5 Ορισμός. Έστω R μια Π.Κ.Ι. και έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_q, d_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο πεπερασμένως παραγομένων R-μοδίων. Εάν υπάρχει κάποιος $r \in \mathbb{N}_0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $M_q \cong \{0\}$ για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ με $|q| > r$, τότε το $\mathbf{M}_\bullet$ ονομάζεται **πεπερασμένο αλυσωτό σύμπλοκο**. Εν τοιαύτη περιπτώσει, ορίζεται καλώς το εναλλάσσον άθροισμα

$$\boxed{\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) := \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(M_q) \in \mathbb{Z},}$$

το οποίο καλείται **χαρακτηριστική Euler τού $\mathbf{M}_\bullet$ ως προς την** R.

3.4.6 Πρόταση. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν*

$$\mathbf{M}_\bullet = (M_q, d_q)_{q\in\mathbb{Z}},\ \mathbf{M}'_\bullet = (M'_q, d'_q)_{q\in\mathbb{Z}} \ \text{ και } \ \mathbf{M}''_\bullet = (M''_q, d''_q)_{q\mathbb{Z}},$$

είναι τρία πεπερασμένα αλυσωτά σύμπλοκα R-μοδίων και

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{M}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία, τότε

$$\boxed{\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) = \chi_R(\mathbf{M}'_\bullet) + \chi_R(\mathbf{M}''_\bullet).}$$

Απόδειξη. Επειδή για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ η

$$\{0\} \longrightarrow M'_q \xrightarrow{f_q} M_q \xrightarrow{g_q} M''_q \longrightarrow \{0\}$$

είναι βραχεία ακριβής ακολουθία, έχουμε (λόγω τής (3.34) για $n = 2$)

$$\begin{aligned} \chi_R(\mathbf{M}_\bullet) &= \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(M_q) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \ (\text{fr-rank}_R(M'_q) + \text{fr-rank}_R(M''_q)) \\ &= \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(M'_q) + \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(M''_q), \end{aligned}$$

όπου το τελευταίο ισούται με το άθροισμα $\chi_R(\mathbf{M}'_\bullet) + \chi_R(\mathbf{M}''_\bullet)$. □

3.4.7 Θεώρημα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. και έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_q, d_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ ένα πεπερασμένο αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων. Τότε κάθε μόδιος ομολογίας τού $\mathbf{M}_\bullet$ είναι πεπερασμένως παραγόμενος και*

$$\boxed{\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) = \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(H_q(\mathbf{M}_\bullet)).} \tag{3.37}$$

Αποδειξη. Εξ υποθέσεως, υπάρχει $r \in \mathbb{N}_0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $M_q \cong \{0\}$ για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ με $|q| > r$. Άρα $H_q(\mathbf{M}_\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ με $|q| > r$. Επιπροσθέτως, επειδή για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ έχουμε $B_q(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq Z_q(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq M_q$, τόσον οι R-μόδιοι $B_q(\mathbf{M}_\bullet)$ και $Z_q(\mathbf{M}_\bullet)$ όσον και ο $H_q(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι πεπερασμένως παραγόμενοι. (Βλ. πόρισμα 2.5.49.) Θεωρούμε τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow B_q(\mathbf{M}_\bullet) \hookrightarrow Z_q(\mathbf{M}_\bullet) \overset{\pi^{Z_q(\mathbf{M}_\bullet)}_{B_q(\mathbf{M}_\bullet)}}{\twoheadrightarrow} H_q(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\} \tag{3.38}$$

και

$$\{0\} \longrightarrow Z_q(\mathbf{M}_\bullet) \hookrightarrow M_q \overset{\check{d}_n}{\twoheadrightarrow} B_{q-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\}, \tag{3.39}$$

όπου $\check{d}_n$ ο επιμορφισμός ο προκύπτων από τον d_n (ύστερα από περιορισμό τού πεδίου τιμών αυτού στην εικόνα του), και υποθέτουμε δίχως βλάβη τής γενικότητας ότι $M_q \cong \{0\}$ για όλους τους *αρνητικούς* q (διότι αλλιώς υπάρχει η δυνατότητα μετονομασίας των δεικτών κατόπιν μετατοπίσεώς τους έως ότου καταστούν $\geqslant 0$). Από την (3.39) και από το λήμμα 3.4.4 έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) &= \sum_{q\in\mathbb{Z}} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(M_q) = \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(M_q) \\
&= \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \left(\text{fr-rank}_R(Z_q(\mathbf{M}_\bullet)) + \text{fr-rank}_R(B_{q-1}(\mathbf{M}_\bullet))\right) \\
&= \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(Z_q(\mathbf{M}_\bullet)) + \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(B_{q-1}(\mathbf{M}_\bullet))).
\end{aligned}$$

Επειδή (εξ υποθέσεως) $\text{fr-rank}_R(B_{-1}(\mathbf{M}_\bullet)) = 0 = \text{fr-rank}_R(B_r(\mathbf{M}_\bullet))$ (καθώς έχουμε $d_0 = 0$ και $M_{r+1} \cong \{0\}$), ύστερα από αλλαγή τού δείκτη αθροίσεως στο τελευταίο άθροισμα η (3.38) και το λήμμα 3.4.4 δίδουν

$$\begin{aligned}
\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) &= \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(Z_q(\mathbf{M}_\bullet)) + \sum_{q=0}^{r} (-1)^{q+1} \text{ fr-rank}_R(B_q(\mathbf{M}_\bullet))) \\
&= \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \left(\text{fr-rank}_R(Z_q(\mathbf{M}_\bullet)) - \text{fr-rank}_R(B_q(\mathbf{M}_\bullet))\right) \\
&= \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \text{ fr-rank}_R(H_q(\mathbf{M}_\bullet)),
\end{aligned}$$

οπότε η (3.37) είναι όντως αληθής. □

3.5 ΑΛΥΣΩΤΗ ΟΜΟΤΟΠΙΑ

Εάν $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και

$$f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$$

αλυσωτοί μετασχηματισμοί, πότε έχουμε $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$; Μια ικανή συνθήκη για να ισχύουν αυτές οι ισότητες είναι εύκολα περιγράψιμη μέσω τής εισαγωγής τής εννοίας τής *αλυσωτής ομοτοπίας*.

3.5.1 Ορισμός. Έστω ότι τα $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ονομάζονται **(αλυσωτώς) ομότοποι** όταν υπάρχει μια ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων

$$(h_n : M_n \longrightarrow M'_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} \tag{3.40}$$

για την οποία ισχύει

$$\boxed{f_n - g_n = d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[dl, "h_{n+1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] & \cdots \arrow[dl, "h_{n-2}"'] \\
\cdots \arrow[r, "d'_{n+2}"] & M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & M'_n \arrow[r, "d'_n"] & M'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Συνήθης συμβολισμός[27]: $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$. Εν προκειμένω, μια τέτοιου είδους ακολουθία $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **αλυσωτή ομοτοπία**.

3.5.2 Σημείωση. Όταν $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} \simeq \mathbf{0}_\bullet$, η $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **συστέλλουσα ομοτοπία** (για το $\mathbf{M}_\bullet$) και το ίδιο το $\mathbf{M}_\bullet$ **συσταλτό αλυσωτό σύμπλοκο.**

3.5.3 Ορισμός. Έστω ότι τα $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο συναλυσωτά σύμπλοκα. Δυο συναλυσωτοί μετασχηματισμοί $f^\bullet, g^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \to \mathbf{M}'^\bullet$ ονομάζονται **(συναλυσωτώς) ομότοποι** όταν υπάρχει μια ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων

$$(h^n : M^n \longrightarrow M'^{n-1})_{n\in\mathbb{Z}} \tag{3.41}$$

[27] Προσοχή! Μια τέτοια $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *δεν είναι* απεικόνιση αλυσωτών συμπλόκων από το $\mathbf{M}_\bullet$ στο $\mathbf{M}'_\bullet$ υπό την έννοια τού ορισμού 3.2.4 (διότι γίνεται αναβίβαση δεικτών κατά 1).

για την οποία ισχύει

$$\boxed{f^n - g^n = d'^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Συνήθης συμβολισμός[28]: $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}} : f^\bullet \simeq g^\bullet$. Εν προκειμένω, μια τέτοιου είδους ακολουθία $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **συναλυσωτή ομοτοπία**.

3.5.4 Σημείωση. Όταν $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{M}^\bullet} \simeq \mathbf{0}^\bullet$, η $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **συστέλλουσα ομοτοπία** (για το $\mathbf{M}^\bullet$) και το ίδιο το $\mathbf{M}^\bullet$ **συσταλτό συναλυσωτό σύμπλοκο.**

3.5.5 Πρόταση. *Η σχέση "$\simeq$" τής ομοτοπίας αποτελεί σχέση ισοδυναμίας (υπό τη συνήθη έννοια) επί τής κλάσεως των αλυσωτών (και αντιστοίχως, των συναλυσωτών) μετασχηματισμών.*

Απόδειξη. Έστω ότι τα $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet, g_\bullet, k_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ τρεις αλυσωτοί μετασχηματισμοί.

(i) Θέτοντας $h_n := 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, έχουμε προφανώς $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq f_\bullet$, οπότε η "$\simeq$" είναι ανακλαστική.

(ii) Υποθέτοντας ότι $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$ για κάποια αλυσωτή ομοτοπία (3.40) διαπιστώνουμε ότι $(-h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : g_\bullet \simeq f_\bullet$, οπότε η "$\simeq$" είναι συμμετρική.

(iii) Εάν υποθέσουμε ότι $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$ και $(h'_n)_{n\in\mathbb{Z}} : g_\bullet \simeq k_\bullet$, τότε

$$(h_n + h'_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq k_\bullet,$$

οπότε η "$\simeq$" είναι *και* μεταβατική. (Η απόδειξη για συναλυσωτά σύμπλοκα είναι παρόμοια.) □

3.5.6 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι τρία αλυσωτά σύμπλοκα και*

$$f_\bullet, f'_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \ \text{ και } \ g_\bullet, g'_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''_\bullet$$

αλυσωτοί μετασχηματισμοί, τότε ισχύει η εξής συνεπαγωγή:

$$[f_\bullet \simeq f'_\bullet \ \text{ και } \ g_\bullet \simeq g'_\bullet] \Longrightarrow (g \circ f)_\bullet \simeq (g' \circ f')_\bullet .$$

Απόδειξη. Εξ υποθέσεως, $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq f'_\bullet$ και $(k_n)_{n\in\mathbb{Z}} : g_\bullet \simeq g'_\bullet$ για κάποιες ακολουθίες ομομορφισμών $(h_n : M_n \longrightarrow M'_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ και $(k_n : M'_n \longrightarrow M''_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. Τότε

$$(\ell_n)_{n\in\mathbb{Z}} : (g \circ f)_\bullet \simeq (g' \circ f')_\bullet , \ \text{ όπου } \ \ell_n := g_{n+1} \circ h_n + k_n \circ f'_n .$$

[28] Προσοχή! Μια τέτοια $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *δεν είναι* απεικόνιση συναλυσωτών συμπλόκων από το $\mathbf{M}^\bullet$ στο $\mathbf{M}'^\bullet$ υπό την έννοια τού ορισμού 3.2.22 (διότι γίνεται καταβίβαση δεικτών κατά 1).

Πράγματι· για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&d''_{n+1} \circ \ell_n + \ell_{n-1} \circ d_n = d''_{n+1} \circ (g_{n+1} \circ h_n + k_n \circ f'_n) + (g_n \circ h_{n-1} + k_{n-1} \circ f'_{n-1}) \circ d_n \\
&= (d''_{n+1} \circ g_{n+1}) \circ h_n + d''_{n+1} \circ k_n \circ f'_n + g_n \circ h_{n-1} \circ d_n + k_{n-1} \circ (f'_{n-1} \circ d_n) \\
&= (g_n \circ d'_{n+1}) \circ h_n + d''_{n+1} \circ k_n \circ f'_n + g_n \circ h_{n-1} \circ d_n + k_{n-1} \circ (d'_n \circ f'_n) \\
&= g_n \circ (d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n) + (d''_{n+1} \circ k_n + k_{n-1} \circ d'_n) \circ f'_n \\
&= g_n \circ (f_n - f'_n) + (g_n - g'_n) \circ f'_n = g_n \circ f_n - g'_n \circ f'_n,
\end{aligned}$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

3.5.7 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και* $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ *δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί, τότε ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή*[29]

$$\boxed{f_\bullet \simeq g_\bullet \Longrightarrow [H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet),\ \forall n \in \mathbb{Z}].} \tag{3.42}$$

Απόδειξη. Εάν $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$, τότε για οιοδήποτε $x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ και οιονδήποτε $n \in \mathbb{Z}$ η διαφορά $H_n(f_\bullet)(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) - H_n(g_\bullet)(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet))$ ισούται με

$$\begin{aligned}
(f_n(x) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) - (g_n(x) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) &= (f_n(x) - g_n(x)) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet) \\
= (d'_{n+1}(h_n(x)) + h_{n-1}(d_n(x))) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet) &= B_n(\mathbf{M}'_\bullet) = 0_{H_n(\mathbf{M}'_\bullet)},
\end{aligned}$$

διότι $x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \Rightarrow d_n(x) = 0_{M_{n-1}}$ και

$$d'_{n+1}(h_n(x)) \in \mathrm{Im}(d'_{n+1}) = B_n(\mathbf{M}'_\bullet).$$

Επομένως, $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$. □

3.5.8 Σημείωση. Η αντίστροφη συνεπαγωγή "$\Longleftarrow$" στην (3.42) δεν είναι πάντοτε αληθής. Επί παραδείγματι, παγιώνοντας έναν φυσικό αριθμό $k \geqslant 2$ και έναν ακέραιο αριθμό ν, και θεωρώντας δύο αντίτυπα τού ιδίου αλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου

$$M_n := \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n \in \{\nu, \nu+1\}, \\ \mathbb{Z}_k, & \text{όταν } n = \nu - 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \notin \{\nu-1, \nu, \nu+1\}, \end{cases} \quad \text{και} \quad d_n := \begin{cases} k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}, & \text{όταν } n = \nu+1, \\ \varpi, & \text{όταν } n = \nu, \\ 0, & \text{όταν } n \notin \{\nu, \nu+1\}, \end{cases}$$

(με[30] $\mathbb{Z} \ni \xi \longmapsto \varpi(\xi) := [\xi]_k \in \mathbb{Z}_k$), καθώς και τους αλυσωτούς μετασχηματισμούς $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$, όπου

$$f_n := \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}, & \text{όταν } n \in \{\nu, \nu+1\}, \\ \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k}, & \text{όταν } n = \nu - 1, \\ 0, & \text{όταν } n \notin \{\nu-1, \nu, \nu+1\}, \end{cases} \quad \text{και} \quad g_n := 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

[29] Όταν γράφουμε απλώς $f_\bullet \simeq g_\bullet$ εννοούμε ότι $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$ για κάποια ακολουθία (3.40).

[30] Σημειωτέον ότι η $\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} = M_{\nu+1} \xrightarrow{k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} M_\nu = \mathbb{Z} \xrightarrow{\varpi} M_{\nu-1} = \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά η βραχεία ακριβής ακολουθία που είχε παρατεθεί στο (iv) τού εδαφίου 3.1.3.

παρατηρούμε ότι οι $f_\bullet, g_\bullet$ *δεν είναι* ομότοποι. Πράγματι· εάν ίσχυε

$$(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$$

για κάποια αλυσωτή ομοτοπία (3.40), τότε θα είχαμε κατ' ανάγκην $h_n = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{\nu-1,\nu\}$, και για την τιμή $n = \nu$ θα λαμβάναμε

$$\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} = f_\nu - g_\nu = d_{\nu+1} \circ h_\nu + h_{\nu-1} \circ d_\nu = k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \circ h_\nu + h_{\nu-1} \circ \varpi. \tag{3.43}$$

Επειδή $h_{\nu-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k,\mathbb{Z})$ και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k,\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ (βλ. 4.1.3 (iii)), ο $h_{\nu-1}$ θα ήταν ο μηδενικός ομομορφισμός, οπότε η (3.43) θα έδιδε

$$\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} = k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \circ h_\nu \Rightarrow kh_\nu(\xi) = \xi,\ \forall \xi \in \mathbb{Z},$$

ήτοι κάτι το οποίο θα ήταν άτοπο (καθώς δεν μπορεί *κάθε* ακέραιος αριθμός να είναι ίσος με κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο τού k). Από την άλλη μεριά, είναι προφανές ότι $H_n(\mathbf{M}_\bullet) \cong \{0\}$, οπότε

$$H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

3.5.9 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M'}^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο συναλυσωτά σύμπλοκα και*

$$f^\bullet, g^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M'}^\bullet$$

δυο συναλυσωτοί μετασχηματισμοί, τότε ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή[31]

$$\boxed{f^\bullet \simeq g^\bullet \Longrightarrow [H^n(f^\bullet) = H^n(g^\bullet),\ \forall n \in \mathbb{Z}].}$$

Αποδειξη. Παρόμοια εκείνης τής προτάσεως 3.5.7. □

3.5.10 Ορισμός. Λέμε ότι δυο αλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet$ (και αντιστοίχως, δυο συναλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{M}^\bullet$, $\mathbf{M'}^\bullet$) είναι **ομοτοπικώς ισοδύναμα** όταν υπάρχουν αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$, (και αντιστοίχως, όταν υπάρχουν συναλυσωτοί μετασχηματισμοί $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M'}^\bullet$ και $g^\bullet : \mathbf{M'}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}^\bullet$), τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$(g \circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} \ \text{ και } \ (f \circ g)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}$$

(και αντιστοίχως,

$$(g \circ f)^\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}^\bullet} \ \text{ και } \ (f \circ g)^\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M'}^\bullet}).$$

Τέτοιοι αλυσωτοί μετασχηματισμοί (και αντιστοίχως, συναλυσωτοί μετασχηματισμοί) ονομάζονται **αλυσωτές ισοδυναμίες** (και αντιστοίχως, **συναλυσωτές ισοδυναμίες**) και ο ένας **ομοτοπικό αντίστροφο** τού άλλου.

[31] Όταν γράφουμε απλώς $f^\bullet \simeq g^\bullet$ εννοούμε ότι $(h^n)_{n\in\mathbb{Z}} : f^\bullet \simeq g^\bullet$ για κάποια ακολουθία (3.41).

3.5.11 Πρόταση. *Έστω ότι* $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet$ *είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Εάν υποθέσουμε ότι τα* $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet$ *είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα και*

$$f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$$

μια αλυσωτή ισοδυναμία, τότε

$$H_n(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow[H_n(f_\bullet)]{\cong} H_n(\mathbf{M'}_\bullet)\ ,\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

Ως εκ τούτου, στην ειδική περίπτωση όπου ο δακτύλιος αναφοράς R *είναι μια Π.Κ.Ι. και τα* $\mathbf{M}_\bullet$ *και* $\mathbf{M}'_\bullet$ *πεπερασμένα, έχουμε*

$$\chi_R(\mathbf{M}_\bullet) = \chi_R(\mathbf{M}'_\bullet).$$

Αποδειξη. Εξ υποθέσεως, υπάρχει αλυσωτός μετασχηματισμός $g_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$ (συγκεκριμένα, κάποια αλυσωτή ισοδυναμία υπό την έννοια τού ορισμού 3.5.10) με

$$(g \circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} \ \text{ και } \ (f \circ g)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}$$

Σύμφωνα με τις προτάσεις 3.2.6, 3.2.7 και 3.5.7,

$$H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet) = H_n((g \circ f)_\bullet) = H_n(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}) = \mathrm{id}_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)}$$

και (κατ' αναλογίαν)

$$H_n(f_\bullet) \circ H_n(g_\bullet) = \mathrm{id}_{H_n(\mathbf{M}'_\bullet)}.$$

Τούτο σημαίνει ότι αμφότεροι οι $H_n(f_\bullet)$ και $H_n(g_\bullet)$ είναι ισομορφισμοί (και ο ένας αντίστροφος τού άλλου). Η ισότητα των χαρακτηριστικών τού Euler (στην ανωτέρω αναφερθείσα ειδική περίπτωση) έπεται άμεσα από το θεώρημα 3.4.7. □

3.5.12 Σημείωση. Εάν $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός με την ιδιότητα

$$H_n(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow[H_n(f_\bullet)]{\cong} H_n(\mathbf{M'}_\bullet)\ ,\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

τότε δεν ισχύει εν γένει το αντίστροφο τής προτάσεως 3.5.11, δηλαδή ο $f_\bullet$ *δεν είναι κατ' ανάγκην αλυσωτή ισοδυναμία*. Ωστόσο, μια ικανή συνθήκη για να ισχύει και το αντίστροφο δίδεται στο θεώρημα 3.5.23.

3.5.13 Πρόταση. *Έστω ότι* $\mathbf{M}^\bullet$, $\mathbf{M}'^\bullet$ *είναι δυο συναλυσωτά σύμπλοκα. Εάν υποθέσουμε ότι τα* $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet$ *είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα και* $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$ *μια συναλυσωτή ισοδυναμία, τότε*

$$H^n(\mathbf{M}^\bullet) \xrightarrow[H^n(f^\bullet)]{\cong} H^n(\mathbf{M}'^\bullet)\ ,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Αποδειξη. Παρόμοια εκείνης (τού πρώτου μέρους) τής προτάσεως 3.5.11. □

3.5.14 Ορισμός. Εάν $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε η ακολουθία $\mathbf{C}(f)_\bullet = (\mathrm{C}(f)_n, d_n^f)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου

$$\boxed{\mathrm{C}(f)_n := M_{n-1} \oplus M'_n}$$

και

$$\boxed{\begin{gathered} d_n^f : \mathrm{C}(f)_n \longrightarrow \mathrm{C}(f)_{n-1}, \\ (x,y) \longmapsto d_n^f(x,y) := (-d_{n-1}(x), d'_n(y) + f_{n-1}(x)) \end{gathered}}$$

είναι **ο αλγεβρικός κώνος τού** $f_\bullet$.

3.5.15 Λήμμα. *Η ανωτέρω ακολουθία $\mathbf{C}(f)_\bullet = (\mathrm{C}(f)_n, d_n^f)_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί αλυσωτό σύμπλοκο.*

Αποδειξη. Η d_n^f είναι προδήλως ομομορφισμός R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επίσης, για οιαδήποτε $n \in \mathbb{Z}$, $x \in M_{n-1}$ και $y \in M'_n$ έχουμε

$$\begin{aligned} &(d_{n-1}^f \circ d_n^f)(x,y) = d_{n-1}^f(-d_{n-1}(x), d'_n(y) + f_{n-1}(x)) \\ &= (-d_{n-2}(-d_{n-1}(x)), d'_{n-1}(d'_n(y) + f_{n-1}(x)) + f_{n-2}(-d_{n-1}(x))) \\ &= ((\underbrace{d_{n-2} \circ d_{n-1}}_{=0})(x), (\underbrace{d'_{n-1} \circ d'_n}_{=0})(y) + (\underbrace{d'_{n-1} \circ f_{n-1} - f_{n-2} \circ d_{n-1}}_{=0})(x)) = 0_{\mathrm{C}(f)_{n-2}}, \end{aligned}$$

διότι τα $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{M}'_\bullet$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και ο $f_\bullet$ αλυσωτός μετασχηματισμός. Άρα η $\mathbf{C}(f)_\bullet$ είναι όντως ένα αλυσωτό σύμπλοκο. □

3.5.16 Πρόταση. *Εάν $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα, $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός και*

$$\begin{aligned} j_\bullet = (j_n : M'_n \longrightarrow \mathrm{C}(f)_n)_{n\in\mathbb{Z}}, &\qquad p_\bullet = (p_n : \mathrm{C}(f)_n \longrightarrow M_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}, \\ y \longmapsto j_n(y) := (0_{M_{n-1}}, y), &\qquad (x,y) \longmapsto p_n(x,y) := x, \end{aligned}$$

τότε η μακρά ακολουθία R-μοδίων ομολογίας

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_{n+1}(\mathbf{C}(f)_\bullet) \arrow[r, "H_{n+1}(p_\bullet)"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_n(f_\bullet)"] & H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[dll, "H_n(j_\bullet)"'] \\ & H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) \arrow[r, "H_n(p_\bullet)"] & H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}(f_\bullet)"] & H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[dll, "H_{n-1}(j_\bullet)"'] \\ & H_{n-1}(\mathbf{C}(f)_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}(p_\bullet)"] & \cdots & \end{tikzcd}$$

είναι ακριβής.

Αποδειξη. Λόγω τού ορισμού 3.5.14 και τού λήμματος 3.5.15 η

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \overset{j_\bullet}{\hookrightarrow} \mathbf{C}(f)_\bullet \overset{p_\bullet}{\twoheadrightarrow} \mathbf{M}_{\bullet-1} \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{3.44}$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 3.2.13 κατασκευάζουμε *τη μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας*

$$\cdots \overset{H_{n+1}(j_\bullet)}{\longrightarrow} H_{n+1}(\mathbf{C}(f)_\bullet) \overset{H_{n+1}(p_\bullet)}{\longrightarrow} H_{n+1}(\mathbf{M}_{\bullet-1}) \overset{\partial_{n+1}}{\longrightarrow} H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \overset{H_n(j_\bullet)}{\longrightarrow} H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) \to \cdots$$

για την (3.44). Λαμβάνοντας υπ' όψιν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "f_{n-1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_{n-2} \arrow[dl, dashed, "f_{n-2}"] \\
& M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, hook, "j_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"] \arrow[d, hook, "j_{n-1}"] & M'_{n-2} & \\
& \mathrm{C}(f)_n \arrow[r, "d^f_n"'] \arrow[d, two heads, "p_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{C}(f)_{n-1} \arrow[d, two heads, "p_{n-1}"] & & \\
M_n \arrow[r, "d_n"'] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"'] \arrow[d] & M_{n-2} \arrow[d] & & \\
& \{0\} & \{0\} & &
\end{tikzcd}$$

αρκεί να δειχθεί ότι ο συνδετικός ομομορφισμός

$$\partial_n : H_n(\mathbf{M}_{\bullet-1}) = H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)$$

ταυτίζεται με τον ομομορφισμό $H_{n-1}(f_\bullet)$ τον επαγόμενον μέσω τού αλυσωτού μετασχηματισμού $f_\bullet$. Για οιοδήποτε $x \in Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)$ έχουμε $x = p_n(x, y)$ για κάποιο $y \in M'_n$ (καθόσον ο p_n είναι επιμορφισμός). Κατά συνέπειαν,

$$0_{M_{n-2}} = (d_{n-1} \circ p_n)(x, y) = (p_{n-1} \circ d^f_n)(x, y) = p_{n-1}(\underbrace{-d_{n-1}(x)}_{=0_{M_{n-2}}}, d'_n(y) + f_{n-1}(x))$$

$$\Rightarrow (0_{M_{n-2}}, d'_n(y) + f_{n-1}(x)) \in \mathrm{Ker}(p_{n-1}) = \mathrm{Im}(j_{n-1}),$$

οπότε $j_{n-1}(d'_n(y) + f_{n-1}(x)) = (0_{M_{n-2}}, \underbrace{d'_n(y) + f_{n-1}(x)}_{\in M'_{n-1}})$. Τούτο σημαίνει ότι

$$d'_{n-1}(d'_n(y) + f_{n-1}(x)) = (\underbrace{d'_{n-1} \circ d'_n}_{=0})(y) + (d'_{n-1} \circ f_{n-1})(x) = (f_{n-2} \circ d_{n-1})(x),$$

ήτοι ότι[32]

$$\begin{aligned}\partial_n(x + B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)) &= (\underbrace{d'_n(y)}_{\in B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)} + f_{n-1}(x)) + B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \\ &= f_{n-1}(x) + B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) = H_{n-1}(f_\bullet)(x + B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)).\end{aligned}$$

Εξ αυτού συνάγεται η ισότητα $\partial_n = H_{n-1}(f_\bullet)$. □

[32] Για τον τρόπο ορισμού τού ∂_n βλ. εδάφιο 3.2.14.

3.5.17 Σημείωση. Αλγεβρικός κώνος $\mathrm{C}(f)^\bullet = (\mathrm{C}(f)^n, d_f^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ μπορεί να ορισθεί και για *συναλυσωτούς μετασχηματισμούς* $f^\bullet : \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'^\bullet$ μεταξύ δυο *συναλυσωτών συμπλόκων* $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{M}'^\bullet = (M'^n, d'^n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Εν προκειμένω,

$$\mathrm{C}(f)^n := M^{n+1} \oplus M'^n,$$

και

$$d_f^n : \mathrm{C}(f)^n \longrightarrow \mathrm{C}(f)^{n+1},$$
$$(x,y) \longmapsto d_f^n(x,y) := (-d^{n+1}(x), d'^n(y) + f^{n+1}(x)),$$

και οι αυτονόητες παραλλαγές τού λήμματος 3.5.15 και τής προτάσεως 3.5.16 εξακολουθούν να ισχύουν *και σε επίπεδο μοδίων συνομολογίας*.

3.5.18 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και* $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ *ένας αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε ισχύει η συνεπαγωγή*:

$$[H_n(f_\bullet) \text{ ισομορφισμός}, \forall n \in \mathbb{Z}] \Longleftrightarrow [\text{Το } \mathbf{C}(f)_\bullet \text{ είναι ακυκληματικό}].$$

Αποδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την μακρά ακριβή ακολουθία τής κατασκευασθείσας στην πρόταση 3.5.16.

"⇒" Υποθέτοντας ότι ο $H_n(f_\bullet)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οι $H_n(p_\bullet)$ και $H_n(j_\bullet)$ είναι μηδενικοί[33] ομομορφισμοί. Έστω τυχών $n \in \mathbb{Z}$. Για να αποδειχθεί ότι ο R-μόδιος $H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)$ είναι τετριμμένος αρκεί να αποδειχθεί ότι $(x,y) \in B_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)$ *για κάθε* $(x,y) \in Z_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)$. Έστω λοιπόν *τυχόν* $(x,y) \in Z_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) = \mathrm{Ker}(d_n^f)$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}(0_{M_{n-1}}, 0_{M'_n}) &= d_n^f(x,y) = (-d_{n-1}(x), d'_n(y) + f_{n-1}(x)) \\ &\Longrightarrow [x \in Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \ \text{ και } \ d'_n(y) + f_{n-1}(x) = 0_{M'_{n-1}}]. \quad (3.45)\end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(H_n(p_\bullet)) &= \{0_{H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}\} \Rightarrow H_n(p_\bullet)((x,y) + B_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)) = B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \\ &\Rightarrow p_n(x,y) + B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) = B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \\ &\Rightarrow p_n(x,y) \in B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) = \mathrm{Im}(d_n) \\ &\Rightarrow [\exists x' \in M_n : d_n(x') = x]. \quad (3.46)\end{aligned}$$

Από τις (3.45) και (3.46) έπεται ότι

$$\begin{aligned}& d'_n(y) + (f_{n-1} \circ d_n)(x') = 0_{M'_{n-1}} \Rightarrow d'_n(y) + (d'_n \circ f_n)(x') = 0_{M'_{n-1}} \\ &\Rightarrow y + f_n(x') \in \mathrm{Ker}(d'_n) =: Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \\ &\Rightarrow y + f_n(x') + B_n(\mathbf{M}'_\bullet) \in H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \ (= \mathrm{Ker}(H_n(j_\bullet))) \\ &\Rightarrow H_n(j_\bullet)(y + f_n(x') + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) = 0_{H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)} = B_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) \\ &\Rightarrow (0_{M_{n-1}}, y + f_n(x')) \in B_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) := \mathrm{Im}(d_{n+1}^f) \\ &\Rightarrow [\exists (z,w) \in M_n \oplus M'_{n+1} = \mathrm{C}(f)_n : d_{n+1}^f(z,w) = (0_{M_{n-1}}, y + f_n(x'))],\end{aligned}$$

[33] $\mathrm{Im}(H_n(p_\bullet)) = \{0_{H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}\} = \mathrm{Ker}(H_{n-1}(f_\bullet))$ και $\mathrm{Ker}(H_n(j_\bullet)) = H_n(\mathbf{M}'_\bullet) = \mathrm{Im}(H_n(f_\bullet))$.

οπότε

$$d_n(z) = 0_{M_{n-1}} \text{ και } d'_{n+1}(w) + f_n(z) = y + f_n(x') \tag{3.47}$$

και

$$\begin{aligned} d^f_{n+1}(z - x', w) &= (-d_n(z - x'), d'_{n+1}(w) + f_n(z - x')) \\ &= (-\underbrace{d_n(z)}_{=0_{M_{n-1}}} + d_n(x'), d'_{n+1}(w) + f_n(z) - f_n(x')) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Οι (3.47) και (3.48) δίδουν $(x, y) = (d_n(x'), y) = d^f_{n+1}(z - x', w) \in B_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)$.
"$\Leftarrow$" Τούτο έπεται άμεσα από τη μακρά ακριβή ακολουθία τής προτάσεως 3.5.16. (Πρβλ. εδ. 3.1.3 (i).) $\square$

3.5.19 Ορισμός. Ένα αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **ελεύθερο αλυσωτό σύμπλοκο**[34] όταν οι R-μόδιοι M_n είναι ελεύθεροι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

3.5.20 Θεώρημα. *Έστω* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *ένα ελεύθερο αλυσωτό σύμπλοκο. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι Π.Κ.Ι., τότε* το $\mathbf{M}_\bullet$ είναι συσταλτό $\Longleftrightarrow$ το $\mathbf{M}_\bullet$ είναι ακυκληματικό.

Απόδειξη. "$\Rightarrow$" Εάν $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} \simeq \mathbf{0}_\bullet$, έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

$$H_n(\mathbf{M}_\bullet) \underset{3.2.7}{=} H_n(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet})(H_n(\mathbf{M}_\bullet)) \underset{3.5.7}{=} H_n(\mathbf{0}_\bullet)(H_n(\mathbf{M}_\bullet)) = 0_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)/B_n(\mathbf{M}_\bullet)}.$$

"$\Leftarrow$" Εάν $H_n(\mathbf{M}_\bullet) = \{0_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)/B_n(\mathbf{M}_\bullet)}\}$, τότε $Z_n(\mathbf{M}_\bullet) = B_n(\mathbf{M}_\bullet)$, οπότε σχηματίζεται η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(\mathbf{M}_\bullet) = B_n(\mathbf{M}_\bullet) \hookrightarrow M_n \overset{\check{d}_n}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Im}(d_n) = B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επειδή ο M_{n-1} είναι εξ υποθέσεως ελεύθερος R-μόδιος, ο $B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq M_{n-1}$ είναι ωσαύτως ελεύθερος (δυνάμει τού θεωρήματος 2.5.47). Το πόρισμα 3.1.31 μας πληροφορεί ότι η ως άνω βραχεία ακριβής ακολουθία είναι *διασπώμενη*. Τούτο (βάσει τού θεωρήματος 3.1.29) σημαίνει ότι

$$\exists s_{n-1} \in \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet), M_n) : d_n \circ s_{n-1} = \mathrm{id}_{B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}.$$

Ως εκ τούτου, ορίζεται (καλώς) ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$h_n : M_n \longrightarrow M_{n+1}, \quad h_n := s_n \circ (\mathrm{id}_{M_n} - s_{n-1} \circ d_n), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Επειδή

$$\begin{aligned} & d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n \\ &= \underbrace{d_{n+1} \circ s_n}_{=\mathrm{id}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}} \circ (\mathrm{id}_{M_n} - s_{n-1} \circ d_n) + s_{n-1} \circ (\mathrm{id}_{M_{n-1}} - s_{n-2} \circ d_{n-1}) \circ d_n \\ &= \underbrace{d_{n+1} \circ s_n}_{=\mathrm{id}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}} - \underbrace{d_{n+1} \circ s_n}_{=\mathrm{id}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}} \circ s_{n-1} \circ d_n + s_{n-1} \circ d_n - s_{n-1} \circ s_{n-2} \circ \underbrace{d_{n-1} \circ d_n}_{=0} \\ &= \mathrm{id}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)} - 0 = \mathrm{id}_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)} - 0, \end{aligned}$$

[34] Κατ' αναλογίαν, ένα *συναλυσωτό* σύμπλοκο $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται **ελεύθερο συναλυσωτό σύμπλοκο** όταν οι R-μόδιοι M^n είναι ελεύθεροι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

έχουμε $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} \simeq \mathbf{0}_\bullet$. □

3.5.21 Σημείωση. Εάν υποτεθεί ότι M_1, M_2, N_1, N_2 είναι τέσσερεις R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, N_1 \oplus N_2)$, τότε η εικόνα $f(x,y)$ ενός $(x,y) \in M_1 \oplus M_2$ μέσω τού f μπορεί να γραφεί ως διατεταγμένο ζεύγος στον $N_1 \oplus N_2$ υπό τη μορφή

$$f(x,y) = (\alpha(x) + \beta(y), \gamma(x) + \delta(y)),$$

όπου $\alpha : M_1 \longrightarrow N_1, \beta : M_2 \longrightarrow N_1, \gamma : M_1 \longrightarrow N_2$ και $\delta : M_2 \longrightarrow N_2$ είναι καταλλήλως επιλεγόμενοι ομομορφισμοί R-μοδίων. Πράγματι· θεωρώντας τό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rrr, "\alpha"] \arrow[dr, hook, "\mathrm{in}_1"'] & & & N_1 \\
& M_1 \oplus M_2 \arrow[r, "f"] & N_1 \oplus N_2 \arrow[ur, two heads, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, two heads, "\mathrm{pr}_2"'] & \\
M_2 \arrow[rrr, "\delta"'] \arrow[ur, hook, "\mathrm{in}_2"] & & & N_2
\end{tikzcd}$$

αρκεί να θέσουμε

$$\alpha := \mathrm{pr}_1 \circ f \circ \mathrm{in}_1, \qquad \beta := \mathrm{pr}_1 \circ f \circ \mathrm{in}_2,$$
$$\gamma := \mathrm{pr}_2 \circ f \circ \mathrm{in}_1, \qquad \delta := \mathrm{pr}_2 \circ f \circ \mathrm{in}_2.$$

3.5.22 Θεώρημα. *Έστω ότι τα $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο ελεύθερα αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι Π.Κ.Ι., τότε ισχύει η συνεπαγωγή:*

[Το $\mathbf{C}(f)_\bullet$ είναι ακυκληματικό] $\Longrightarrow$ [Ο $f_\bullet$ είναι αλυσωτή ισοδυναμία].

Απόδειξη. Εάν $H_n(\mathbf{C}(f)_\bullet) = 0_{Z_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)/B_n(\mathbf{C}(f)_\bullet)}, \forall n \in \mathbb{Z}$, τότε (σύμφωνα με το θεώρημα 3.5.20) υπάρχει μια συστέλλουσα ομοτοπία $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{C}(f)_\bullet} \simeq \mathbf{0}_\bullet$, ήτοι μια ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων $h_n : \mathrm{C}(f)_n \longrightarrow \mathrm{C}(f)_{n+1}$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$d^f_{n+1} \circ h_n - h_{n-1} \circ d^f_n = \mathrm{id}_{\mathrm{C}(f)_n}, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{3.49}$$

Βάσει των προαναφερθέντων στη σημείωση 3.5.21, ορίζονται κατά τρόπο φυσικό ομομορφισμοί R-μοδίων

$$\alpha_{n-1} : M_{n-1} \longrightarrow M_n, \qquad \beta_n : M'_n \longrightarrow M_n,$$
$$\gamma_{n-1} : M_{n-1} \longrightarrow M'_{n+1}, \qquad \delta_n : M'_n \longrightarrow M'_{n+1},$$

με $h_n(x,y) = (\alpha_{n-1}(x) + \beta_n(y), \gamma_{n-1}(x) + \delta_n(y)),\ \forall (x,y) \in \mathrm{C}(f)_n$. Προφανώς,

$$d^f_{n+1}(h_n(x,y)) = (-d_n(\alpha_{n-1}(x) + \beta_n(y)), d'_{n+1}(\gamma_{n-1}(x) + \delta_n(y)) + f_n(\alpha_{n-1}(x) + \beta_n(y))) \tag{3.50}$$

και

$$\begin{aligned} & h_{n-1}(d^f_n(x,y)) = h_{n-1}(-d_{n-1}(x), d'_n(y) + f_{n-1}(x)) \\ & = (-\alpha_{n-2}(d_{n-1}(x)) + \beta_{n-1}(d'_n(y) + f_{n-1}(x)), -\gamma_{n-2}(d_{n-1}(x)) + \delta_{n-1}(d'_n(y) + f_{n-1}(x))). \end{aligned} \tag{3.51}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3.50) και (3.51), και λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.49) συμπεραίνουμε τα ακόλουθα:
(i) Για $x = 0_{M_{n-1}}$ και τυχόν $y \in M'_n$:

$$(0_{M_{n-1}}, y) = (-d_n(\beta_n(y)) + \beta_{n-1}(d'_n(y)), d'_{n+1}(\delta_n(y)) + f_n(\beta_n(y)) + \delta_{n-1}(d'_n(y))),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$[\beta_{n-1} \circ d'_n = d_n \circ \beta_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}] \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Η } \beta_\bullet = (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ είναι} \\ \text{αλυσωτός μετασχηματισμός} \end{array} \right] \tag{3.52}$$

και

$$d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d'_n = \mathrm{id}_{M'_n} = f_n \circ \beta_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{3.53}$$

(ii) Για τυχόν $x \in M_{n-1}$ και $y = 0_{M'_n}$:

$$(x, 0_{M'_n}) = (-d_n(\alpha_{n-1}(x)) - \alpha_{n-2}(d_{n-1}(x)) + \beta_{n-1}(f_{n-1}(x)), \ldots\ldots)$$

Εξισώνοντας τις πρώτες συντεταγμένες λαμβάνουμε

$$-d_n \circ \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} \circ d_{n-1} = \mathrm{id}_{M_{n-1}} - \beta_{n-1} \circ f_{n-1}$$

και (ανυψώνοντας τους δείκτες κατά 1)

$$-\,d_{n+1} \circ \alpha_n - \alpha_{n-1} \circ d_n = \mathrm{id}_{M_n} - \beta_n \circ f_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{3.54}$$

Από τις (3.52), (3.53) και (3.54) έπεται ότι $(f \circ \beta)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}$ και $(\beta \circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}$, ήτοι ότι ο $f_\bullet$ είναι αλυσωτή ομοτοπία. □

3.5.23 Θεώρημα. *Έστω ότι τα* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο ελεύθερα αλυσωτά σύμπλοκα και* $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ *ένας αλυσωτός μετασχηματισμός. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς* R *είναι Π.Κ.Ι., τότε*

$$[\text{Ο } f_\bullet \text{ είναι αλυσωτή ισοδυναμία}] \Longleftrightarrow [H_n(f_\bullet) \text{ ισομορφισμός}, \forall n \in \mathbb{Z}].$$

Απόδειξη. "⇒" Βλ. πρόταση 3.5.11.
"⇐" $[H_n(f_\bullet)$ ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}]$ $\underset{3.5.18}{\Longleftrightarrow}$ [Το $\mathbf{C}(f)_\bullet$ είναι ακυκληματικό] $\underset{3.5.22}{\Longrightarrow}$ [Ο $f_\bullet$ είναι αλυσωτή ισοδυναμία.] □

3.5.24 Σημείωση. Επί τη βάσει των προαναφερθέντων στη σημείωση 3.5.17 οι αυτονόητες παραλλαγές τόσον των προτάσεων 3.5.6 και 3.5.18 όσον και των θεωρημάτων 3.5.20, 3.5.22 και 3.5.23 εξακολουθούν να ισχύουν *και σε επίπεδο μοδίων συνομολογίας*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Hom και $\otimes$

Οι *μόδιοι ομομορφισμών* και τα *τανυστικά γινόμενα* αποτελούν σημαντικά τεχνικά εργαλεία, η κατάλληλη χρήση των οποίων οδηγεί σε μια *πρωταρχική, αδρομερή ιεράρχηση* των R-μοδίων. (Βλ. εδ. 4.5.32.)

4.1 ΜΟΔΙΟΙ ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ

Εάν M, N είναι R-μόδιοι, τότε το σύνολο $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ των ομομορφισμών από τον M στον N (βλ. (2.3)) αποτελεί αφ' εαυτού έναν R-μόδιο. Στην παρούσα ενότητα θα παρατεθούν μόνον κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητές του.

4.1.1 Πρόταση. *Εάν M, N είναι R-μόδιοι, τότε το $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ είναι ένας υπομόδιος τού R-μοδίου N^M* (βλ. 2.1.5 (viii)).

Απόδειξη. Προφανώς,

$$0 := 0_{N^M} \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \Rightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N) \neq \varnothing.$$

Εάν $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ και $s \in R$, τότε για οιαδήποτε ζεύγη $(m_1, m_2) \in M \times M$ και $(r_1, r_2) \in R \times R$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}&(f+g)(r_1m_1 + r_2m_2) = f(r_1m_1 + r_2m_2) + g(r_1m_1 + r_2m_2)\\ &= r_1f(m_1) + r_2f(m_2) + r_1g(m_1) + r_2g(m_2)\\ &= r_1(f(m_1) + g(m_1)) + r_2(f(m_2) + g(m_2)) = r_1(f+g)(m_1) + r_2(f+g)(m_2)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}&(sf)(r_1m_1 + r_2m_2) = s(f(r_1m_1 + r_2m_2)) = s(r_1f(m_1) + r_2f(m_2))\\ &= r_1sf(m_1) + r_2sf(m_2) = r_1(sf)(m_1) + r_2(sf)(m_2),\end{aligned}$$

οπότε $f + g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ και $sf \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ λόγω τής προτάσεως 2.2.3. □

4.1.2 Πρόταση. *Για κάθε R-μόδιο M υφίσταται κανονιστικός ισομορφισμός*

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{\cong} M.}$$

Αποδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : \mathrm{Hom}_R(R, M) \longrightarrow M, \quad f \longmapsto h(f) := f(1_R).$$

Για κάθε $(r_1, r_2) \in R \times R$ και κάθε $(f_1, f_2) \in \mathrm{Hom}_R(R, M) \times \mathrm{Hom}_R(R, M)$ έχουμε

$$h(r_1 f_1 + r_2 f_2) = (r_1 f_1 + r_2 f_2)(1_R) = r_1 f_1(1_R) + r_2 f_2(1_R) = r_1 h(f_1) + r_2 h(f_2),$$

οπότε η h αποτελεί ομομορφισμό R-μοδίων. Για οιουσδήποτε ομομορφισμούς $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$, για τους οποίους ισχύει $h(f_1) = h(f_2)$, έχουμε

$$f_1(1_R) = f_2(1_R) \Rightarrow f_1(r) = r f_1(1_R) = r f_2(1_R) = f_2(r)$$

για κάθε $r \in R$, οπότε $f_1 = f_2$ και ο ομομορφισμός h είναι μονομορφισμός. Τέλος, επειδή ο R είναι ένας *ελεύθερος* R-μόδιος (έχων το $\{1_R\}$ ως μια βάση του), θεωρώντας *για τυχόν* $x \in M$ την απεικόνιση

$$\theta_x : \{1_R\} \longrightarrow M, \quad \theta_x(1_R) := x,$$

υφίσταται (κατά το θεώρημα 2.5.20) $f_x \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$ για τον οποίον ισχύει $f_x|_{\{1_R\}} = \theta$, ήτοι $h(f_x) = f_x(1_R) = \theta_x(1_R) := x$. Εξ αυτού έπεται ότι ο ομομορφισμός h είναι *και* επιμορφισμός. $\square$

4.1.3 Παραδείγματα. (i) Κατά την πρόταση 4.1.2,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_k}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}_k) \cong \mathbb{Z}_k, \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_k) \cong \mathbb{Z}_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$.

(ii) Έχουμε $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \ncong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$. Πράγματι· εάν $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ και εάν υποθέσουμε ότι $f(1) \neq 0$, τότε

$$[f(1) = n f(\tfrac{1}{n}) \Rightarrow n \mid f(1), \ \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}].$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα τής Αριθμητικής έπεται ότι ο $f(1) \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ διαθέτει πεπερασμένου πλήθους ακεραίους διαιρέτες. Επειδή ο ως άνω $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ είναι *αυθαιρέτως επιλεγμένος*, καταλήγουμε σε άτοπο! Ως εκ τούτου, $f(1) = 0$. Για οιουσδήποτε $m, n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ έχουμε

$$0 = m f(1) = m f(\tfrac{n}{n}) = mn f(\tfrac{1}{n}) = n f(\tfrac{m}{n}) \Rightarrow f(\tfrac{m}{n}) = 0.$$

Άρα ο f είναι κατ' ανάγκην ο μηδενικός ομομορφισμός και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$.

(iii) Κατ' αναλογίαν, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}) \ncong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_k) \cong \mathbb{Z}_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Πράγματι· εάν $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z})$, τότε

$$k f([1]_k) = f([k]_k) = f([0]_k) = 0 \Rightarrow f([1]_k) = 0,$$

οπότε $f([l]_k) = l f([1]_k) = 0$ για κάθε $l \in \mathbb{Z}$, απ' όπου έπεται ότι ο f είναι κατ' ανάγκην ο μηδενικός ομομορφισμός και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$. (*Σημείωση*. Με παρόμοια επιχειρήματα δείχνει κανείς ότι $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Q}) \cong \{0\}$.)

4.1.4 Ορισμός. Εάν M, M', N, N' είναι R-μόδιοι και

$$f \in \operatorname{Hom}_R(M', M),\ g \in \operatorname{Hom}_R(N, N'),$$

τότε ορίζουμε ως $\operatorname{Hom}_R(f, g)$ τον ομομορφισμό

$$\boxed{\operatorname{Hom}_R(M, N) \ni \varphi \longmapsto \operatorname{Hom}_R(f, g)(\varphi) := g \circ \varphi \circ f \in \operatorname{Hom}_R(M', N').}$$

4.1.5 Παρατήρηση. Ο ομομορφισμός $\operatorname{Hom}_R(f, g)$ εντάσσεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_R(M', N) \arrow[r, "\operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_{M'}, g)"] & \operatorname{Hom}_R(M', N') \\
\operatorname{Hom}_R(M, N) \arrow[u, "\operatorname{Hom}_R(f, \mathrm{id}_N)"] \arrow[ur, "\operatorname{Hom}_R(f, g)"] \arrow[r, "\operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g)"'] & \operatorname{Hom}_R(M, N') \arrow[u, "\operatorname{Hom}_R(f, \mathrm{id}_{N'})"']
\end{tikzcd}$$

4.1.6 Λήμμα. *Εάν M, M', M'', N είναι R-μόδιοι και*

$$f_1 \in \operatorname{Hom}_R(M', M),\ f_2 \in \operatorname{Hom}_R(M, M''),$$

τότε

$$\boxed{\operatorname{Hom}_R(f_2 \circ f_1, \mathrm{id}_N) = \operatorname{Hom}_R(f_1, \mathrm{id}_N) \circ \operatorname{Hom}_R(f_2, \mathrm{id}_N).}$$

Απόδειξη. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}_R(f_2 \circ f_1, \mathrm{id}_N)(\varphi) = \mathrm{id}_N \circ \varphi \circ (f_2 \circ f_1) \\
&= \mathrm{id}_N \circ (\varphi \circ f_2) \circ f_1 = \operatorname{Hom}_R(f_1, \mathrm{id}_N)(\varphi \circ f_2) \\
&\operatorname{Hom}_R(f_1, \mathrm{id}_N)(\mathrm{id}_N \circ \varphi \circ f_2) = (\operatorname{Hom}_R(f_1, \mathrm{id}_N) \circ \operatorname{Hom}_R(f_2, \mathrm{id}_N))(\varphi)
\end{aligned}$$

για κάθε $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M'', N)$. □

4.1.7 Λήμμα. *Εάν N, N', N'', M είναι R-μόδιοι και*

$$g_1 \in \operatorname{Hom}_R(N', N),\ g_2 \in \operatorname{Hom}_R(N, N''),$$

τότε

$$\boxed{\operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_2 \circ g_1) = \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_2) \circ \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_1).}$$

Απόδειξη. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_2 \circ g_1)(\varphi) = (g_2 \circ g_1) \circ \varphi \circ \mathrm{id}_M \\
&= g_2 \circ (g_1 \circ \varphi) \circ \mathrm{id}_M = \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_2)(g_1 \circ \varphi) \\
&\operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_2)(g_1 \circ \varphi \circ \mathrm{id}_M) = (\operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_2) \circ \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_1))(\varphi)
\end{aligned}$$

για κάθε $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N'')$. □

4.1.8 Λήμμα. *Εάν M, N είναι R-μόδιοι, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(M,N)}.}$$

Απόδειξη. Προφανώς,

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N)(\varphi) = \mathrm{id}_N \circ \varphi \circ \mathrm{id}_M = \varphi$$

για κάθε $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. □

4.1.9 Πρόταση. *Εάν M, M', M'' και N, N', N'' είναι R-μόδιοι και*

$$f_1 \in \mathrm{Hom}_R(M', M), \qquad f_2 \in \mathrm{Hom}_R(M, M''),$$
$$g_1 \in \mathrm{Hom}_R(N', N), \qquad g_2 \in \mathrm{Hom}_R(N, N''),$$

τότε

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) = \mathrm{Hom}_R(f_1, g_2) \circ \mathrm{Hom}_R(f_2, g_1).}$$

Απόδειξη. Βάσει τής παρατηρήσεως 4.1.5 έχουμε

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_R(f_1, g_2) \circ \mathrm{Hom}_R(f_2, g_1)\\
&= \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{M'}, g_2) \circ \mathrm{Hom}_R(f_1, \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(f_2, \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{M''}, g_1)\\
&\underset{4.1.6}{=} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{M'}, g_2) \circ \mathrm{Hom}_R(f_2 \circ f_1, \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{M''}, g_1)\\
&= \mathrm{Hom}_R(f_2 \circ f_1, g_2) \circ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{M''}, g_1) = \mathrm{Hom}_R(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1),
\end{aligned}$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

4.1.10 Πόρισμα. *Εάν M, M', N, N' είναι R-μόδιοι και*

$$f \in \mathrm{Hom}_R(M', M), \; g \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$$

είναι ισομορφισμοί, τότε και ο $\mathrm{Hom}_R(f, g)$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Εξ υποθέσεως υπάρχουν $h \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ και $\kappa \in \mathrm{Hom}_R(N', N)$, τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$h \circ f = \mathrm{id}_{M'}, \; f \circ h = \mathrm{id}_M, \; \kappa \circ g = \mathrm{id}_M, \; g \circ \kappa = \mathrm{id}_{N'}.$$

Σύμφωνα με το λήμμα 4.1.8 οι συνθέσεις

$$\mathrm{Hom}_R(h, \kappa) \circ \mathrm{Hom}_R(f, g), \;\; \mathrm{Hom}_R(f, g) \circ \mathrm{Hom}_R(h, \kappa)$$

είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις των $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ και $\mathrm{Hom}_R(M', N')$, αντιστοίχως. Άρα ο $\mathrm{Hom}_R(f, g)$ είναι όντως ισομορφισμός. □

4.1.11 Πρόταση. *Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $(N_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων. Τότε υφίστανται κανονιστικοί ισομορφισμοί*

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{j\in J} N_j, M\Big) \xrightarrow{\cong} \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(N_j, M)}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R\Big(M, \prod_{j\in J} N_j\Big) \xrightarrow{\cong} \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(M, N_j).}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\vartheta : \mathrm{Hom}_R\Big(\bigoplus_{j\in J} N_j, M\Big) \longrightarrow \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(N_j, M),\ f \longmapsto \vartheta(f) := (f \circ \mathrm{in}_j)_{j\in J},$$

όπου in_j η φυσική ένθεση (όπως στο εδ. 2.4.4). Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι η ϑ αποτελεί ομομορφισμό. Έστω τυχόν $(g_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J}\mathrm{Hom}_R(N_j, M)$. Τότε υπάρχει μονοσημάντως ορισμένως $h \in \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} N_j, M)$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & N_j \arrow[dl, hook', "\mathrm{in}_j"'] \arrow[dr, "g_j"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ \bigoplus_{j\in J} N_j \arrow[rr, dashed, "h"'] & & M \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Επειδή $\vartheta(h) = (h\circ\, \mathrm{in}_j)_{j\in J} = (g_j)_{j\in J}$, ο ομομορφισμός ϑ είναι επιμορφισμός. Επιπροσθέτως, εάν $\alpha \in \mathrm{Ker}(\vartheta)$, τότε $0 = \vartheta(\alpha) = (\alpha\circ\, \mathrm{in}_j)_{j\in J}$, οπότε κάθε διάγραμμα τής μορφής

$$\begin{tikzcd} & N_j \arrow[dl, hook', "\mathrm{in}_j"'] \arrow[dr, "0"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ \bigoplus_{j\in J} N_j \arrow[rr, "\alpha"'] & & M \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Επειδή το $(\bigoplus_{j\in J} N_j, (\mathrm{in}_j)_{j\in J})$ είναι συγκινόμενο των μελών τής οικογενείας $(N_j)_{j\in J}$ και ο μηδενικός ομομορφισμός από τον $\bigoplus_{j\in J} N_j$ στον M συμπληρώνει μεταθετικώς οιοδήποτε διάγραμμα αυτού τού είδους, έχουμε (λόγω τού θεωρήματος 2.4.9) $\alpha = 0$, οπότε ο ϑ είναι *και* μονομορφισμός. Ο τρόπος αποδείξεως τού δεύτερου ισομορφισμού είναι παρόμοιος[1]. □

4.1.12 Παρατήρηση. Στον πρώτο ισομορφισμό τής προτάσεως 4.1.11 το "$\prod_{j\in J}$" *δεν μπορεί να αντικατασταθεί με το* "$\bigoplus_{j\in J}$" *όταν το σύνολο δεικτών J είναι άπειρο*. (Βλ.

[1] Αρκεί να αντικατασταθεί ο $\bigoplus_{j\in J} N_j$ με τον $\prod_{j\in J} N_j$, να αντιστραφούν τα χρησιμοποιούμενα βέλη και να ορισθεί ως ϑ η $\vartheta(f) := (\mathrm{pr}_j \circ f)_{j\in J}$.

2.4.11 (i)-(ii).) Επί παραδείγματι, εάν για οιοδήποτε σώμα K θεωρήσουμε τον δακτύλιο $K[\mathsf{X}]$ των πολυωνύμων μιας απροσδιορίστου, τότε αυτός, ιδωμένος ως K-διανυσματικός χώρος, ισούται με το *άπειρο* ευθύ άθροισμα $\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} K\mathsf{X}^j$ μονοδιαστάτων K-διανυσματικών χώρων. Έστω $K[\![\mathsf{X}]\!] := \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} a_j\mathsf{X}^j \,\middle|\, a_j \in K,\ \forall j \in \mathbb{N}_0 \right\}$ ο δακτύλιος των αντίστοιχων επίτυπων δυναμοσειρών. Η απεικόνιση

$$K[\![\mathsf{X}]\!] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_K(K[\mathsf{X}], K), \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j\mathsf{X}^j \longmapsto \left(\sum_{j=0}^{n} b_j\mathsf{X}^j \longmapsto \sum_{j=0}^{n} a_j b_j \right),$$

όπου n ο βαθμός τού εκάστοτε θεωρούμενου μη μηδενικού πολυωνύμου και με το μηδενικό πολυώνυμο απεικονιζόμενο στον μηδενικό ομομορφισμό, αποτελεί *ισομορφισμό* K-διανυσματικών χώρων. Κατά συνέπειαν,

$$\mathrm{Hom}_K(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} K\mathsf{X}^j, K) = \mathrm{Hom}_K(K[\mathsf{X}], K) \cong K[\![\mathsf{X}]\!] = K^{\mathbb{N}_0}.$$

Από την άλλη μεριά, $\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}_K(K\mathsf{X}^j, K) \cong \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}_K(K, K) \cong \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} K = K^{(\mathbb{N}_0)}$. Επομένως,

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}_K(K\mathsf{X}^j, K) \ncong \mathrm{Hom}_K(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} K\mathsf{X}^j, K).$$

4.1.13 Πρόταση. *Εάν M, M', N, N' είναι R-μόδιοι και*

$$f \in \mathrm{Hom}_R(M', M),\ g \in \mathrm{Hom}_R(N, N'),$$

τότε ο πυρήνας τού $\mathrm{Hom}_R(f, g)$ ισούται με τον υπομόδιο U τού $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ τον οριζόμενον ως εξής:

$$U := \{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N) |\, \varphi(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(g)\}.$$

Απόδειξη. Ας θέσουμε $h := \mathrm{Hom}_R(f, g)$. Για να αποδείξουμε ότι $U \subseteq \mathrm{Ker}(h)$ θεωρούμε τυχόντα $\varphi \in U$. Αρκεί να δειχθεί ότι $h(\varphi) = 0_{\mathrm{Hom}_R(M',N')}$. Για κάθε $x \in M'$ έχουμε

$$f(x) \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \varphi(f(x)) \in \mathrm{Ker}(g) \Rightarrow h(\varphi)(x) = (g \circ \varphi \circ f)(x) = g(\varphi(f(x))) = 0_{N'},$$

οπότε $h(\varphi) = 0_{\mathrm{Hom}_R(M',N')}$ και, κατ' επέκταση, $U \subseteq \mathrm{Ker}(h)$. Και αντιστρόφως· εάν $\varphi \in \mathrm{Ker}(h)$, τότε $g \circ \varphi \circ f = h(\varphi) = 0_{\mathrm{Hom}_R(M',N')} \Rightarrow \varphi(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$, οπότε $\varphi \in U$ και ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathrm{Ker}(h) \subseteq U$. □

4.1.14 Πόρισμα. *Εάν M, M', N, N' είναι R-μόδιοι, $f : M' \longrightarrow M$ ένας επιμορφισμός και $g : N \longrightarrow N'$ ένας μονομορφισμός R-μοδίων, τότε ο*

$$\mathrm{Hom}_R(f, g) : \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M', N')$$

είναι μονομορφισμός.

4.1.15 Θεώρημα. *Εάν* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$ *είναι μια ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και M τυχών R-μόδιος, τότε η ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B,M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A,M),$$

όπου $f^* := \mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{id}_M)$ *και* $g^* := \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{id}_M)$*, είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Επειδή ο g είναι επιμορφισμός και η id_M μονομορφισμός, ο g^* είναι μονομορφισμός επί τη βάσει τού πορίσματος 4.1.14. Επειδή $g \circ f = 0$, έχουμε

$$\mathrm{Hom}_R(g\circ f, \mathrm{id}_M) = 0 \Rightarrow f^* \circ g^* \underset{4.1.9}{=} \mathrm{Hom}_R(g\circ f, \mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M)$$
$$= \mathrm{Hom}_R(g\circ f, \mathrm{id}_M) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(g^*) \subseteq \mathrm{Ker}(f^*).$$

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $\mathrm{Ker}(f^*) \subseteq \mathrm{Im}(g^*)$. Προς τούτο θεωρούμε τυχόν στοιχείο φ τού $\mathrm{Hom}_R(B,M)$ ανήκον στον $\mathrm{Ker}(f^*)$ και θέτουμε $U := \mathrm{Im}(f)$ $(= \mathrm{Ker}(g))$. Επειδή $f^* := \mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_M)$, έχουμε

$$\varphi(U) = \varphi(\mathrm{Im}(f)) \underset{4.1.13}{\subseteq} \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M) = \{0_M\} \Rightarrow \varphi(U) = \{0_M\}.$$

Εξ αυτού έπεται η ύπαρξη ενός (και μόνον) $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_R(B/U, M)$ με $\overline{\varphi} \circ \pi_U^B = \varphi$. (Βλ. πρόταση 2.3.6.) Επιπροσθέτως, επειδή ο g είναι επιμορφισμός έχων τον U ως πυρήνα του, υφίσταται κάποιος ισομορφισμός $h : B/U \xrightarrow{\cong} C$. (Βλ. πρόταση 3.1.4 (ii).) Ως εκ τούτου, προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & C & \\ B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\pi_U^B"] \arrow[dr, "\varphi"'] & {} \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & B/U \arrow[ul, "h"', "\cong"] \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Επειδή ο h είναι ισομορφισμός, ορίζεται ο $\psi := \overline{\varphi} \circ h^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(C,M)$, για τον οποίον ισχύει $g^*(\psi) = \psi \circ g = \overline{\varphi} \circ \left(h^{-1} \circ g\right) = \overline{\varphi} \circ \pi_U^B = \varphi$, οπότε $\varphi \in \mathrm{Im}(g^*)$. □

4.1.16 Θεώρημα. *Εάν* $\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$ *είναι μια βραχεία ακριβής και διασπώμενη ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και M τυχών R-μόδιος, τότε η βραχεία ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B,M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A,M) \longrightarrow \{0\},$$

όπου $f^* := \mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{id}_M)$ *και* $g^* := \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{id}_M)$*, είναι ακριβής και διασπώμενη.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.1.29 ο f διαθέτει αριστερό αντίστροφο, ήτοι $\exists \alpha \in \mathrm{Hom}_R(B,A) : \alpha \circ f = \mathrm{id}_A$. Επειδή

$$\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_M) \circ \mathrm{Hom}_R(\alpha, \mathrm{id}_M) \underset{4.1.6}{=} \mathrm{Hom}_R(\alpha \circ f, \mathrm{id}_M) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_M) \underset{4.1.8}{=} \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(A,M)},$$

ο $\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_M) =: f^*$ είναι επιμορφισμός. (Βλ. λήμμα 2.2.22.) Υπολείπεται η εφαρμογή των θεωρημάτων 4.1.15 και 3.1.29. □

4.1.17 Σημείωση. Εάν $\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$ είναι μια βραχεία ακριβής *μη διασπώμενη* ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε ο f^* δεν είναι κατ' ανάγκην επιμορφισμός. Επί παραδείγματι, θεωρώντας τή βραχεία ακριβή ακολουθία $\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Q} \overset{\pi^{\mathbb{Q}}_{\mathbb{Z}}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}$ (με $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$), διαπιστώνουμε ότι ο

$$\iota^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \underset{4.1.3\,(\mathrm{ii})}{\cong} \{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \underset{4.1.3\,(\mathrm{i})}{\cong} \mathbb{Z}$$

είναι ο μηδενικός ομομορφισμός, ο οποίος *δεν είναι επιμορφισμός*.

4.1.18 Θεώρημα. *Εάν* $\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ *είναι μια ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και M τυχών R-μόδιος, τότε η ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(M, C),$$

όπου $f_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, f)$ *και* $g_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g)$, *είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Επειδή η id_M είναι επιμορφισμός και ο f μονομορφισμός, ο f_* είναι μονομορφισμός επί τη βάσει τού πορίσματος 4.1.14. Επειδή $g \circ f = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g \circ f) = 0 \Rightarrow g_* \circ f_* \underset{4.1.9}{=} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M, g \circ f) \\ &= \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g \circ f) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(f_*) \subseteq \mathrm{Ker}(g_*). \end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $\mathrm{Ker}(g_*) \subseteq \mathrm{Im}(f_*)$. Προς τούτο θεωρούμε τυχόν στοιχείο φ τού $\mathrm{Hom}_R(M, B)$ ανήκον στον $\mathrm{Ker}(g_*)$. Επειδή $g_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g)$, έχουμε

$$\varphi(M) = \varphi(\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M)) \underset{4.1.13}{\subseteq} \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f).$$

Και επειδή ο f είναι μονομορφισμός, υπάρχει ισομορφισμός $h : \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{\cong} A$ (βλ. πρόταση 3.1.4 (i)), ούτως ώστε η σύνθεση $f \circ h$ να είναι η συνήθης ένθεση τής εικόνας $\mathrm{Im}(f)$ τού f εντός τού B. Ως εκ τούτου, ορίζεται ο $\psi := h \circ \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$, για τον οποίον ισχύει $[f_*(\psi)(x) = f(h(\varphi(x))) = \varphi(x),\ \forall x \in M] \Rightarrow f_*(\psi) = \varphi$, οπότε $\varphi \in \mathrm{Im}(f_*)$. □

4.1.19 Θεώρημα. *Εάν* $\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$ *είναι μια βραχεία ακριβής και διασπώμενη ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και M τυχών R-μόδιος, τότε η βραχεία ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(M, C) \longrightarrow \{0\},$$

όπου $f_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, f)$ *και* $g_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g)$, *είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.1.29 ο g διαθέτει δεξιό αντίστροφο, ήτοι

$$\exists \beta \in \mathrm{Hom}_R(C, B) : g \circ \beta = \mathrm{id}_C.$$

Επειδή

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g) \circ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, \beta) \underset{4.1.7}{=} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g \circ \beta) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_C) \underset{4.1.8}{=} \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(M,C)},$$

ο $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g) =: g_*$ είναι επιμορφισμός. (Βλ. λήμμα 2.2.22.) Υπολείπεται η εφαρμογή τού θεωρήματος 4.1.18. □

4.1.20 Σημείωση. Εάν υποτεθεί ότι

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

είναι μια βραχεία ακριβής *μη διασπώμενη* ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε ο g_* δεν είναι κατ' ανάγκην επιμορφισμός. Επί παραδείγματι, θεωρώντας τήν

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Q} \overset{\pi_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}$$

(με $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_k$, $k \geqslant 2$), διαπιστώνουμε ότι ο

$$(\pi_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}})_* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Q}) \underset{4.1.3\,(\mathrm{iii})}{\cong} \{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_k$$

είναι ο μηδενικός ομομορφισμός, ο οποίος *δεν είναι επιμορφισμός*.

4.2 ΠΡΟΒΟΛΙΚΟΙ ΚΑΙ ΕΜΒΟΛΙΚΟΙ ΜΟΔΙΟΙ

4.2.1 Ορισμός. Ένας R-μόδιος P καλείται **προβολικός** όταν για κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $f : P \longrightarrow B$ και κάθε επιμορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$ υπάρχει κάποιος (όχι κατ' ανάγκην μοναδικός) $h \in \mathrm{Hom}_R(P, A)$ για τον οποίο ισχύει [2] $g \circ h = f$. Στη γλώσσα των διαγραμμάτων η «προβολικότητα» διατυπώνεται ως εξής: Ένας R-μόδιος P είναι προβολικός εάν και μόνον εάν για κάθε διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

με τη γραμμή του ακριβή υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(P, A)$ που το συμπληρώνει:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

[2] Κάθε τέτοιος h καλείται, ιδιαιτέρως, **προβολική ανύψωση** τού f.

4.2.2 Πρόταση. *Υποτιθεμένου ότι η γραμμή τού διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "g'"'] & C \end{tikzcd}$$

είναι ακριβής, ότι ο P είναι προβολικός και ότι $g' \circ f = 0$, υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(P, A)$ με την ιδιότητα $g \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "g'"'] & C \end{tikzcd}$$

Αποδειξη. Επειδή $g' \circ f = 0$, έχουμε $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g') = \mathrm{Im}(g)$ και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "\breve{g}"'] & \mathrm{Im}(g) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

έχει ακριβή γραμμή (με τον $\breve{g}$ ορισμένον όπως στο 2.2.14 (iii)). Αρκεί λοιπόν η απευθείας εφαρμογή τού ορισμού 2.2.25. □

4.2.3 Πρόταση. *Για έναν R-μόδιο P οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) *Ο P είναι προβολικός.*

(ii) *Για κάθε επιμορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$ ο*

$$g_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_P, g) : \mathrm{Hom}_R(P, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, B)$$

είναι ωσαύτως επιμορφισμός.

Αποδειξη. Ο ομομορφισμός g_* είναι (εξ ορισμού) επιμορφισμός εάν και μόνον εάν για κάθε ομομορφισμός $f \in \mathrm{Hom}_R(P, B)$ υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(P, A)$, τέτοιος ώστε να ισχύει $g_*(h) = g \circ h \circ \mathrm{id}_P = g \circ h = f$. Ως εκ τούτου, οι συνθήκες (i) και (ii) είναι ισοδύναμες. (Βλ. εδ. 4.2.1.) □

4.2.4 Πρόταση. *Κάθε ελεύθερος R-μόδιος είναι προβολικός.*

Αποδειξη. Έστω F ένας ελεύθερος R-μόδιος. Εάν ο F είναι τετριμμένος, τότε αυτός είναι προδήλως προβολικός[3]. Ας υποθέσουμε (από εδώ και στο εξής) ότι ο F είναι μη τετριμμένος και ότι $\mathscr{X}$ είναι μια βάση αυτού. Εάν A, B είναι δυο R-μόδιοι, $f \in \mathrm{Hom}_R(F, B)$ και $g : A \longrightarrow B$ ένας επιμορφισμός, τότε ορίζουμε μια απεικόνιση $\theta : \mathscr{X} \longrightarrow A$ ως εξής: Για οιοδήποτε στοιχείο $x \in \mathscr{X}$ έχουμε $f(x) \in B$. Επειδή ο

[3] Εν τοιαύτη περιπτώσει, αρκεί να θεωρήσουμε ως h στον ορισμό 4.2.1 τον μηδενικό ομομορφισμό.

g είναι επιμορφισμός, $\exists y \in A : g(y) = f(x)$. Θέτουμε $\theta(x) := y$, $\forall x \in \mathscr{X}$. Κατά το θεώρημα 2.5.20 τής «γραμμικής επεκτάσεως» υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $h \in \mathrm{Hom}_R(F, A)$ με $h|_{\mathscr{X}} = \theta$. Έστω τώρα τυχόν στοιχείο $z \in F$. Επειδή το $\mathscr{X}$ είναι μια βάση τού F, υπάρχουν $x_1, ..., x_k \in \mathscr{X}$ και $r_1, ..., r_k \in R$, τέτοια ώστε να ισχύει $z = \sum_{j=1}^{k} r_j x_j$. Κατά συνέπειαν,

$$g(h(z)) = \sum_{j=1}^{k} r_j g(h(x_j)) = \sum_{j=1}^{k} r_j g(\theta(x_j)) = \sum_{j=1}^{k} r_j f(x_j) = f(z),$$

οπότε $g \circ h = f$. Αυτό σημαίνει ότι ο F είναι προβολικός. □

4.2.5 Σημείωση. Υπάρχουν πάμπολλοι προβολικοί R-μόδιοι *που δεν είναι ελεύθεροι*. (Βλ. παραδείγματα 4.2.9 (i) και (ii).) Ως εκ τούτου, η κλάση των προβολικών R-μοδίων είναι *ευρύτερη* εκείνης των ελευθέρων.

4.2.6 Πρόταση. *Κάθε ευθύς προσθετέος ενός προβολικού R-μοδίου είναι προβολικός.*

Απόδειξη. Έστω P ένας προβολικός R-μόδιος ο οποίος παρίσταται ως ευθύ άθροισμα $P = U \oplus U'$ δυο υπομοδίων του U και U'. Έστω $f \in \mathrm{Hom}_R(U, B)$ και έστω τυχών επιμορφισμός R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$. Συμβολίζοντας ως $\iota : U \hookrightarrow P$ τη συνήθη ένθεση και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο P είναι προβολικός, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη κάποιου $\kappa \in \mathrm{Hom}_R(P, A)$ με $g \circ \kappa = f \circ \mathrm{pr}_1$.

$$\begin{tikzcd}
 & P = U \oplus U' \arrow[ddl, bend right, "\kappa"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dd, bend left=60, "f \circ \mathrm{pr}_1"] & \\
 & U \arrow[u, hook, shift left, "\iota"] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Επειδή $\mathrm{pr}_1 \circ \iota = \mathrm{id}_U$, θέτοντας $h := \kappa \circ \iota : U \longrightarrow A$ συμπεραίνουμε ότι

$$g \circ h = g \circ \kappa \circ \iota = f \circ \mathrm{pr}_1 \circ \iota = f.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο U είναι προβολικός. □

4.2.7 Θεώρημα. *Για έναν R-μόδιο P οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο P είναι προβολικός.*

(ii) *Εάν M, N είναι R-μόδιοι, τότε κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής*

$$\{0\} \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\} \tag{4.1}$$

είναι διασπώμενη.

(iii) *Εάν N είναι υπομόδιος ενός R-μοδίου M, τέτοιος ώστε να ισχύει $M/N \cong P$, τότε ο P αποτελεί ευθύ προσθετέο τού M.*

(iv) *Ο P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελευθέρου R-μοδίου.*

(v) *Για κάθε επιμορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$ ο*

$$g_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_P, g) : \mathrm{Hom}_R(P, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, B)$$

είναι ωσαύτως επιμορφισμός.

(vi) *Για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P, C) \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & P \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

με ακριβή γραμμή. Επειδή ο P είναι προβολικός, υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ με $g \circ h = \mathrm{id}_P$. Εξ αυτού έπεται ότι κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής (4.1) είναι διασπώμενη. (Βλ. θεώρημα 3.1.29.)

(ii)⇒(iii) Εάν N είναι ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M, τέτοιος ώστε να ισχύει $M/N \cong P$, τότε η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow N \hookrightarrow M \overset{\pi_N^M}{\twoheadrightarrow} M/N \cong P \longrightarrow \{0\}$$

διασπάται στον M, οπότε $M \cong N \oplus P$. (Βλ. θεώρημα 3.1.29.)

(iii)⇒(iv) Κατά το πόρισμα 2.5.23 ο P είναι ισόμορφος ενός πηλικομοδίου M/N, όπου ο M είναι ελεύθερος. Επομένως ο P είναι είναι ευθύς προσθετέος ενός ελευθέρου R-μοδίου.

(iv)⇒(i) Υποθέτουμε ότι ο P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελευθέρου R-μοδίου M. Ο M (ως ελεύθερος) είναι προβολικός. (Βλ. πρόταση 4.2.4.) Ως εκ τούτου, ο P, ως ευθύς προσθετέος ενός προβολικού R-μοδίου, είναι προβολικός. (Βλ. πρόταση 4.2.6.)

(v)⇔(i) Πρόκειται για την πρόταση 4.2.3.

(vi)⇔(v) Τούτο έπεται από το θεώρημα 4.1.18. □

4.2.8 Σημείωση. Εάν ο P είναι προβολικός και

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots \tag{4.2}$$

οιαδήποτε ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε η

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}*} \mathrm{Hom}_R(P, M_{n-1}) \xrightarrow{f_{n-1}*} \mathrm{Hom}_R(P, M_n) \xrightarrow{f_n*} \mathrm{Hom}_R(P, M_{n+1}) \xrightarrow{f_{n+1}*} \cdots \tag{4.3}$$

θα είναι ωσαύτως ακριβής, αφού από την ακρίβεια τής (4.2) έπεται η ακρίβεια των

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_n) \overset{\iota_n}{\hookrightarrow} M_n \overset{\check{f}_n}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Im}(f_n) \longrightarrow \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

και (κατ' επέκταση, μέσω τής συνεπαγωγής 4.2.7 (i)⇒(vi)) η ακρίβεια των

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Ker}(f_n)) \xrightarrow{\iota_n *} \mathrm{Hom}_R(P, M_n) \xrightarrow{\check{f}_n *} \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Im}(f_n)) \longrightarrow \{0\} \tag{4.4}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Οι (4.4) (*ανασυντιθέμενες σε μία* ακριβή ακολουθία) δίδουν την (4.3).

4.2.9 Παραδείγματα. (i) Εάν $k, l \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, l \geqslant 2$ και $\mu\kappa\delta(k,l) = 1$, τότε υφίστανται ισομορφισμοί $\mathbb{Z}_{kl}$-μοδίων

$$\mathbb{Z}_{kl} \cong \mathbb{Z}/kl\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l.$$

Οι $\mathbb{Z}_{kl}$-μόδιοι $\mathbb{Z}_k$ και $\mathbb{Z}_l$, ως ευθείς προσθετέοι τού ελευθέρου $\mathbb{Z}_{kl}$-μοδίου $\mathbb{Z}_{kl}$, *είναι προβολικοί*. (Βλ. 4.2.7 (i)⇔(iv).) Ωστόσο, *δεν είναι ελεύθεροι*. (Βλ. εδ. 2.5.19.)
(ii) Εάν $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, τότε το ιδεώδες $I := \langle 2, 1 + \sqrt{-5} \rangle$ (ως υπομόδιος τού R-μοδίου R) είναι ένας *μη ελεύθερος* R-μόδιος. (Βλ. εδ. 2.5.48.) Ωστόσο, *είναι προβολικός*. Πράγματι· εάν F είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος βαθμίδας 2, δηλαδή εάν $F = Rx_1 \oplus Rx_2$ (για κατάλληλα γραμμικώς ανεξάρτητα $x_1, x_2 \in F$) και ορίσουμε τον επιμορφισμό R-μοδίων

$$\varphi : F \longrightarrow I,\ \varphi(r_1x_1 + r_2x_2) := 2r_1 + (1 + \sqrt{-5})r_2,\ \forall (r_1, r_2) \in R \times R,$$

καθώς και τον ομομορφισμό R-μοδίων

$$\psi : I \longrightarrow F,\ \psi(a) := -ax_1 + a(\tfrac{1-\sqrt{-5}}{2})x_2,\ \forall a \in I,$$

τότε[4]

$$(\varphi \circ \psi)(a) = \varphi(-ax_1 + a(\tfrac{1-\sqrt{-5}}{2})x_2) = -2a + \tfrac{a}{2} \underbrace{(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})}_{=6} = a,$$

για κάθε $a \in I$, οπότε

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_I \Longrightarrow F \cong \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus I$$

και ο R-μόδιος I είναι όντως προβολικός (ως ευθύς προσθετέος ενός ελευθέρου R-μοδίου).
(iii) Εάν $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, τότε ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_k$ *δεν είναι ούτε ελεύθερος ούτε προβολικός*. (Βλ. εδ. 2.5.15 (i), 4.1.20 και την ισοδυναμία των συνθηκών (i) και (v) τού θεωρήματος 4.2.7.)

Από το θεώρημα 4.2.7 προκύπτει και ένα *μερικό αντίστροφο* τής 4.2.4.

[4] Εν προκειμένω, εφαρμόζουμε το θεώρημα 3.1.29 για τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \hookrightarrow F \xrightarrow{\varphi} I \longrightarrow \{0\}.$$

4.2.10 Πόρισμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., τότε κάθε προβολικός R-μόδιος είναι ελεύθερος.*

Απόδειξη. Εάν M είναι τυχών προβολικός R-μόδιος, όπου R μια Π.Κ.Ι., τότε ο M, όντας (κατά το θεώρημα 4.2.7) ευθύς προσθετέος (και, ως εκ τούτου, *υπομόδιος*) ενός ελευθέρου R-μοδίου, είναι κατ' ανάγκην ελεύθερος (ένεκα τού θεωρήματος 2.5.47). □

4.2.11 Πόρισμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., τότε κάθε υπομόδιος ενός προβολικού R-μοδίου είναι προβολικός.*

Απόδειξη. Επειδή (λόγω τής προτάσεως 4.2.4 και τού πορίσματος 4.2.10) οι έννοιες *ελεύθερος* και *προβολικός* είναι ισοδύναμες για μοδίους οριζόμενους υπεράνω Π.Κ.Ι., ο ισχυρισμός είναι αληθής δυνάμει τού θεωρήματος 2.5.47. □

4.2.12 Σημείωση. Εάν ο R δεν είναι Π.Κ.Ι., τότε το πόρισμα 4.2.11 παύει να ισχύει. Επί παραδείγματι, εάν $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, τότε ο R (ως ελεύθερος R-μόδιος) είναι προβολικός. Ωστόσο, ο υπομόδιός του $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *δεν είναι προβολικός*, διότι εάν ήταν, τότε για τον επιμορφισμό

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ni \lambda + 4\mathbb{Z} \overset{g}{\longmapsto} 2\lambda + 4\mathbb{Z} = 2(\lambda + 4\mathbb{Z}) \in 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

θα υπήρχε $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ που θα καθιστούσε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}"] & \\
\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "g"'] & 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό και *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{Z}$ θα ίσχυε

$$\begin{aligned}
&2\lambda + 4\mathbb{Z} = \mathrm{id}_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(2\lambda + 4\mathbb{Z}) = g(h(2\lambda + 4\mathbb{Z})) = 2(h(2\lambda + 4\mathbb{Z})) \\
&= h(2(2\lambda + 4\mathbb{Z})) = h(4\lambda + 4\mathbb{Z}) = h(4\mathbb{Z}) = h(0_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}) = 0_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = 4\mathbb{Z},
\end{aligned}$$

ήτοι κάτι που θα μας οδηγούσε σε άτοπο[5]. Ένας μεταθετικός δακτύλιος R (όχι κατ' ανάγκην Π.Κ.Ι.) καλείται **κληρονομικός** (hereditary) όταν τότε κάθε υπομόδιος ενός προβολικού R-μοδίου είναι προβολικός. (Πρβλ. [27] Theorem 8.1.13, σελ. 195.)

4.2.13 Πρόταση. *Για μια οικογένεια R-μοδίων $(P_j)_{j\in J}$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Το ευθύ άθροισμα $P := \bigoplus_{j\in J} P_j$ είναι προβολικός R-μόδιος.*

(ii) *Ο P_j είναι προβολικός R-μόδιος για κάθε $j \in J$.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν ο P είναι προβολικός, τότε (κατά το θεώρημα 4.2.7, (i)⇒(iv)) υπάρχει ένας ελεύθερος R-μόδιος F και ένας υπομόδιος P' αυτού, ούτως

[5] Π.χ., για $\lambda = 1$, έχουμε $2 \notin 4\mathbb{Z}$.

ώστε να ισχύει $F = P \oplus P'$. Επομένως,

$$F = \left(\bigoplus_{j \in J} P_j\right) \oplus P' \underset{2.4.13}{\cong} P_j \oplus \left(\left(\bigoplus_{\lambda \in J \smallsetminus \{j\}} P_\lambda\right) \oplus P'\right), \; \forall j \in J,$$

και ο P_j είναι προβολικός για κάθε $j \in J$. (Βλ. 4.2.7, (iv)⇒(i).)

(ii)⇒(i) Εάν ο P_j είναι προβολικός για κάθε $j \in J$, τότε υπάρχει (κατά το θεώρημα 4.2.7, (i)⇒(iv)) ένας ελεύθερος R-μόδιος F_j και ένας υπομόδιος P'_j αυτού, ούτως ώστε να ισχύει $F_j = P_j \oplus P'_j$. Επομένως,

$$\bigoplus_{j \in J} F_j = \bigoplus_{j \in J} (P_j \oplus P'_j) \underset{2.4.13}{\cong} P \oplus \left(\bigoplus_{j \in J} P'_j\right),$$

με τον $\bigoplus_{j \in J} F_j$ ελεύθερο (ως ευθύ άθροισμα ελευθέρων, βλ. 2.5.17). Αρκεί λοιπόν να εφαρμοσθεί εκ νέου η συνεπαγωγή (iv)⇒(i) τού θεωρήματος 4.2.7. □

4.2.14 Ορισμός. Ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ (και αντιστοίχως, ένα συναλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$) καλείται **προβολικό αλυσωτό σύμπλοκο** (και αντιστοίχως, **προβολικό συναλυσωτό σύμπλοκο**) όταν οι M_n (και αντιστοίχως, οι M^n) είναι προβολικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

4.2.15 Θεώρημα. *Έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ένα προβολικό αλυσωτό σύμπλοκο. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι κληρονομικός, τότε* το $\mathbf{M}_\bullet$ είναι συσταλτό $\Longleftrightarrow$ το $\mathbf{M}_\bullet$ είναι ακυκληματικό.

Απόδειξη. Η απόδειξη τού "⇒" είναι αυτή τού θεωρήματος 3.5.20. Στο μόνο που διαφοροποιείται η απόδειξη τού "⇐" από αυτήν τού θεωρήματος 3.5.20 είναι στο ότι για τη διασφάλιση *τής διασπάσεως* τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(\mathbf{M}_\bullet) = B_n(\mathbf{M}_\bullet) \hookrightarrow M_n \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(d_n) =: B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\}$$

χρησιμοποιούμε την κληρονομικότητα τού R (οπότε ο $B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq M_{n-1}$ είναι προβολικός ως υπομόδιος προβολικού), συνδυαζόμενη με τη συνεπαγωγή (i)⇒(ii) στο θεώρημα 4.2.7 (αντί τού πορίσματος 3.1.31). □

4.2.16 Θεώρημα. *Έστω ότι τα $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι δυο προβολικά αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι κληρονομικός, τότε ισχύει η συνεπαγωγή*:

$$[\text{Το } \mathbf{C}(f)_\bullet \text{ είναι ακυκληματικό}] \Longrightarrow [\text{Ο } f_\bullet \text{ είναι αλυσωτή ισοδυναμία}].$$

Απόδειξη. Αρκεί η ύπαρξη συστέλλουσας ομοτοπίας $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{C}(f)_\bullet} \simeq \mathbf{0}_\bullet$ να εξαχθεί από το θεώρημα 4.2.15. Το υπόλοιπο τής αποδείξεως είναι πανομοιότυπο εκείνου τού θεωρήματος 3.5.22. □

4.2.17 Θεώρημα. *Έστω ότι τα $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι δυο προβολικά αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματι-*

σμός. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι κληρονομικός, τότε

$$[\text{Ο } f_\bullet \text{ είναι αλυσωτή ισοδυναμία}] \iff [H_n(f_\bullet) \text{ ισομορφισμός}, \forall n \in \mathbb{Z}].$$

Απόδειξη. "$\Rightarrow$" Βλ. πρόταση 3.5.11.

"$\Leftarrow$" $[H_n(f_\bullet)$ ισομορφισμός, $\forall n \in \mathbb{Z}] \underset{3.5.18}{\iff}$ [Το $\mathbf{C}(f)_\bullet$ είναι ακυκληματικό] $\underset{4.2.16}{\Longrightarrow}$ [Ο $f_\bullet$ είναι αλυσωτή ισοδυναμία.] □

4.2.18 Ορισμός. Λέμε ότι ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (και αντιστοίχως, ένα συναλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων $\mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$) είναι **πεπερασμένου τύπου** όταν ο M_n (και αντιστοίχως, ο M^n) είναι πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος (υπό την έννοια τού ορισμού 2.1.14) *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$.

4.2.19 Θεώρημα. *Εάν $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ένα ελεύθερο (και αντιστοίχως, ένα προβολικό) αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων, όπου ο δακτύλιος R είναι Π.Κ.Ι. (και αντιστοίχως, κληρονομικός και ναιτεριανός [6]), και τέτοιο, ώστε το[7] $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ να είναι πεπερασμένου τύπου, τότε το $\mathbf{M}_\bullet$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμο* (υπό την έννοια τού ορισμού 3.5.10) *με ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων $\mathbf{M}'_\bullet$, το οποίο είναι ελεύθερο (και αντιστοίχως, προβολικό) και (ταυτοχρόνως, αφ' εαυτού) πεπερασμένου τύπου.*

Απόδειξη. Έστω τυχών $n \in \mathbb{Z}$. Εξ υποθέσεως, ο R-μόδιος $H_n(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι πεπερασμένως παραγόμενος, οπότε υπάρχει κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο $\mathscr{X}_n$ αυτού, ούτως ώστε να ισχύει $H_n(\mathbf{M}_\bullet) = \mathrm{Lin}_R(\mathscr{X}_n)$. Από την επιρριπτικότητα τού

$$\pi_n := \pi^{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)} : Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{M}_\bullet)$$

συνάγεται η ύπαρξη ενός πεπερασμένου συνόλου $\mathscr{Y}_n \subseteq Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ με $\pi_n(\mathscr{Y}_n) = \mathscr{X}_n$. Θέτουμε $L_n := \mathrm{Lin}_R(\mathscr{Y}_n)$ και ορίζουμε ως $q_n := \pi_n|_{L_n} : L_n \twoheadrightarrow H_n(\mathbf{M}_\bullet)$ τον επιμορφισμό τον επαγόμενο μέσω τού π_n και ως $U_n := \mathrm{Ker}(q_n)$ τον πυρήνα του. Επειδή ο L_n είναι πεπερασμένως παραγόμενος, ο υπομόδιός του U_n είναι ωσαύτως πεπερασμένως παραγόμενος. (Βλ. πόρισμα 2.5.49 και θεώρημα 2.5.53.) Επιπροσθέτως, επειδή ο R είναι Π.Κ.Ι. (και αντιστοίχως, κληρονομικός δακτύλιος) και ο M_n ελεύθερος (και αντιστοίχως, προβολικός) R-μόδιος, αμφότεροι οι L_n και U_n είναι ελεύθεροι (και αντιστοίχως, προβολικοί). Εν συνεχεία θέτουμε

$$\boxed{M'_n := L_n \oplus U_{n-1}} \tag{4.5}$$

και ορίζουμε (για $x \in L_n$ και $y \in U_{n-1}$) τον ομομορφισμό

$$\boxed{d'_n : M'_n \longrightarrow M'_{n-1},\ (x, y) \longmapsto d'_n(x, y) := (y, 0_{U_{n-2}}).}$$

[6] Εντός τής κλάσεως των *ακεραίων περιοχών*, οι κληρονομικοί δακτύλιοι είναι αρκούντως «οικείοι». Μια **περιοχή Dedekind** είναι μια ακεραία περιοχή R, η οποία δεν είναι σώμα, ενώ *είναι* ταυτοχρόνως: *ναιτεριανή* (βλ. εδ. 1.3.30), *ακεραίως κλειστή* (ήτοι τα μόνα στοιχεία οιασδήποτε ακεραίας περιοχής που περιέχει την R, τα οποία μπορούν να παίξουν τον ρόλο θέσεων μηδενισμού μονικών πολυωνύμων ανηκόντων στον $R[\mathrm{X}]$, είναι τα ίδια τα στοιχεία τής R) και *κάθε μη τετριμμένο πρώτο ιδεώδες της είναι μεγιστικό*. Ισχύει το εξής: *Μια ακεραία περιοχή R είναι περιοχή Dedekind $\Leftrightarrow$ η R είναι κληρονομικός δακτύλιος*. (Επί παραδείγματι, η ακεραία περιοχή $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ που συναντήσαμε στα εδάφια 1.3.43 και 2.5.48 είναι περιοχή Dedekind αλλά *δεν είναι* Π.Κ.Ι.)

[7] Το $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι το αλυσωτό σύμπλοκο που έχει τους $H_n(\mathbf{M}_\bullet)$, $n \in \mathbb{Z}$, ως μέλη του και *μηδενικούς όλους* τους συνοριακούς τελεστές του.

Προφανώς, για κάθε $x \in L_{n+1}$ και κάθε $y \in U_n$ έχουμε

$$(d'_n \circ d'_{n+1})(x,y) = d'_n(d'_{n+1}(x,y)) = d'_n(y, 0_{U_{n-1}}) = (0_{L_{n-1}}, 0_{U_{n-2}}) = 0_{M'_{n-1}},$$

οπότε $d'_n \circ d'_{n+1} = 0$ και το $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί ένα ελεύθερο (και αντιστοίχως, ένα προβολικό[8]) *αλυσωτό σύμπλοκο* πεπερασμένου τύπου. Παρατηρούμε ότι ο U_n περιέχεται στον[9] $B_n(\mathbf{M}_\bullet)$ και θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & U_n \arrow[d, hook, "\iota_n"] & \\ M_{n+1} \arrow[r, two heads, "\check{d}_{n+1}"'] & B_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

(έχον τη γραμμή του ακριβή λόγω τής επιρριπτικότητας τού $\check{d}_{n+1}$, βλ. (2.11)), όπου το ι_n συμβολίζει την εν λόγω ένθεση. Επειδή ο U_n είναι (σε κάθε περίπτωση) *προβολικός*, υπάρχει $\kappa_n \in \mathrm{Hom}_R(U_n, M_{n+1})$ που το συμπληρώνει μεταθετικώς:

$$\begin{tikzcd} & U_n \arrow[d, hook, "\iota_n"] \arrow[dl, dashed, "\kappa_n"'] & \\ M_{n+1} \arrow[r, two heads, "\check{d}_{n+1}"'] & B_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

ήτοι ισχύει $\iota_n = \check{d}_{n+1} \circ \kappa_n$. (Βλ. εδ. 4.2.1.) Θέτουμε (για $x \in L_n$ και $y \in U_{n-1}$)

$$\boxed{f_n : M'_n \longrightarrow M_n,\ (x,y) \longmapsto f_n(x,y) := x + \kappa_{n-1}(y).}$$

Η ακολουθία $f_\bullet = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί *αλυσωτό μετασχηματισμό* $f_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$. Πράγματι· το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ M_n \arrow[r, "d_n"'] & M_{n-1} \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, διότι για οιαδήποτε $x \in L_n$ και $y \in U_{n-1}$ έχουμε αφ' ενός μεν

$$\begin{aligned} d_n(f_n(x,y)) &= d_n(x + \kappa_{n-1}(y)) = d_n(\underbrace{x}_{\in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}) + d_n(\kappa_{n-1}(y)) \\ &= \check{d}_n(\kappa_{n-1}(y)) = (\check{d}_n \circ \kappa_{n-1})(y) = \iota_{n-1}|_{U_{n-1}}(y) = \iota_{n-1}(y), \end{aligned}$$

αφού $d_n(x) = 0_{M_{n-1}}$, αφ' ετέρου δε $f_{n-1}(d'_n(x,y)) = f_{n-1}(y, 0_{U_{n-2}}) = \iota_{n-1}(y)$.
▸ *Ο $H_n(f_\bullet)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.* Προφανώς,

[8] Βλ. πόρισμα 2.5.17 (και αντιστοίχως, πρόταση 4.2.13).

[9] Εάν $x \in U_n$, τότε $x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ και $x + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = q_n(x) = 0_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)} = B_n(\mathbf{M}_\bullet)$, οπότε $x \in B_n(\mathbf{M}_\bullet)$.

$$Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) := \ \mathrm{Ker}(d'_n) = \big\{(x,y) \in L_n \oplus U_{n-1} \big|\, y = 0_{U_{n-1}}\big\} = L_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\}$$

και $B_n(\mathbf{M}'_\bullet) := \ \mathrm{Im}(d'_{n+1}) = \big\{d'_{n+1}(x,y)\big|\, x \in L_{n+1}, y \in U_n\big\} = U_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\}$. Εάν τα $(x_1, 0_{U_{n-1}}), (x_2, 0_{U_{n-1}}) \in L_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\}$ είναι τέτοια, ώστε να ισχύει

$$H_n(f_\bullet)((x_1, 0_{U_{n-1}}) + (U_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\})) = H_n(f_\bullet)((x_2, 0_{U_{n-1}}) + (U_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\})),$$

τότε λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
&f_n(x_1, 0_{U_{n-1}}) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = f_n(x_2, 0_{U_{n-1}}) + B_n(\mathbf{M}_\bullet)\\
&\Rightarrow \iota_n(x_1) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = \iota_n(x_2) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \Rightarrow \iota_n(x_1 - x_2) \in B_n(\mathbf{M}_\bullet)\\
&\Rightarrow x_1 - x_2 \in U_n \Rightarrow (x_1, 0_{U_{n-1}}) - (x_2, 0_{U_{n-1}}) \in (U_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\}) = B_n(\mathbf{M}'_\bullet)\\
&\Rightarrow (x_1, 0_{U_{n-1}}) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet) = (x_2, 0_{U_{n-1}}) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet),
\end{aligned}$$

οπότε ο $H_n(f_\bullet)$ είναι *μονομορφισμός*. Έστω τώρα τυχόν $t + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \in H_n(\mathbf{M}_\bullet)$ (όπου $t \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$). Λόγω τής επιρριπτικότητας τού q_n υπάρχει στοιχείο $s \in L_n$, τέτοιο ώστε να ισχύει $q_n(s) = t + B_n(\mathbf{M}_\bullet)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
t + B_n(\mathbf{M}_\bullet) &= s + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = f_n(s, 0_{U_{n-1}}) + B_n(\mathbf{M}_\bullet)\\
&= H_n(f_\bullet)((s, 0_{U_{n-1}}) + (U_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\})),
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι ο ομομορφισμός $H_n(f_\bullet)$ είναι *και επιμορφισμός*. Επειδή λοιπόν ο $H_n(f_\bullet)$ είναι *ισομορφισμός* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο $f_\bullet$ είναι *αλυσωτή ισοδυναμία* δυνάμει τού θεωρήματος 3.5.23 (και αντιστοίχως, δυνάμει τού θεωρήματος 4.2.17). □

4.2.20 Σημείωση. Επί τη βάσει των προαναφερθέντων στη σημείωση 3.5.17 οι αυτονόητες παραλλαγές τόσον τής προτάσεως 3.5.18 όσον και των θεωρημάτων 4.2.15, 4.2.16, 4.2.17 και 4.2.19 εξακολουθούν να ισχύουν *και σε επίπεδο μοδίων συνομολογίας*.

4.2.21 Ορισμός. Ένας R-μόδιος Q καλείται **εμβολικός** όταν για κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $f : A \longrightarrow Q$ και για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$ υπάρχει κάποιος (όχι κατ' ανάγκην μοναδικός) ομομορφισμός $h \in \mathrm{Hom}_R(B, Q)$ για τον οποίο ισχύει $h \circ g = f$. Στη γλώσσα των διαγραμμάτων η «εμβολικότητα» διατυπώνεται ως εξής: Ένας R-μόδιος Q είναι εμβολικός εάν και μόνον εάν για κάθε διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B\\
& Q &
\end{tikzcd}$$

με τη γραμμή του ακριβή υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(B, Q)$ που το συμπληρώνει:

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

4.2.22 Πρόταση. *Υποτιθεμένου ότι η γραμμή τού διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g'"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \\ & Q & \end{tikzcd}$$

είναι ακριβής, ότι ο Q είναι εμβολικός και ότι $f \circ g' = 0$, υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(C, Q)$ με την ιδιότητα $h \circ g = f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g'"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έστω $E := \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(g')$. Επειδή $f \circ g' = 0 \Rightarrow E \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, η πρόταση 2.3.6 μας πληροφορεί ότι υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων $\beta : B/E \longrightarrow Q$, τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα $\beta \circ \pi_E^B = f$, καθώς και ότι υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος *μονομορφισμός* R-μοδίων

$$\alpha : B/E \longrightarrow C,$$

τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα $\alpha \circ \pi_E^B = g$. Επειδή ο Q είναι εμβολικός, υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(C, Q)$ με την ιδιότητα $h \circ \alpha = \beta$. Η απόδειξη αποπερατούται παρατηρώντας ότι $f = \beta \circ \pi_E^B = (h \circ \alpha) \circ \pi_E^B = h \circ (\alpha \circ \pi_E^B) = h \circ g$. □

4.2.23 Πρόταση. *Για έναν R-μόδιο Q οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο Q είναι εμβολικός.*

(ii) *Για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$ ο*

$$g^* := \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{id}_Q) : \mathrm{Hom}_R(B, Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, Q)$$

είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη. Ο ομομορφισμός g^* είναι (εξ ορισμού) επιμορφισμός εάν και μόνον εάν για κάθε $f \in \mathrm{Hom}_R(A, Q)$ υπάρχει ομομορφισμός $h \in \mathrm{Hom}_R(B, Q)$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$g^*(h) = \mathrm{id}_Q \circ h \circ g = h \circ g = f.$$

Ως εκ τούτου, οι συνθήκες (i) και (ii) είναι ισοδύναμες. (Βλ. εδ. 4.2.21.) □

4.2.24 Παραδείγματα. (i) Κάθε διανυσματικός χώρος ορισμένος υπεράνω ενός σώματος K είναι εμβολικός K-μόδιος.

(ii) Οι (προσθετικές, αβελιανές) ομάδες $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z}(p^\infty)$ (βλ. εδ. 2.2.21 (ii)) είναι εμβολικοί $\mathbb{Z}$-μόδιοι. Αντιθέτως, ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, δεν είναι εμβολικός.

4.2.25 Θεώρημα. *Κάθε R-μόδιος είναι ισόμορφος με έναν υπομόδιο ενός εμβολικού R-μοδίου.*

Απόδειξη. Βλ. Mac Lane [33], Theorem 7.4, σελ. 93-94. □

4.2.26 Πρόταση. *Κάθε ευθύς προσθετέος ενός εμβολικού R-μοδίου είναι εμβολικός.*

Απόδειξη. Έστω Q ένας εμβολικός R-μόδιος ο οποίος παρίσταται ως ευθύ άθροισμα $Q := U \oplus U'$ δυο υπομοδίων του U και U'. Έστω $f \in \mathrm{Hom}_R(A, U)$ και έστω τυχών μονομορφισμός R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$. Συμβολίζοντας ως $j : U \hookrightarrow Q$ τη συνήθη ένθεση και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο Q είναι εμβολικός, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη κάποιου $\theta \in \mathrm{Hom}_R(B, Q)$ με $\theta \circ g = j \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend right=60, "j\circ f"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[ddl, bend left, "\theta"] \arrow[l, phantom, shift right=4, "\circlearrowright"] \\
 & U \arrow[d, shift left, "j"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \\
 & Q = U \oplus U' \arrow[u, shift left, "\mathrm{pr}_1"] &
\end{tikzcd}$$

Επειδή $\mathrm{pr}_1 \circ j = \mathrm{id}_U$, θέτοντας $h := \mathrm{pr}_1 \circ \theta : B \longrightarrow U$ συμπεραίνουμε ότι

$$h \circ g = \mathrm{pr}_1 \circ \theta \circ g = \mathrm{pr}_1 \circ j \circ f = f.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο U είναι εμβολικός. □

4.2.27 Πρόταση. *Για μια οικογένεια R-μοδίων $(Q_j)_{j\in J}$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Το ευθύ γινόμενο $Q := \prod_{j\in J} Q_j$ είναι εμβολικός R-μόδιος.*

(ii) *Ο Q_j είναι εμβολικός R-μόδιος για κάθε $j \in J$.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν ο Q είναι εμβολικός, $f_j \in \mathrm{Hom}_R(A, Q_j)$ για κάθε $j \in J$ και $g : A \longrightarrow B$ τυχών μονομορφισμός R-μοδίων, τότε θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_j"'] & B \arrow[dl, dashed, "h_j"'] \arrow[d, "\theta_j"] \\
 & Q_j \arrow[r, shift left, "\iota_j"] & Q \arrow[l, shift left, "\mathrm{pr}_j"]
\end{tikzcd}$$

Προφανώς,

$$\exists \theta_j \in \mathrm{Hom}_R(B, Q) : \theta_j \circ g = \iota_j \circ f_j, \forall j \in J.$$

Θεωρώντας τή σύνθεση $h_j := \mathrm{pr}_j \circ \theta_j$ λαμβάνουμε

$$h_j \circ g = (\mathrm{pr}_j \circ \theta_j) \circ g = \mathrm{pr}_j \circ (\theta_j \circ g) = \mathrm{pr}_j \circ (\iota_j \circ f_j) = (\mathrm{pr}_j \circ \iota_j) \circ f_j = f_j, \forall j \in J.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο Q_j είναι εμβολικός R-μόδιος για κάθε $j \in J$.

(ii)⇒(i) Εάν ο Q_j είναι εμβολικός R-μόδιος για κάθε $j \in J$, $f \in \mathrm{Hom}_R(A, Q)$ και $g : A \longrightarrow B$ τυχών μονομορφισμός R-μοδίων, τότε θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\eta_j"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\
 & Q \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"'] & Q_j
\end{tikzcd}$$

Προφανώς,

$$\exists \eta_j \in \mathrm{Hom}_R(B, Q_j) : \eta_j \circ g = \mathrm{pr}_j \circ f, \forall j \in J.$$

Θεωρώντας τόν ομομορφισμό

$$h : B \longrightarrow Q, \;\; b \longmapsto h(b) := (\eta_j(b))_{j \in J},$$

διαπιστώνουμε ότι

$$(h \circ g)(a) = (\eta_j(g(a)))_{j \in J} = (\mathrm{pr}_j(f(a)))_{j \in J} = f(a), \; \forall a \in A.$$

Άρα ο Q είναι εμβολικός. □

4.2.28 Σημείωση. (i) Το *ευθύ άθροισμα* οιασδήποτε *πεπερασμένης* οικογενείας εμβολικών R-μοδίων είναι εμβολικός R-μόδιος (αφού το ευθύ άθροισμα πεπερασμένου πλήθους R-μοδίων ισούται με το ευθύ γινόμενο αυτών).

(ii) Το *ευθύ άθροισμα* τυχούσας οικογενείας εμβολικών R-μοδίων είναι εμβολικός R-μόδιος *εάν και μόνον εάν* ο R είναι *ναιτεριανός δακτύλιος*. (Βλ. Rotman [35], Proposition 3.31, σελ. 119, και Theorem 3.39, σελ. 123-124.)

4.2.29 Θεώρημα. *Για έναν R-μόδιο Q οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο Q είναι εμβολικός.*

(ii) *Εάν M, N είναι R-μόδιοι, τότε κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής*

$$\{0\} \longrightarrow Q \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{0\} \tag{4.6}$$

είναι διασπώμενη.

(iii) *Ο Q είναι ευθύς προσθετέος ενός εμβολικού R-μοδίου.*

(iv) *Για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$ ο*

$$g^* := \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{id}_Q) : \mathrm{Hom}_R(B, Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, Q)$$

είναι επιμορφισμός.

(v) *Για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,Q) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B,Q) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A,Q) \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Q"'] & M \\ & Q & \end{tikzcd}$$

με ακριβή γραμμή. Επειδή ο Q είναι εμβολικός,

$$\exists h \in \mathrm{Hom}_R(M,Q) : h \circ f = \mathrm{id}_Q.$$

Εξ αυτού έπεται ότι κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής (4.6) είναι διασπώμενη. (Βλ. θεώρημα 3.1.29.)

(ii)⇒(iii) Σύμφωνα με το θεώρημα 4.2.25, υπάρχει μονομορφισμός $f : Q \hookrightarrow Q'$ με τον Q' εμβολικό. Ως εκ τούτου, έχουμε τη δυνατότητα σχηματισμού τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow Q \overset{f}{\hookrightarrow} Q' \xrightarrow{\pi^{Q'}_{\mathrm{Im}(f)}} Q' / \,\mathrm{Im}(f) \longrightarrow \{0\}.$$

Επειδή αυτή διασπάται (εξ υποθέσεως) στον Q', ο

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\pi^{Q'}_{\mathrm{Im}(f)}) \cong Q$$

είναι ευθύς προσθετέος τού Q'.

(iii)⇒(i) Πρόκειται για την πρόταση 4.2.26.

(iv)⇔(i) Πρόκειται για την πρόταση 4.2.23.

(iv)⇔(v) Άμεση συνέπεια τού θεωρήματος 4.1.15. □

4.2.30 Σημείωση. Εάν ο Q είναι εμβολικός και

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

οιαδήποτε ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε η

$$\cdots \xrightarrow{f^*_{n+1}} \mathrm{Hom}_R(M_{n+1},Q) \xrightarrow{f^*_n} \mathrm{Hom}_R(M_n,Q) \xrightarrow{f^*_{n-1}} \mathrm{Hom}_R(M_{n-1},Q) \xrightarrow{f^*_{n-2}} \cdots$$

θα είναι ωσαύτως ακριβής. (Πρβλ. σημείωση 4.2.8.)

4.2.31 Θεώρημα (Κριτήριο τού Baer). *Ένας R-μόδιος M είναι εμβολικός εάν και μόνον εάν κάθε ομομορφισμός R-μοδίων $f : I \longrightarrow M$ από ένα ιδεώδες I τού R στον M μπορεί να επεκταθεί σε έναν ομομορφισμό R-μοδίων $\tilde{f} : R \longrightarrow M$.*

Απόδειξη. Βλ. Rotman [35], Theorem 3.30, σελ. 118-119. □

4.3 ΤΑΝΥΣΤΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

4.3.1 Ορισμός. Δοθέντων τριών R-μοδίων M, N και L, μια απεικόνιση

$$\beta : M \times N \longrightarrow L$$

καλείται R-**διγραμμική** όταν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\beta(r_1x_1 + r_2x_2, y) = r_1\beta(x_1, y) + r_2\beta(x_2, y)$,

(ii) $\beta(x, r_1y_1 + r_2y_2) = r_1\beta(x, y_1) + r_2\beta(x, y_2)$,

για οιαδήποτε $r_1, r_2 \in R$, $x, x_1, x_2 \in M$ και $y, y_1, y_2 \in N$. Χρησιμοποιούμενος συμβολισμός:

$$\boxed{\mathrm{Bil}_R(M, N; L) := \{\beta : M \times N \longrightarrow L \mid \beta\ R\text{-διγραμμική}\}.}$$

4.3.2 Παρατήρηση. Το σύνολο $\mathrm{Bil}_R(M, N; L)$ είναι εφοδιασμένο κατά τρόπο φυσικό με τη δομή ενός R-μοδίου, καθότι μπορεί να ιδωθεί ως υπομόδιος τού $L^{M\times N}$. (Βλ. 2.1.5 (viii).)

4.3.3 Σημείωση. Εάν M, L είναι δυο R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M, L)$, τότε, ως γνωστόν, ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f)$ τής f είναι υπομόδιος τού M και η εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ τής f είναι υπομόδιος τού L. (Βλ. 2.2.5 (ii) και (iv).) Από την άλλη μεριά, δοθέντων τριών R-μοδίων M, N και L, οι R-διγραμμικές απεικονίσεις $\beta \in \mathrm{Bil}_R(M, N; L)$ ενδέχεται να *μην διατηρούν πλήρως* τη δομή τού R-μοδίου, υπό την έννοια τού ότι είναι δυνατόν τόσον το σύνολο $\{(x, y) \in M \times N \mid \beta(x, y) = 0_L\} \subseteq M \times N$ όσον και η εικόνα

$$\mathrm{Im}(\beta) = \{\beta(x, y) \mid (x, y) \in M \times N\} \subseteq L$$

μιας τέτοιας β *να μην είναι υπομόδιοι*.

4.3.4 Παραδείγματα. (i) Η απεικόνιση

$$\beta : R \times R \longrightarrow R,\ \ (r, s) \longmapsto \beta((r, s)) := rs,$$

είναι R-διγραμμική· ωστόσο, εάν υποθέσουμε ότι ο R είναι ακεραία περιοχή, τότε το σύνολο

$$\{(r, s) \in R \times R \mid \beta((r, s)) = 0_R\} = (R \times \{0_R\}) \cup (\{0_R\} \times R)$$

δεν είναι υπομόδιος τού $R \times R$. (Προφανώς, το $(1_R, 0_R) + (0_R, 1_R) = (1_R, 1_R)$ δεν ανήκει σε αυτό το σύνολο.)

(ii) Έστω K ένα σώμα. Η απεικόνιση $\beta : K^2 \times K^2 \longrightarrow K^4$, όπου

$$\beta\left((a,b),(c,d)\right) := (ab, cd, ad, ad - bc)\,,\ \ \forall\left((a,b),(c,d)\right) \in K^2 \times K^2,$$

είναι K-διγραμμική. Η εικόνα $\mathrm{Im}\,(\beta)$ τής β περιέχει τα στοιχεία τής βάσεως

$$\mathscr{X} := \{(1_K, 0_K, 0_K, 0_K), (0_K, 1_K, 0_K, 0_K), (0_K, 0_K, 1_K, 1_K), (0_K, 0_K, 0_K, 1_K)\}$$

τού K-διανυσματικού χώρου K^4, διότι

$$\begin{cases} \beta^{-1}\left((1_K, 0_K, 0_K, 0_K)\right) = \left\{\left((\lambda, \lambda^{-1}), (0,0)\right) \mid \lambda \in K \smallsetminus \{0_K\}\right\}, \\ \beta^{-1}\left((0_K, 1_K, 0_K, 0_K)\right) = \left\{\left((0,0), (\lambda, \lambda^{-1})\right) \mid \lambda \in K \smallsetminus \{0_K\}\right\}, \\ \beta^{-1}\left((0_K, 0_K, 1_K, 1_K)\right) = \left\{\left((\lambda,0), (0, \lambda^{-1})\right) \mid \lambda \in K \smallsetminus \{0_K\}\right\}, \\ \beta^{-1}\left((0_K, 0_K, 0_K, 1_K)\right) = \left\{\left((0,\lambda), (-\lambda^{-1}, 0)\right) \mid \lambda \in K \smallsetminus \{0_K\}\right\}, \end{cases}$$

αλλά[10]

$$\beta^{-1}\left((0_K, 0_K, 1_K, 0_K)\right) = \varnothing \Rightarrow (0_K, 0_K, 1_K, 0_K) \notin \mathrm{Im}\,(\beta)\,.$$

Ως εκ τούτου, η $\mathrm{Im}\,(\beta)$ δεν είναι γραμμικός υπόχωρος[11] τού K^4.

4.3.5 Σημείωση. Λόγω αυτής τής *ιδιόρρυθμης συμπεριφοράς* των R-διγραμμικών απεικονίσεων, εάν μας δοθούν δυο R-μόδιοι M, N, κατασκευάζουμε έναν *ειδικό* R-μόδιο W, καθώς και μια *ειδική* R-διγραμμική απεικόνιση

$$\varphi : M \times N \longrightarrow W,$$

η οποία προσδιορίζει μια *R-γραμμική* απεικόνιση $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R\,(W, Z)$ για *οιαδήποτε* $\beta \in \mathrm{Bil}_R(M, N; W)$ (όπου Z τυχών R-μόδιος), ούτως ώστε η $\widetilde{\beta}$ να περιγράφει *ουσιώδεις ιδιότητες* τής β. Αυτό το ζεύγος (W, φ) καλείται «τανυστικό γινόμενο» των M και N, και -πέραν τού ότι πληροί την προαναφερθείσα «καθολική συνθήκη»- είναι και μονοσημάντως ορισμένο. (Βλ. θεωρήματα 4.3.8 και 4.3.9).

4.3.6 Ορισμός. Έστω ότι M και N είναι δυο R-μόδιοι. Κάθε ζεύγος (W, φ), αποτελούμενο από έναν R-μόδιο W και μια R-διγραμμική απεικόνιση

$$\varphi : M \times N \longrightarrow W,$$

καλείται **τανυστικό γινόμενο των** M **και** N **υπεράνω τού** R όταν πληροί την ακόλουθη *καθολική συνθήκη*: Για κάθε R-διγραμμική απεικόνιση β από τον $M \times N$ σε έναν *τυχόντα* R-μόδιο Z υπάρχει ένας *μονοσημάντως ορισμένος* ομομορφι-

[10] Οι εξισώσεις $ab = 0_K, cd = 0_K, ad = 1_K, bc = -1_K$ δεν διαθέτουν κοινές λύσεις $((a,b),(c,d))$ εντός τού $K^2 \times K^2$.

[11] Εάν η $\mathrm{Im}\,(\beta)$ ήταν γραμμικός υπόχωρος τού K-διαν. χώρου $V = K^4$, τότε $\mathrm{Im}\,(\beta) = \mathrm{Lin}_K\,(\mathrm{Im}\,(\beta))$ και

$$\mathscr{X} \subseteq \mathrm{Im}\,(\beta) \subseteq V \Longrightarrow V = \mathrm{Lin}_K\,(\mathscr{X}) \subseteq \mathrm{Lin}_K\,(\mathrm{Im}\,(\beta)) \subseteq \mathrm{Lin}_K\,(V) = V,$$

οπότε θα είχαμε $\mathrm{Im}\,(\beta) = V$, πράγμα άτοπο, διότι $(0_K, 0_K, 1_K, 0_K) \notin \mathrm{Im}\,(\beta)$.

σμός $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R\,(W, Z)$, ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\beta"'] & W \arrow[d, dotted, "\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(W,Z)"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, ήτοι

$$\beta(x,y) = \widetilde{\beta}\,(\varphi\,(x,y))\,, \;\; \forall\,(x,y) \in M \times N.$$

(Η πρόταση 4.3.7 μας παρέχει δύο χρηστικές ιδιότητες για το ζεύγος (W,φ), οι οποίες, όταν ισχύουν από κοινού, ισοδυναμούν με την ως άνω καθολική συνθήκη. Εξάλλου, μέσω τού θεωρήματος 4.3.11 αποδεικνύεται *κατασκευαστικώς* η ύπαρξη τανυστικού γινομένου για *οιουσδήποτε* R-μοδίους M και N. Προηγείται το θεώρημα 4.3.8, το οποίο μας εγγυάται τη μοναδικότητά του.)

4.3.7 Πρόταση. *Ένα ζεύγος (W,φ), αποτελούμενο από έναν R-μόδιο W και μια R-διγραμμική απεικόνιση $\varphi : M \times N \longrightarrow W$, είναι ένα τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M και N εάν και μόνον εάν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *Η εικόνα $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ τής φ παράγει τον W, ήτοι ισχύει $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = W$.*

(ii) *Για κάθε R-διγραμμική απεικόνιση β από τον $M \times N$ σε έναν τυχόντα R-μόδιο Z υπάρχει ένας ομομορφισμός $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R\,(W, Z)$, τέτοιος ώστε $\beta = \widetilde{\beta} \circ \varphi$.*

Απόδειξη. “$\Rightarrow$” Έστω (W,φ) ένα τανυστικό γινόμενο των M και N. Η ιδιότητα (ii) περιέχεται στον ορισμό 4.3.6. Για την επαλήθευση τής (i) θεωρούμε τον υπομόδιο $Z := \mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi))$ τού W και την R-διγραμμική απεικόνιση

$$\beta : M \times N \longrightarrow Z,\;\; (x,y) \longmapsto \beta(x,y) := \varphi(x,y).$$

Η καθολική συνθήκη που πληροί το τανυστικό γινόμενο των M και N εγγυάται την ύπαρξη μοναδικού $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R\,(W, Z)$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, bend left, dotted, "\widetilde{\beta}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ M \times N \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\beta"'] & {} & Z \arrow[ul, hook', "\iota"'] \end{tikzcd}$$

μεταθετικό (όπου $\iota : Z \hookrightarrow W$ η συνήθης ένθεση). Επομένως,

$$\widetilde{\beta} \circ \varphi = \beta \Rightarrow (\iota \circ \widetilde{\beta}) \circ \varphi = \iota \circ (\widetilde{\beta} \circ \varphi) = \iota \circ \beta = \varphi = \mathrm{id}_W \circ \varphi$$

$\Rightarrow \iota \circ \widetilde{\beta} = \mathrm{id}_W$ (λόγω τής μοναδικότητας τέτοιου ομομορφισμού, βλ. 4.3.6)

$\underset{2.2.22}{\Longrightarrow}$ [η ι είναι επίρριψη] $\Rightarrow Z = \mathrm{Im}(\iota) = W.$

"$\Leftarrow$" Αρκεί να αποδείξουμε τη μοναδικότητα τού ομομορφισμού $\widetilde{\beta}$ με την ιδιότητα $\beta = \widetilde{\beta} \circ \varphi$. Εάν υπάρχει $\widetilde{\beta}' \in \mathrm{Hom}_R(W, Z)$ με $\beta = \widetilde{\beta}' \circ \varphi$, τότε

$$\widetilde{\beta}' \circ \varphi = \widetilde{\beta} \circ \varphi \Rightarrow \widetilde{\beta}'\Big|_{\mathrm{Im}(\varphi)} = \widetilde{\beta}\Big|_{\mathrm{Im}(\varphi)} \Rightarrow \widetilde{\beta}' = \widetilde{\beta}$$

(λόγω τής (i)). □

4.3.8 Θεώρημα (Μοναδικότητα τού τανυστικού γινομένου). *Εάν τα (W, φ) και (W', φ') είναι τανυστικά γινόμενα των R-μοδίων M και N, τότε υπάρχει ένας μονοσημάντως ορισμένος ισομορφισμός $h : W \xrightarrow{\cong} W'$, ούτως ώστε να ισχύει $h \circ \varphi = \varphi'$.*

Αποδειξη. Από την καθολική συνθήκη που πληρούν τα τανυστικά γινόμενα (W, φ) και (W', φ') (βλ. 4.3.6)

$$[\exists h \in \mathrm{Hom}_R\big(W, W'\big) : h \circ \varphi = \varphi'] \text{ και } [\exists h' \in \mathrm{Hom}_R\big(W', W\big) : h' \circ \varphi' = \varphi]$$

επί τη βάσει τού ακόλουθου μεταθετικού διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
W & & M \times N \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & & W \arrow[dll, bend left, "h"] \\
& & W' \arrow[ull, bend left, "h'"] & &
\end{tikzcd}$$

αφού θέσουμε $Z := W', \beta := \varphi'$ και $\widetilde{\beta} := h$ στην πρώτη περίπτωση, και, αντιστοίχως, $Z := W, \beta := \varphi$ και $\widetilde{\beta} := h'$ στη δεύτερη περίπτωση. Επομένως,

$$\left.\begin{array}{r} (h' \circ h) \circ \varphi = \varphi = \mathrm{id}_W \circ \varphi, \\ h' \circ h \in \mathrm{Hom}_R(W, W) \\ \mathrm{id}_W \in \mathrm{Hom}_R(W, W) \end{array}\right\} \Rightarrow h' \circ h = \mathrm{id}_W$$

(εξαιτίας τής μοναδικότητας τού ομομορφισμού με την εν λόγω ιδιότητα) και κατ' αναλογίαν $h \circ h' = \mathrm{id}_{W'}$. Αυτό σημαίνει ότι αμφότεροι οι h, h' είναι ισομορφισμοί με $h' = h^{-1}$. □

4.3.9 Σημείωση. (i) Εάν το (W, φ) είναι ένα τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M και N και

$$g : W \xrightarrow{\cong} Z$$

ένας ισομορφισμός R-μοδίων, τότε, με ανάλογη συλλογιστική, δείχνουμε ότι *και το* $(Z, g \circ \varphi)$ είναι ένα τανυστικό γινόμενο των M και N.

(ii) Κατ' ουσίαν, το θεώρημα 4.3.8 μας πληροφορεί ότι ένα τανυστικό γινόμενο (W, φ) των M και N, εφόσον υπάρχει, είναι *μονοσημάντως ορισμένο* «μέχρις ισομορφισμού». Μάλιστα, όπως θα δούμε αργότερα (στο εδ. 4.5.39), στην ειδική περίπτωση κατά την οποία αμφότεροι οι M και N είναι ελεύθεροι και πεπερασμένως παραγόμενοι, υπάρχει και η δυνατότητα επιλογής ενός «καλού εκπροσώπου» από την κλάση των (ανά δύο ισόμορφων) ζευγών (W, φ).

4.3.10 Ορισμός. Έστω ότι οι M και N είναι δυο R-μόδιοι. Θεωρούμε τον ελεύθερο R-μόδιο $R^{(M\times N)}$ με το σύνολο $\mathrm{Im}\,(\delta) = \left\{\delta_{(x,y)} \mid (x,y) \in M \times N\right\}$ ως μια βάση του, όπου η δ είναι η ενριπτική απεικόνιση

$$\delta : M \times N \longrightarrow R^{(M\times N)}, \;\; (x,y) \longmapsto \delta_{(x,y)},$$

με

$$M \times N \ni (x,y) \longmapsto \delta_{(x,y)}\,(a,b) := \begin{cases} 1_R, & \text{όταν } (x,y) = (a,b), \\ 0_R, & \text{όταν } (x,y) \neq (a,b). \end{cases}$$

(Βλ. 2.5.5 και 2.5.12.) Εν συνεχεία ορίζουμε τον υπομόδιο $\Xi_{M,N}\,(R)$ τού $R^{(M\times N)}$ τον παραγόμενο από τα στοιχεία τής μορφής

(i) $\delta_{(r_1x+r_2x',y)} - r_1\,\delta_{(x,y)} - r_2\,\delta_{(x',y)}$, $(x,x',y) \in M \times M \times N$, $(r_1,r_2) \in R \times R$, και

(ii) $\delta_{(x,r_1y+r_2y')} - r_1\,\delta_{(x,y)} - r_2\,\delta_{(x,y')}$, $(x,y,y') \in M \times N \times N$, $(r_1,r_2) \in R \times R$,

και συμβολίζουμε απλώς ως π τον φυσικό επιμορφισμό

$$\pi^{R^{(M\times N)}}_{\Xi_{M,N}(R)} : R^{(M\times N)} \longrightarrow R^{(M\times N)} \,/\, \Xi_{M,N}\,(R)\,.$$

Τώρα πλέον έχουμε στη διάθεσή μας όλα εκείνα τα τεχνικά μέσα, τα οποία θα απαιτηθούν για την *κατασκευή* τανυστικού γινομένου για *οιουσδήποτε* R-μοδίους M και N.

4.3.11 Θεώρημα (Ύπαρξη τού τανυστικού γινομένου).
Για οιουσδήποτε R-μοδίους M και N, το ζεύγος (W,φ), όπου

$$\boxed{W := R^{(M\times N)} \,/\, \Xi_{M,N}\,(R)\,, \quad \varphi := \pi \circ \delta} \tag{4.7}$$

αποτελεί τανυστικό γινόμενο των M και N.

Αποδειξη. Αυτή θα παρουσιασθεί σε τρία διαδοχικά βήματα.

Βήμα 1ο. Η απεικόνιση $\varphi := \pi \circ \delta : M \times N \longrightarrow W$ είναι *R-διγραμμική*. Πράγματι· για οιαδήποτε $r_1, r_2 \in R$, $x_1, x_2 \in M$ και $y \in N$ έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi(r_1x_1 + r_2x_2, y) = \delta_{(r_1x_1+r_2x_2,y)} + \Xi_{M,N}\,(R)\,, \\ r_1\varphi(x_1,y) + r_2\varphi(x_2,y) = r_1\delta_{(x_1,y)} + r_2\delta_{(x_2,y)} + \Xi_{M,N}\,(R)\,, \\ 4.3.10 \Rightarrow \delta_{(r_1x_1+r_2x_2,y)} - (r_1\delta_{(x_1,y)} + r_2\delta_{(x_2,y)}) \in \Xi_{M,N}\,(R)\,. \end{array} \right\}$$

Εξ αυτών έπεται ότι $\varphi(r_1x_1 + r_2x_2, y) = r_1\varphi(x_1,y) + r_2\varphi(x_2,y)$. Επίσης, για οιαδήποτε $r_1, r_2 \in R$, $x \in M$ και $y_1, y_2 \in N$, $\varphi(x, r_1y_1 + r_2y_2) = r_1\varphi(x,y_1) + r_2\varphi(x,y_2)$.

Βήμα 2ο. Έστω Z τυχών R-μόδιος και έστω $\beta \in \mathrm{Bil}_R(M,N;Z)$. Κατόπιν διπλής εφαρμογής τής καθολικής συνθήκης που πληροί ο ελεύθερος R-μόδιος $(R^{(M\times N)}, \delta)$ επί τού $M \times N$ για τις απεικονίσεις φ και β (βλ. 2.5.1 και 2.5.5) λαμβάνουμε μονοσημάντως ορισμένους

$$\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_R(R^{(M\times N)}, W) : \overline{\varphi} \circ \delta = \varphi \;\text{ και }\; \overline{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(R^{(M\times N)}, Z) : \overline{\beta} \circ \delta = \beta.$$

Σημειωτέον ότι $\overline{\varphi} = \pi$ (λόγω τής μοναδικότητας τού $\overline{\varphi}$ με αυτήν την ιδιότητα, καθόσον $\pi \circ \delta =: \varphi$). Ως εκ τούτου, προκύπτει το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& W & \\
& M \times N \arrow[u, "\varphi"] \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
R^{(M\times N)} \arrow[uur, bend left, "\overline{\varphi}=\pi"] \arrow[rr, "\overline{\beta}"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Βήμα 3ο. Από την R-διγραμμικότητα τής β έπεται ότι $\Xi_{M,N}(R) \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{\beta})$. Λόγω αυτού τού εγκλεισμού είναι δυνατή η εφαρμογή τής καθολικής ιδιότητας 2.3.6 (i) για τον πηλικομόδιο W στον $\overline{\beta}$ και η απόκτηση ενός και μόνον

$$\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(W, Z) : \widetilde{\beta} \circ \pi = \widetilde{\beta} \circ \overline{\varphi} = \overline{\beta}.$$

Προφανώς, $\widetilde{\beta} \circ \varphi = \widetilde{\beta} \circ (\overline{\varphi} \circ \delta) = (\widetilde{\beta} \circ \overline{\varphi}) \circ \delta = \overline{\beta} \circ \delta = \beta$.

$$\begin{tikzcd}
& W \arrow[ddr, dashed, bend left, "\widetilde{\beta}"] & \\
& M \times N \arrow[u, "\varphi"] \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
R^{(M\times N)} \arrow[uur, bend left, "\overline{\varphi}=\pi"] \arrow[rr, "\overline{\beta}"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Για να δείξουμε ότι ο $\widetilde{\beta}$ είναι μονοσημάντως ορισμένος *και ως προς αυτήν την ιδιότητα* αρκεί (δυνάμει τής προτάσεως 4.3.7) να δείξουμε ότι η εικόνα τής φ είναι ένα σύνολο γεννητόρων τού W. Τούτο έπεται από τις ισότητες

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi)) &= \mathrm{Lin}_R(\varphi(M \times N)) = \mathrm{Lin}_R(\pi(\delta(M \times N))) \\
&= \pi(\mathrm{Lin}_R(\delta(M \times N))) = \pi(\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}(\delta))) = \pi(R^{(M\times N)}) = W,
\end{aligned}$$

με την τρίτη εξ αυτών οφειλόμενη στην επιρριπτικότητα τού π και με την πέμπτη προκύπτουσα από το λήμμα 2.5.2 και το θεώρημα 2.5.5. $\square$

4.3.12 Ορισμός. Δοθέντων δυο R-μοδίων M και N, κατασκευάζουμε το ζεύγος (W, φ) μέσω τού (4.7) και χρησιμοποιούμε τον (κλασικό) συμβολισμό:

$$M \otimes_R N := W.$$

Δυνάμει τού θεωρήματος 4.3.8 και τής σημειώσεως 4.3.9 μπορούμε, αναφερόμενοι -από τούδε και στο εξής- στο $(M \otimes_R N, \varphi)$, να ομιλούμε για **το τανυστικό γινόμενο** των R-μοδίων M και N. Επίσης, ονομάζουμε την φ **τανυστική απεικόνιση** τού W.

4.3.13 Ορισμός. Τα στοιχεία τού υποκειμένου συνόλου W τού τανυστικού γινομένου $(W = M \otimes_R N, \varphi)$ των R-μοδίων M και N ονομάζονται **τανυστές**. Ιδιαιτέρως, κάθε τανυστής τής μορφής $x \otimes y := \varphi(x, y) \in \operatorname{Im}(\varphi)$, για κάποια $x \in M, y \in N$, καλείται **αποσυντιθέμενος** (ή **στοιχειώδης**) **τανυστής**[12] τού W.

4.3.14 Πόρισμα. *Έστω $(W = M \otimes_R N, \varphi)$ το τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M και N. Τότε ισχύουν οι ακόλουθοι υπολογιστικοί κανόνες για τους αποσυντιθέμενους τανυστές τού W:*

(i) $(x_1 + x_2) \otimes y = (x_1 \otimes y) + (x_2 \otimes y)$, *για κάθε $x_1, x_2 \in M$ και κάθε $y \in N$,*

(ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = (x \otimes y_1) + (x \otimes y_2)$, *για κάθε $x \in M$ και κάθε $y_1, y_2 \in N$,*

(iii) $r(x \otimes y) = (rx \otimes y) = (x \otimes ry)$, *για κάθε $x \in M, y \in N$, και κάθε $r \in R$,*

(iv) $0_M \otimes y = 0_W = x \otimes 0_N$, *για κάθε $x \in M$ και $y \in N$.*

Αποδειξη. Επειδή $x \otimes y = \varphi(x, y)$, όλοι οι αναγραφόμενοι υπολογιστικοί κανόνες έπονται άμεσα από την R-διγραμμικότητα τής $\varphi : M \times N \longrightarrow W$. □

4.3.15 Πόρισμα. *Έστω $(W = M \otimes_R N, \varphi)$ το τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M και N. Τότε για κάθε τανυστή $w \in W$ υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_i \in M, y_i \in N$ και $r_i \in R, 1 \leqslant i \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε να ισχύει η ισότητα*

$$w = \sum_{i=1}^{k} r_i (x_i \otimes y_i). \tag{4.8}$$

Αποδειξη. Επειδή $\operatorname{Lin}_R(\operatorname{Im}(\varphi)) = W$ (κατά την πρόταση 4.3.7), κάθε στοιχείο τού W γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αποσυντιθέμενων τανυστών. □

4.3.16 Πόρισμα. *Εάν M, N είναι R-μόδιοι, με τουλάχιστον έναν εξ αυτών τετριμμένο, τότε και το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_R N$ είναι τετριμμένος R-μόδιος.*

Αποδειξη. Έπεται άμεσα από το πόρισμα 4.3.15 και από το (iv) τού 4.3.14. □

4.3.17 Σημείωση. Το αντίστροφο τού πορίσματος 4.3.16 δεν είναι αληθές αν δεν πληρούνται κάποιες επιπρόσθετες συνθήκες. (Βλ. παράδειγμα 4.3.20 (ii), καθώς και το (ii) τού πορίσματος 4.4.11.)

4.3.18 Πόρισμα. *Έστω $W = M \otimes_R N$ το τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M και N. Τότε κάθε $w \in W$ γράφεται ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους αποσυντιθέμενων τανυστών.*

Αποδειξη. Η παράσταση (4.8) τυχόντος $w \in W$ μπορεί (μέσω τής 4.3.14 (iii)) να γραφεί ως: $w = \sum_{i=1}^{k} r_i (x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{k} (r_i x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{k} (x_i \otimes r_i y_i)$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

4.3.19 Παρατήρηση. (i) Εξ όσων αναφέρονται στην απόδειξη τού 4.3.18 η παράσταση (4.8) και η παράσταση ενός τανυστή $w \in W$ ως άθροισμα πεπερασμένου

[12] Για δοθέντα αποσυντιθέμενο τανυστή $u \otimes v$, τα u και v ονομάζονται ενίοτε *παράγοντές* του.

πλήθους αποσυντιθέμενων τανυστών *δεν* είναι -εν γένει- μονοσημάντως ορισμένες.

(ii) Θα πρέπει, επιπροσθέτως, να επισημανθεί ότι -εν γένει- είναι δυνατή *η ύπαρξη μη αποσυντιθέμενων τανυστών* $w \in W$. Για ένα απλό παράδειγμα βλ. 4.4.9.

(iii) Μέσω τής προτάσεως 4.3.7 αποδεικνύεται ότι *για οιονδήποτε* R-μόδιο Z η απεικόνιση $\mathrm{Bil}_R(M,N;Z) \ni \beta \longmapsto \widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(W,Z)$ αποτελεί *ισομορφισμό* R-μοδίων, έχουσα ως αντίστροφό της την $\mathrm{Hom}_R(W,Z) \ni f \longmapsto f \circ \varphi \in \mathrm{Bil}_R(M,N;Z)$. Εάν λοιπόν κάποιος προτίθεται να ορίσει *για έναν συγκεκριμένο* R-μόδιο Z έναν ομομορφισμό $f \in \mathrm{Hom}_R(W,Z)$ μέσω *συγκεκριμένου τύπου*, είναι αρκετό να προκαθορίσει *μόνον* το ποιες θα είναι οι τιμές που θα λαμβάνει ο f επί *τού συνόλου* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *των αποσυντιθέμενων τανυστών*! Και αυτό, διότι (σύμφωνα με το πόρισμα 4.3.18) κάθε $w \in W$ γράφεται υπό τη μορφή $w = x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_k \otimes y_k$, για κάποια $x_1, ..., x_k \in M$ και κάποια $y_1, ..., y_k \in N$, οπότε $f(w) = f(x_1 \otimes y_1) + \cdots + f(x_k \otimes y_k)$. Εν τοιαύτη περιπτώσει, είθισται να λέμε (ή να γράφουμε) ότι ένας τέτοιος f *ορίζεται επί τού συνόλου των αποσυντιθέμενων τανυστών ως εξής*: ..... (παραθέτοντας *το ποια ακριβώς* θα είναι τα στοιχεία[13] $f(x \otimes y)$ τού Z για κάθε $(x,y) \in \mathrm{Im}(\varphi)$).

4.3.20 Παραδείγματα. Στο σημείο αυτό δίνουμε κάποια πρώτα «απτά» παραδείγματα τανυστικών γινομένων $M \otimes_R N$ δυο R-μοδίων M και N.

(i) Εάν $R = \mathbb{Z}$ και $M = N = \mathbb{Z}_2$, τότε $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$. Πράγματι· το καρτεσιανό γινόμενο των M και N είναι το $\{([0]_2,[0]_2),([0]_2,[1]_2),([1]_2,[0]_2),([1]_2,[1]_2)\}$. Επομένως ο $R^{(M\times N)}$ είναι ένας ελεύθερος $\mathbb{Z}$-μόδιος βαθμίδας 4 με το

$$\{\delta_{([0]_2,[0]_2)}, \delta_{([0]_2,[1]_2)}, \delta_{([1]_2,[0]_2)}, \delta_{([1]_2,[1]_2)}\}$$

ως μια βάση του. Δεδομένου ότι $2\,[a]_2 = [2a]_2 = [0]_2$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\begin{cases} \delta_{([0]_2,[0]_2)} - 0 \cdot \delta_{([0]_2,[0]_2)} = \delta_{([0]_2,[0]_2)} \in \Xi_{M,N}(R), \\ \delta_{([0]_2,[1]_2)} - 0 \cdot \delta_{([0]_2,[1]_2)} = \delta_{([0]_2,[1]_2)} \in \Xi_{M,N}(R), \\ \delta_{([1]_2,[0]_2)} - 0 \cdot \delta_{([1]_2,[0]_2)} = \delta_{([1]_2,[0]_2)} \in \Xi_{M,N}(R), \\ \text{και } 2\delta_{([a]_2,[b]_2)} = \delta_{([0]_2,[0]_2)} \in \Xi_{M,N}(R), \ \ \forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ωστόσο, όπως διαπιστώνει κανείς εύκολα, $\delta_{([1]_2,[1]_2)} \notin \Xi_{M,N}(R)$, οπότε

$$M \otimes_R N = R^{(M\times N)}/\Xi_{M,N}(R) = \left\{\Xi_{M,N}(R), \delta_{([1]_2,[1]_2)} + \Xi_{M,N}(R)\right\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

(ii) Το τανυστικό γινόμενο δυο μη τετριμμένων μοδίων δεν είναι κατ' ανάγκην μη τετριμμένο. (Πρβλ. 4.4.11). Π.χ., εάν $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_m$ και $N = \mathbb{Z}_n$, όπου $m,n \in \mathbb{N}$ με μκδ$(m,n) = 1$, τότε $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \{0\}$. Πράγματι· τούτο έπεται από το ότι

$$[a]_m \otimes [b]_n = 0_{\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n}, \ \ \forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

[13] Επειδή, βάσει των προαναφερθέντων, ο f οφείλει να είναι τής μορφής $\widetilde{\beta}$ για *συγκεκριμένη* $\beta \in \mathrm{Bil}_R(M,N;Z)$, είναι αρκετό να περιγραφεί *ο τύπος ορισμού* τής αντίστοιχης β.

σε συνδυασμό με το πόρισμα 4.3.18. Η εν λόγω ισότητα αποδεικνύεται ως εξής: Επειδή $\exists\,(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}:\mu m+\nu n=1$, έχουμε

$$\begin{aligned}&[a]_m\otimes[b]_n=1\cdot\left([a]_m\otimes[b]_n\right)=(\mu m+\nu n)\left([a]_m\otimes[b]_n\right)\\&=\mu m\left([a]_m\otimes[b]_n\right)+\nu n\left([a]_m\otimes[b]_n\right)=\left(\mu m\,[a]_m\otimes[b]_n\right)+\left([a]_m\otimes\nu n\,[b]_n\right)\\&=(\mu\underbrace{[ma]_m}_{=[0]_m}\otimes[b]_n)+([a]_m\otimes\nu\underbrace{[nb]_n}_{=[0]_n}=0_{\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n}+0_{\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n}=0_{\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n}.\end{aligned}$$

(Βλ. πόρισμα 4.3.14.) Σημειωτέον ότι, γενικότερα, για *οιουσδήποτε* $m,n\in\mathbb{N}$ έχουμε[14]

$$\boxed{\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{\text{μκδ}(m,n)}.}\tag{4.9}$$

(iii) Έστω M είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος. Τότε για κάθε σύνολο $J\neq\varnothing$ ισχύει

$$\boxed{M^{(J)}\cong R^{(J)}\otimes_R M.}$$

Πράγματι· η απεικόνιση

$$\varphi:R^{(J)}\times M\longrightarrow M^{(J)},\quad \left((r_j)_{j\in J},x\right)\longmapsto (r_jx)_{j\in J},$$

είναι R-διγραμμική και για κάθε $(x_j)_{j\in J}\in M^{(J)}$ έχουμε $(x_j)_{j\in J}=\sum_{j\in J}\varphi\left(e_j,x_j\right)$, όπου $(e_j)_{j\in J}$ είναι η συνήθης βάση τού $R^{(J)}$, οπότε $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi))=M^{(J)}$. Εξάλλου, εάν Z είναι τυχών R-μόδιος και $\beta\in\mathrm{Bil}_R\left(R^{(J)},M;Z\right)$, τότε η απεικόνιση

$$\widetilde{\beta}:M^{(J)}\longrightarrow Z,\quad \widetilde{\beta}((x_j)_{j\in J}):=\sum_{j\in J}\beta\left(e_j,x_j\right)$$

αποτελεί έναν ομομορφισμό R-μοδίων για τον οποίο ισχύει

$$\begin{aligned}&\widetilde{\beta}(\varphi(((r_j)_{j\in J},x)))=\widetilde{\beta}((r_jx)_{j\in J})=\sum_{j\in J}r_j\beta\left(e_j,x\right)\\&=\sum_{j\in J}\beta\left(r_je_j,x\right)=\beta((r_j)_{j\in J},x),\quad\forall((r_j)_{j\in J},x)\in R^{(J)}\times M.\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, το ζεύγος $(M^{(J)},\varphi)$ είναι (μέχρις ισομορφισμού) το τανυστικό γινόμενο των $R^{(J)}$ και M. (Βλ. 4.3.7 και 4.3.8). Προφανώς, όταν $n\in\mathbb{N}$ και $J=\{1,\ldots,n\}$, λαμβάνουμε

$$M^n=\underbrace{M\times\cdots\times M}_{n\text{ φορές}}\cong R^n\otimes_R M.$$

(iv) Εάν $m,n\in\mathbb{N}$, τότε ο R-μόδιος $\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ όλων των $(m\times n)$-πινάκων με τις εγγραφές τους ειλημμένες από τον R (βλ. 2.1.5 (v)) μπορεί να ιδωθεί ως το τανυστικό γινόμενο των R^m και R^n, καθότι

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)\cong\mathrm{Mat}_{m\times 1}(R)\otimes_R\mathrm{Mat}_{n\times 1}(R)\cong R^m\otimes_R R^n.}$$

[14] Βλ. παρατήρηση 4.5.13.

Πράγματι· η απεικόνιση $\psi : \mathrm{Mat}_{m\times 1}(R) \times \mathrm{Mat}_{n\times 1}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$,

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}^{\intercal} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_m y_1 & \cdots & x_m y_n \end{pmatrix},$$

είναι R-διγραμμική. Εάν

$$\left\{ \mathbf{E}_i^{(1)} := \begin{pmatrix} \delta_{i1} \\ \vdots \\ \delta_{im} \end{pmatrix} \;\middle|\; 1 \leqslant i \leqslant m \right\}, \left\{ \mathbf{E}_j^{(2)} := \begin{pmatrix} \delta_{j1} \\ \vdots \\ \delta_{jn} \end{pmatrix} \;\middle|\; 1 \leqslant j \leqslant n \right\}$$

είναι οι συνήθεις βάσεις των $\mathrm{Mat}_{m\times 1}(R)$ και $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(R)$, αντιστοίχως (με το δ_{ij} να εκφράζει -ως είθισται- το σύμβολο τού Kronecker), τότε ισχύει προφανώς $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}(\psi)) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$, για κάθε δε πίνακα $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ έχουμε

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} \psi\left(\mathbf{E}_i^{(1)}, (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})\right),$$

και η οικογένεια πινάκων $\left(\mathbf{E}_{ij} := \psi\left(\mathbf{E}_i^{(1)}, \mathbf{E}_j^{(2)}\right)\right)_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant n}$ είναι η συνήθης βάση τού ελευθέρου R-μοδίου $\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ (όπου, για δοθέντα i, j, η στην i-στή γραμμή και j-στή στήλη ευρισκομένη εγγραφή τού πίνακα $(\mathbf{E}_{ij})$ είναι το μοναδιαίο στοιχείο 1_R τού R, ενώ οι υπόλοιπες εγγραφές είναι $= 0_R$). Εάν λοιπόν Z είναι τυχών R-μόδιος και

$$\beta \in \mathrm{Bil}_R\left(\mathrm{Mat}_{m\times 1}(R), \mathrm{Mat}_{n\times 1}(R); Z\right),$$

τότε η απεικόνιση

$$\widetilde{\beta} : \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \longrightarrow Z, \;\; \widetilde{\beta}(\mathbf{E}_{ij}) := \beta(\mathbf{E}_i^{(1)}, \mathbf{E}_j^{(2)}), \forall\, (i,j) \in \{1,..,m\} \times \{1,..,n\}.$$

αποτελεί έναν ομομορφισμό R-μοδίων για τον οποίο ισχύει

$$\left[\widetilde{\beta}(\psi(\mathbf{E}_i^{(1)}, \mathbf{E}_j^{(2)})) = \beta(\mathbf{E}_i^{(1)}, \mathbf{E}_j^{(2)}), \forall\, (i,j) \in \{1,..,m\} \times \{1,..,n\}\right] \Longrightarrow \widetilde{\beta} \circ \psi = \beta.$$

Κατά συνέπειαν, το ζεύγος $(\mathrm{Mat}_{m\times n}(R), \psi)$ είναι (μέχρις ισομορφισμού) το τανυστικό γινόμενο των $\mathrm{Mat}_{m\times 1}(R) \cong R^m$ και $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(R) \cong R^n$ το οριζόμενο υπεράνω τού R. (Βλ. 4.3.7, 4.3.8 και 4.5.6 (iii).) Προφανώς, επειδή για κάθε

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}_{m\times 1}(R) \times \mathrm{Mat}_{n\times 1}(R)$$

έχουμε

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_m y_1 & \cdots & x_m y_n \end{pmatrix},$$

η ως άνω διαδικασία κατασκευής τού τανυστικού γινομένου μπορεί να εκτελεσθεί και για γραμμοπίνακες (στη θέση των στηλοπινάκων).

$\boxed{4.4}$ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Για τη διευκόλυνση των υπολογισμών που απαιτούνται για τον προσδιορισμό τού τανυστικού γινομένου δύο δοθέντων R-μοδίων παρατίθενται οι κύριες ιδιότητες τού "$\otimes_R$" (στα θεωρήματα 4.4.1, 4.4.5, 4.4.6 και 4.4.7).

4.4.1 Θεώρημα (Μεταθετικότητα τού "$\otimes_R$"). *Για οιουσδήποτε R-μοδίους M, N υφίσταται κανονιστικός ισομορφισμός*

$$\boxed{M \otimes_R N \xrightarrow{\cong} N \otimes_R M}$$

ο οποίος ορίζεται (επί τού συνόλου των αποσυντιθέμενων τανυστών) από τον τύπο

$$M \otimes_R N \ni x \otimes y \longmapsto y \otimes x \in N \otimes_R M.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα ταν. γινόμενα $(W = M \otimes_R N, \varphi)$ και $(W' = N \otimes_R M, \varphi')$. Η απεικόνιση

$$\beta : M \times N \longrightarrow N \otimes_R M,\ (x, y) \longmapsto \beta(x, y) := y \otimes x = \varphi'(y, x),$$

είναι R-διγραμμική. Άρα υπάρχει μοναδικός $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(W, W')$ με

$$\widetilde{\beta}(\varphi(x, y)) = \widetilde{\beta}(x \otimes y) = \beta(x, y) = y \otimes x,\ \forall (x, y) \in M \times N.$$

$$\begin{tikzcd} & M \otimes_R N = W \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\beta}"] & \\ M \times N \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\beta"'] & \circlearrowleft & N \otimes_R M\ (=: Z) \end{tikzcd}$$

Επίσης, η απεικόνιση

$$\gamma : N \times M \longrightarrow M \otimes_R N,\ (y, x) \longmapsto \gamma(y, x) := x \otimes y = \varphi(x, y),$$

είναι R-διγραμμική. Άρα υπάρχει μοναδικός $\widetilde{\gamma} \in \mathrm{Hom}_R(W', W)$ με

$$\widetilde{\gamma}(\varphi'(y, x)) = \widetilde{\gamma}(y \otimes x) = \gamma(y, x) = x \otimes y,\ \forall (x, y) \in M \times N.$$

$$\begin{tikzcd} & N \otimes_R M = W' \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\gamma}"] & \\ M \times N \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[rr, "\gamma"'] & \circlearrowleft & M \otimes_R N\ (=: Z) \end{tikzcd}$$

Για κάθε $(x, y) \in M \times N$ έχουμε προφανώς

$$\left\{ \begin{array}{l} (\widetilde{\beta} \circ \widetilde{\gamma})(\varphi'(y, x)) = \widetilde{\beta}(x \otimes y) = \varphi'(y, x) \\ (\widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\beta})(\varphi(x, y)) = \widetilde{\gamma}(y \otimes x) = \varphi(x, y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\widetilde{\beta} \circ \widetilde{\gamma})\Big|_{\mathrm{Im}(\varphi')} = \mathrm{id}_{W'}|_{\mathrm{Im}(\varphi')} \\ (\widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\beta})\Big|_{\mathrm{Im}(\varphi)} = \mathrm{id}_{W}|_{\mathrm{Im}(\varphi)} \end{array} \right\},$$

οπότε $\widetilde{\beta} \circ \widetilde{\gamma} = \mathrm{id}_{W'}$ και $\widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\beta} = \mathrm{id}_W$. ($\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = W$ και $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi')) = W'$, βλ. 4.3.7). Αυτό σημαίνει ότι αμφότεροι οι $\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$ είναι ισομορφισμοί με $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\beta}^{-1}$. $\square$

4.4.2 Σημείωση. Η μεταθετικότητα αυτή ισχύει για R-μοδίους με ακρίβεια ισομορφισμού. Ωστόσο, όταν $M = N$ και $x_1, x_2 \in M$, οι αποσυντιθέμενοι τανυστές $x_1 \otimes x_2$ και $x_2 \otimes x_1$ τού $M \otimes_R M$ δεν είναι κατ' ανάγκην ίσοι (αφού ο υφιστάμενος αυτομορφισμός τού $M \otimes_R M$ δεν είναι κατ' ανάγκην η ταυτοτική απεικόνιση).

4.4.3 Θεώρημα. *Για οιονδήποτε R-μόδιο M υφίστανται κανονιστικοί ισομορφισμοί*

$$\boxed{R \otimes_R M \xrightarrow{\cong} M \otimes_R R \xrightarrow{\cong} M.}$$

Απόδειξη. Για τον πρώτο ισομορφισμό βλ. θεώρημα 4.4.1 (με τους R και M στη θέση των εκεί παρατεθέντων M και N, αντιστοίχως). Η απεικόνιση

$$\beta : M \times R \longrightarrow M,\ (x, r) \longmapsto \beta(x, r) := rx,$$

είναι R-διγραμμική. Ως εκ τούτου, εάν φ είναι η τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R R$, τότε υπάρχει μοναδικός $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R R, M)$ με $\widetilde{\beta} \circ \varphi = \beta$.

$$\begin{tikzcd}
& M \otimes_R R \arrow[dr, dashed, bend left, "\widetilde{\beta}"] & \\
M \times R \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\beta"'] & \circlearrowleft & M\ (=: Z) \arrow[ul, "\beta'"]
\end{tikzcd}$$

Από την άλλη μεριά, η απεικόνιση

$$\beta' : M \longrightarrow M \otimes_R R,\ x \longmapsto \beta'(x) := x \otimes 1_R,$$

αποτελεί ομομορφισμό R-μοδίων, για κάθε $x \in M$ έχουμε

$$\widetilde{\beta}(\beta'(x)) = \widetilde{\beta}(x \otimes 1_R) = \widetilde{\beta}(\varphi(x, 1_R)) = \beta(x, 1_R) = 1_R x = x,$$

οπότε $\widetilde{\beta} \circ \beta' = \mathrm{id}_M$, ενώ για κάθε ζεύγος $(x, r) \in M \times R$ έχουμε

$$\beta'(\widetilde{\beta}(\varphi(x, r))) = \beta'(\beta(x, r)) = \beta'(rx) = (rx) \otimes 1_R = r(x \otimes 1_R) = x \otimes r = \varphi(x, r),$$

οπότε $(\beta' \circ \widetilde{\beta})\Big|_{\mathrm{Im}(\varphi)} = \mathrm{id}_{M \otimes_R R}|_{\mathrm{Im}(\varphi)} \Rightarrow \beta' \circ \widetilde{\beta} = \mathrm{id}_{M \otimes_R R}$ (διότι κατά την πρόταση 4.3.7, $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = M \otimes_R R$). Εξ αυτών έπεται ότι αμφότεροι οι $\widetilde{\beta}, \beta'$ είναι ισομορφισμοί με $\beta' = \widetilde{\beta}^{-1}$. □

4.4.4 Παρατήρηση. Ειδικότερα, για $M = R$, έχουμε $R \otimes_R R \cong R$.

4.4.5 Θεώρημα (Προσεταιριστικότητα τού "$\otimes_R$").
Για οιουσδήποτε R-μοδίους L, M, N υφίσταται κανονιστικός ισομορφισμός

$$\boxed{(L \otimes_R M) \otimes_R N \xrightarrow{\cong} L \otimes_R (M \otimes_R N).}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα τανυστικά γινόμενα $(W = L \otimes_R M, \varphi)$,

$$(U = (L \otimes_R M) \otimes_R N, \psi) \text{ και } (U' = L \otimes_R (M \otimes_R N), \psi').$$

Παγιώνοντας ένα $z \in N$ διαπιστώνουμε (μέσω τού πορίσματος 4.3.14) ότι η απεικόνιση

$$\beta_z : L \times M \longrightarrow U', \ (x, y) \longmapsto \beta_z(x, y) := x \otimes (y \otimes z),$$

είναι R-διγραμμική. Από τον ορισμό 4.3.6 τού τανυστικού γινομένου (W, φ) διασφαλίζεται η ύπαρξη ενός και μόνον $\widetilde{\beta}_z \in \mathrm{Hom}_R(W, U')$ με $\widetilde{\beta}_z \circ \varphi = \beta_z$. Προφανώς, για κάθε ζεύγος $(x, y) \in L \times M$,

$$\widetilde{\beta}_z(\varphi(x, y)) = \widetilde{\beta}_z(x \otimes y) = \beta_z(x, y) = x \otimes (y \otimes z).$$

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\beta}_z"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ L \times M \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\beta_z"'] & \, & U' \end{tikzcd}$$

Επιπροσθέτως, λόγω των ισχυόντων υπολογιστικών κανόνων (τού 4.3.14), *και* η απεικόνιση $\gamma : W \times N \longrightarrow U'$ η οριζόμενη επί των αποσυντιθέμενων τανυστών τού W μέσω τού τύπου

$$\gamma((x \otimes y), z) := \beta_z(x, y) = x \otimes (y \otimes z), \ \forall z \in N,$$

είναι R-διγραμμική. Από τον ορισμό 4.3.6 τού τανυστικού γινομένου (U, ψ) διασφαλίζεται η ύπαρξη ενός και μόνον $\widetilde{\gamma} \in \mathrm{Hom}_R(U, U')$ με την ιδιότητα: $\widetilde{\gamma} \circ \psi = \gamma$.

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ W \times N \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "\gamma"'] & \, & U' \end{tikzcd}$$

Προφανώς, για κάθε τριάδα $(x, y, z) \in L \times M \times N$,

$$\widetilde{\gamma}(\psi(\varphi(x, y), z)) = \widetilde{\gamma}(\psi(x \otimes y, z)) = \gamma(x \otimes y, z) = \beta_z(x, y) = x \otimes (y \otimes z).$$

Παρομοίως, είναι δυνατός ο προσδιορισμός μιας R-διγραμμικής απεικονίσεως $\vartheta : L \times (M \otimes_R N) \longrightarrow U$, για την οποία υπάρχει μοναδικός $\widetilde{\vartheta} \in \mathrm{Hom}_R(U', U)$ με την ιδιότητα: $\widetilde{\vartheta} \circ \psi' = \vartheta$, όπου

$$\widetilde{\vartheta}(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z, \ \forall (x, y, z) \in L \times M \times N.$$

$$\begin{tikzcd} & U' \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\vartheta}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ L \times (M \otimes_R N) \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[rr, "\vartheta"'] & \, & U \end{tikzcd}$$

Επειδή $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\psi)) = U$ και $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\psi')) = U'$, έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} (\widetilde{\vartheta} \circ \widetilde{\gamma})\Big|_{\mathrm{Im}(\psi)} = \mathrm{id}_U|_{\mathrm{Im}(\psi)} \\[2ex] (\widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\vartheta})\Big|_{\mathrm{Im}(\psi')} = \mathrm{id}_{U'}|_{\mathrm{Im}(\psi')} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\vartheta} \circ \widetilde{\gamma} = \mathrm{id}_U \\[1ex] \widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\vartheta} = \mathrm{id}_{U'} \end{array} \right\},$$

απ' όπου έπεται ότι αμφότεροι οι $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\vartheta}$ είναι ισομορφισμοί με $\widetilde{\vartheta} = \widetilde{\gamma}^{-1}$. □

4.4.6 Θεώρημα (Επιμεριστική ιδιότητα). *Για οιεσδήποτε οικογένειες R-μοδίων $(M_j)_{j\in J}$ και $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ υφίσταται κανονιστικός ισομορφισμός*

$$\boxed{\Big(\bigoplus_{j\in J} M_j\Big) \otimes_R \Big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\Big) \xrightarrow{\ \cong\ } \bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} (M_j \otimes_R N_\lambda).}$$

Αποδειξη. Θέτουμε $W := \bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} (M_j \otimes_R N_\lambda)$, $M := \bigoplus_{j\in J} M_j$ και $N := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$, και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi : M \times N \longrightarrow W,\ \ \varphi((x_j)_{j\in J}, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) := (x_j \otimes y_\lambda)_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda}.$$

Θα αποδείξουμε ότι το ζεύγος (W, φ) αποτελεί τανυστικό γινόμενο των M και N. Έστω Z τυχών R-μόδιος και έστω $\beta \in \mathrm{Bil}_R(M, N; Z)$. Ας συμβολίσουμε ως

$$\mathrm{in}_j^M : M_j \hookrightarrow M,\ \mathrm{in}_\lambda^N : N_\lambda \hookrightarrow N \ \text{ και } \ \mathrm{in}_{j,\lambda}^W : M_j \otimes_R N_\lambda \hookrightarrow W$$

τις φυσικές ενθέσεις καθενός προσθετέου εντός των ευθέων αθροισμάτων M, N και W, αντιστοίχως, και ως $\varphi_{j,\lambda} : M_j \times N_\lambda \longrightarrow M_j \otimes_R N_\lambda$ την τανυστική απεικόνιση τού $M_j \otimes_R N_\lambda$ για κάθε ζεύγος $(j, \lambda) \in J \times \Lambda$. Εφαρμόζοντας την καθολική συνθήκη που πληροί το $(M_j \otimes_R N_\lambda, \varphi_{j,\lambda})$ για την

$$\beta_{j,\lambda} := \beta \circ (\mathrm{in}_j^M \times \mathrm{in}_\lambda^N) \in \mathrm{Bil}_R(M_j, N_\lambda; Z)$$

λαμβάνουμε μοναδικόν $\widetilde{\beta}_{j,\lambda} \in \mathrm{Hom}_R(M_j \otimes_R N_\lambda, Z)$ με $\widetilde{\beta}_{j,\lambda} \circ \varphi_{j,\lambda} = \beta_{j,\lambda}$.

$$\begin{tikzcd}
M_j \times N_\lambda \arrow[r, "\varphi_{j,\lambda}"] \arrow[dd, hook, "\mathrm{in}_j^M \times \mathrm{in}_\lambda^N"'] \arrow[dr, "\beta_{j,\lambda}"'] & M_j \otimes_R N_\lambda \arrow[d, dashed, "\widetilde{\beta}_{j,\lambda}"] \arrow[ddr, hook, bend left, "\mathrm{in}_{j,\lambda}^W"] & \\
 & Z & \\
M \times N \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & W \arrow[ul, dashed, "\gamma_{j,\lambda}"']
\end{tikzcd}$$

Εν συνεχεία, εφαρμόζοντας για τους ομομορφισμούς $\widetilde{\beta}_{j,\lambda}$ την καθολική συνθήκη τού συγκινομένου $(W, (\mathrm{in}_{j,\lambda}^W)_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda})$ (βλ. 2.4.7 και 2.4.12) λαμβάνουμε μονοσημάντως ορισμένους

$$\gamma_{j,\lambda} \in \mathrm{Hom}_R(W, Z) : \gamma_{j,\lambda} \circ \mathrm{in}_{j,\lambda}^W = \widetilde{\beta}_{j,\lambda},\ \forall (j,\lambda) \in J \times \Lambda.$$

Εάν $\gamma := \bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} \gamma_{j,\lambda}$, τότε για κάθε $((x_j)_{j\in J}, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \in M \times N$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(\gamma\circ\varphi)\left((x_j)_{j\in J}, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) &= \gamma((x_j\otimes y_\lambda)_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda}) = \sum_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} \widetilde{\beta}_{j,\lambda}(x_j\otimes y_\lambda) \\
&= \sum_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} \beta_{j,\lambda}(x_j, y_\lambda) = \sum_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} (\beta\circ(\mathrm{in}_j^M \times \mathrm{in}_\lambda^N))(x_j, y_\lambda) \\
&= \sum_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} \beta(\mathrm{in}_j^M(x_j), \mathrm{in}_\lambda^N(y_\lambda)) = \beta(\sum_{j\in J} x_j, \sum_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda) = \beta((x_j)_{j\in J}, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}),
\end{aligned}$$

ήτοι $\gamma\circ\varphi = \beta$. Εξάλλου, από τον ορισμό τής φ είναι φανερό ότι $W = \mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}(\varphi))$. Συνεπώς το (W,φ) αποτελεί πράγματι τανυστικό γινόμενο των M και N. (Βλ. πρόταση 4.3.7.) Αρκεί, τέλος, να εφαρμοσθεί το θεώρημα 4.3.8. □

4.4.7 Θεώρημα (Τανυστικό γινόμενο δυο ελευθέρων R-μοδίων). *Εάν M, N είναι δυο ελεύθεροι R-μόδιοι, τότε και το τανυστικό γινόμενό τους $M \otimes_R N$ είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος. Ειδικότερα, εάν $(x_j)_{j\in J}$ και $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι βάσεις των M και N, αντιστοίχως, τότε η οικογένεια $\{x_j\otimes y_\lambda \,|\, (j,\lambda)\in J\times\Lambda\}$ συνιστά μια βάση τού $M\otimes_R N$. Ως εκ τούτου,*

$$\boxed{\mathrm{rank}_R(M\otimes_R N) = \mathrm{rank}_R(M)\,\mathrm{rank}_R(N).} \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Εάν ένας εκ των M, N είναι τετριμμένος, τότε ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής. Έστω ότι αμφότεροι είναι μη τετριμμένοι. Εξ υποθέσεως, έχουμε $M = \bigoplus_{j\in J} Rx_j$ και $N = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Ry_\lambda$. Από το θεώρημα 4.4.6 συνάγεται ότι

$$\begin{aligned}
M\otimes_R N &= \left(\bigoplus_{i\in I} Rx_i\right)\otimes_R\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Ry_\lambda\right) \\
&\cong \bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} (Rx_i\otimes_R Ry_\lambda) = \bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} R\,(x_i\otimes y_\lambda)\,.
\end{aligned}$$

Η (4.10) είναι επακόλουθο τού ότι $\mathrm{rank}_R\,(M\otimes_R N) = \mathrm{card}(J)\cdot\mathrm{card}(\Lambda)$. □

4.4.8 Πόρισμα. *Εάν V_1, V_2 είναι διανυσματικοί χώροι οριζόμενοι υπεράνω ενός σώματος K, τότε*

$$\boxed{\dim_K(V_1\otimes_K V_2) = \dim_K(V_1)\dim_K(V_2).} \tag{4.11}$$

4.4.9 Παράδειγμα. Έστω K ένα σώμα και έστω $\{e_1 = (1_K, 0_K), e_2 = (0_K, 1_K)\}$ η συνήθης βάση τού K-διανυσματικού χώρου K^2. Εάν $V := K^2\otimes_K K^2$, τότε η (4.11) δίδει $\dim_K(V) = 4$ και το σύνολο $\{e_i\otimes e_j \mid i,j\in\{1,2\}\}$ αποτελεί μια βάση τού V. Σημειωτέον ότι ο τανυστής $v\in V$ ο οριζόμενος μέσω τού τύπου

$$v := e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1$$

δεν είναι αποσυντιθέμενος. Πράγματι· εάν υποθέσουμε ότι υπάρχουν διανύσματα

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in K^2, \quad y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \in K^2,$$

τέτοια ώστε να ισχύει $v = x \otimes y$, τότε, εφαρμόζοντας τους υπολογιστικούς κανόνες τού πορίσματος 4.3.14 λαμβάνουμε

$$e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 = \lambda_1\mu_1 (e_1 \otimes e_1) + \lambda_1\mu_2 (e_1 \otimes e_2) + \lambda_2\mu_1 (e_2 \otimes e_1) + \lambda_2\mu_2 (e_2 \otimes e_2),$$

ή -ισοδυνάμως-

$$\lambda_1\mu_1 (e_1 \otimes e_1) + (\lambda_1\mu_2 - 1_K) (e_1 \otimes e_2) + (\lambda_2\mu_1 - 1_K) (e_2 \otimes e_1) + \lambda_2\mu_2 (e_2 \otimes e_2) = 0_V,$$

απ' όπου συνάγεται ότι $\lambda_1\mu_1 = \lambda_1\mu_2 - 1_K = \lambda_2\mu_1 - 1_K = \lambda_2\mu_2 = 0_K$. Τούτο είναι προδήλως ένα σύστημα *μη συμβιβαστών* ισοτήτων. Άτοπο!

4.4.10 Πόρισμα. *Έστω ότι οι M και N είναι δυο R-μόδιοι και ότι ο N είναι ελεύθερος έχων την οικογένεια $(y_j)_{j \in J}$ ως μια βάση του. Τότε η απεικόνιση*

$$M^{(J)} \longrightarrow M \otimes_R N, \ \ (x_j)_{j\in J} \longmapsto \sum_{j\in J} x_j \otimes y_j,$$

είναι ένας ισομορφισμός R-μοδίων και -ως εκ τούτου- κάθε τανυστής $w \in M \otimes_R N$ γράφεται μονοσημάντως[15] *υπό τη μορφή*

$$w = \sum_{j\in J} x_j \otimes y_j, \ \ x_j \in M^{(J)}.$$

Απόδειξη. Η εν λόγω βάση καθορίζει έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$\alpha : M^{(J)} \longrightarrow M \otimes_R N \cong M \otimes_R \bigoplus_{j\in J} Ry_j \cong \bigoplus_{j\in J} (M \otimes_R Ry_j) \ \ (\cong M \otimes_R R^{(J)})$$

$$\alpha((x_j)_{j\in J}) := \sum_{j\in J} x_j \otimes y_j,$$

(Πρβλ. 4.3.20 (iii) και θεώρημα 4.4.6. Σημειωτέον ότι, για κάθε δείκτη $j \in J$, $M \otimes_R R \cong M \otimes_R Ry_j$ μέσω τής απεικονίσεως $x \otimes 1_R \longmapsto x \otimes y_j$). Από την άλλη μεριά, η απεικόνιση

$$\theta : M \times N \longrightarrow M^{(J)}, \ \ \theta(x, \sum_{j\in J} \mu_j y_j) := (\mu_j x)_{j\in J},$$

είναι R-διγραμμική, οπότε (κατά τα 4.3.6, 4.3.8, 4.3.11 και 4.3.12) υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $\widetilde{\theta} \in \mathrm{Hom}_R\left(M \otimes_R N, M^{(J)}\right)$, ούτως ώστε να ισχύει

$$\widetilde{\theta}(x \otimes \sum_{j\in J} \mu_j y_j) = (\mu_j x)_{j\in J}.$$

[15] Δοθέντων δυο τανυστών $w = \sum_{j=1}^{\kappa} x_j \otimes y_j$ και $w' = \sum_{\varrho=1}^{\kappa'} x'_\varrho \otimes y'_\varrho$ από το $M \otimes_R N$, μπορούμε να υποθέσουμε -χωρίς βλάβη τής γενικότητας- (εισάγοντας, εν ανάγκη, μηδενικούς όρους τής μορφής $0_M \otimes y$, $y \in N$) ότι $\kappa = \kappa'$. Η ιδιότητα τού «μονοσήμαντου», η οποία υπονοείται (για αθροίσματα *με πεπερασμένο πλήθος όρων*) στη διατύπωση τού πορίσματος, σημαίνει ότι από κάθε ισότητα $\sum_{j=1}^{\kappa} x_j \otimes y_j = \sum_{j=1}^{\kappa} x'_j \otimes y_j$ συμπεραίνουμε ότι $x_j = x'_j$, για όλους τους δείκτες j, $1 \leqslant j \leqslant \kappa$. Σημειωτέον ότι, στην περίπτωση κατά την οποία ισχύει

$$\sum_{j=1}^{\kappa} x_j \otimes y_j = 0_{M\otimes_R N} \ (= \sum_{j=1}^{\kappa} 0_M \otimes y_j),$$

λαμβάνουμε $x_j = 0_M$, για κάθε j, $1 \leqslant j \leqslant \kappa$.

Επειδή (προφανώς) $\alpha \circ \widetilde{\theta} = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}$ και $\widetilde{\theta} \circ \alpha = \mathrm{id}_{M^{(J)}}$, ο α είναι ένας ισομορφισμός R-μοδίων (και $\alpha^{-1} = (\widetilde{\theta})^{-1}$). Ως εκ τούτου, κάθε $w \in M \otimes_R N$ γράφεται μονοσημάντως υπό τη μορφή

$$w = \textstyle\sum_{j \in J} x_j \otimes y_j, \ \ x_j \in M^{(J)},$$

καθότι το $M^{(J)}$ είναι ισόμορφο με ένα *ευθύ άθροισμα*. (Βλ. 2.4.14, 2.4.15 και 2.4.16 (i)). □

4.4.11 Πόρισμα. *Έστω ότι οι M και N είναι δυο ελεύθεροι R-μόδιοι και R μια ακεραία περιοχή. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν $x \in M$ και $y \in N$, τότε*

$$x \otimes y = 0_{M \otimes_R N} \Longleftrightarrow (x = 0_M \ \text{ ή } \ y = 0_N).$$

(ii) *Εάν το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_R N$ είναι τετριμμένος R-μόδιος, τότε τουλάχιστον ένας εκ των M και N οφείλει να είναι τετριμμένος.*

Απόδειξη. (i) Αρκεί να αποδειχθεί μόνον η συνεπαγωγή "⇒". (Βλ. 4.3.14 (iv).) Υποθέτουμε ότι η $(x_i)_{i \in I}$ είναι μια βάση τού M και η $(y_j)_{j \in J}$ μια βάση τού N. Τότε

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in M^{(I)}, \ \ y = \sum_{j \in J} \mu_j y_j \in N^{(J)},$$

για κάποια (πεπερασμένου πλήθους) λ_i και $\mu_j \in R$. Επομένως, κατά το 4.4.10,

$$0_{M \otimes_R N} = x \otimes y = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} ((\lambda_i \mu_j)\, x_i) \right) \otimes y_j \Rightarrow \sum_{i \in I} (\lambda_i \mu_j)\, x_i = 0_M, \ \forall j \in J,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\lambda_i \mu_j = 0_R, \ \forall\, (i,j) \in I \times J, \tag{4.12}$$

διότι η $(x_i)_{i \in I}$ είναι μια βάση τού M. Ας υποθέσουμε ότι $x \neq 0_M$. Τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον δείκτης $i_\bullet \in I$, ούτως ώστε να ισχύει $\lambda_{i_\bullet} \neq 0_R$. Επειδή ο δακτύλιος R είναι ακεραία περιοχή, η (4.12) δηλοί ότι

$$[\mu_j = 0_R, \ \forall j \in J] \Longrightarrow y = 0_N.$$

Κατ' αναλογίαν, εάν υποθέσουμε ότι $y \neq 0_N$, καταλήγουμε στο ότι $x = 0_M$.

(ii) Εάν αμφότεροι οι M και N είναι μη τετριμμένοι, τότε υπάρχουν δύο στοιχεία $x \in M \smallsetminus \{0_M\}$ και $y \in N \smallsetminus \{0_N\}$. Τούτο σημαίνει ότι και το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_R N$ είναι κατ' ανάγκην μη τετριμμένο, διότι -λόγω τής (i)- $x \otimes y \neq 0_{M \otimes_R N}$. □

4.4.12 Σημείωση. Τα (i) και (ii) τού πορίσματος 4.4.11 δεν είναι κατ' ανάγκην αληθή όταν οι M, N δεν είναι ελεύθεροι, όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει μέσω τού παραδείγματος 4.3.20 (ii). (Πρβλ. 4.2.9 (iii).)

4.5 ΤΑΝΥΣΤΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ

Η έννοια τού τανυστικού γινομένου γενικεύεται κατά τρόπο φυσικό ακόμη και για ομομορφισμούς R-μοδίων.

4.5.1 Πρόταση. *Εάν υποθέσουμε ότι M, M', N και N' είναι τέσσερεις R-μόδιοι, τότε για κάθε $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ και κάθε $g \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$ υπάρχει ένας μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός*

$$f \overline{\otimes} g \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N'),$$

ο οποίος ικανοποιεί την

$$\boxed{(f \overline{\otimes} g)\,(x \otimes y) = f(x) \otimes g\,(y)\,, \ \ \forall (x, y) \in M \times N} \tag{4.13}$$

και καθιστά το διάγραμμα

$$\boxed{\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f \times g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "f \overline{\otimes} g"] \\ M' \times N' \arrow[r, "\varphi'"'] & M' \otimes_R N' \end{tikzcd}} \tag{4.14}$$

μεταθετικό. Εν προκειμένω, η φ (και αντιστοίχως, η φ') συμβολίζει την τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R N$ (και αντιστοίχως, τού $M' \otimes_R N'$).

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\beta : M \times N \longrightarrow M' \otimes_R N', \quad \beta\,(x, y) := f(x) \otimes g\,(y)\,, \ \ \forall (x, y) \in M \times N.$$

Κανείς ελέγχει εύκολα ότι η β είναι R-διγραμμική (λόγω των υπολογιστικών κανόνων τού πορίσματος 4.3.14 και τού ότι οι f και g είναι R-γραμμικές). Επομένως, κατά τον ορισμό 4.3.6, υπάρχει μία (μονοσημάντως ορισμένη) γραμμική απεικόνιση

$$\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

η οποία καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & M \otimes_R N \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\beta}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ M \times N \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\beta"'] & {} & M' \otimes_R N' \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Θέτοντας $f \overline{\otimes} g := \widetilde{\beta}$ λαμβάνουμε την (4.13), διότι η εικόνα $\widetilde{\beta}(x \otimes y)$ τού αποσυντιθέμενου τανυστή $x \otimes y$ μέσω τής $\widetilde{\beta}$ ισούται με $f(x) \otimes g\,(y)$ για κάθε $(x, y) \in M \times N$. Επιπροσθέτως,

$$\begin{aligned} (f \overline{\otimes} g)\,(\varphi(x, y)) &= (f \overline{\otimes} g)\,(x \otimes y) = f(x) \otimes g\,(y) \\ &= \varphi'\,(f(x), g(y)) = \varphi'\,((f \times g)\,(x, y)) \end{aligned}$$

για κάθε $(x, y) \in M \times N$, δηλαδή το διάγραμμα (4.14) είναι όντως μεταθετικό, ενώ για οιονδήποτε ομομορφισμό $\theta \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$ με αυτήν την ιδιότητα (: $\theta \circ \varphi = \varphi' \circ (f \times g)$) έχουμε

$$\theta|_{\mathrm{Im}(\varphi)} = (f \overline{\otimes} g)|_{\mathrm{Im}(\varphi)},$$

οπότε κατ' ανάγκην $\theta = f \overline{\otimes} g$, διότι $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}(\varphi)) = M \otimes_R N$. □

4.5.2 Ορισμός. Ο ομομορφισμός

$$f \overline{\otimes} g \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

ο ορισθείς μέσω τής προτάσεως 4.5.1 καλείται **ταναυστικό γινόμενο των ομομορφισμών f και g**.

4.5.3 Σημείωση. Το σύμβολο "$\overline{\otimes}$" εισήχθη αντί τού "$\otimes$" προκειμένου να επιτευχθεί σαφής διάκριση μεταξύ τού ομομορφισμού $f \overline{\otimes} g$ και τού τανυστή

$$f \otimes g \in \mathrm{Hom}_R(M, M') \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, N'),$$

ήτοι τού τανυστικού γινομένου των f και g *θεωρουμένων ως στοιχείων των μοδίων των ομομορφισμών* $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ και $\mathrm{Hom}_R(N, N')$, αντιστοίχως. Εν γένει, δεν είναι δυνατή η χρήση τού ενός στη θέση τού άλλου, όπως διαπιστώνουμε μέσω τού παραδείγματος 4.5.37. Όμως -εκ παραλλήλου- θα πρέπει να επισημανθεί, ότι οι ικανές συνθήκες, υπό τις οποίες ο (κανονιστικός) ομομορφισμός R-μοδίων

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

καθίσταται ισομορφισμός, είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες από θεωρητικής πλευράς. (Βλ. θεώρημα 4.5.36.)

4.5.4 Πρόταση. *Για οιουσδήποτε R-μοδίους M και N ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}.} \tag{4.15}$$

Απόδειξη. Έστω $\varphi : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ η τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R N$. Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \times \mathrm{id}_N"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N \arrow[d, "\mathrm{id}_{M \otimes_R N}"] \\ M \times N \arrow[r, "\varphi"'] & M \otimes_R N \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, διότι

$$\mathrm{id}_{M \otimes_R N}(\varphi(x, y)) = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}(x \otimes y) = x \otimes y = \varphi(x, y) = \varphi((\mathrm{id}_M \times \mathrm{id}_N)(x, y))$$

για κάθε $(x, y) \in M \times N$, οπότε η (4.15) είναι προφανής από την 4.5.1. □

4.5.5 Πρόταση. *Δοθέντων έξι R-μοδίων M, M', M'' και N, N', N'', καθώς και τεσσάρων ομομορφισμών*

$$\left\{\begin{array}{ll} f \in \mathrm{Hom}_R(M, M'), & f' \in \mathrm{Hom}_R(M', M'') \\ g \in \mathrm{Hom}_R(N, N'), & g' \in \mathrm{Hom}_R(N', N'') \end{array}\right\},$$

η σύνθεση τού τανυστικού γινομένου των ομομορφισμών τής πρώτης και τού τανυστικού γινομένου των ομομορφισμών τής δεύτερης στήλης (τού ανωτέρω παρατεθέντος καταλόγου) ισούται με το τανυστικό γινόμενο τής συνθέσεως των ομομορφισμών τής πρώτης γραμμής και τής συνθέσεως των ομομορφισμών τής δεύτερης γραμμής, ήτοι

$$\boxed{(f'\overline{\otimes}g') \circ (f\overline{\otimes}g) = (f' \circ f)\,\overline{\otimes}\,(g' \circ g)\,.} \tag{4.16}$$

Απόδειξη. Προφανώς, $(f' \times g')\circ(f \times g) = (f' \circ f)\times(g' \circ g)$. Εάν υποθέσουμε ότι οι $\varphi, \varphi', \varphi''$ είναι οι τανυστικές απεικονίσεις των $M\otimes_R N$, $M'\otimes_R N'$ και $M''\otimes_R N''$, αντιστοίχως, τότε, λόγω τής μεταθετικότητας τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f\times g"] \arrow[dd, bend right=60, "(f'\circ f)\times(g'\circ g)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \otimes_R N \arrow[d, "f\overline{\otimes}g"'] \arrow[dd, bend left=60, "(f'\overline{\otimes}g')\circ(f\overline{\otimes}g)"] \\
M' \times N' \arrow[r, "\varphi'"'] \arrow[d, "f'\times g'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M' \otimes_R N' \arrow[d, "f'\overline{\otimes}g'"'] \\
M'' \times N'' \arrow[r, "\varphi''"'] & M'' \otimes_R N''
\end{tikzcd}$$

η ισότητα (4.16) έπεται άμεσα από την πρόταση 4.5.1. □

4.5.6 Πρόταση. *Έστω ότι M, M', N και N' είναι τέσσερεις δοθέντες R-μόδιοι και ότι $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ και $g \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$. Τότε το τανυστικό γινόμενο $f\overline{\otimes}g$ των f και g έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $\mathrm{Im}\,(f\overline{\otimes}g) = \mathrm{Lin}_R\,(\{\, f(x) \otimes g\,(y) \mid (x, y) \in M \times N\})$.

(ii) *Εάν οι f και g είναι επιμορφισμοί, τότε και ο $f\overline{\otimes}g$ είναι επιμορφισμός.*

(iii) *Εάν οι f και g είναι ισομορφισμοί, τότε και ο $f\overline{\otimes}g$ είναι ισομορφισμός, και μάλιστα ισχύει $(f\overline{\otimes}g)^{-1} = f^{-1}\overline{\otimes}g^{-1}$.*

Απόδειξη. (i) Εάν η $\varphi : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ είναι η τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R N$, τότε

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\,(f\overline{\otimes}g) = (f\overline{\otimes}g)\,(M \otimes_R N) = (f\overline{\otimes}g)\,(Lin_R\,(\varphi\,(M \times N))) \\
&= \mathrm{Lin}_R\,((f\overline{\otimes}g)\,(\varphi\,(M \times N))) = \mathrm{Lin}_R\,(\{(f\overline{\otimes}g)\,(x \otimes y) \mid (x, y) \in M \times N\}) \\
&= \mathrm{Lin}_R\,(\{\, f(x) \otimes g\,(y) \mid (x, y) \in M \times N\})\,.
\end{aligned}$$

(ii) Υποθέτουμε ότι η $\varphi' : M' \times N' \longrightarrow M' \otimes_R N'$ είναι η τανυστική απεικόνιση τού

$M' \otimes_R N'$. Κατά το (i) έχουμε

$$\mathrm{Im}\,(f \overline{\otimes} g) = \mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}(\varphi'|_{f(M)\times g(N)})).$$

Εάν λοιπόν οι f και g είναι επιμορφισμοί, τότε $f(M) = M'$, $g(N) = N'$, οπότε

$$\mathrm{Im}\,(f \overline{\otimes} g) = \mathrm{Lin}_R\left(\mathrm{Im}\left(\varphi'\right)\right) = M' \otimes_R N'.$$

(iii) Εάν οι f και g είναι ισομορφισμοί, τότε διαθέτουν αντιστρόφους

$$f^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(M', M) \quad \text{και} \quad g^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(N', N),$$

αντιστοίχως, οπότε

$$\left\{ \begin{array}{ll} f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{M'}, & g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_{N'} \\ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M, & g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_N \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (f \circ f^{-1}) \overline{\otimes} (g \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_{M'} \overline{\otimes} \mathrm{id}_{N'} \\ (f^{-1} \circ f) \overline{\otimes} (g^{-1} \circ g) = \mathrm{id}_M \overline{\otimes} \mathrm{id}_N \end{array} \right\}.$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.15) και (4.16) οι προκείμενες ισότητες γράφονται ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} (f \overline{\otimes} g) \circ \left(f^{-1} \overline{\otimes} g^{-1}\right) = \mathrm{id}_{M' \otimes_R N'}, \\ \left(f^{-1} \overline{\otimes} g^{-1}\right) \circ (f \overline{\otimes} g) = \mathrm{id}_{M \otimes_R N} \end{array} \right\}.$$

Άρα η απεικόνιση $f \overline{\otimes} g$ είναι ένας ισομορφισμός και $(f \overline{\otimes} g)^{-1} = f^{-1} \overline{\otimes} g^{-1}$. □

4.5.7 Σημείωση. Συμπέρασμα ανάλογο των (ii), (iii) τής 4.5.6 *δεν* ισχύει -εν γένει- και για *μονομορφισμούς* f και g. (Βλ. σημείωση 4.5.10.) Ορισμένες ικανές συνθήκες υπό τις οποίες έχουμε διατήρηση τής προκειμένης ιδιότητας περιγράφονται στο πόρισμα 4.5.23.

4.5.8 Θεώρημα. *Έστω M ένας R-μόδιος. Τότε μέσω κάθε ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$N' \xrightarrow{\ f\ } N \xrightarrow{\ g\ } N'' \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes}\, g} M \otimes_R N'' \longrightarrow \{0\}.$$

Απόδειξη. (i) $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g)$. Κατά την πρόταση 4.5.5,

$$(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g) \circ (\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f) = (\underbrace{\mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M}_{=\mathrm{id}_M}) \overline{\otimes} (\underbrace{g \circ f}_{=0}) = 0.$$

(ii) $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f)$. Θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό

$$\pi^{M \otimes_R N}_{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f)} : M \otimes_R N \longrightarrow (M \otimes_R N) / \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f).$$

Λόγω τού εγκλεισμού τού αποδειχθέντος στο (i) έχουμε τη δυνατότητα εφαρμογής τής καθολικής ιδιότητας 2.3.6 τού προκειμένου πηλικομοδίου. Συνεπώς υφίσταται μοναδικός

$$\theta \in \mathrm{Hom}_R((M \otimes_R N)/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f), M \otimes_R N'')$$

ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& M \otimes_R N \arrow[dl, "\pi^{M\otimes_R N}_{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f)}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
(M \otimes_R N)/\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f) \arrow[rr, dashed, "\theta"'] & & M \otimes_R N''
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι ο θ είναι *μονομορφισμός* (διότι τότε θα έχουμε $\mathrm{Ker}(\pi^{M\otimes_R N}_{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f)}) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g)$ δυνάμει τού θεωρήματος 2.2.24). Δοθέντων δυο στοιχείων $y_1, y_2 \in N$ με $g(y_1) = g(y_2)$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&y_1 - y_2 \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) \Rightarrow [\exists y' \in N' : y_1 - y_2 = f(y')] \\
&\Rightarrow [x \otimes y_1 - x \otimes y_2 = x \otimes f(y') \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f), \forall x \in M].
\end{aligned}$$

Επειδή ο g είναι εξ υποθέσεως επιμορφισμός, ορίζεται καλώς (λόγω των προαναφερθέντων) η R-διγραμμική απεικόνιση

$$\begin{aligned}
\alpha : M \times N'' &\longrightarrow (M \otimes_R N)/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f) \\
(x, y'') &\longmapsto \alpha(x, y'') := (x \otimes y) + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f),
\end{aligned}$$

όπου $y \in N$ είναι τέτοιο ώστε να ισχύει $g(y) = y''$. Σύμφωνα με την καθολική συνθήκη που πληροί το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_R N''$, υφίσταται μοναδικός

$$\widetilde{\alpha} \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N'', (M \otimes_R N)/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f))$$

ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& M \otimes_R N'' \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
M \times N'' \arrow[ur, "\text{ταν. απ.}"] \arrow[rr, "\alpha"'] & & (M \otimes_R N)/\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f)
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Επειδή για κάθε $(x, y) \in M \times N$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{\alpha} \circ \theta)\,((x \otimes y) + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f)) = \widetilde{\alpha}((\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g)(x \otimes y)) \\
&= \widetilde{\alpha}(x \otimes g(y)) = \alpha(x, g(y)) = (x \otimes y) + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f),
\end{aligned}$$

η σύνθεση $\widetilde{\alpha} \circ \theta$ ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση επί ενός συστήματος γεννητόρων τού πηλικομοδίου $(M \otimes_R N)/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f)$. Κατά συνέπειαν,

$$\widetilde{\alpha} \circ \theta = \mathrm{id}_{(M\otimes_R N)/\,\mathrm{Im}(id_M \overline{\otimes} f)} \underset{2.2.23}{\Longrightarrow} [\text{ο } \theta \text{ είναι όντως μονομορφισμός}].$$

(iii) Ο $\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g$ είναι επιμορφισμός. Τούτο έπεται άμεσα (από το (ii) τής προτάσεως 4.5.6) λόγω τού ότι αμφότεροι οι id_M και g είναι επιμορφισμοί. □

Παρομοίως αποδεικνύεται και το ακόλουθο (το οποίο μπορεί να εκληφθεί, τρόπον τινά, ως *δυϊκό* τού θεωρήματος 4.5.8).

4.5.9 Θεώρημα. *Έστω M ένας R-μόδιος. Τότε μέσω κάθε ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$N' \otimes_R M \xrightarrow{f \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M} N \otimes_R M \xrightarrow{g\, \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M} N'' \otimes_R M \longrightarrow \{0\}.$$

4.5.10 Σημείωση. Οι επαγόμενες ακριβείς ακολουθίες των θεωρημάτων 4.5.8 και 4.5.9 δεν είναι κατ' ανάγκην βραχείες ακριβείς ακολουθίες, ακόμη και όταν οι δοθείσες «ακολουθίες εκκινήσεως» είναι βραχείες ακριβείς ακολουθίες[16]. Επί παραδείγματι, εάν $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, τότε μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}$$

(όπου $g(\xi) := [\xi]_k, \forall \xi \in \mathbb{Z}$, βλ. 3.1.3 (iv)) επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k} \overline{\otimes} (k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}})} \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k} \overline{\otimes} g} \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k} \overline{\otimes} (k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}))([a]_k, b) = [a]_k \otimes kb = k[a]_k \otimes b = [0]_k \otimes b = 0_{\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}},$$

οπότε ο $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k} \overline{\otimes} (k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}})$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός με πυρήνα του ολόκληρον τον

$$\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k \ncong \{0\}.$$

Κατά συνέπειαν, ο $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k} \overline{\otimes} (k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}})$ *δεν είναι μονομορφισμός*.

4.5.11 Πόρισμα. *Εάν M είναι ένας R-μόδιος και I ένα ιδεώδες τού R, τότε υφίσταται ισομορφισμός*

$$\boxed{M/IM \xrightarrow{\cong} (R/I) \otimes_R M.} \tag{4.17}$$

Απόδειξη. Έστω $\iota : I \hookrightarrow R$ η συνήθης ένθεση. Μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow I \overset{\iota}{\hookrightarrow} R \overset{\pi_I^R}{\twoheadrightarrow} R/I \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται (σύμφωνα με το θεώρημα 4.5.9) η ακριβής ακολουθία

$$I \otimes_R M \xrightarrow{\iota \overline{\otimes} \mathrm{id}_M} R \otimes_R M \xrightarrow{\pi_I^R \overline{\otimes} \mathrm{id}_M} (R/I) \otimes_R M \longrightarrow \{0\}.$$

[16] Μια ικανή συνθήκη, υπό την οποία έχουμε διατήρηση τής προκειμένης ιδιότητας, δίδεται στα θεωρήματα 4.5.14 και 4.5.15.

Ως γνωστόν, ο ομομορφισμός $f : R \otimes_R M \longrightarrow M$, ο οριζόμενος μέσω τού τύπου

$$f(r \otimes x) := rx, \ \forall (r, x) \in R \times M,$$

είναι *ισομορφισμός*[17], έχων ως αντίστροφό του $\vartheta := f^{-1}$ τον

$$\vartheta : M \xrightarrow{\cong} R \otimes_R M, \ x \longmapsto \vartheta(x) := 1_R \otimes x.$$

Ο επιμορφισμός $(\pi_I^R \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) \circ \vartheta$ έχει ως πυρήνα του την εικόνα

$$\mathrm{Im}(f \circ (\iota \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)) = f(\mathrm{Im}(\iota \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)) = IM$$

τού $f \circ (\iota \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)$, όπως προκύπτει από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
I \otimes_R M \arrow[r, "\iota\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] \arrow[dr, "f\circ(\iota\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)"'] & R \otimes_R M \arrow[r, "\pi_I^R\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] \arrow[d, bend left, "\cong"', "f\,\circlearrowleft"] & (R/I) \otimes_R M \arrow[r] & \{0\} \\
 & M \arrow[u, bend left, "\circlearrowleft\,\vartheta", "\cong"'] \arrow[ur, "(\pi_I^R\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)\circ\vartheta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Από το 1ο θεώρημα ισομορφισμών 2.3.7 έπεται ότι $M/IM \cong (R/I) \otimes_R M$. □

4.5.12 Πόρισμα. *Εάν τα I, J είναι ιδεώδη τού R, τότε υφίσταται ισομορφισμός*

$$\boxed{R/(I + J) \xrightarrow{\cong} (R/I) \otimes_R (R/J).} \tag{4.18}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Στην ειδική περίπτωση όπου $M = R/J$ ο (4.17) δίδει

$$R/(I + J) \cong (R/J)/(I + J/J) = (R/J)/I(R/J) \xrightarrow{\cong} (R/I) \otimes_R (R/J),$$

ήτοι τον (4.18). □

4.5.13 Παρατήρηση. Για *οιουσδήποτε* $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε (λόγω τού (4.18))

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_R (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}),$$

απ' όπου έπεται (μέσω τού 2.3.8) ο (4.9), καθώς $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \text{μκδ}(m, n)\mathbb{Z}$.

4.5.14 Θεώρημα. *Εάν η* $\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$ *είναι μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε και η επαγομένη ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g} M \otimes_R N'' \longrightarrow \{0\}$$

είναι μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία.

[17] Πρβλ. απόδειξη τού θεωρήματος 4.4.3.

Αποδειξη. Κατά το θεώρημα 3.1.29,

$$\exists \alpha \in \mathrm{Hom}_R(N, N') : \alpha \circ f = \mathrm{id}_{N'}.$$

Επομένως για κάθε $(x, y) \in M \times N'$ έχουμε

$$((\mathrm{id}_M \overline{\otimes} \alpha) \circ (\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f))(x, y) \underset{4.5.5}{=} (\underbrace{\mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M}_{=\mathrm{id}_M}) \overline{\otimes} (\underbrace{\alpha \circ f}_{=\mathrm{id}_{N'}})(x, y)$$
$$= (x, y) \Rightarrow (\mathrm{id}_M \overline{\otimes} \alpha) \circ (\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f) = \mathrm{id}_{M \otimes_R N'},$$

οπότε ο $\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f$ είναι μονομορφισμός. (Βλ. λήμμα 2.2.23.) Υπολείπεται η εφαρμογή των θεωρημάτων 4.5.8 και 3.1.29. □

Παρομοίως αποδεικνύεται και το ακόλουθο (το οποίο μπορεί να εκληφθεί, τρόπον τινά, ως *δυϊκό* τού θεωρήματος 4.5.14).

4.5.15 Θεώρημα. *Εάν η* $\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$ *είναι μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε και η επαγομένη ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow N' \otimes_R M \xrightarrow{f \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M} N \otimes_R M \xrightarrow{g \,\overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M} N'' \otimes_R U \longrightarrow \{0\}$$

είναι μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία.

4.5.16 Ορισμός. Ένας R-μόδιος M καλείται **ισόπεδος** (flat R-module) όταν για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $f : N' \to N$ ο επαγόμενος ομομορφισμός

$$\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f : M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N$$

είναι ωσαύτως μονομορφισμός.

4.5.17 Πρόταση. *Για έναν R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) *Ο M είναι ισόπεδος.*

(ii) *Για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$$

η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g} M \otimes_R N'' \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής.

Αποδειξη. Έπεται από το θεώρημα 4.5.8, εν συνδυασμώ με τον ορισμό 4.5.16. □

4.5.18 Παράδειγμα. Εάν $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, τότε ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_k$ *δεν είναι ισόπεδος*. (Βλ. εδ. 4.5.10.)

4.5.19 Πρόταση. *Για έναν R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο M είναι ισόπεδος.*

(ii) *Για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\} \tag{4.19}$$

η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow N' \otimes_R M \xrightarrow{f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M} N \otimes_R M \xrightarrow{g\overline{\otimes}\mathrm{id}_M} N'' \otimes_R M \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. (i)$\Rightarrow$(ii) Επειδή ο M είναι ισόπεδος, εάν λάβουμε υπ' όψιν την πρόταση 4.5.17 και το θεώρημα 4.5.9 μπορούμε να κατασκευάσουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & M \otimes_R N' \arrow[r, "\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N \arrow[r, "\mathrm{id}_M\overline{\otimes}g"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N'' \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \{0\} \\
& N' \otimes_R M \arrow[r, "f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] & N \otimes_R M \arrow[r, "g\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] & N'' \otimes_R M \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

που έχει ακριβείς γραμμές και κατακόρυφα βέλη τα οποία υποδηλούν τους ισομορφισμούς τους κατασκευασθέντες στο θεώρημα 4.4.1. Από αυτό έπεται ότι $\mathrm{Ker}(f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f) \cong \{0\}$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Επειδή η ανωτέρω βραχεία ακολουθία είναι εξ υποθέσεως ακριβής, εάν λάβουμε υπ' όψιν το θεώρημα 4.5.8 μπορούμε να κατασκευάσουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& M \otimes_R N' \arrow[r, "\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N \arrow[r, "\mathrm{id}_M\overline{\otimes}g"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N'' \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & N' \otimes_R M \arrow[r, "f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] & N \otimes_R M \arrow[r, "g\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] & N'' \otimes_R M \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

που έχει ακριβείς γραμμές και κατακόρυφα βέλη τα οποία υποδηλούν τους ισομορφισμούς τους κατασκευασθέντες στο θεώρημα 4.4.1. Από αυτό έπεται ότι $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f) \cong \mathrm{Ker}(f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) \cong \{0\}$, ήτοι ότι ο M είναι ισόπεδος. $\square$

4.5.20 Πόρισμα. *Ένας R-μόδιος M είναι ισόπεδος εάν και μόνον εάν για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $f : N' \to N$ ο $f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ είναι μονομορφισμός.*

4.5.21 Πόρισμα. *Εάν ένας R-μόδιος M είναι ισόπεδος, τότε για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $f : N' \to N$ αμφότεροι οι $\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f$ και ο $f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ είναι μονομορφισμοί.*

4.5.22 Πόρισμα. *Εάν M_1, M_2 είναι δυο ισόπεδοι R-μόδιοι, τότε και το τανυστικό γινόμενο αυτών $M_1 \otimes_R M_2$ είναι ισόπεδος R-μόδιος.*

Αποδειξη. Θεωρούμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία (4.19). Τανύοντας καθέναν των όρων της εκ δεξιών με M_1 λαμβάνουμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία. (Βλ. 4.5.19 (i)⇒(ii).) Τανύοντας *και* αυτήν εκ δεξιών με M_2 λαμβάνουμε εκ νέου μια βραχεία ακριβή ακολουθία. Μέσω τής τελευταίας συμπεραίνουμε ότι ο $M_1 \otimes_R M_2$ είναι ισόπεδος. (Βλ. 4.5.19 (ii)⇒(i).) □

4.5.23 Πόρισμα. *Ας υποθέσουμε ότι M, M', N και N' είναι τέσσερεις R-μόδιοι και ότι $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ και $g \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$. Εάν ισχύει τουλάχιστον μία εκ των συνθηκών:*

(i) *οι M' και N είναι ισόπεδοι,*

(ii) *οι M και N' είναι ισόπεδοι,*

τότε το τανυστικό γινόμενο $f \overline{\otimes} g$ των f και g έχει την εξής ιδιότητα: Εάν αμφότεροι οι f και g είναι μονομορφισμοί, τότε και το $f \overline{\otimes} g$ είναι μονομορφισμός.

Αποδειξη. Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R N' \arrow[dr, "f\overline{\otimes}\mathrm{id}_{N'}"'] & M \otimes_R N \arrow[l, "\mathrm{id}_M\overline{\otimes} g"'] \arrow[r, "f\overline{\otimes}\mathrm{id}_N"] \arrow[d, "f\overline{\otimes} g"] & M' \otimes_R N \arrow[dl, "\mathrm{id}_{M'}\overline{\otimes} g"] \\
& M' \otimes_R N' &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, διότι (κατά την πρόταση 4.5.5)

$$f \overline{\otimes} g = (\mathrm{id}_{M'} \overline{\otimes} g) \circ (f \overline{\otimes} \mathrm{id}_N) = (f \overline{\otimes} \mathrm{id}_{N'}) \circ (\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g),$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής δυνάμει των πορισμάτων 4.5.20 και 4.5.21, και των (i) και (iv) τής προτάσεως 2.2.15. □

4.5.24 Πρόταση. *Για μια οικογένεια R-μοδίων $(M_j)_{j \in J}$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Το ευθύ άθροισμα $M := \bigoplus_{j \in J} M_j$ είναι ισόπεδος R-μόδιος.*

(ii) *Ο M_j είναι ισόπεδος R-μόδιος για κάθε $j \in J$.*

Αποδειξη. Εάν $f : N' \to N$ είναι ένας μονομορφισμός R-μοδίων, τότε προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R N' \arrow[r, "\mathrm{id}_M\overline{\otimes} f"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N \arrow[d, "\cong"] \\
\bigoplus\limits_{j\in J} (M_j \otimes_R N') \arrow[r, "\bigoplus\limits_{j\in J}(\mathrm{id}_{M_j}\overline{\otimes} f)"'] & \bigoplus\limits_{j\in J} (M_j \otimes_R N)
\end{tikzcd}$$

τα κατακόρυφα βέλη τού οποίου συμβολίζουν τους ισομορφισμούς που έχουν θεσπισθεί στο θεώρημα 4.4.6. Προφανώς,

$$[\text{O } \mathrm{id}_M \overline{\otimes} f \text{ είναι μονομορφισμός}] \Leftrightarrow [\text{o } \bigoplus_{j\in J} (\mathrm{id}_{M_j} \overline{\otimes} f) \text{ είναι μονομορφισμός}]$$
$$\Leftrightarrow [\text{o } \mathrm{id}_{M_j} \overline{\otimes} f \text{ είναι μονομορφισμός για κάθε } j \in J],$$

όπου η τελευταία αμφίπλευρη συνεπαγωγή έπεται από τη δεύτερη εκ των ισοτήτων (2.15) και από την πρόταση 2.2.13. □

4.5.25 Λήμμα. *Ο R-μόδιος R είναι ισόπεδος.*

Αποδειξη. Εάν $f : N' \to N$ είναι ένας μονομορφισμός R-μοδίων, τότε προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} N' \arrow[rr, "f"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & N \arrow[d, "\cong"] \\ R \otimes_R N' \arrow[u, "\cong"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_R \overline{\otimes} f"'] & & R \otimes_R N \end{tikzcd}$$

τα κατακόρυφα βέλη τού οποίου συμβολίζουν τους ισομορφισμούς που έχουν θεσπισθεί στο θεώρημα 4.4.3. O $\mathrm{id}_R \overline{\otimes} f$ είναι μονομορφισμός (ως σύνθεση μονομορφισμών). □

4.5.26 Θεώρημα. *Κάθε προβολικός R-μόδιος είναι ισόπεδος.*

Αποδειξη. Έστω P τυχών προβολικός R-μόδιος. Εάν ο P είναι τετριμμένος, τότε αυτός είναι προδήλως ισόπεδος[18]. Ας υποθέσουμε (από εδώ και στο εξής) ότι ο P είναι μη τετριμμένος. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.2.7 ο P είναι ευθύς προσθετέος ενός (κατ' ανάγκην μη τετριμμένου) ελευθέρου R-μοδίου F. Επομένως υπάρχει υπομόδιος P' τού F, τέτοιος ώστε να ισχύει $F = P \oplus P'$. Έστω $\mathscr{X}$ μια βάση τού F. Τότε $F \cong R^{(\mathscr{X})} \cong \bigoplus_{x\in\mathscr{X}} Rx$, όπου $Rx \cong R$, $\forall x \in \mathscr{X}$. (Βλ. 2.5.6 και 2.5.16.) Επειδή ο ίδιος ο R (ως R-μόδιος) είναι ισόπεδος (κατά το λήμμα 4.5.25), ο F είναι ισόπεδος λόγω τής προτάσεως 4.5.24. Και επειδή $F = P \oplus P'$, αμφότεροι οι P και P' οφείλουν να είναι ισόπεδοι (και πάλι λόγω τής προτάσεως 4.5.24). □

4.5.27 Σημείωση. *Υπομόδιοι* ισόπεδων R-μοδίων δεν είναι κατ' ανάγκην ισόπεδοι.
(i) Επί παραδείγματι, ο δακτύλιος $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ως R-μόδιος είναι ισόπεδος (σύμφωνα με το λήμμα 4.5.25). Ωστόσο, το ιδεώδες του $I := 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (ιδωθέν ως υπομόδιός του) *δεν είναι ισόπεδος* R-μόδιος, διότι εάν $\iota : 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ είναι η συνήθης ένθεση, τότε η σύνθεση

$$\begin{tikzcd} (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \overline{\otimes} \iota"] \arrow[rr, bend right, "f \circ (\mathrm{id}_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \overline{\otimes} \iota)"'] & (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \arrow[r, "f", "\cong"'] & 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \end{tikzcd}$$

[18] Βλ. πόρισμα 4.3.16 και ορισμό 4.5.16.

όπου f ο ισομορφισμός τού θεωρήματος 4.4.3, είναι *ο μηδενικός ομομορφισμός*, αφού για κάθε ζεύγος $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ έχουμε

$$f((\mathrm{id}_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}\overline{\otimes}\iota)((2a+4\mathbb{Z})\otimes(2b+4\mathbb{Z})) = f((2a+4\mathbb{Z})\otimes(2b+4\mathbb{Z}))$$
$$= (2a+4\mathbb{Z})(2b+4\mathbb{Z}) = 4ab+4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} = 0_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}.$$

Άρα και η ίδια η $\mathrm{id}_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}\overline{\otimes}\iota$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός και επειδή

$$2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

ο πυρήνας της είναι μη τετριμμένος.

(ii) Από την άλλη μεριά, όταν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι μια Π.Κ.Ι., κάθε υπομόδιος ενός ισόπεδου R-μοδίου M είναι ισόπεδος. (Εν τοιαύτη περιπτώσει οι έννοιες *ισόπεδος* και *στερούμενος στρέψεως* είναι ισοδύναμες. Βλ. θεώρημα 5.3.22. Και είναι προφανές ότι κάθε υπομόδιος ενός R-μοδίου στερουμένου στρέψεως δεν μπορεί να διαθέτει αφ' εαυτού στρέψη.)

4.5.28 Λήμμα. *Ας υποθέσουμε ότι οι M και N είναι δυο R-μόδιοι και ότι υπάρχουν στοιχεία $x_1, ..., x_k \in M$, $y_1, ..., y_k \in N$, τέτοια ώστε να ισχύει*

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j = 0_{M\otimes_R N}. \tag{4.20}$$

Τότε υπάρχει κάποιος πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος M' τού M και κάποιος πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος N' τού N, ούτως ώστε να ισχύει $x_1, ..., x_k \in M'$, $y_1, ..., y_k \in N'$ και

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j = 0_{M'\otimes_R N'}. \tag{4.21}$$

Απόδειξη. Ταυτίζοντας το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_R N$ (με ακρίβεια ισομορφισμού) με τον πηλικομόδιο $R^{(M\times N)}/\Xi_{M,N}(R)$ (όπως στο θεώρημα 4.3.11) η (4.20) ισοδυναμεί με το ότι

$$\textstyle\sum_{j=1}^{k} \delta_{(x_j,y_j)} \in \Xi_{M,N}(R).$$

Τούτο σημαίνει ότι το άθροισμα $\sum_{j=1}^{k} \delta_{(x_j,y_j)}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τής μορφής 4.3.10 (i) ή/και (ii), ήτοι ότι

$$\sum_{j=1}^{k} \delta_{(x_j,y_j)} = \sum_{\varrho=1}^{l} r_\varrho z_\varrho, \tag{4.22}$$

για κάποια $r_1, ..., r_l \in R$ και $z_1, ..., z_l \in \Xi_{M,N}(R)$. Επειδή στην (4.22) είναι παρόντα μόνον *πεπερασμένου πλήθους στοιχεία* τής βάσεως $\{\delta_{(x,y)} \mid (x,y) \in M \times N\}$ τού $R^{(M\times N)}$, υπάρχει η δυνατότητα επιλογής ενός πεπερασμένως παραγομένου υπομοδίου M' τού M και ενός πεπερασμένως παραγομένου υπομοδίου N' τού N κατά τέτοιον τρόπο, ώστε

$$(x,y) \in M' \times N' \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{το } \delta_{(x,y)} \text{ εμφανίζεται σε κάποιο} \\ \text{εκ των δύο μελών τής (4.22)} \end{bmatrix}.$$

Αρκεί προς τούτο να θέσουμε

$$M' := \mathrm{Lin}_R\left(\{x_1, ..., x_k\} \cup \left\{ x \in M \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{το } \delta_{(x,y)} \text{ εμφανίζεται στο δεύτερο} \\ \text{μέλος τής (4.22) για κάποιο } y \in N \end{array} \right\}\right)$$

και, κατ' αναλογίαν,

$$N' := \mathrm{Lin}_R\left(\{y_1, ..., y_k\} \cup \left\{ y \in N \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{το } \delta_{(x,y)} \text{ εμφανίζεται στο δεύτερο} \\ \text{μέλος τής (4.22) για κάποιο } x \in M \end{array} \right\}\right).$$

Προφανώς, $\sum_{j=1}^{k} \delta_{(x_j,y_j)} \in \Xi_{M',N'}(R)$. Επειδή δε το $M' \otimes_R N'$ ταυτίζεται (με ακρίβεια ισομορφισμού) με τον πηλικομόδιο $R^{(M' \times N')}/\Xi_{M',N'}(R)$, αυτή η σχέση ισοδυναμεί με την (4.21). $\square$

4.5.29 Πρόταση. *Εάν ο M είναι ένας R-μόδιος για τον οποίο ισχύει ότι κάθε πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιός του περιέχεται σε κάποιον ισόπεδο υπομόδιό του, τότε και ο ίδιος ο M οφείλει να είναι ισόπεδος.*

Απόδειξη. Έστω $f : L \longrightarrow N$ ένας μονομορφισμός R-μοδίων και έστω τυχόν στοιχείο $z \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f)$. Επειδή $z \in M \otimes_R L$, υπάρχουν (σύμφωνα με το πόρισμα 4.3.18) $k \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_k \in M$ και $y_1, ..., y_k \in L$ με

$$z = \sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j \Rightarrow 0_{M \otimes_R N} = (\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f)(z) = \sum_{j=1}^{k} x_j \otimes f(y_j).$$

Κατά το λήμμα 4.5.28 υπάρχει κάποιος πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος M' τού M και κάποιος πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος N' τού N, ούτως ώστε να ισχύει $x_1, ..., x_k \in M'$, $f(y_1), ..., f(y_k) \in N'$ και

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes f(y_j) = 0_{M' \otimes_R N'}.$$

Εξ υποθέσεως, υπάρχει κάποιος *ισόπεδος* υπομόδιος M'' τού M με $M' \subseteq M''$. Έστω ότι οι $\iota_1 : M' \hookrightarrow M''$, $\iota_2 : M'' \hookrightarrow M$ και $\iota_3 : N' \hookrightarrow N$ είναι οι συνήθεις ενθέσεις και ότι

$$w := \sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j \in M' \otimes_R L.$$

Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes_R L \arrow[r, "\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft", shift right=6ex] & M \otimes_R N \arrow[d, phantom, "\circlearrowright", shift right=6ex] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright", shift left=6ex] & \\
M' \otimes_R L \arrow[ur, "(\iota_2 \circ \iota_1) \overline{\otimes} \mathrm{id}_L"] \arrow[r, "\iota_1 \overline{\otimes} \mathrm{id}_L"'] & M'' \otimes_R L \arrow[u, "\iota_2 \overline{\otimes} \mathrm{id}_L"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_{M''} \overline{\otimes} f"'] & M'' \otimes_R N \arrow[u, "\iota_2 \overline{\otimes} \mathrm{id}_N"] & M' \otimes_R N' \arrow[l, "\iota_1 \overline{\otimes} \iota_3"] \arrow[ul, "(\iota_2 \circ \iota_1) \overline{\otimes} \iota_3"']
\end{tikzcd}$$

Επειδή

$$(\mathrm{id}_{M''}\overline{\otimes}f)((\iota_1\overline{\otimes}\mathrm{id}_L)(w)) = (\mathrm{id}_{M''}\overline{\otimes}f)\left(\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} x_j \otimes f(y_j) = (\iota_1\overline{\otimes}\iota_3)(\underbrace{\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes f(y_j)}_{=0_{M'\otimes_R N'}}) = 0_{M''\otimes_R N},$$

έχουμε

$$\left.\begin{array}{r}(\iota_1\overline{\otimes}\mathrm{id}_L)(w) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M''}\overline{\otimes}f)\\ M'' \text{ ισόπεδος} \Rightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M''}\overline{\otimes}f) = \{0_{M''\otimes_R L}\}\end{array}\right\} \Rightarrow (\iota_1\overline{\otimes}\mathrm{id}_L)(w) = \{0_{M''\otimes_R L}\}$$
$$\Rightarrow z = ((\iota_2\circ\iota_1)\overline{\otimes}\mathrm{id}_L)(w) = (\iota_2\overline{\otimes}\mathrm{id}_L)((\iota_1\overline{\otimes}\mathrm{id}_L)(w)) = \underbrace{(\iota_2\overline{\otimes}\mathrm{id}_L)(0_{M''\otimes_R L})}_{=0_{M\otimes_R L}},$$

οπότε $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f) = \{0_{M\otimes_R L}\} \underset{2.2.13}{\Longrightarrow}$ ο $\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f$ είναι μονομορφισμός. Ως εκ τούτου, ο M είναι ισόπεδος. □

4.5.30 Πόρισμα. *Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Q}$ είναι ισόπεδος και μη προβολικός.*

Απόδειξη. Έστω L ένας πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Q}$. Εάν ο L είναι τετριμμένος, τότε περιέχεται στον ελεύθερο (και, κατ' επέκταση, ισόπεδο) $\mathbb{Z}$-μόδιο $\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}$. Εάν ο L δεν είναι τετριμμένος, τότε αυτός γράφεται υπό τη μορφή

$$L = \mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(q_1, ..., q_k),\;\; q_j = \tfrac{a_j}{b_j},\;\; a_j, b_j \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\},$$

για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$. Έστω $c := \text{εκπ}(b_1, ..., b_k)$. Κάθε $z \in L$ εκφράζεται ως ακέραιος γραμμικός συνδυασμός

$$z = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j q_j = \sum_{j=1}^{k} \tfrac{\lambda_j a_j}{b_j} = \tfrac{1}{c}\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j d_j\right),$$

όπου $d_j := \frac{c}{b_j}$ για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$. Άρα $L \subseteq \frac{1}{c}\mathbb{Z}$, κι επειδή $\frac{1}{c}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, ο L είναι ισόμορφος με ένα ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$, ήτοι με έναν υπομόδιο τού ελευθέρου (και, κατ' επέκταση, ισόπεδου) $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}$. Από την πρόταση 4.5.29 συνάγεται ότι ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Q}$ *είναι ισόπεδος*. Από την άλλη μεριά, ο $\mathbb{Q}$ *δεν είναι προβολικός* $\mathbb{Z}$-μόδιος, διότι εάν ήταν, θα έπρεπε να είναι ελεύθερος, αφού ο $\mathbb{Z}$ είναι Π.Κ.Ι. (Βλ. πόρισμα 4.2.10.) Εάν ο $\mathbb{Q}$ ήταν ελεύθερος $\mathbb{Z}$-μόδιος, τότε

$$\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}^{(J)} \cong \textstyle\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}x_j$$

(όπου $(x_j)_{j\in J}$ μια βάση) και ο αριθμός 1 θα εγράφετο *μονοσημάντως* ως

$$1 = \sum_{j\in J} \mu_j x_j,\; \text{όπου } \mu_j \in \mathbb{Z} \;\text{ και }\; 1 \leqslant \mathrm{card}(\{j \in J |\, \mu_j \neq 0\}) < \infty.$$

Επιλέγοντας έναν δείκτη $j_\bullet \in J$ με $\mu_{j_\bullet} \neq 0$ και έναν $\ell \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$ με $\ell \nmid \mu_{j_\bullet}$, το κλάσμα $\frac{1}{\ell} \in \mathbb{Q}$ θα εγράφετο *μονοσημάντως* ως

$$\frac{1}{\ell} = \sum_{j\in J} \nu_j x_j,\; \text{όπου } \nu_j \in \mathbb{Z} \;\text{ και }\; 1 \leqslant \mathrm{card}(\{j \in J |\, \nu_j \neq 0\}) < \infty,$$

οπότε θα είχαμε $1 = \sum_{j\in J} \mu_j x_j = \sum_{j\in J} (\ell\nu_j)x_j \Rightarrow \mu_{j_\bullet} = \ell\nu_{j_\bullet} \Rightarrow \ell \mid \mu_{j_\bullet}$. Άτοπο! □

4.5.31 Θεώρημα. *Για οιονδήποτε R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο M είναι ισόπεδος.*

(ii) *Για κάθε πεπερασμένως παραγόμενο ιδεώδες I τού R, ο ομομορφισμός*

$$\iota\overline{\otimes}\mathrm{id}_M : I \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M \cong M \tag{4.23}$$

ο επαγόμενος μέσω τής συνήθους ενθέσεως $\iota : I \hookrightarrow R$ είναι μονομορφισμός (ή, ισοδυνάμως, $I \otimes_R M \cong IM \subseteq M$).

Αποδειξη. (i)⇒(ii) Τούτο είναι πρόδηλο λόγω τού πορίσματος 4.5.20.

(ii)⇒(i) **Βήμα 1ο**. Κατ' αρχάς, *για κάθε (όχι κατ' ανάγκην πεπερασμένως παραγόμενο) ιδεώδες J* τού δακτυλίου R, ο ομομορφισμός $j\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ (όπου $j : J \hookrightarrow R$ η συνήθης ένθεση) *είναι μονομορφισμός*. Πράγματι· εάν J είναι τυχόν ιδεώδες τού δακτυλίου R και $z \in \mathrm{Ker}(j\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)$, τότε το z (ως στοιχείο τού $J \otimes_R M$) γράφεται υπό τη μορφή

$$z = \sum_{\varrho=1}^{k} a_\varrho \otimes b_\varrho, \text{ όπου } a_1, ..., a_k \in J \text{ και } b_1, ..., b_k \in M.$$

(Βλ. πόρισμα 4.3.18.) Επειδή υφίσταται κάποιο *πεπερασμένως παραγόμενο* ιδεώδες I τού R που περιέχει τα $a_1, ..., a_k$, ο περιορισμός $j\overline{\otimes}\mathrm{id}_M|_{I\otimes_R M}$ είναι *εξ υποθέσεως* μονομορφισμός. Επομένως, $z = 0_{I\otimes_R M} = 0_{J\otimes_R M}$, απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{Ker}(j\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) = \{0_{J\otimes_R M}\}$.

Βήμα 2ο. *Εάν W είναι ένας υπομόδιος ενός πεπερασμένως παραγομένου ελευθέρου R-μοδίου F*, τότε ο ομομορφισμός $\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ (όπου $\mathrm{j} : W \hookrightarrow F$ η συνήθης ένθεση) *είναι μονομορφισμός*. Τούτο είναι προφανές όταν ο F είναι τετριμμένος. Ας υποθέσουμε ότι ο F δεν είναι τετριμμένος. Τότε $F \cong R^n \cong \bigoplus_{\lambda=1}^{n} Re_\lambda$ (όπου $(e_\lambda)_{1\leqslant\lambda\leqslant n}$ η συνήθης βάση με το e_λ έχον το 1_R στη λ-οστή θέση και το 0_R στις υπόλοιπες). Άρα ο υπομόδιος W είναι εμφυτεύσιμος εντός τού ευθέος αθροίσματος $\bigoplus_{\lambda=1}^{n} J_\lambda$ των υπομοδίων (= ιδεωδών) J_λ τού $Re_\lambda \cong R$, όπου το J_λ απαρτίζεται από τις λ-οστές συντεταγμένες των εικόνων των στοιχείων τού W μέσω τού υφιστάμενου ισομορφισμού $F \xrightarrow{\cong} R^n$. Επειδή οι (σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στο βήμα 1) *μονομορφισμοί* $J_\lambda \otimes_R M \hookrightarrow Re_\lambda \otimes_R M$ δίδουν

$$\left(\bigoplus_{\lambda=1}^{n} J_\lambda\right) \otimes_R M \cong \bigoplus_{\lambda=1}^{n} (J_\lambda \otimes_R M) \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda=1}^{n} (Re_\lambda \otimes_R M) \cong (\underbrace{\textstyle\bigoplus_{\lambda=1}^{n} Re_\lambda}_{\cong F}) \otimes_R M,$$

ο επαγόμενος ομομορφισμός $\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}$: $W \otimes_R M \longrightarrow F \otimes_R M$ είναι μονομορφισμός.

Βήμα 3ο. Το αποδειχθέν στο βήμα 2 εξακολουθεί να ισχύει *ακόμη και αν ο F δεν είναι πεπερασμένως παραγόμενος*. Εν τοιαύτη περιπτώσει, εάν $z \in \mathrm{Ker}(\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)$, το z (ως στοιχείο τού $W \otimes_R M$) γράφεται υπό τη μορφή

$$z = \sum_{\varrho=1}^{k} a_\varrho \otimes b_\varrho, \text{ όπου } a_1, ..., a_k \in W \text{ και } b_1, ..., b_k \in M.$$

(Βλ. πόρισμα 4.3.18.) Επειδή υφίσταται *πεπερασμένως παραγόμενος* υπομόδιος U τού F που περιέχει τα $a_1, ..., a_k$, ο περιορισμός $\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M|_{U\otimes_R M}$ είναι μονομορφισμός (λόγω των προαναφερθέντων στο βήμα 2 με το U στη θέση τού *εκεί* παρατεθέντος υπομόδιου W). Επομένως, $z = 0_{U\otimes_R M} = 0_{W\otimes_R M}$, απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{Ker}(\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) = \{0_{W\otimes_R M}\}$.

Βήμα 4ο. Έστω $f : N' \to N$ ένας μονομορφισμός R-μοδίων. Σύμφωνα με το πόρισμα 2.5.23, $N \cong F/W$, όπου F κάποιος ελεύθερος R-μόδιος και W κάποιος υπομόδιος αυτού. Συνεπώς δημιουργείται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow W \overset{\mathrm{j}}{\hookrightarrow} F \overset{\varpi}{\twoheadrightarrow} N \longrightarrow \{0\},$$

όπου $\mathrm{j} : W \hookrightarrow F$ η συνήθης ένθεση και ϖ η σύνθεση τού φυσικού επιμορφισμού π_W^F και τού ανωτέρου ισομορφισμού. Θέτοντας $W' := \{x \in F|\ \varpi(x) \in \mathrm{Im}(f)\}$ και

$$\vartheta : W' \longrightarrow N',\ x \longmapsto \vartheta(x) := y,\ \text{ όπου }\ \varpi(x) = f(y),$$

παρατηρούμε ότι η ϑ είναι αφ' ενός μεν *καλώς ορισμένη απεικόνιση*, διότι εάν $\varpi(x) = f(y) = f(y')$, τότε $y = y'$ (λόγω τής ενριπτικότητας τής f), αφ' ετέρου δε *επιμορφισμός*, διότι $\mathrm{Im}(\vartheta) = N'$ και για $r_1, r_2 \in R$ και $x_1, x_2 \in W'$ με $\varpi(x_1) = f(y_1)$ και $\varpi(x_2) = f(y_2)$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}&\varpi(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1\varpi(x_1) + r_2\varpi(x_2) = r_1f(y_1) + r_2f(y_2) = f(r_1y_1 + r_2y_2)\\ &\Rightarrow \vartheta(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1y_1 + r_2y_2 = r_1\vartheta(x_1) + r_2\vartheta(x_2).\end{aligned}$$

Επίσης, $W \subseteq W'$, καθόσον $W = \mathrm{Ker}(\pi_W^F)$. Εάν ως $\mu : W' \hookrightarrow F$ και $\nu : W \hookrightarrow W'$ σημειώσουμε τις συνήθεις ενθέσεις, τότε προκύπτει το εξής διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & W \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mathrm{id}_W"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W' \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & W \arrow[r, "\mathrm{j}"'] & F \arrow[r, "\varpi"'] & N \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Η δεύτερή του γραμμή είναι εξ υποθέσεως ακριβής. Η πρώτη του γραμμή είναι ακριβής, διότι από την ενριπτικότητα τής f, $\mathrm{Im}(\mu) \subseteq \mathrm{Ker}(\vartheta)$, και για κάθε $x \in \mathrm{Ker}(\vartheta)$ ισχύει $\vartheta(x) = 0_{N'} \Rightarrow \varpi(x) = f(0_{N'}) = 0_N \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(\varpi) = \mathrm{Im}(\mu)$. Επιπροσθέτως, το ανωτέρω διάγραμμα είναι και *μεταθετικό*, διότι $\mu \circ \nu = \mathrm{j} \circ \mathrm{id}_W$ και για κάθε $x \in W'$ έχουμε

$$(f \circ \vartheta)(x) = f(\vartheta(x)) = f(y),\ \text{ όπου }\ \varpi(\mu(x)) = \varpi(x) = f(y),$$

οπότε $f \circ \vartheta = \varpi \circ \mu$. Το επαγόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
W \otimes_R M \arrow[r, "\nu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_W\overline{\otimes}\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{W\otimes_R M}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W' \otimes_R M \arrow[r, "\vartheta\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N' \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] & \{0\} \\
W \otimes_R M \arrow[r, "\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] & F \otimes_R M \arrow[r, "\varpi\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] & N \otimes_R M \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

είναι ωσαύτως μεταθετικό με ακριβείς γραμμές (λόγω τής προτάσεως 4.5.5 και τού θεωρήματος 4.5.9). Από το βήμα 3 γνωρίζουμε (αν θεωρήσουμε τον W' αντί τού εκεί παρατεθέντος W και την ένθεση μ αντί τής εκεί παρατεθείσας j) ότι ο ομομορφισμός $\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ είναι μονομορφισμός. Έστω τυχόν $a \in \mathrm{Ker}(f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)$. Επειδή ο $\vartheta\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ είναι επιμορφισμός, υπάρχει $b \in W' \otimes_R M$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$a = (\vartheta\overline{\otimes}\,\mathrm{id}_M)(b).$$

Κατά συνέπειαν,

$$\begin{aligned}
&0_{N\otimes_R M} = (f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(a)\\
&= ((f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)\circ(\vartheta\overline{\otimes}\mathrm{id}_M))\,(b) = ((\varpi\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)\circ(\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M))\,(b)\\
&\Rightarrow (\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(b) \in \ \mathrm{Ker}(\varpi\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) = \mathrm{Im}(\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)\\
&\Rightarrow [\exists c \in W \otimes_R M : (\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(b) = (\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(c)]\\
&\Rightarrow (\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(b) = ((\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)\circ\mathrm{id}_{W\otimes_R M})(c) = ((\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)\circ(\nu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M))(c)\\
&\underset{\mathrm{Ker}(\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)=\{0_{W'\otimes_R M}\}}{\Longrightarrow} b = (\nu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(c) \Rightarrow a = (\underbrace{(\vartheta\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)\circ(\nu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)}_{=0})(c) = 0_{N'\otimes_R M}.
\end{aligned}$$

Επομένως, $\mathrm{Ker}(f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) = \{0_{N'\otimes_R M}\} \Rightarrow$ ο $f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ είναι μονομορφισμός και ο M ισόπεδος (λόγω τού πορίσματος 4.5.20). □

4.5.32 Σημείωση (Αδρομερής ιεράρχηση R-μοδίων). Με τη βοήθεια τής προτάσεως 4.2.4 και τού θεωρήματος 4.5.26 επιτυγχάνεται η ακόλουθη ιεράρχηση των μέχρι τούδε γνωστών μας *ειδικών κλάσεων* R-μοδίων:

$$\boxed{\left\{\begin{matrix}\text{διανυσματικοί}\\ \text{χώροι}\end{matrix}\right\} \subsetneqq \left\{\begin{matrix}\text{ελεύθεροι}\\ R\text{-μόδιοι}\end{matrix}\right\} \subsetneqq \left\{\begin{matrix}\text{προβολικοί}\\ R\text{-μόδιοι}\end{matrix}\right\} \subsetneqq \left\{\begin{matrix}\text{ισόπεδοι}\\ R\text{-μόδιοι}\end{matrix}\right\} \subsetneqq \{R\text{-μόδιοι}\}}$$

Γνωρίζουμε ότι οι ανωτέρω εγκλεισμοί είναι αυστηροί, αφού, επί παραδείγματι,

(i) εάν $k, l \in \mathbb{N}, k \geqslant 2, l \geqslant 2$ και $\text{μκδ}(k,l) = 1$, τότε οι $\mathbb{Z}_{kl}$-μόδιοι $\mathbb{Z}_k$ και $\mathbb{Z}_l$ είναι προβολικοί και μη ελεύθεροι. (Βλ. 4.2.9 (i).)

(ii) Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Q}$ είναι ισόπεδος και μη προβολικός. (Βλ. πόρισμα 4.5.30.)

(iii) Εάν $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, τότε ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_k$ δεν είναι ισόπεδος. (Βλ. εδ. 4.5.18.)

Από την άλλη μεριά, *για μοδίους οριζόμενους υπεράνω Π.Κ.Ι.* οι έννοιες *ελεύθερος* και *προβολικός* (και, αντιστοίχως, *ισόπεδος* και *στερούμενος στρέψεως*) είναι ισοδύναμες. (Βλ. πρόταση 4.2.4, πόρισμα 4.2.10 και θεώρημα 5.3.22.) Μάλιστα, *και οι τέσσερεις αυτές έννοιες είναι ισοδύναμες* όταν περιοριζόμαστε στην κλάση των *πεπερασμένως παραγομένων μοδίων που ορίζονται υπεράνω Π.Κ.Ι.* (Βλ. πρόταση 2.6.4.)

▸ ⊗ **και Hom**. Αυτή η ενότητα θα κλείσει με την παράθεση τριών σημαντικών θεωρημάτων[19] που αφορούν στον συσχετισμό τού τανυστικού γινομένου μοδίων και των μοδίων ομομορφισμών.

[19] Για τις αποδείξεις των (i)-(iii) τού θεωρήματος 4.5.33 και τού θεωρήματος 4.5.36 βλ., π.χ., [24]. Για την απόδειξη τού (iv) τού θεωρήματος 4.5.33 βλ. [86], §5.5, Lemma 5, σελ. 244-245.

Εάν M, N, L είναι τρεις R-μόδιοι και $\mathfrak{y}$ η απεικόνιση

$$\mathfrak{y} : \mathrm{Hom}_R(M,N) \times L \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_R L)$$

η οριζόμενη (για κάθε $(x,z) \in M \times L$ και κάθε $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$) ως εξής:

$$\mathfrak{y}(f,z)(x) := f(x) \otimes z,$$

τότε η $\mathfrak{y}$ είναι R-διγραμμική και, ως εκ τούτου, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$\boxed{\widetilde{\mathfrak{y}} : \mathrm{Hom}_R(M,N) \otimes_R L \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_R L)} \tag{4.24}$$

που καθιστά το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_R(M,N) \otimes_R L \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\mathfrak{y}}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\mathrm{Hom}_R(M,N) \times L \arrow[ur, "\text{ταν. απ.}"] \arrow[rr, "\mathfrak{y}"'] & {} & \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_R L)
\end{tikzcd}$$

4.5.33 Θεώρημα. *Για τον ομομορφισμό (4.24) ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν ο L είναι προβολικός, τότε ο $\widetilde{\mathfrak{y}}$ είναι μονομορφισμός.*

(ii) *Εάν ο L είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε ο $\widetilde{\mathfrak{y}}$ είναι ισομορφισμός.*

(iii) *Εάν ο M είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε ο $\widetilde{\mathfrak{y}}$ είναι ισομορφισμός.*

(iv) *Εάν ο M είναι ελεύθερος, ο L πεπερασμένως παραγόμενος και ο R Π.Κ.Ι., τότε ο $\widetilde{\mathfrak{y}}$ είναι ισομορφισμός.*

4.5.34 Λήμμα. *Εάν M, N, L είναι τρεις R-μόδιοι, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Bil}_R(M,N;L) \cong \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, L).}$$

Απόδειξη. Έστω $\varphi : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ η τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R N$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Theta : \mathrm{Bil}_R(M,N;L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, L), \;\; \beta \longmapsto \Theta(\beta) := \widetilde{\beta},$$

όπου $\widetilde{\beta}$ ο μοναδικός ομομορφισμός για τον οποίον ισχύει $\widetilde{\beta} \circ \varphi = \beta$. (Βλ. εδ. 4.3.6, 4.3.8 και 4.3.11.) Προφανώς,

$$\Theta \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Bil}_R(M,N;L), \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, L)),$$

και όταν $\Theta(\beta_1) = \Theta(\beta_2)$ για κάποιες $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Bil}_R(M,N;L)$, έχουμε

$$\widetilde{\beta}_1 = \widetilde{\beta}_2 \Longrightarrow \widetilde{\beta}_1 \circ \varphi = \widetilde{\beta}_2 \circ \varphi \Longrightarrow \beta_1 = \beta_2,$$

οπότε η Θ είναι μονομορφισμός. Επιπλέον, εάν $g \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, L)$, τότε

$$g \circ \varphi \in \mathrm{Bil}_R(M, N; L) : \Theta(g \circ \varphi) = \widetilde{g \circ \varphi} = g$$

λόγω τής μοναδικότητας τού ομομορφισμού που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes_R N \arrow[dr, "g"] \arrow[dr, bend left=60, dotted, "\widetilde{g \circ \varphi}"] & \\
M \times N \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "g \circ \varphi"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\circlearrowright"] & & L
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. (Βλ. θεώρημα 4.3.8.) Άρα η Θ είναι *και* επιμορφισμός. □

4.5.35 Θεώρημα. *Εάν M, N, L είναι τρεις R-μόδιοι, τότε υφίστανται κανονιστικοί ισομορφισμοί R-μοδίων:*

$$\boxed{\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, L)) & \mathrm{Bil}_R(M, N; L) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, L) \\
 & \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(M, L)) &
\end{tikzcd}}$$

Ιδιαιτέρως, υφίσταται (χωρίς κανέναν επιπρόσθετο περιορισμό επί των M, N, L) κανονιστικός ισομορφισμός

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, L) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, L)).} \tag{4.25}$$

Αποδειξη. Είναι εύκολος ο έλεγχος τού ότι ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$\begin{aligned} \mathrm{Bil}_R(M, N; L) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, L)) \\ \beta &\longmapsto (m \mapsto (n \mapsto \beta(m, n))) \end{aligned}$$

είναι ισομορφισμός έχοντας τον

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, L)) &\longrightarrow \mathrm{Bil}_R(M, N; L) \\ \alpha &\longmapsto ((m, n) \mapsto (\alpha(m)(n))) \end{aligned}$$

ως αντίστροφό του και ότι ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$\begin{aligned} \mathrm{Bil}_R(M, N; L) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(M, L)) \\ \beta &\longmapsto (n \mapsto (m \mapsto \beta(m, n))) \end{aligned}$$

είναι ισομορφισμός έχοντας τον

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(M, L)) &\longrightarrow \mathrm{Bil}_R(M, N; L) \\ \alpha &\longmapsto ((m, n) \mapsto (\alpha(n)(m))) \end{aligned}$$

ως αντίστροφό του. Υπολείπεται η εφαρμογή τού λήμματος 4.5.34. □

Εν συνεχεία, θεωρούμε τέσσερεις R-μοδίους M, M', N, N' και τον κανονιστικό ομομορφισμό

$$\boxed{\mathfrak{z} : \mathrm{Hom}_R(M, M') \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')}$$

τον οριζόμενον ως εξής: $f \otimes g \longmapsto \mathfrak{z}(f \otimes g) := f \overline{\otimes} g$. (Πρβλ. σημείωση 4.5.3.)

4.5.36 Θεώρημα. *Εάν τουλάχιστον ένα εκ των ζευγών $(M, N), (M, M'), (N, N')$ αποτελείται από προβολικούς πεπερασμένως παραγομένους R-μοδίους, τότε ο ομομορφισμός $\mathfrak{z}$ είναι ισομορφισμός.* (Εν τοιαύτη περιπτώσει μπορεί κανείς να χρησιμοποιεί το τανυστικό γινόμενο $f \otimes g$ αντί τού $f \overline{\otimes} g$ και τανάπαλιν!)

4.5.37 Παράδειγμα. Εάν δεν πληρούται η συνθήκη η παρατεθείσα στη διατύπωση τού θεωρήματος 4.5.36, τότε ο $\mathfrak{z}$ ενδέχεται να μην είναι ούτε μονομορφισμός ούτε επιμορφισμός! Επί παραδείγματι, θέτοντας[20] $M' = N' = R := \mathbb{Z}_4, M = N = \mathbb{Z}_2$, και θεωρώντας τόν $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4)$ με $f([a]_2) := [2a]_4, \ \forall a \in \mathbb{Z}$, λαμβάνουμε για οιοδήποτε ζεύγος $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} &(f \overline{\otimes} f)([a]_2 \otimes [b]_2) = f([a]_2) \otimes f([b]_2) = [2a]_4 \otimes [2b]_4 = [2]_4[a]_4 \otimes [2b]_4 \\ &= [2]_4 ([a]_4 \otimes [2]_4[b]_4) = [2]_4[2]_4([a]_2 \otimes [b]_2) = \underbrace{[4]_4}_{=[0]_4} ([a]_2 \otimes [b]_2) = 0_{\mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_4}. \end{aligned}$$

Άρα ο $f \overline{\otimes} f$ είναι ο *μηδενικός ομομορφισμός* και $f \otimes f \in \mathrm{Ker}(\mathfrak{z})$. Επειδή[21]

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2, \tag{4.26}$$

οι τρεις εκ των τεσσάρων αποσυντιθέμενων τανυστών τού

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2$$

είναι ίσοι με το $0_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4) \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4)}$, διότι ένας (τουλάχιστον) εκ των παραγόντων τους είναι ο μηδενικός ομομορφισμός. Αμφότεροι οι παράγοντες τού εναπομένοντος, *τετάρτου* αποσυντιθέμενου τανυστή οφείλουν, ως εκ τούτου, να είναι ίσοι με το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο τού (4.26), ήτοι με τον f. Κατά συνέπειαν, ο εν λόγω τέταρτος αποσυντιθέμενος τανυστής είναι ο $f \otimes f$. Όμως ο $f \otimes f$ είναι κατ' ανάγκην *μη μηδενικός*, καθόσον

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \\ \underset{(4.18)}{\cong} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} + 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \underset{2.3.13}{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \not\cong \{0\}. \end{array} \right\} \tag{4.27}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο $\mathrm{Ker}(\mathfrak{z})$ *δεν είναι τετριμμένος* και, κατ' επέκταση, ότι ο $\mathfrak{z}$ *δεν είναι μονομορφισμός*. Επιπροσθέτως, *και ο ίδιος ο ομομορφισμός $\mathfrak{z}$ είναι μηδενικός*, διότι κάθε τανυστής (ανήκων στο πεδίο ορισμού του) είναι προδήλως τής μορφής $\kappa(f \otimes f)$, όπου $\kappa \in \{[0]_4, [2]_4\}$, και

$$\mathfrak{z}([0]_4 (f \otimes f)) = 0_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2, \, \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_4)} = [2]_4(\underbrace{f \overline{\otimes} f}_{=0}) = [2]_4 \mathfrak{z}(f \otimes f) = \mathfrak{z}([2]_4(f \otimes f)).$$

---

[20] Σημειωτέον ότι μέσω τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \ni ([k]_4, [a]_2) \longmapsto [ka]_2 \in \mathbb{Z}_2$ η αβελιανή ομάδα $(\mathbb{Z}_2, +)$ καθίσταται $\mathbb{Z}_4$-μόδιος.

[21] Έστω τυχών $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4)$. Τότε $g([1]_2) = [\lambda]_4$ για κάποιον $\lambda \in \{1, 2, 3\}$. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι η απεικόνιση $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) \ni g \longmapsto [\lambda]_2 \in \mathbb{Z}_2$ αποτελεί ισομορφισμό $\mathbb{Z}_4$-μοδίων.

Από την άλλη μεριά, οι (4.27) και (4.26) και η παρατήρηση 4.4.4 δίδουν

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_4 \otimes_{\mathbb{Z}_4} \mathbb{Z}_4) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_2 \ncong \{0\},$$

πράγμα που σημαίνει ότι ο $\mathfrak{z}$ *δεν είναι ούτε επιμορφισμός* (αφού ο ανωτέρω μόδιος, όντας μη τετριμμένος, διαθέτει ένα στοιχείο που αδυνατεί να ανήκει στην εικόνα τού $\mathfrak{z}$).

4.5.38 Πόρισμα. *Για οιουσδήποτε R-μοδίους M και N ορίζεται ο κανονιστικός ομομορφισμός*

$$\boxed{\mathfrak{k} : \mathrm{Hom}_R(M, R) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, R)}$$

μέσω τού τύπου $\mathfrak{k}(f \otimes g)(x \otimes y) := f(x)g(y)$, για οιαδήποτε ζεύγη ομομορφισμών $(f, g) \in \mathrm{Hom}_R(M, R) \times \mathrm{Hom}_R(N, R)$ και $(x, y) \in M \times N$. Εάν τουλάχιστον ένας εκ των M, N είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε ο $\mathfrak{k}$ είναι ισομορφισμός. Εν τοιαύτη περιπτώσει υφίσταται ισομορφισμός[22]

$$\boxed{\mathrm{Bil}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), \mathrm{Hom}_R(N, R); R) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, R), R).}$$

Εάν, μάλιστα, αμφότεροι οι M και N είναι πεπερασμένως παραγόμενοι και ελεύθεροι, τότε

$$\boxed{\mathrm{Bil}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), \mathrm{Hom}_R(N, R); R) \cong M \otimes_R N,}$$

και η απεικόνιση $\varphi : M \times N \longrightarrow \mathrm{Bil}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), \mathrm{Hom}_R(N, R); R)$ η οριζόμενη μέσω τού (απλούστατου) τύπου

$$\boxed{\varphi(x, y)(f, g) := f(x)g(y),} \tag{4.28}$$

για οιαδήποτε ζεύγη $(x, y) \in M \times N$ και $(f, g) \in \mathrm{Hom}_R(M, R) \times \mathrm{Hom}_R(N, R)$, μπορεί να θεωρηθεί ως τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R N$.

4.5.39 Σημείωση. Για *οιουσδήποτε πεπερασμένως παραγομένους και ελευθέρους* R-μοδίους M και N το ζεύγος $(\mathrm{Bil}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), \mathrm{Hom}_R(N, R); R), \varphi)$ (όπου φ η (4.28)) μπορεί να εκληφθεί ως ένας «καλός εκπρόσωπος» τής κλάσεως ισομορφίας όλων των ζευγών (W, φ) που «υλοποιούν» το τανυστικό τους γινόμενο. (Πρβλ. εδ. 4.3.9.) Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο χρησιμοποιείται σε ορισμένα βιβλία Γραμμικής Άλγεβρας[23], στην περίπτωση όπου ο R είναι σώμα, ως ένας άμεσος και σύντομος *ορισμός* τού τανυστικού γινομένου *δύο διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διαστάσεως.*

[22] Πρβλ. εδ. 4.3.2.

[23] Βλ., π.χ., K. Hoffman & R. Kulze: *Linear Algebra*, 2nd ed., Prentice Hall, 1971, (§5.6, σελ. 166-168), S. Lang: *Linear Algebra*, 2nd ed., Addison Wesley, 1972, (XIII, §1), ή S.K. Berberian: *Linear Algebra*, Oxford University Press, 1992, (Ch. 13, §1, και ιδιαιτέρως την άσκηση 3 στη σελ. 316).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ext και Tor

Τα *γινόμενα επεκτάσεως* και τα *γινόμενα στρέψεως* είναι δυνατόν να ορισθούν μέσω προβολικών κερματισμών και υπεισέρχονται στη διατύπωση και στην απόδειξη τόσον τού περιώνυμου *θεωρήματος καθολικών συντελεστών* όσον και τού *θεωρήματος τού Künneth*. (Βλ. εδ. 6.1.4, 6.1.10, 6.2.6, 6.2.8, 6.2.11, 6.3.6, 6.3.7, 6.3.14 & 6.3.17.)

5.1 ΚΕΡΜΑΤΙΣΜΟΙ ΜΟΔΙΩΝ

5.1.1 Ορισμός. Έστω M ένας R-μόδιος. Κάθε ζεύγος $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ αποτελούμενο από ένα αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{P}_\bullet = (P_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ τής μορφής

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} \{0\} \xrightarrow{d_{-1}} \{0\} \xrightarrow{d_{-2}} \cdots,$$

όπου $P_n \cong \{0\}$ για κάθε $n \leqslant -1$, $d_n := 0$ για κάθε $n \leqslant 0$, ο P_n προβολικός για κάθε $n \geqslant 0$ και $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_R(P_0, M)$ ένας *επιμορφισμός*, καλείται **προβολικός κερματισμός** (projective resolution) **τού** M όταν ισχύουν τα εξής:

(i) $H_n(\mathbf{P}_\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $n \geqslant 1$,

(ii) $\varepsilon \circ d_1 = 0$ και

(iii) μέσω τού ε επάγεται ισομορφισμός $\varepsilon_\star : H_0(\mathbf{P}_\bullet) \xrightarrow{\cong} M$.

Οι συνθήκες (i), (ii) και (iii) ισοδυναμούν με το ότι η ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\} \quad (5.1)$$

είναι ακριβής[1]. (Πράγματι· η συνθήκη (ii) ισοδυναμεί με το ότι

$$\mathrm{Ker}(\pi^{P_0}_{\mathrm{Im}(d_1)}) = \mathrm{Im}(d_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\varepsilon),$$

οπότε κατά το θεώρημα 2.2.24 υπάρχει μοναδικός $\varepsilon_\star \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}(d_1), M)$

που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "\pi^{P_0}_{\mathrm{Im}(d_1)}"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \mathrm{Coker}(d_1) \arrow[d, dashed, "\varepsilon_\star"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & & M \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, όπου

$$\mathrm{Coker}(d_1) := P_0/\operatorname{Im}(d_1) = \operatorname{Ker}(d_0)/\operatorname{Im}(d_1) = H_0(\mathbf{P}_\bullet).$$

Η (iii) μας πληροφορεί ότι ο $\varepsilon_\star$ είναι ισομορφισμός, οπότε

$$\operatorname{Im}(d_1) = \operatorname{Ker}(\varepsilon).$$

Αυτό σημαίνει ότι η (5.1) είναι ακριβής στη θέση P_0. Η ακρίβεια τής (5.1) στις προηγούμενες θέσεις είναι διασφαλισμένη από την (i).) Προβολικοί κερματισμοί $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τού M, στους οποίους ο P_n είναι ελεύθερος R-μόδιος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, καλούνται, ιδιαιτέρως, **ελεύθεροι κερματισμοί** (free resolutions) **τού** M.

5.1.2 Παραδείγματα. (i) Εάν V είναι ένας K-διανυσματικός χώρος, τότε η

$$\{0\} \longrightarrow V \xrightarrow{\mathrm{id}_V} V \longrightarrow \{0\} \tag{5.2}$$

είναι μια ακριβής ακολουθία τής μορφής (5.1).

(ii) Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., τότε για κάθε R-μόδιο M υπάρχει μια ακολουθία τής μορφής (5.1) «μήκους 1»:

$$\{0\} \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow \{0\}. \tag{5.3}$$

Πράγματι· κατά το πόρισμα 2.5.23, $M \cong P_0/P_1$, όπου P_0 είναι ένας ελεύθερος (και, κατ' επέκταση, προβολικός) R-μόδιος, ο δε P_1 είναι ωσαύτως ελεύθερος δυνάμει τού θεωρήματος 2.5.47. (Σημειωτέον ότι αμφότερες οι (5.2) και (5.3) αντιστοιχούν *σε ελεύθερους κερματισμούς*.)

5.1.3 Πρόταση. *Κάθε R-μόδιος M διαθέτει έναν ελεύθερο (και, κατ' επέκταση, έναν προβολικό) κερματισμό.*

Απόδειξη. Κατά το πόρισμα 2.5.23, $M \cong F_0/L_0$, όπου F_0 είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος. Επομένως υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow L_0 \overset{\iota_0}{\hookrightarrow} F_0 \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\},$$

[1]Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι η (5.1) είναι η **ακριβής ακολουθία η αντιστοιχούσα στον προβολικό κερματισμό** $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ **τού** M. (Προσοχή! Σε αρκετά βιβλία το $\mathbf{P}_\bullet$ καλείται *μειωμένος* (ή και *διαγραφείς*) *προβολικός κερματισμός τού* M και *ορίζεται* ως *προβολικός κερματισμός τού* M μια ακριβής ακολουθία τής μορφής (5.1). Εδώ, αντιθέτως, διατηρείται η *κλασική* ορολογία. Βλ. [28], σελ. X.48, [29], σελ. 75, και [32], σελ. 127.)

όπου ι_0 η συνήθης ένθεση και ε η σύνθεση τού φυσικού επιμορφισμού $\pi_{L_0}^{F_0}$ και ενός ισομορφισμού

$$F_0/L_0 \xrightarrow{\cong} M.$$

Με τους ίδιους συλλογισμούς έπεται ότι $L_0 \cong F_1/L_1$, όπου F_1 είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος, οπότε δημιουργείται εκ νέου μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow L_1 \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} F_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} L_0 \longrightarrow \{0\}.$$

Επαναλαμβάνοντας αυτήν τη διαδικασία αποδεικνύουμε επαγωγικώς την ύπαρξη βραχέων ακριβών ακολουθιών

$$\{0\} \longrightarrow L_n \overset{\iota_n}{\hookrightarrow} F_n \overset{\pi_n}{\twoheadrightarrow} L_{n-1} \longrightarrow \{0\}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Εν συνεχεία, θεωρούμε τις συνθέσεις $d_n := \iota_{n-1} \circ \pi_n$ για κάθε $n \geqslant 1$:

$$\begin{tikzcd}
F_{n+1} \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[dr, two heads, "\pi_{n+1}"'] & & F_n \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, two heads, "\pi_n"'] & & F_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, two heads, "\pi_1"'] & & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & \{0\} \\
& L_n \arrow[ur, hook, "\iota_n"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & & L_{n-1} \arrow[ur, hook, "\iota_{n-1}"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & & & & L_0 \arrow[ur, hook, "\iota_0"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & & &
\end{tikzcd}$$

Θα αποδείξουμε ότι το ζεύγος $(\mathbf{F}_\bullet, \varepsilon)$ (όπου $\mathbf{F}_\bullet := (F_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ με $F_n \cong \{0\}$ για κάθε $n \leqslant -1$) αποτελεί έναν ελεύθερο κερματισμό τού M. Προς τούτο αρκεί να δειχθεί ότι η

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

είναι *ακριβής*. Κατ' αρχάς ο ε είναι εκ κατασκευής επιμορφισμός. Επιπροσθέτως,

$$\varepsilon \circ d_1 = \underbrace{\varepsilon \circ \iota_0}_{=0} \circ \pi_1 = 0, \;\; d_1 \circ d_2 = \iota_0 \circ \underbrace{\pi_1 \circ \iota_1}_{=0} \circ \pi_2 = 0$$

και, γενικότερα, $d_n \circ d_{n+1} = \iota_{n-1} \circ \underbrace{\pi_n \circ \iota_n}_{=0} \circ \pi_{n+1} = 0$ για κάθε $n \geqslant 1$.

Επίσης, $\mathrm{Ker}(\varepsilon) \subseteq \mathrm{Im}(d_1)$. Πράγματι· εάν $x \in \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \mathrm{Im}(\iota_0)$, τότε $x = \iota_0(y)$ για κάποιο $y \in L_0$. Επειδή ο π_1 είναι επιμορφισμός, $y = \pi_1(z)$ για κάποιο $z \in F_1$. Επομένως,

$$x = \iota_0(y) = (\iota_0 \circ \pi_1)(z) = d_1(z) \in \mathrm{Im}(d_1).$$

Τέλος, $\mathrm{Ker}(d_n) \subseteq \mathrm{Im}(d_{n+1})$ για κάθε $n \geqslant 1$. Πράγματι· εάν $a \in \mathrm{Ker}(d_n)$, τότε

$$d_n(a) = (\iota_{n-1} \circ \pi_n)(a) = 0_{F_{n-1}} \Rightarrow \pi_n(a) = 0_{L_{n-1}}$$

(διότι ο ι_{n-1} είναι μονομορφισμός), οπότε

$$a \in \mathrm{Ker}(\pi_n) = \mathrm{Im}(\iota_n) \Rightarrow [\exists b \in L_n : a = \iota_n(b)].$$

Επειδή ο π_{n+1} είναι επιμορφισμός, $b = \pi_{n+1}(c)$ για κάποιο $c \in F_{n+1}$. Κατά συνέπειαν, $a = \iota_n(\pi_{n+1}(c)) = d_{n+1}(c) \in \mathrm{Im}(d_{n+1})$. □

5.1.4 Θεώρημα («Θεώρημα συγκρίσεως για προβολικούς κερματισμούς»). *Έστω ότι M, M' είναι δυο R-μόδιοι και ότι $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$. Εάν $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ είναι προβολικοί κερματισμοί των M και M', αντιστοίχως, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Υπάρχει αλυσωτός μετασχηματισμός $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ που «επεκτείνει» τον φ, ήτοι ισχύει $\varphi \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f_0$.*

(ii) *Οιοιδήποτε αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ «επεκτείνοντες» τον φ (υπό την ως άνω έννοια) είναι αλυσωτώς ομότοποι.* (Βλ. εδ. 3.5.1.)

Απόδειξη. (i) Επειδή ο P_0 είναι προβολικός και ο ε' επιμορφισμός, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[d, "\varphi\circ\varepsilon"] & \\ P_0' \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

συμπληρώνεται σε μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[dl, dashed, "f_0"'] \arrow[d, "\varphi\circ\varepsilon"] \arrow[dl, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & \\ P_0' \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

δηλαδή $\exists f_0 \in \mathrm{Hom}_R(P_0, P_0') : \varepsilon' \circ f_0 = \varphi \circ \varepsilon$. Επειδή ο P_1 είναι προβολικός και η γραμμή τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[d, "f_0\circ d_1"] & \\ P_1' \arrow[r, "d_1'"'] & P_0' \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \end{tikzcd}$$

ακριβής, αυτό συμπληρώνεται σε μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, dashed, "f_1"'] \arrow[d, "f_0\circ d_1"] \arrow[dl, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & \\ P_1' \arrow[r, "d_1'"'] & P_0' \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \end{tikzcd}$$

(αφού $\varepsilon' \circ f_0 \circ d_1 = \varphi \circ \underbrace{\varepsilon \circ d_1}_{=0} = 0$, βλ. πρόταση 4.2.2), δηλαδή

$$\exists f_1 \in \mathrm{Hom}_R(P_1, P_1') : d_1' \circ f_1 = f_0 \circ d_1.$$

Κάνοντας χρήση μαθηματικής επαγωγής αποδεικνύουμε ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P_n \arrow[d, "f_{n-1}\circ d_n"] & \\ P_n' \arrow[r, "d_n'"'] & P_{n-1}' \arrow[r, "d_{n-1}'"'] & P_{n-2}' \end{tikzcd}$$

συμπληρώνεται σε μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P_n \arrow[dl, dashed, "f_n"'] \arrow[d, "f_{n-1}\circ d_n"] \arrow[dl, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & \\ P_n' \arrow[r, "d_n'"'] & P_{n-1}' \arrow[r, "d_{n-1}'"'] & P_{n-2}' \end{tikzcd}$$

καθότι ο P_n είναι προβολικός και $d_{n-1}' \circ f_{n-1} \circ d_n = f_{n-2} \circ \underbrace{d_{n-1} \circ d_n}_{=0} = 0$, οπότε (κατά την πρόταση 4.2.2) $\exists f_n \in \mathrm{Hom}_R(P_n, P_n') : d_n' \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$ για κάθε $n \geqslant 1$.

(ii) Αναζητούνται ομομορφισμοί $h_n \in \mathrm{Hom}_R(P_n, P_{n+1}')$ με την ιδιότητα

$$d_{n+1}' \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0, \tag{5.4}$$

όπου -εν είδει συμβάσεως- θέτουμε $h_{-1} := 0$. Θα εργασθούμε εκ νέου με τη βοήθεια τής μαθηματικής επαγωγής. Επειδή ο P_0 είναι προβολικός, από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[dl, dashed, "h_0"'] \arrow[d, "f_0-g_0"] \arrow[dl, phantom, shift right=4, "\circlearrowleft"] & \\ P_1' \arrow[r, "d_1'"'] & P_0' \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \end{tikzcd}$$

με ακριβή γραμμή και με

$$\varepsilon' \circ (f_0 - g_0) = \varepsilon' \circ f_0 - \varepsilon' \circ g_0 = \varphi \circ \varepsilon - \varphi \circ \varepsilon = 0$$

συνάγεται η ύπαρξη ενός ομομορφισμού $h_0 \in \mathrm{Hom}_R(P_0, P_1') : d_1' \circ h_0 = f_0 - g_0$. (Βλ. πρόταση 4.2.2.) Κατ' αναλογίαν, επειδή ο P_1 είναι προβολικός, από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, dashed, "h_1"'] \arrow[d, "f_1-g_1-h_0\circ d_1"] \arrow[dl, phantom, shift right=4, "\circlearrowleft"] & \\ P_2' \arrow[r, "d_2'"'] & P_1' \arrow[r, "d_1'"'] & P_0' \end{tikzcd}$$

με ακριβή γραμμή και με

$$\begin{aligned} d_1' \circ (f_1 - g_1 - h_0 \circ d_1) &= d_1' \circ f_1 - d_1' \circ g_1 - d_1' \circ h_0 \circ d_1 \\ &= f_0 \circ d_1 - g_0 \circ d_1 - (f_0 - g_0) \circ d_1 = 0 \end{aligned}$$

συνάγεται (εκ νέου λόγω τής 4.2.2) η ύπαρξη ενός $h_1 \in \mathrm{Hom}_R(P_1, P_2')$:

$$d_2' \circ h_1 = f_1 - g_1 - h_0 \circ d_1 \Rightarrow d_2' \circ h_1 + h_0 \circ d_1 = f_1 - g_1.$$

Επαγωγική υπόθεση. Έστω $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$. Υποθέτουμε ότι για όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους $n < k$ έχουν ήδη κατασκευασθεί $h_n \in \mathrm{Hom}_R(P_n, P_{n+1}')$ με την ιδιότητα (5.4).

Ολοκλήρωση επαγωγικής διαδικασίας. Αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός ομομορφισμού $h_k \in \mathrm{Hom}_R(P_k, P_{k+1}')$ με την ιδιότητα

$$d_{k+1}' \circ h_k + h_{k-1} \circ d_k = f_k - g_k. \tag{5.5}$$

Προς τούτο θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P_k \arrow[dl, dashed, "h_k"'] \arrow[d, "f_k-g_k-h_{k-1}\circ d_k"] \arrow[dl, phantom, shift right=4, "\circlearrowleft"] & \\ P_{k+1}' \arrow[r, "d_{k+1}'"'] & P_k' \arrow[r, "d_k'"'] & P_{k-1}' \end{tikzcd}$$

Επειδή ο P_k είναι προβολικός, η γραμμή του (εξ ορισμού) ακριβής και

$$\begin{aligned} &d_k' \circ (f_k - g_k - h_{k-1} \circ d_k) = d_k' \circ f_k - d_k' \circ g_k - (d_k' \circ h_{k-1}) \circ d_k \\ &= f_{k-1} \circ d_k - g_{k-1} \circ d_k - (f_{k-1} - g_{k-1} - h_{k-2} \circ d_{k-1}) \circ d_k = 0 \end{aligned}$$

(λόγω τής επαγωγικής υποθέσεώς μας και τού ότι $d_{k-1} \circ d_k = 0$), υπάρχει πράγματι ένας $h_k \in \mathrm{Hom}_R(P_k, P_{k+1}')$ ο οποίος (κατά την πρόταση 4.2.2) συμπληρώνει μεταθετικώς το ανωτέρω διάγραμμα και έχει την επιθυμητή ιδιότητα (5.5). $\square$

5.1.5 Πόρισμα. *Οιοιδήποτε προβολικοί κερματισμοί* $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ *τυχόντος R-μοδίου M είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι.* (Βλ. εδ. 3.5.10.)

Αποδειξη. Σύμφωνα με το (i) τού θεωρήματος 5.1.4 υπάρχουν αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ που «επεκτείνουν» τον ταυτοτικό αυτομορφισμό $\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M$. Επίσης, οι $\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet} : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$, $(g \circ f)_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$, και $\mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet} : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$, $(f \circ g)_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ είναι αλυσωτοί μετασχηματισμοί «επεκτείνοντες» τον id_M. Σύμφωνα με το (ii) τού θεωρήματος 5.1.4, $(g \circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet}$ και $(f \circ g)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet}$. Άρα οι $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ και $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ είναι όντως ομοτοπικώς ισοδύναμοι. □

5.1.6 Λήμμα («Λήμμα τού πετάλου για προβολικούς κερματισμούς»). *Έστω*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων. Εάν $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$, $(\mathbf{P}''_\bullet, \varepsilon'')$ είναι προβολικοί κερματισμοί των M' και M'', αντιστοίχως, τότε υπάρχουν ένας προβολικός κερματισμός $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τού M και αλυσωτοί μετασχηματισμοί $\iota_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ και $\pi_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}''_\bullet$, ώστε η $\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \xrightarrow{\iota_\bullet} \mathbf{P}_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} \mathbf{P}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$ να είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων (βλ. εδ. 3.2.11) *και το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό*:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & H_0(\mathbf{P}'_\bullet) \arrow[r, "H_0(\iota_\bullet)"] \arrow[d, "\varepsilon'_\star", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_0(\mathbf{P}_\bullet) \arrow[r, "H_0(\pi_\bullet)"] \arrow[d, "\varepsilon_\star", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_0(\mathbf{P}''_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''_\star", "\cong"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd} \tag{5.6}$$

Αποδειξη. Έστω ότι $\mathbf{P}'_\bullet = (P'_n, d'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ και $\mathbf{P}''_\bullet = (P''_n, d''_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Το ζητούμενο είναι η συμπλήρωση τού «πεταλοειδούς διαγράμματος»

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "d'_3"'] & & \vdots \arrow[d, "d''_3"] & \\
 & P'_2 \arrow[d, "d'_2"'] & ; & P''_2 \arrow[d, "d''_2"] & \\
 & P'_1 \arrow[d, "d'_1"'] & ; & P''_1 \arrow[d, "d''_1"] & \\
 & P'_0 \arrow[d, "\varepsilon'"'] & ; & P''_0 \arrow[d, "\varepsilon''"] & \\
\{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
 & \{0\} & & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

με την εισαγωγή μιας μεσαίας στήλης που θα έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. Ο πλέον πρόσφορος τρόπος ορισμού τής μεσαίας στήλης παρέχεται από την ίδια τη φύση τού ευθέος αθροίσματος. Πράγματι· θέτοντας $P_n := P'_n \oplus P''_n$,

$$\iota_n : P'_n \hookrightarrow P_n, \ \ x' \longmapsto \iota_n(x') := (x', 0_{P''_n})$$

και $\pi_n : P_n \twoheadrightarrow P''_n$, $(x', x'') \longmapsto \pi_n(x', x'') := x''$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, αρκεί να ορίσουμε τους $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_R(P_0, M)$ και $d_n \in \mathrm{Hom}_R(P_n, P_{n-1})$ για $n \geqslant 1$ ως ακολούθως[2]: Επειδή ο P''_0 είναι προβολικός, στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & P'_0 \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P_0 := P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"'] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] \arrow[dl, dashed, "\eta"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"'] \arrow[d, dashed] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
& \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

(με ακριβείς γραμμές), $\exists \eta \in \mathrm{Hom}_R(P''_0, M)$: $g \circ \eta = \varepsilon''$. Έστω $\varepsilon : P_0 \longrightarrow M$ η απεικόνιση η οριζόμενη μέσω τού τύπου

$$\boxed{\varepsilon(x', x'') := (f \circ \varepsilon')(x') + \eta(x''),}$$

για κάθε $(x', x'') \in P'_0 \oplus P''_0 =: P_0$. Αυτή είναι ομομορφισμός R-μοδίων, διότι για οιαδήποτε ζεύγη $(x'_1, x'_2) \in P'_0 \times P'_0$, $(x''_1, x''_2) \in P''_0 \times P''_0$ και $(r_1, r_2) \in R \times R$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(r_1(x'_1, x''_1) + r_2(x'_2, x''_2)) = \varepsilon(r_1x'_1 + r_2x'_2, r_1x''_1 + r_2x''_2) \\
&= (f \circ \varepsilon')(r_1x'_1 + r_2x'_2) + \eta(r_1x''_1 + r_2x''_2) \\
&= r_1(f \circ \varepsilon')(x'_1) + r_2(f \circ \varepsilon')(x'_2) + r_1\eta(x''_1) + r_2\eta(x''_2) \\
&= r_1\left((f \circ \varepsilon')(x'_1) + \eta(x''_1)\right) + r_2\left((f \circ \varepsilon')(x'_2) + \eta(x''_2)\right) \\
&= r_1\varepsilon(x'_1, x''_1) + r_2\varepsilon(x'_2, x''_2).
\end{aligned}$$

Επίσης, $[(\varepsilon \circ \iota_0)(x') = \varepsilon(x', 0_{P''_0}) = (f \circ \varepsilon')(x'), \forall x' \in P'_0] \Rightarrow \varepsilon \circ \iota_0 = f \circ \varepsilon'$ και

$$\begin{aligned}
&[(g \circ \varepsilon)(x', x'') = g\left((f \circ \varepsilon')(x') + \eta(x'')\right) \\
&= (g \circ f \circ \varepsilon)(x') + (g \circ \eta)(x'') = \varepsilon''(\pi_0(x', x'')), \\
&\forall (x', x'') \in P'_0 \oplus P''_0 =: P_0] \Rightarrow g \circ \varepsilon = \varepsilon'' \circ \pi_0,
\end{aligned}$$

οπότε το ανωτέρω διάγραμμα είναι μεταθετικό. Τέλος, επειδή αμφότεροι οι ε' και ε'' είναι επιμορφισμοί, ο $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_R(P_0, M)$ οφείλει να είναι ωσαύτως επιμορφισμός επί τη βάσει τού (ii) τού «βραχέος λήμματος των πέντε» 3.1.9.

Εν συνεχεία, ορίζουμε τους $d_n \in \mathrm{Hom}_R(P_n, P_{n-1})$ για $n \geqslant 1$ μέσω τού τύπου

$$\boxed{d_n(x', x'') := (d'_n(x') + \theta_n(x''), d''_n(x'')),}$$

[2]Για $n \leqslant 0$, απλώς θέτουμε $d_n := 0$.

για κάθε $(x', x'') \in P'_n \oplus P''_n =: P_n$, όπου οι $\theta_n \in \mathrm{Hom}_R(P''_n, P'_{n-1})$ *καθορίζονται επαγωγικώς* ως εξής: Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P''_1 \arrow[d, "-\eta\circ d''_1"] & \\ P'_0 \arrow[r, "f\circ\varepsilon'"'] & M \arrow[r, "g"'] & M'' \end{tikzcd}$$

Η γραμμή αυτού είναι ακριβής, διότι

$$\mathrm{Im}(f\circ\varepsilon') = f(\mathrm{Im}(\varepsilon')) = f(M') = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g),$$

ενώ $g\circ(-\eta\circ d''_1) = -(g\circ\eta)\circ d''_1 = -\varepsilon''\circ d''_1 = 0$. Μέσω τής προτάσεως 4.2.2 συνάγεται η ύπαρξη ενός $\theta_1 \in \mathrm{Hom}_R(P''_1, P'_0)$ που το συμπληρώνει μεταθετικώς, ήτοι ισχύει $f\circ\varepsilon'\circ\theta_1 = -\eta\circ d''_1 \Rightarrow f\circ\varepsilon'\circ\theta_1 + \eta\circ d''_1 = 0$.

$$\begin{tikzcd} & P''_1 \arrow[dl, dashed, "\theta_1"'] \arrow[d, "-\eta\circ d''_1"] & \\ P'_0 \arrow[r, "f\circ\varepsilon'"'] & M \arrow[r, "g"'] & M'' \end{tikzcd}$$

Τούτο σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} &[(\varepsilon\circ d_1)(x', x'') = \varepsilon\left(d'_1(x') + \theta_1(x''), d''_1(x'')\right) \\ &= (f\circ\underbrace{\varepsilon'\circ d'_1}_{=0})(x') + (\underbrace{f\circ\varepsilon'\circ\theta_1 + \eta\circ d''_1}_{=0})(x'') = 0_M, \\ &\forall (x', x'') \in P'_1 \oplus P''_1 =: P_1] \Rightarrow \boxed{\varepsilon\circ d_1 = 0} \end{aligned}$$

Κατ' αναλογίαν, η γραμμή τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} & P''_2 \arrow[d, "-\theta_1\circ d''_2"] & \\ P'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & P'_0 \arrow[r, "f\circ\varepsilon'"'] & M \end{tikzcd}$$

είναι ακριβής, διότι $\mathrm{Ker}(f\circ\varepsilon') = \mathrm{Ker}(\varepsilon') = \mathrm{Im}(d'_1)$ (αφού ο f είναι μονομορφισμός), ενώ

$$f\circ\varepsilon'\circ(-\theta_1\circ d''_2) = -(f\circ\varepsilon'\circ\theta_1)\circ d''_2 = \eta\circ(\underbrace{d''_1\circ d''_2}_{=0}) = 0,$$

οπότε με εφαρμογή τής 4.2.2 συνάγεται η ύπαρξη ενός $\theta_2 \in \mathrm{Hom}_R(P''_2, P'_1)$ που το συμπληρώνει μεταθετικώς, ήτοι ισχύει $d'_1\circ\theta_2 + \theta_1\circ d''_2 = 0$.

Επαγωγική υπόθεση. Υποθέτουμε ότι για οιονδήποτε $n \geqslant 2$ υπάρχουν ομομορφισμοί $\theta_j \in \mathrm{Hom}_R(P''_j, P'_{j-1})$ για τους οποίους ισχύει

$$d'_{j-1}\circ\theta_j + \theta_{j-1}\circ d''_j = 0, \quad \forall j \in \{2, ..., n\}. \tag{5.7}$$

Ολοκλήρωση επαγωγικής διαδικασίας. Η γραμμή τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} & P''_{n+1} \arrow[d, "-\theta_n \circ d''_{n+1}"] & \\ P'_n \arrow[r, "d'_n"'] & P'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"'] & P'_{n-2} \end{tikzcd}$$

είναι ακριβής (διότι εξ υποθέσεως $\mathrm{Ker}(d'_{n-1}) = \mathrm{Im}(d'_n)$), ο P''_{n+1} είναι προβολικός, ενώ $d'_{n-1} \circ (-\theta_n \circ d''_{n+1}) = (-d'_{n-1} \circ \theta_n) \circ d''_{n+1} \underset{(5.7)}{=} \theta_{n-1} \circ \underbrace{d''_n \circ d''_{n+1}}_{=0} = 0$, οπότε $\exists \theta_{n+1} \in \mathrm{Hom}_R(P''_{n+1}, P'_n) : d'_n \circ \theta_{n+1} + \theta_n \circ d''_{n+1} = 0$. Τούτο σημαίνει ότι *για κάθε* $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} &[(d_n \circ d_{n+1})(x', x'') = d_n \left(d'_{n+1}(x') + \theta_{n+1}(x''), d''_{n+1}(x'')\right) \\ &= ((\underbrace{d'_n \circ d'_{n+1}}_{=0})(x') + (\underbrace{d'_n \circ \theta_{n+1} + \theta_n \circ d''_{n+1}}_{=0})(x''), (\underbrace{d''_n \circ d''_{n+1}}_{=0})(x'')), \\ &\forall (x', x'') \in P'_{n+1} \oplus P''_{n+1} =: P_{n+1}] \Rightarrow \boxed{d_n \circ d_{n+1} = 0} \end{aligned}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάζεται μια συμπλήρωση

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d, "d'_3"'] & \vdots \arrow[d, "d_3"] & \vdots \arrow[d, "d''_3"] & \\ \{0\} \arrow[r] & P'_2 \arrow[r, "\iota_2"] \arrow[d, "d'_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "d_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P''_2 \arrow[r] \arrow[d, "d''_2"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & P'_1 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "d'_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P''_1 \arrow[r] \arrow[d, "d''_1"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & P'_0 \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P_0 \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\ & \{0\} & \{0\} & \{0\} & \end{tikzcd}$$

τού αρχικού «πεταλοειδούς διαγράμματος», ούτως ώστε η

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \xrightarrow{\iota_\bullet} \mathbf{P}_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} \mathbf{P}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

να είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. Επειδή τα ζεύγη $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$, $(\mathbf{P}''_\bullet, \varepsilon'')$ είναι προβολικοί κερματισμοί των M' και M'', αντιστοίχως, από τη μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας 3.2.13

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{H_n(\mathbf{P}'_\bullet)}_{\cong\{0\}} \xrightarrow{H_n(\iota_\bullet)} H_n(\mathbf{P}_\bullet) \xrightarrow{H_n(\pi_\bullet)} \underbrace{H_n(\mathbf{P}''_\bullet)}_{\cong\{0\}} \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

συμπεραίνουμε ότι $H_n(\mathbf{P}_\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $n \geqslant 1$. Επιπροσθέτως, $\varepsilon \circ d_1 = 0$ και το διάγραμμα (5.6) είναι μεταθετικό (με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς), οπότε ο επαγόμενος (μεσαίος) ομομορφισμός $\varepsilon_\star$ είναι *ισομορφισμός* (λόγω τού (iii) τού «βραχέος λήμματος των πέντε» 3.1.9). Τέλος, ο $P_n := P'_n \oplus P''_n$ (ως ευθύ άθροισμα προβολικών) είναι προβολικός R-μόδιος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. πρόταση 4.2.13.) Κατά συνέπειαν, το αποκτηθέν ζεύγος $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ αποτελεί έναν προβολικό κερματισμό τού M. □

5.1.7 Ορισμός. Κάθε ζεύγος $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ αποτελούμενο από ένα συναλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{Q}^\bullet = (Q^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ τής μορφής

$$\mathbf{Q}^\bullet : \ \cdots \to \{0\} \to \{0\} \to \ Q^0 \xrightarrow{d^0} Q^1 \xrightarrow{d^1} Q^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \longrightarrow Q^n \xrightarrow{d^n} Q^{n+1} \to \cdots,$$

όπου $Q^n \cong \{0\}$ και $d^n := 0$ για κάθε $n \leqslant -1$, ο Q^n εμβολικός R-μόδιος για κάθε $n \geqslant 0$ και $i \in \mathrm{Hom}_R(M, Q^0)$ ένας *μονομορφισμός*, καλείται **εμβολικός κερματισμός** (injective resolution) **τού** M όταν ισχύουν τα εξής:

(i) $H^n(\mathbf{Q}^\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $n \geqslant 1$,

(ii) $d^0 \circ i = 0$ και

(iii) μέσω τού i επάγεται ισομορφισμός $i^\star : M \xrightarrow{\cong} H^0(\mathbf{Q}^\bullet)$.

Οι συνθήκες (i), (ii) και (iii) ισοδυναμούν με το ότι η ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow M \overset{i}{\hookrightarrow} Q^0 \xrightarrow{d^0} Q^1 \xrightarrow{d^1} Q^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \longrightarrow Q^n \xrightarrow{d^n} Q^{n+1} \longrightarrow \cdots \tag{5.8}$$

είναι ακριβής [3]. (Πράγματι· εάν ως $j : \mathrm{Ker}(d^0) \hookrightarrow Q^0$ συμβολισθεί η συνήθης ένθεση, η συνθήκη (ii) ισοδυναμεί με το ότι $\mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(d^0) = \mathrm{Im}(j)$, οπότε κατά το θεώρημα 2.2.25 υπάρχει μοναδικός $i^\star \in \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Ker}(d^0))$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(d^0) \arrow[r, hook, "j"] & Q^0 \arrow[r, "d^0"] & Q^1 \\ & M \arrow[u, "i"] \arrow[ul, dashed, "i^\star"] & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, όπου $H^0(\mathbf{Q}^\bullet) = \mathrm{Ker}(d^0)/\underbrace{\mathrm{Im}(d^{-1})}_{\cong\{0\}} \cong \mathrm{Ker}(d^0)$. Λόγω τής (iii) ο $i^\star$ είναι ισομορφισμός, οπότε $\mathrm{Ker}(d^0) = \mathrm{Im}(j) = \mathrm{Im}(j \circ i^\star) = \mathrm{Im}(i) = M$. Αυτό σημαίνει ότι η (5.8) είναι ακριβής στη θέση Q^0. Η ακρίβεια τής (5.8) στις επόμενες θέσεις είναι διασφαλισμένη από την (i).)

[3] Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι η (5.8) είναι η **ακριβής ακολουθία η αντιστοιχούσα στον εμβολικό κερματισμό** $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ **τού** M.

5.1.8 Πρόταση. *Κάθε R-μόδιος διαθέτει έναν εμβολικό κερματισμό.*

Αποδειξη. Έστω M ένας R-μόδιος. Κατά το θεώρημα 4.2.25 ο M είναι ισόμορφος με έναν υπομόδιο ενός εμβολικού R-μοδίου Q^0. Εάν ως $i = i^0 : M \hookrightarrow Q^0$ συμβολισθεί η φυσική ενθετική απεικόνιση, τότε προκύπτει μια βραχεία ακριβής ακολουθία $\{0\} \longrightarrow M \overset{i^0}{\hookrightarrow} Q^0 \xrightarrow{\pi^0} Q^0/\, i^0(M) \longrightarrow \{0\}$, όπου $\pi^0 := \pi^{Q^0}_{i^0(M)}$. Με εκ νέου εφαρμογή τού θεωρήματος 4.2.25 (αλλά αυτή τη φορά με το $\overline{Q^0} := Q^0/i^0(M)$ στη θέση τού M) συνάγεται η ύπαρξη ενός μονομορφισμού $i^1 : \overline{Q^0} \hookrightarrow Q^1$, όπου Q^1 ένας εμβολικός R-μόδιος, απ' όπου προκύπτει μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \overline{Q^0} \overset{i^1}{\hookrightarrow} Q^1 \xrightarrow{\pi^1} Q^1/i^1(\overline{Q^0}) \longrightarrow \{0\}.$$

Κατόπιν επαναλήψεως αυτής τής διαδικασίας για τους πηλικομοδίους

$$\overline{Q^n} := Q^n/i^n(\overline{Q^{n-1}}),\ \ n \geqslant 0,$$

αποδεικνύεται επαγωγικώς η ύπαρξη βραχέων ακριβών ακολουθιών

$$0 \longrightarrow \overline{Q^{n-1}} \overset{i^n}{\hookrightarrow} Q^n \xrightarrow{\pi^n} \overline{Q^n} \longrightarrow 0,$$

όπου Q^n εμβολικοί R-μόδιοι για κάθε $n \geqslant 1$. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι το ζεύγος $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ με

$$\mathbf{Q}^\bullet = (Q^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad d^n := i^n \circ \pi^{n-1},$$

είναι ένας εμβολικός κερματισμός τού M (με επιχειρήματα ανάλογα εκείνων που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη τής προτάσεως 5.1.3). □

5.1.9 Θεώρημα («Θεώρημα συγκρίσεως για εμβολικούς κερματισμούς»). *Έστω ότι M, M' είναι δυο R-μόδιοι και ότι $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$. Εάν $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$, $(\mathbf{Q}'^\bullet, i')$ είναι προβολικοί κερματισμοί των M και M', αντιστοίχως, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Υπάρχει συναλυσωτός μετασχηματισμός $f^\bullet : \mathbf{Q}^\bullet \longrightarrow \mathbf{Q}'^\bullet$ που «επεκτείνει» τον φ, ήτοι ισχύει $i' \circ \varphi = f^0 \circ i$.*

(ii) *Οιοιδήποτε συναλυσωτοί μετασχηματισμοί $f^\bullet, g^\bullet : \mathbf{Q}^\bullet \longrightarrow \mathbf{Q}'^\bullet$ «επεκτείνοντες» τον φ (υπό την ως άνω έννοια) είναι συναλυσωτώς ομότοποι.* (Βλ. εδ. 3.5.3.)

Αποδειξη. Ανάλογη εκείνης τού θεωρήματος 5.1.4, υπό την προϋπόθεση ότι κατά τη διαδικασία κατασκευής των[4] ομομορφισμών $f^1, f^2, \ldots$ χρησιμοποιείται η πρόταση 4.2.22 αντί τής προτάσεως 4.2.2. □

5.1.10 Πόρισμα. *Οιοιδήποτε εμβολικοί κερματισμοί $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$, $(\mathbf{Q}'^\bullet, i')$ τυχόντος R-μοδίου M είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι.* (Βλ. εδ. 3.5.10.)

Αποδειξη. Ανάλογη εκείνης τού πορίσματος 5.1.5 (κάνοντας, εν προκειμένω, χρήση τού θεωρήματος 5.1.9 αντί τού 5.1.4). □

[4] Επειδή ο Q^0 είναι εμβολικός και ο i μονομορφισμός, $\exists f_0 \in \mathrm{Hom}_R(Q^0, Q'^0) : i' \circ \varphi = f^0 \circ i$.

5.1.11 Λήμμα («Λήμμα τού πετάλου για εμβολικούς κερματισμούς»). *Έστω*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων. Εάν $(\mathbf{Q}'^{\bullet}, i')$, $(\mathbf{Q}''^{\bullet}, i'')$ είναι εμβολικοί κερματισμοί των M' και M'', αντιστοίχως, τότε υπάρχουν ένας εμβολικός κερματισμός $(\mathbf{Q}^{\bullet}, i)$ τού M και συναλυσωτοί μετασχηματισμοί $j^{\bullet} : \mathbf{Q}'^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{Q}^{\bullet}$ και $\pi^{\bullet} : \mathbf{Q}^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{Q}''^{\bullet}$, ούτως ώστε η

$$\mathbf{0}^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{Q}'^{\bullet} \xrightarrow{j^{\bullet}} \mathbf{Q}^{\bullet} \xrightarrow{\pi^{\bullet}} \mathbf{Q}''^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{0}^{\bullet}$$

να είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων και το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & H^0(\mathbf{Q}'^{\bullet}) \arrow[r, "H^0(j^{\bullet})"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H^0(\mathbf{Q}^{\bullet}) \arrow[r, "H_0(\pi^{\bullet})"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_0(\mathbf{Q}''^{\bullet}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Αποδειξη. Θέτοντας $Q^n := Q'^n \oplus Q''^n$, η απόδειξη είναι ανάλογη εκείνης τού λήμματος 5.1.6, υπό την προϋπόθεση ότι κατά τη διαδικασία κατασκευής των απαιτουμένων συσσυνοριακών τελεστών χρησιμοποιείται η πρόταση 4.2.22 αντί τής προτάσεως 4.2.2. □

5.2 ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΕΠΕΚΤΑΣΕΩΣ

5.2.1 Ορισμός. Έστω N ένας R-μόδιος και έστω $\mathbf{M}_{\bullet} = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο. Ως **σύμπλοκο ομομορφισμών από το $\mathbf{M}_{\bullet}$ στο** N ορίζεται το *συναλυσωτό* σύμπλοκο[5]

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_{\bullet}, N) := (\mathrm{Hom}_R(M_n, N),\ \mathrm{Hom}_R(d_n, \mathrm{id}_N))_{n\in\mathbb{Z}}.}$$

Σημειωτέον ότι εάν $\mathbf{M}_{\bullet} = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_{\bullet} = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_{\bullet} : \mathbf{M}_{\bullet} \longrightarrow \mathbf{M}'_{\bullet}$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε μέσω τού $f_{\bullet}$ επάγεται *ο συναλυσωτός* μετασχηματισμός

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(f_{\bullet},\ \mathrm{id}_N) : \mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_{\bullet}, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}'_{\bullet}, N),}$$

όπου $\mathrm{Hom}_R(f_{\bullet}, \mathrm{id}_N) := (\mathrm{Hom}_R(f_n, \mathrm{id}_N) : \mathrm{Hom}_R(M_n, N) \to \mathrm{Hom}_R(M'_n, N))_{n\in\mathbb{Z}}$.

[5] Τούτο είναι όντως συναλυσωτό σύμπλοκο, καθόσον (λόγω τού λήμματος 4.1.6, κατόπιν αλλαγής τής φοράς των βελών) έχουμε

$$\mathrm{Hom}_R(d_{n+1}, \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(d_n, \mathrm{id}_N) = \mathrm{Hom}_R(\underbrace{d_n \circ d_{n+1}}_{=0}, \mathrm{id}_N) = 0.$$

5.2.2 Λήμμα. *Έστω ότι τα* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Για δυο αλυσωτούς μετασχηματισμούς* $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ *και τυχόντα* R*-μόδιο* N *ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:*

$$\boxed{f_\bullet \simeq g_\bullet \Longrightarrow \mathrm{Hom}_R(f_\bullet, \mathrm{id}_N) \simeq \mathrm{Hom}_R(g_\bullet, \mathrm{id}_N).}$$

Αποδειξη. Εάν $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$ (βλ. εδ. 3.5.1), τότε

$$f_n - g_n = d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Κατά συνέπειαν,

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_R(f_n,\ \mathrm{id}_N) - \mathrm{Hom}_R(g_n,\ \mathrm{id}_N) = \mathrm{Hom}_R(d'_{n+1} \circ h_n,\ \mathrm{id}_N) + \mathrm{Hom}_R(h_{n-1} \circ d_n,\ \mathrm{id}_N) \\ &\underset{4.1.6}{=} \mathrm{Hom}_R(h_n,\ \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(d'_{n+1},\ \mathrm{id}_N) + \mathrm{Hom}_R(d_n,\ \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(h_{n-1},\ \mathrm{id}_N) \\ &= \mathrm{Hom}_R(d_n,\ \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(h_{n-1},\ \mathrm{id}_N) + \mathrm{Hom}_R(h_n,\ \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(d'_{n+1},\ \mathrm{id}_N), \end{aligned}$$

οπότε $(\mathrm{Hom}_R(h_n, \mathrm{id}_N))_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{Hom}_R(f_\bullet, \mathrm{id}_N) \simeq \mathrm{Hom}_R(g_\bullet, \mathrm{id}_N)$. □

5.2.3 Λήμμα. *Εάν* $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ *είναι προβολικοί κερματισμοί ενός* R*-μοδίου* M*, τότε για οιονδήποτε* R*-μόδιο* N *έχουμε*

$$\boxed{H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N)) \cong H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}'_\bullet, N)),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Αποδειξη. Σύμφωνα με το πόρισμα 5.1.5 υπάρχουν δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ με $(g \circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet}$ και $(f \circ g)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet}$. Εξ αυτού (λόγω τού λήμματος 5.2.2) έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R((g \circ f)_\bullet,\ \mathrm{id}_N) &\simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet},\ \mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N)}, \\ \mathrm{Hom}_R((f \circ g)_\bullet,\ \mathrm{id}_N) &\simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet},\ \mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}'_\bullet, N)}. \end{aligned}$$

Επειδή $\mathrm{Hom}_R((g \circ f)_\bullet,\ \mathrm{id}_N) = \mathrm{Hom}_R(f_\bullet,\ \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(g_\bullet,\ \mathrm{id}_N)$ και

$$\mathrm{Hom}_R((f \circ g)_\bullet,\ \mathrm{id}_N) = \mathrm{Hom}_R(g_\bullet,\ \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(f_\bullet,\ \mathrm{id}_N),$$

τα *συναλυσωτά* σύμπλοκα $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N)$ και $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}'_\bullet, N)$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα και ο ισχυρισμός είναι αληθής δυνάμει τής προτάσεως 3.5.13. □

5.2.4 Ορισμός. Έστω ότι οι M, N είναι δυο R-μόδιοι και ότι $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ είναι τυχών προβολικός κερματισμός τού M. Ως n**-οστό γινόμενο επεκτάσεως των** M **και** N ορίζεται ο R-μόδιος

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n_R(M, N) := H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N)),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

(Ο ορισμός αυτός είναι εφικτός λόγω τής προτάσεως 5.1.3, ενώ το $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ είναι *μέχρις ισομορφισμού ανεξάρτητο* τής συγκεκριμένης επιλογής τού προβολικού κερματισμού $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τού M λόγω τού λήμματος 5.2.3. Επιπροσθέτως, έχουμε $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) \cong \{0\}$ για κάθε $n < 0$.)

5.2.5 Λήμμα. *Για οιουσδήποτε R-μοδίους M, N ισχύει:*

$$\boxed{\mathrm{Ext}_R^0(M,N) \cong \mathrm{Hom}_R(M,N).}$$

Απόδειξη. Έστω $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $\mathbf{P}_\bullet = (P_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, τυχών προβολικός κερματισμός τού M. Μέσω τής ακριβούς ακολουθίας $P_1 \xrightarrow{\quad d_1 \quad} P_0 \xrightarrow{\quad \varepsilon \quad} M \longrightarrow \{0\}$ επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\varepsilon,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(P_0,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(d_1,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(P_1,N)$$

(Βλ. θεώρημα 4.1.15.) Κατά το (i) τής προτάσεως 3.1.4,

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d_1,\mathrm{id}_N)) \cong \mathrm{Hom}_R(M,N).$$

Από την άλλη μεριά, το $\mathrm{Ext}_R^0(M,N)$ είναι το

$$H^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet,N)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d_1,\mathrm{id}_N))/\,\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(\underbrace{d_0}_{=0},\mathrm{id}_N)) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d_1,\mathrm{id}_N)),$$

οπότε πράγματι $\mathrm{Ext}_R^0(M,N) \cong \mathrm{Hom}_R(M,N)$. □

5.2.6 Ορισμός. Δοθέντων R-μοδίων M, M', N, N', ομομορφισμών

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M',M), \quad \psi \in \mathrm{Hom}_R(N,N')$$

και προβολικών κερματισμών $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ των M, M', αντιστοίχως, υπάρχει (βάσει τού (i) τού θεωρήματος 5.1.4) αλυσωτός μετασχηματισμός $f_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ που «επεκτείνει» τον φ, ήτοι ισχύει $\varphi \circ \varepsilon' = \varepsilon \circ f_0$. Μέσω τού $f_\bullet$ κατασκευάζεται ο *συναλυσωτός* μετασχηματισμός

$$\mathrm{Hom}_R(f_\bullet,\psi) = (\mathrm{Hom}_R(f_n,\psi))_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}'_\bullet,N').$$

(Πρβλ. εδ. 4.1.4.) Ως **n-οστό γινόμενο επεκτάσεως (υπεράνω τού R) των φ και ψ** ορίζεται ο ομομορφισμός

$$\boxed{\mathrm{Ext}_R^n(\varphi,\psi) := H^n(\mathrm{Hom}_R(f_\bullet,\psi)) : \mathrm{Ext}_R^n(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^n(M',N')}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

5.2.7 Πρόταση. *Εάν οι M, M', M'', N, N', N'' είναι έξι R-μόδιοι και*

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M',M),\ \varphi' \in \mathrm{Hom}_R(M,M''),\ \psi \in \mathrm{Hom}_R(N',N),\ \psi' \in \mathrm{Hom}_R(N,N''),$$

τότε

$$\boxed{\mathrm{Ext}_R^n(\varphi'\circ\varphi,\psi'\circ\psi) = \mathrm{Ext}_R^n(\varphi,\psi')\circ\mathrm{Ext}_R^n(\varphi',\psi),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τις προτάσεις 3.2.24, 4.1.9 και 3.2.24, και το θεώρημα 5.1.4. □

5.2.8 Πρόταση. *Για οιουσδήποτε R-μοδίους M, N ισχύει:*

$$\boxed{\mathrm{Ext}_R^n(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N) \cong \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}_R^n(M,N)}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το λήμμα 4.1.8 και την πρόταση 3.2.25. □

5.2.9 Θεώρημα (Πρώτη μακρά ακριβής Ext-ακολουθία). *Έστω*

$$\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και έστω M τυχών R-μόδιος. Τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,N') \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, f)"] & \mathrm{Hom}_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g)"] & \mathrm{Hom}_R(M,N'') \arrow[dll, "\partial^0"] & \\
& \mathrm{Ext}_R^1(M,N') \arrow[r, "\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{id}_M, f)"] & \mathrm{Ext}_R^1(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{id}_M, g)"] & \mathrm{Ext}_R^1(M,N'') \arrow[r, "\partial^1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & \mathrm{Ext}_R^n(M,N') \arrow[r, "\mathrm{Ext}_R^n(\mathrm{id}_M, f)"] & \mathrm{Ext}_R^n(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}_R^n(\mathrm{id}_M, g)"] & \mathrm{Ext}_R^n(M,N'') \arrow[r, "\partial^n"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έστω

$$(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon), \ \mathbf{P}_\bullet = (P_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}},$$

τυχών προβολικός κερματισμός τού M. Επειδή κάθε P_n είναι προβολικός R-μόδιος, το θεώρημα 4.2.7 μας πληροφορεί ότι οι

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_n, N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{P_n}, f)} \mathrm{Hom}_R(P_n, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{P_n}, g)} \mathrm{Hom}_R(P_n, N'') \longrightarrow \{0\}$$

είναι βραχείες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τούτο όμως σημαίνει ότι η

$$\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet}, f)} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet}, g)} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N'') \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet \quad (5.9)$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία *συναλυσωτών* συμπλόκων. Η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία δεν είναι τίποτα άλλο παρά η *μακρά ακριβής ακολουθία συνομολογίας για την* (5.9). (Βλ. θεώρημα 3.2.30.) □

5.2.10 Θεώρημα (Δεύτερη μακρά ακριβής Ext-ακολουθία). *Έστω*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και έστω

N τυχών R-μόδιος. Τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M'',N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(g,\mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Hom}_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Hom}_R(M',N) \arrow[dll, "\widetilde{\partial}^0"] \\ & \mathrm{Ext}^1_R(M'',N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_R(g,\mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_R(f,\mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Ext}^1_R(M',N) \arrow[r, "\widetilde{\partial}^1"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$\cdots \xrightarrow{\widetilde{\partial}^{n-1}} \mathrm{Ext}^n_R(M'',N) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^n_R(g,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Ext}^n_R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^n_R(f,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Ext}^n_R(M',N) \xrightarrow{\widetilde{\partial}^n} \cdots$$

Αποδειξη. Εάν $(\mathbf{P}'_\bullet,\varepsilon')$, $(\mathbf{P}''_\bullet,\varepsilon'')$ είναι προβολικοί κερματισμοί των M' και M'', αντιστοίχως, τότε (σύμφωνα με «λήμμα τού πετάλου» 5.1.6) υπάρχουν ένας προβολικός κερματισμός $(\mathbf{P}_\bullet,\varepsilon)$ τού M και αλυσωτοί μετασχηματισμοί $\iota_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ και $\pi_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}''_\bullet$, ούτως ώστε η $\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \xrightarrow{\iota_\bullet} \mathbf{P}_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} \mathbf{P}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$ να είναι βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων («επεκτείνουσα» τους f και g) και μάλιστα έχουσα τις επιμέρους βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow P'_n \xrightarrow{\iota_n} P_n \xrightarrow{\pi_n} P''_n \longrightarrow \{0\}$$

διασπώμενες για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κατά το θεώρημα 4.1.16 οι βραχείες ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P''_n,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi_n,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(P_n,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\iota_n,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(P'_n,N) \longrightarrow \{0\}$$

είναι ωσαύτως ακριβείς και διασπώμενες για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ιδιαιτέρως, τούτο σημαίνει ότι η

$$\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}''_\bullet,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi_\bullet,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\iota_\bullet,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}'_\bullet,N) \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet \qquad (5.10)$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων. Η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία δεν είναι τίποτα άλλο παρά η *μακρά ακριβής ακολουθία συνομολογίας για την* (5.10). (Βλ. θεώρημα 3.2.30 και λήμμα 5.2.5.) □

5.2.11 Θεώρημα. *Για έναν R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*
(i) *Ο M είναι προβολικός.*
(ii) $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο N.*
(iii) $\mathrm{Ext}^n_R(M,N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο N και για κάθε $n \geqslant 1$.*

Αποδειξη. (i)⇒(iii) Εάν ο M είναι προβολικός, τότε το $(\mathbf{P}_\bullet,\varepsilon)$, $\mathbf{P}_\bullet = (P_n,d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, με

$$P_n := \begin{cases} M, & \text{όταν } n = 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}, \end{cases} \qquad d_n := 0,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \varepsilon := \mathrm{id}_M,$$

αποτελεί έναν προβολικό κερματισμό τού M, οπότε $\mathrm{Ext}^n_R(M,N) \cong \{0\}$ για κάθε R-μόδιο N και για κάθε $n \geqslant 1$.

(iii)⇒(ii) Τούτο είναι προφανές.

(ii)⇒(i) Έστω $\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων. Κατά το θεώρημα 5.2.9 η

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M,f)} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M,g)} \mathrm{Hom}_R(M,N'') \xrightarrow{\partial^0} \mathrm{Ext}^1_R(M,N')$$

είναι ακριβής. Επειδή (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Ext}^1_R(M,N') \cong \{0\}$, λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M,f)} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M,g)} \mathrm{Hom}_R(M,N'') \longrightarrow \{0\}$$

οπότε ο M είναι προβολικός επί τη βάσει τού θεωρήματος 4.2.7. □

5.2.12 Πόρισμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και οι M, N δυο R-μόδιοι, τότε*

$$\mathrm{Ext}^n_R(M,N) \cong \begin{cases} \mathrm{Hom}_R(M,N), & \text{όταν } n=0, \\ \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_N)), & \text{όταν } n=1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\}, \end{cases}$$

όπου $f : L \hookrightarrow F$ είναι ένας μονομορφισμός R-μοδίων εμφανιζόμενος σε μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow L \overset{f}{\hookrightarrow} F \overset{g}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}, \tag{5.11}$$

με τον F ελεύθερο.

Απόδειξη. Για $n < 0$ τούτο είναι προφανές. Για $n = 0$ βλ. λήμμα 5.2.5. Όπως έχει ήδη προαναφερθεί στο (ii) τού εδ. 5.1.2, υπάρχει πάντοτε μια βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής (5.11), όπου ο F (και, κατ' επέκταση, και ο L λόγω τού θεωρήματος 2.5.47) είναι ελεύθερος R-μόδιος. Επομένως αμφότεροι οι L και F είναι προβολικοί. (Βλ. πρόταση 4.2.4.) Από το θεώρημα 5.2.11 και τη δεύτερη μακρά Ext-ακολουθία (βλ. θεώρημα 5.2.10) λαμβάνουμε

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(g,\mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Hom}_R(F,N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Hom}_R(L,N) \arrow[dll, "\tilde{\partial}^0"] \\ & \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_R(g,\mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Ext}^1_R(F,N) \cong \{0\} & \end{tikzcd}$$

για $n = 1$ (πρβλ. 3.1.4 (ii)) και

$$\cdots \longrightarrow \{0\} \cong \mathrm{Ext}^{n-1}_R(L,N) \xrightarrow{\tilde{\partial}^{n-1}} \mathrm{Ext}^n_R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^n_R(g,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Ext}^n_R(F,N) \cong \{0\}$$

για $n \geqslant 2$, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

5.2.13 Θεώρημα. *Για έναν R-μόδιο N οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο N είναι εμβολικός.*

(ii) $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο M.*

(iii) $\operatorname{Ext}^n_R(M,N) \cong \{0\}$ *για κάθε* R*-μόδιο* M *και για κάθε* $n \geqslant 1$.

Αποδειξη. (i)⇒(iii) Έστω M τυχών R-μόδιος και έστω $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ ένας προβολικός κερματισμός αυτού. Επειδή ο N είναι (εξ υποθέσεως) εμβολικός, η επαγομένη ακολουθία

$$\{0\} \to \operatorname{Hom}_R(M,N) \to \operatorname{Hom}_R(P_0,N) \to \cdots \to \operatorname{Hom}_R(P_n,N) \to \operatorname{Hom}_R(P_{n+1},N) \to \cdots$$

παραμένει ακριβής (βλ. εδ. 4.2.30), οπότε $\operatorname{Ext}^n_R(M,N) \cong \{0\}$ για κάθε $n \geqslant 1$.

(iii)⇒(ii) Τούτο είναι προφανές.

(ii)⇒(i) Έστω $\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων. Κατά το θεώρημα 5.2.10 η

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M'',N) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(g,\mathrm{id}_N)} \operatorname{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(f,\mathrm{id}_N)} \operatorname{Hom}_R(M',N) \xrightarrow{\tilde{\partial}^0} \operatorname{Ext}^1_R(M'',N)$$

είναι ακριβής. Επειδή (εξ υποθέσεως) $\operatorname{Ext}^1_R(M'',N) \cong \{0\}$, λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M'',N) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(g,\mathrm{id}_N)} \operatorname{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(f,\mathrm{id}_N)} \operatorname{Hom}_R(M',N) \longrightarrow \{0\}$$

οπότε ο N είναι εμβολικός επί τη βάσει τού θεωρήματος 4.2.29. □

5.2.14 Πρόταση. *Εάν* $(M_j)_{j\in J}$ *είναι μια οικογένεια* R*-μοδίων και* N *τυχών* R*-μόδιος, τότε*

$$\boxed{\operatorname{Ext}^n_R\Big(\bigoplus_{j\in J} M_j, N\Big) \cong \prod_{j\in J} \operatorname{Ext}^n_R(M_j,N),\ \forall n \in \mathbb{Z}} \tag{5.12}$$

και

$$\boxed{\operatorname{Ext}^n_R\Big(N, \prod_{j\in J} M_j\Big) \cong \prod_{j\in J} \operatorname{Ext}^n_R(N,M_j,),\ \forall n \in \mathbb{Z}.} \tag{5.13}$$

Αποδειξη της (5.12). Εάν το ζεύγος $(\mathbf{P}_{\bullet,j}, \varepsilon_j)$ είναι τυχών προβολικός κερματισμός τού M_j για κάθε $j \in J$, τότε το $(\bigoplus_{j\in J} \mathbf{P}_{\bullet,j}, \bigoplus_{j\in J} \varepsilon_j)$ αποτελεί προβολικό κερματισμό τού ευθέος αθροίσματος $\bigoplus_{j\in J} M_j$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\operatorname{Ext}^n_R\Big(\bigoplus_{j\in J} M_j, N\Big) \cong H^n\Big(\operatorname{Hom}_R\Big(\bigoplus_{j\in J} \mathbf{P}_{\bullet,j}, N\Big)\Big) \underset{4.1.11}{\cong} H^n\Big(\prod_{j\in J} \operatorname{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet,j}, N)\Big) \underset{3.2.10}{\cong} \prod_{j\in J} \operatorname{Ext}^n_R(M_j,N),$$

Αποδειξη της (5.13). Εάν $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ είναι τυχών προβολικός κερματισμός τού N, τότε

$$\operatorname{Ext}^n_R\Big(N, \prod_{j\in J} M_j\Big) \cong H^n\Big(\operatorname{Hom}_R\Big(\mathbf{P}_\bullet, \prod_{j\in J} M_j\Big)\Big) \underset{4.1.11}{\cong} H^n\Big(\prod_{j\in J} \operatorname{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, M_j)\Big) \underset{3.2.10}{\cong} \prod_{j\in J} \operatorname{Ext}^n_R(N,M_j,),$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

▸ **Χρήσιμοι υπολογισμοί όταν ο** R **είναι Π.Κ.Ι.** Όταν ο δακτύλιος αναφοράς μας είναι Π.Κ.Ι., τότε από το πόρισμα 5.2.12 είναι γνωστό ότι τα μόνα ενδιαφέροντα (ήτοι τα μόνα πιθανώς μη τετριμμένα) γινόμενα επεκτάσεως $\operatorname{Ext}^n_R(M,N)$ είναι αυτά για τα οποία $n \in \{0,1\}$. Το γινόμενο επεκτάσεως $\operatorname{Ext}^1_R(M,N)$ όταν οι M, N είναι μη τετριμμένοι, πεπερασμένως παραγόμενοι και μη ελεύθεροι, υπολογίζεται μέσω τού θεωρήματος 5.2.16.

5.2.15 Λήμμα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν $r, s \in R$, τότε*

$$\mathrm{Ext}^1_R(R/\langle r\rangle, R) \cong R/\langle r\rangle \;\text{ και }\; \mathrm{Ext}^1_R(R/\langle r\rangle, R/\langle s\rangle) \cong R/\langle d\rangle,$$

όπου $d \in \text{ΜΚΔ}_R(r, s)$.

Αποδειξη. Θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow R \overset{r\,\mathrm{id}_R}{\hookrightarrow} R \overset{\pi^R_{\langle r\rangle}}{\twoheadrightarrow} R/\langle r\rangle \longrightarrow \{0\}.$$

Το πόρισμα 5.2.12 μας πληροφορεί ότι

$$\mathrm{Ext}^1_R(R/\langle r\rangle, R) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_R(r\,\mathrm{id}_R, \mathrm{id}_R)),$$

όπου $\mathrm{Hom}_R(r\ \mathrm{id}_R,\mathrm{id}_R) : \mathrm{Hom}_R(R, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, R)$, $\varphi \longmapsto r\varphi$. Επειδή $\mathrm{Hom}_R(R, R) \cong R$, η εικόνα τού $\mathrm{Hom}_R(r\ \mathrm{id}_R,\mathrm{id}_R)$ είναι ισόμορφη τού κύριου ιδεώδους $\langle r\rangle$ εντός τού R, οπότε ο συμπυρήνας του είναι $\cong R/\langle r\rangle$. Κατ' αναλογίαν,

$$\mathrm{Ext}^1_R(R/\langle r\rangle, R/\langle s\rangle) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_R(r\,\mathrm{id}_R, \mathrm{id}_{R/\langle s\rangle})),$$

όπου $\mathrm{Hom}_R(r\ \mathrm{id}_R,\mathrm{id}_{R/\langle s\rangle}) : \mathrm{Hom}_R(R, R/\langle s\rangle) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, R/\langle s\rangle)$, $\varphi \longmapsto r\varphi$. Επειδή[6] $\mathrm{Hom}_R(R, R/\langle s\rangle) \cong R/\langle s\rangle$, ο ομομορφισμός $\mathrm{Hom}_R(r\ \mathrm{id}_R,\mathrm{id}_{R/\langle s\rangle})$ μπορεί να ιδωθεί ως ο πολλαπλασιασμός με r :

$$R/\langle s\rangle \ni t + \langle s\rangle \overset{r\,\mathrm{id}_{R/\langle s\rangle}}{\longmapsto} r(t + \langle s\rangle) = rt + \langle s\rangle \in R/\langle s\rangle.$$

Προφανώς, $\mathrm{Coker}(r\,\mathrm{id}_{R/\langle s\rangle}) := (R/\langle s\rangle)/\,\mathrm{Im}(r\,\mathrm{id}_{R/\langle s\rangle}) = (R/\langle s\rangle)/r(R/\langle s\rangle)$, όπου

$$r(R/\langle s\rangle) = \{rt + st' + \langle s\rangle \big| t, t' \in R\} = (\langle r\rangle + \langle s\rangle)\,/\,\langle s\rangle,$$

οπότε $(R/\langle s\rangle)/\,(\langle r\rangle + \langle s\rangle)\,/\,\langle s\rangle \cong R/\,(\langle r\rangle + \langle s\rangle)$ με[7] $\langle r\rangle + \langle s\rangle = \langle d\rangle$. □

5.2.16 Θεώρημα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Ας υποθέσουμε ότι M, N είναι δυο μη τετριμμένοι, πεπερασμένως παραγόμενοι, μη ελεύθεροι R-μόδιοι. Εάν αυτοί γραφούν υπό τη μορφή* $M = \mathrm{tors}\,(M) \oplus \mathrm{frp}(M)$, $N = \mathrm{tors}\,(N) \oplus \mathrm{frp}(N)$, *όπου*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{tors}\,(M) = \mathrm{tors}\,(M)\,(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{tors}\,(M)\,(p_t) \\ \mathrm{tors}\,(N) = \mathrm{tors}\,(N)\,(q_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{tors}\,(M)\,(q_{t'}) \end{array} \right\}$$

είναι οι ευθείες αποσυνθέσεις των υπομοδίων στρέψεώς τους στις πρωτεύουσες συνιστώσες τους και

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{tors}\,(M)\,(p_j) \cong \left(R/\left\langle p^{\ell_{j,1}}\right\rangle\right) \oplus \left(R/\left\langle p^{\ell_{j,1}}\right\rangle\right) \oplus \cdots \oplus \left(R/\left\langle p^{\ell_{j,k_j}}\right\rangle\right) \\ \mathrm{tors}\,(N)\,(q_i) \cong \left(R/\langle q^{m_{i,1}}\rangle\right) \oplus \left(R/\langle q^{m_{i,2}}\rangle\right) \oplus \cdots \oplus \left(R/\langle q^{m_{i,\kappa_i}}\rangle\right) \end{array} \right\}$$

οι (μέχρις ισομορφισμού μονοσημάντως ορισμένες) αποσυνθέσεις αυτών σε ευθέα

[6] Βλ. πρόταση 4.1.2.

[7] Βλ. θεώρημα 1.4.13.

αθροίσματα κυκλικών υπομοδίων με

$$1 \leqslant \ell_{j,1} \leqslant \cdots \leqslant \ell_{j,k_j} \text{ και } 1 \leqslant m_{i,1} \leqslant \cdots \leqslant m_{i,\kappa_i}$$

για κάθε $(j,i) \in \{1,...,t\} \times \{1,...,t'\}$ (όπως στο δομικό θεώρημα 2.6.30), *τότε*

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{Ext}^1_R(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),N) \\ \cong \left(\bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}\bigoplus_{i=1}^{t'}\bigoplus_{\xi=1}^{\kappa_i} \mathrm{Ext}^1_R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle)\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle)\right)^{\text{fr-rank}(N)},\end{array}} \tag{5.14}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Ext}^1_R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle) \cong R/\left\langle \mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}\right\rangle,} \tag{5.15}$$

όπου[8] $\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)} \in \mathrm{MK\Delta}_R(p^{\ell_{j,\varrho}}, q^{m_{i,\xi}})$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την πρόταση 5.2.14,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_R(M,N) &\cong \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{frp}(M),\mathrm{frp}(N)) \oplus \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{frp}(M),\mathrm{tors}(N)) \\ &\oplus \underbrace{\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{tors}(N)) \oplus \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{frp}(N))}_{=\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),N)}.\end{aligned}$$

Επειδή (κατά το θεώρημα 5.2.11) οι δύο πρώτοι ευθείς προσθετέοι είναι τετριμμένοι[9], λαμβάνουμε τον πρώτον εκ των ισομορφισμών (5.14). Ο δεύτερος προκύπτει απευθείας από την πρόταση 5.2.14, διότι

$$\mathrm{frp}(N) \cong R^{\text{fr-rank}_R(N)} \Rightarrow \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{frp}(N)) \cong \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),R)^{\text{fr-rank}_R(N)},$$

όπου $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),R) \cong \mathrm{Ext}^1_R(\bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j} R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R) \cong \bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j} \mathrm{Ext}^1_R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R)$ και

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{tors}(N)) &\cong \mathrm{Ext}^1_R(\bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle), \bigoplus_{i=1}^{t'}\bigoplus_{\xi=1}^{\kappa_i} R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle) \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}\bigoplus_{i=1}^{t'}\bigoplus_{\xi=1}^{\kappa_i} \mathrm{Ext}^1_R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle)\end{aligned}$$

Τέλος, το λήμμα 5.2.15 δίδει $\mathrm{Ext}^1_R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R) \cong R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle$, καθώς και τον ισομορφισμό (5.15). □

5.2.17 Σημείωση. Εάν (στη διατύπωση τού θεωρήματος 5.2.16) επιτρέψουμε στον N να είναι *ελεύθερος*, τότε λαμβάνουμε απλώς[10]

$$\mathrm{Ext}^1_R(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),N) \cong \left(\bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle)\right)^{\text{fr-rank}(N)}.$$

[8] Εάν $p \underset{\text{συν.}}{\not\sim} q$, τότε το γινόμενο επεκτάσεως (5.15) είναι τετριμμένο. Εάν $p \underset{\text{συν.}}{\sim} q$, τότε ως $\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}$ μπορεί να ληφθεί το στοιχείο $p^{\min\{\ell_{j,\varrho}, m_{i,\xi}\}}$. (Βλ. θεώρημα 1.4.54.)

[9] Σημειωτέον ότι ο $\mathrm{frp}(M)$ (όντας ελεύθερος) είναι προβολικός. (Βλ. πρόταση 4.2.4.)

[10] Αντιθέτως, εάν υποθέταμε ότι ο M είναι *ελεύθερος*, τότε το $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ θα ήταν προφανώς *τετριμμένος* R-μόδιος.

5.2.18 Πόρισμα. *Έστω ότι οι G, H είναι μη τετριμμένες, πεπερασμένως παραγόμενες, μη ελεύθερες αβελιανές ομάδες. Γράφοντας τις τάξεις των υποομάδων στρέψεώς τους υπό τη μορφή*

$$|\mathrm{tors}\,(G)| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}, \quad |\mathrm{tors}\,(H)| = p_1^{n'_1} p_2^{n'_2} \cdots p_t^{n'_t},$$

για κάποιους πρώτους αριθμούς $p_1, \ldots, p_t$, $t \in \mathbb{N}$, με $p_1 < \cdots < p_t$ (όταν $t \geqslant 2$), όπου $n_1, ..., n_t \in \mathbb{N}_0$ (και αντιστοίχως, $n'_1, ..., n'_t \in \mathbb{N}_0$) με τουλάχιστον έναν εξ αυτών $\neq 0$, λαμβάνουμε

$$\mathrm{tors}\,(G) = \bigoplus_{\{j \in \{1,\ldots,t\} : n_j \neq 0\}} G\,(p_j)\,, \ \mathrm{tors}\,(H) = \bigoplus_{\{i \in \{1,\ldots,t\} : n'_i \neq 0\}} H\,(p_i)$$

και (για αυτούς τους δείκτες j, i)

$$G\,(p_j) \cong \mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,1}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,k_j}}}, \ H\,(p_i) \cong \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,1}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,\kappa_i}}},$$

όπου

$$(\ell_{j,1}, \ldots, \ell_{j,k_j}) \in \Pi_{k_j}\,(n_j) \ \ \textit{και} \ \ (m_{i,1}, \ldots, m_{i,\kappa_i}) \in \Pi_{\kappa_i}\,(n'_i)$$

(όπως στο θεώρημα 2.6.32), *οπότε*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_R(G, H) \cong & \left(\bigoplus_{\{j \in \{1,\ldots,t\} : n_j \neq 0\}} \ \bigoplus_{\{i \in \{1,\ldots,t\} : n'_i \neq 0\}} \ \bigoplus_{\varrho=1}^{k_j} \bigoplus_{\xi=1}^{\kappa_i} \mathbb{Z}_{p^{\min\{\ell_{j,\varrho}, m_{i,\xi}\}}} \right) \\ & \oplus \left(\bigoplus_{\{j \in \{1,\ldots,t\} : n_j \neq 0\}} \ \bigoplus_{\varrho=1}^{k_j} \mathbb{Z}_{p^{\ell_{j,\varrho}}} \right)^{\text{fr-rank}(H)} . \end{aligned}}$$

▸ **Εναλλακτικός ορισμός γινομένων επεκτάσεως.** Αυτός θεσπίζεται με τη βοήθεια *εμβολικών κερματισμών*.

5.2.19 Ορισμός. Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $\mathbf{N}^\bullet = (N^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ένα συναλυσωτό σύμπλοκο. Ως **σύμπλοκο ομομορφισμών από τον M στον $\mathbf{N}^\bullet$** ορίζεται το *συναλυσωτό* σύμπλοκο[11]

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{N}^\bullet) := (\mathrm{Hom}_R(M, N^n), \ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, d^n))_{n \in \mathbb{Z}}.}$$

5.2.20 Λήμμα. *Έστω ότι τα $\mathbf{N}^\bullet = (N^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}, \mathbf{N}'^\bullet = (N'^n, d'^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι δυο συναλυσωτά σύμπλοκα. Για συναλυσωτούς μετασχηματισμούς $f^\bullet, g^\bullet : \mathbf{N}^\bullet \longrightarrow \mathbf{N}'^\bullet$ και*

[11] Τούτο είναι όντως συναλυσωτό σύμπλοκο, καθόσον (λόγω τού λήμματος 4.1.7)

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, d^{n+1}) \circ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, d^n) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, \underbrace{d^n \circ d^{n+1}}_{=0}) = 0.$$

τυχόντα R-μόδιο M ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\boxed{f^\bullet \simeq g^\bullet \Longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M,\ f^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M,\ g^\bullet).}$$

Απόδειξη. Παρόμοια εκείνης τού λήμματος 5.2.2 (κάνοντας, εν προκειμένω, χρήση τού πορίσματος 5.1.10). □

5.2.21 Λήμμα. *Εάν $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$, $(\mathbf{Q}^{'\bullet}, i')$ είναι εμβολικοί κερματισμοί ενός R-μοδίου N, τότε για οιονδήποτε R-μόδιο M έχουμε*

$$\boxed{H^n(\mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{Q}^\bullet)) \cong H^n(\mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{Q}^{'\bullet})),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Παρόμοια εκείνης τού 5.2.3 (κάνοντας χρήση τού 5.2.20). □

5.2.22 Ορισμός. Έστω ότι οι M, N είναι δυο R-μόδιοι και ότι $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ είναι τυχών εμβολικός κερματισμός τού N. Θέτουμε

$$\boxed{\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M, N) := H^n(\mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{Q}^\bullet)),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

5.2.23 Σημείωση. Ο ορισμός αυτός είναι εφικτός λόγω τής προτάσεως 5.1.8, ενώ το $\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M, N)$ είναι *μέχρις ισομορφισμού ανεξάρτητο* τής συγκεκριμένης επιλογής τού εμβολικού κερματισμού $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ τού N λόγω τού λήμματος 5.2.21. Μάλιστα, είναι δυνατόν να ορισθεί και ένα γινόμενο $\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(\varphi, \psi))$ ανάλογο τού ορισθέντος στο εδ. 5.2.6, και να αποδειχθεί ότι αυτά τα γινόμενα επεκτάσεως έχουν ιδιότητες ανάλογες *όλων* των προαναφερθεισών ιδιοτήτων των $\mathrm{Ext}^n_R(..)$), Ωστόσο, τούτο *δεν οδηγεί* στη δημιουργία μιας *άλλης οντότητας*, όπως παρεμφαίνεται από το εξής:

5.2.24 Θεώρημα. *Εάν M, N είναι τυχόντες R-μόδιοι, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n_R(M, N) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M, N),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Βλ., π.χ., Vermani [27], Theorem 6.2.4, σελ. 151-153, ή Rotman [35], Theorem 6.67, σελ. 374. □

▸ **Από πού προέρχεται ο όρος «γινόμενο επεκτάσεως»;** Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\ f\ } E \xrightarrow{\ g\ } N \longrightarrow 0$$

καλείται **επέκταση τού** M **μέσω τού** N και σημειώνεται ως (f, E, g). (Δοθέντων δυο R-μοδίων M, N, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον μία επέκταση τού M μέσω τού N.) Ας συμβολίσουμε ως $\mathrm{ext}(M, N)$ το σύνολο όλων των επεκτάσεων τού M μέσω τού N. Επί τού $\mathrm{ext}(M, N)$ ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας $\sim_{\text{επ.}}$ως ακολούθως:

$$(f_1, E_1, g_1) \sim_{\text{επ.}} (f_2, E_2, g_2) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c} \exists h \in \mathrm{Hom}_R(E_1, E_2): \\ h \circ f_1 = f_2 \ \text{ και } \ h \circ g_1 = g_2 \end{array}\right].$$

5.2.25 Θεώρημα. *Εάν M, N είναι δυο R-μόδιοι, τότε υφίσταται μια φυσική αμφίρριψη:*

$$\boxed{\operatorname{ext}(M,N)/\sim_{\text{επ.}} \longleftrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(M,N).}$$

Αποδειξη. Βλ., π.χ., Vermani [27], Theorem 7.1.5, σελ. 169-171, ή Rotman [35], Theorem 7.30, σελ. 425-426. □

5.3 ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΣΤΡΕΨΕΩΣ

5.3.1 Ορισμός. Έστω N ένας R-μόδιος και έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο. Ως **τανυστικό γινόμενο τού $\mathbf{M}_\bullet$ και τού** N ορίζεται το αλυσωτό σύμπλοκο[12]

$$\boxed{\mathbf{M}_\bullet \otimes_R N := (M_n \otimes_R N, d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N)_{n\in\mathbb{Z}}.}$$

Σημειωτέον ότι εάν

$$\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \;\; \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε μέσω τού $f_\bullet$ επάγεται ο *αλυσωτός* μετασχηματισμός

$$\boxed{f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N : \mathbf{M}_\bullet \otimes_R N \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \otimes_R N,}$$

όπου $f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N := (f_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_N : M_n \otimes_R N \longrightarrow M'_n \otimes_R N)_{n\in\mathbb{Z}}$.

5.3.2 Λήμμα. *Έστω ότι τα $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Για δυο αλυσωτούς μετασχηματισμούς $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ και τυχόντα R-μόδιο N ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:*

$$\boxed{f_\bullet \simeq g_\bullet \Longrightarrow f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N \simeq g_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N.}$$

Αποδειξη. Εάν $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$ (βλ. εδ. 3.5.1), τότε

$$\begin{aligned}
&[f_n - g_n = d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n, \; \forall n \in \mathbb{Z}] \\
&\Rightarrow f_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N - g_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = (d'_{n+1} \circ h_n) \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N + (h_{n-1} \circ d_n) \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N \\
&\underset{4.5.5}{=} (d'_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) \circ (h_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) + (h_{n-1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) \circ (d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N),
\end{aligned}$$

οπότε $(h_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N \simeq g_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N$. □

[12] Τούτο είναι όντως αλυσωτό σύμπλοκο, καθόσον έχουμε

$$(d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) \circ (d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) = (d_n \circ d_{n+1}) \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = 0 \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = 0.$$

5.3.3 Λήμμα. *Εάν* $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ *είναι προβολικοί κερματισμοί ενός* R*-μοδίου* M*, τότε για οιονδήποτε* R*-μόδιο* N *έχουμε*

$$\boxed{H_n(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N) \cong H_n(\mathbf{P}'_\bullet \otimes_R N),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Αποδειξη. Σύμφωνα με το πόρισμα 5.1.5 υπάρχουν δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ με $(g \circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet}$ και $(f \circ g)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet}$. Εξ αυτού (λόγω τού λήμματος 5.3.2) έπεται ότι

$$(g \circ f)_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N},\ (f \circ g)_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet \otimes_R N}.$$

Επειδή $(g \circ f)_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = (g_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) \circ (f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N)$, $(f \circ g)_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = (f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) \circ (g_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N)$, τα αλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N$ και $\mathbf{P}'_\bullet \otimes_R N$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα και ο ισχυρισμός είναι αληθής δυνάμει τής προτάσεως 3.5.11. □

5.3.4 Ορισμός. Έστω ότι οι M, N είναι δυο R-μόδιοι και ότι $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ είναι τυχών προβολικός κερματισμός τού M. Ως n**-οστό γινόμενο στρέψεως των** M **και** N ορίζεται ο R-μόδιος

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(M, N) := H_n(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

(Ο ορισμός αυτός είναι εφικτός λόγω τής προτάσεως 5.1.3, ενώ το $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ είναι *μέχρις ισομορφισμού ανεξάρτητο* τής συγκεκριμένης επιλογής τού προβολικού κερματισμού $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τού M λόγω τού λήμματος 5.3.3. Επιπροσθέτως, $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \{0\}$ για κάθε $n < 0$.)

5.3.5 Λήμμα. *Για οιουσδήποτε* R*-μοδίους* M, N *ισχύει:*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_0^R(M, N) \cong M \otimes_R N.}$$

Αποδειξη. Έστω $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $\mathbf{P}_\bullet = (P_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, τυχών προβολικός κερματισμός τού M. Μέσω τής ακριβούς ακολουθίας $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$ επάγεται η ακριβής ακολουθία $P_1 \otimes_R N \xrightarrow{d_1 \overline{\otimes} \mathrm{id}_N} P_0 \otimes_R N \xrightarrow{\varepsilon \overline{\otimes} \mathrm{id}_N} M \otimes_R N \longrightarrow \{0\}$ (Βλ. θεώρημα 4.5.9.) Κατά το (ii) τής προτάσεως 3.1.4,

$$\mathrm{Coker}(d_1 \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) := P_0 \otimes_R N / \operatorname{Im}(d_1 \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) \cong M \otimes_R N.$$

Από την άλλη μεριά, ο $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) = H_0(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N) = \mathrm{Ker}(d_0 \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) / \operatorname{Im}(d_1 \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N)$ ισούται με τον $P_0 \otimes_R N / \operatorname{Im}(d_1 \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N)$, οπότε πράγματι $\mathrm{Tor}_0^R(M, N) \cong M \otimes_R N$. □

5.3.6 Ορισμός. Δοθέντων R-μοδίων M, M', N, N', ομομορφισμών

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M'),\quad \psi \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$$

και προβολικών κερματισμών $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ των M, M', αντιστοίχως, υπάρχει (βάσει τού (i) τού θεωρήματος 5.1.4) αλυσωτός μετασχηματισμός $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \to \mathbf{P}'_\bullet$

που «επεκτείνει» τον φ, ήτοι ισχύει $\varphi \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f_0$. Μέσω τού $f_\bullet$ κατασκευάζεται ο αλυσωτός μετασχηματισμός $f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N : \mathbf{P}_\bullet \otimes_R N \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \otimes_R N$. Ως n**-οστό γινόμενο στρέψεως (υπεράνω τού** R**) των** φ **και** ψ ορίζεται ο ομομορφισμός

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(\varphi, \psi) := H_n(f_\bullet \overline{\otimes}\, \psi) : \mathrm{Tor}_n^R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(M', N'),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

5.3.7 Πρόταση. *Εάν οι M, M', M'', N, N', N'' είναι έξι R-μόδιοι και*

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M'),\ \varphi' \in \mathrm{Hom}_R(M', M''),\ \psi \in \mathrm{Hom}_R(N, N'),\ \psi' \in \mathrm{Hom}_R(N', N''),$$

τότε

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi) = \mathrm{Tor}_n^R(\varphi', \psi') \circ \mathrm{Tor}_n^R(\varphi, \psi),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τις προτάσεις 4.5.5 και 3.2.6. □

5.3.8 Πρόταση. *Για οιουσδήποτε R-μοδίους M, N ισχύει:*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N) \cong \mathrm{id}_{\mathrm{Tor}_n^R(M,N)},\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τις προτάσεις 4.5.4 και 3.2.7. □

5.3.9 Θεώρημα (Πρώτη μακρά ακριβής Tor-ακολουθία). *Έστω*

$$\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{\ f\ } N \xrightarrow{\ g\ } N'' \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και έστω M τυχών R-μόδιος. Τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\ \partial_{n+1}\ } \mathrm{Tor}_n^R(M, N') \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{id}_M, f)} \mathrm{Tor}_n^R(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{id}_M, g)} \mathrm{Tor}_n^R(M, N'') \xrightarrow{\ \partial_n\ } \cdots$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_2"] & \mathrm{Tor}_1^R(M, N') \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{id}_M, f)"] & \mathrm{Tor}_1^R(M, N) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{id}_M, g)"] & \mathrm{Tor}_1^R(M, N'') \arrow[dll, rounded corners, "\partial_1"'] & \\
& M \otimes_R N' \arrow[r, "\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f"] & M \otimes_R N \arrow[r, "\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g"] & M \otimes_R N'' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έστω $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τυχών προβολικός κερματισμός τού M. Επειδή (κατά το θεώρημα 4.5.26) ο P_n είναι ισόπεδος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η πρόταση 4.5.19 μας πληροφορεί ότι οι βραχείες ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow P_n \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_{P_n} \overline{\otimes} f} P_n \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_{P_n} \overline{\otimes} g} P_n \otimes_R N'' \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβείς για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τούτο όμως σημαίνει η

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet} \overline{\otimes} f} \mathbf{P}_\bullet \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet} \overline{\otimes} g} \mathbf{P}_\bullet \otimes_R N'' \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \qquad (5.16)$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. Η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία δεν είναι τίποτα άλλο παρά η *μακρά ακριβής ακολουθία ομολογίας για την* (5.16). (Βλ. θεώρημα 3.2.13.) □

5.3.10 Θεώρημα (Δεύτερη μακρά ακριβής Tor-ακολουθία). *Έστω*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και έστω N τυχών R-μόδιος. Τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\widetilde{\partial}_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(M',N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^R(f,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^R(g,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Tor}_n^R(M'',N) \xrightarrow{\widetilde{\partial}_n} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\widetilde{\partial}_2} \mathrm{Tor}_1^R(M',N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^R(f,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^R(g,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Tor}_1^R(M'',N) \xrightarrow{\widetilde{\partial}_1}$$

$$\xrightarrow{\widetilde{\partial}_1} M' \otimes_R N \xrightarrow{f\overline{\otimes}\mathrm{id}_N} M \otimes_R N \xrightarrow{g\overline{\otimes}\mathrm{id}_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow \{0\}$$

Αποδειξη. Εάν $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$, $(\mathbf{P}''_\bullet, \varepsilon'')$ είναι προβολικοί κερματισμοί των M' και M'', αντιστοίχως, τότε (σύμφωνα με «λήμμα τού πετάλου» 5.1.6) υπάρχουν ένας προβολικός κερματισμός $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τού M και αλυσωτοί μετασχηματισμοί $\iota_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ και $\pi_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}''_\bullet$, ούτως ώστε η $\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \overset{\iota_\bullet}{\hookrightarrow} \mathbf{P}_\bullet \overset{\pi_\bullet}{\twoheadrightarrow} \mathbf{P}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$ να είναι βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων («επεκτείνουσα» τους f και g) και μάλιστα έχουσα τις επιμέρους βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow P'_n \xrightarrow{\iota_n} P_n \xrightarrow{\pi_n} P''_n \longrightarrow \{0\}$$

διασπώμενες για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κατά το θεώρημα 4.5.15 οι βραχείες ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow P'_n \otimes_R N \xrightarrow{\iota_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_N} P_n \otimes_R N \xrightarrow{\pi_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_N} P''_n \otimes_R N \longrightarrow \{0\}$$

είναι ωσαύτως ακριβείς και διασπώμενες για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ιδιαιτέρως, τούτο σημαίνει ότι η

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \otimes_R N \xrightarrow{\iota_\bullet\overline{\otimes}\mathrm{id}_N} \mathbf{P}_\bullet \otimes_R N \xrightarrow{\pi_\bullet\overline{\otimes}\mathrm{id}_N} \mathbf{P}''_\bullet \otimes_R N \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{5.17}$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. Η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία δεν είναι τίποτα άλλο παρά η *μακρά ακριβής ακολουθία ομολογίας για την* (5.17). (Βλ. θεώρημα 3.2.13.) □

5.3.11 Λήμμα. *Έστω ότι M, N είναι δυο R-μόδιοι. Εάν είτε ο M είναι προβολικός είτε ο N ισόπεδος, τότε*

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \begin{cases} M \otimes_R N, & \text{όταν } n = 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}. \end{cases}$$

Απόδειξη. Για $n = 0$ ο ισχυρισμός είναι αληθής (χωρίς περαιτέρω περιοριστικές συνθήκες επί των M και N). Βλ. λήμμα 5.3.5.

Περίπτωση πρώτη. Εάν ο M είναι προβολικός R-μόδιος, τότε το ζεύγος $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $\mathbf{P}_\bullet = (P_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, με

$$P_n := \begin{cases} M, & \text{όταν} \quad n = 0, \\ \{0_M\}, & \text{όταν} \quad n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}, \end{cases} \quad d_n := 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \text{και}\ \varepsilon := \mathrm{id}_M$$

είναι προβολικός κερματισμός τού M, οπότε

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}.$$

Περίπτωση δεύτερη. Εάν ο N είναι ισόπεδος και $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τυχών προβολικός κερματισμός τού M, τότε μέσω τής ακριβούς ακολουθίας

$$\cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow P_2 \otimes_R N \xrightarrow{d_2 \overline{\otimes} \mathrm{id}_N} P_1 \otimes_R N \xrightarrow{d_1 \overline{\otimes} \mathrm{id}_N} P_0 \otimes_R N \xrightarrow{\varepsilon \overline{\otimes} \mathrm{id}_N} M \otimes_R N \longrightarrow \{0\}.$$

(Πρβλ. θεωρήματα 4.5.9 και 4.5.15.) Εξ αυτής έπεται ότι

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong H_n(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N) \cong \{0\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$. □

5.3.12 Θεώρημα (Μεταθετικότητα τού γινομένου στρέψεως). *Εάν οι M, N είναι R-μόδιοι, τότε υφίσταται κανονιστικός ισομορφισμός*[13]

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N,M),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός είναι αληθής τόσον όταν $n < 0$ (προδήλως) όσον και όταν $n = 0$ (εάν κανείς λάβει υπ' όψιν το θεώρημα 4.4.1 και το λήμμα 5.3.5). Ας υποθέσουμε, από εδώ και στο εξής, ότι $n \geqslant 1$. Κατά το πόρισμα 2.5.23, $M \cong F/L$, όπου F είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος. Επομένως υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow L \xrightarrow{\iota} F \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow \{0\}, \tag{5.18}$$

όπου ι η συνήθης ένθεση και π η σύνθεση τού φυσικού επιμορφισμού $F \twoheadrightarrow F/L$ και ενός ισομορφισμού $F/L \xrightarrow{\cong} M$. Θα χρησιμοποιηθούν οι δύο μακρές ακριβείς ακολουθίες που επάγονται μέσω τής (5.18) (οι κατασκευασθείσες στα θεωρήματα 5.3.9 και 5.3.10) και μαθηματική επαγωγή ως προς τον n.

[13]Εν αντιθέσει προς το γινόμενο στρέψεως, το γινόμενο επεκτάσεως δεν είναι μεταθετικό, διότι, π.χ., υπάρχουν R-μόδιοι M, N, με τους $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ και $\mathrm{Hom}_R(N,M)$ μη ισόμορφους. (Βλ. 4.1.3 (ii) και (iii).)

• Εάν $n = 1$, τότε προκύπτει το εξής διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^R(F,N) \cong \{0\} \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(\pi,\mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_1"] & L \otimes_R N \arrow[r, "\iota \overline{\otimes} \mathrm{id}_N"] \arrow[d, "f"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F \otimes_R N \arrow[d, "\cong"', "f'"] \\
\mathrm{Tor}_1^R(N,F) \cong \{0\} \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{id}_N,\pi)"] & \mathrm{Tor}_1^R(N,M) \arrow[r, "\partial_1"] & N \otimes_R L \arrow[r, "\mathrm{id}_N \overline{\otimes} \iota"] & N \otimes_R F
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές, όπου ως f, f' συμβολίζονται οι κανονιστικοί ισομορφισμοί τού θεωρήματος 4.4.1. Τα πρώτα εξ αριστερών εμφανιζόμενα γινόμενα στρέψεως είναι τετριμμένοι R-μόδιοι, καθώς ο F (ως ελεύθερος) είναι τόσον προβολικός όσον και ισόπεδος. (Βλ. λήμμα 5.3.11). Ως εκ τούτου, οι συνδετικοί ομομορφισμοί $\partial_1, \widetilde{\partial}_1$ είναι μονομορφισμοί και

$$\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \mathrm{Ker}(\iota \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) = \mathrm{Ker}(f'^{-1} \circ (\mathrm{id}_N \overline{\otimes} \iota) \circ f) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_N \overline{\otimes} \iota)) \cong \mathrm{Tor}_1^R(N,M).$$

• Εάν $n \geqslant 2$, υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για τον $n-1$. Από την 1η και τη 2η μακρά ακριβή Tor-ακολουθία προκύπτει το εξής διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_n^R(F,N) \cong \{0\} \arrow[r, "\mathrm{Tor}_n^R(\pi,\mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_n"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L,N) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_{n-1}^R(\iota,\mathrm{id}_N)"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(F,N) \arrow[d, "\cong"'] \\
\mathrm{Tor}_n^R(N,F) \cong \{0\} \arrow[r, "\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{id}_N,\pi)"] & \mathrm{Tor}_n^R(N,M) \arrow[r, "\partial_n"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N,L) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_{n-1}^R(\mathrm{id}_N,\iota)"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N,F)
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές. Άρα $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N,M)$ (για τον ίδιο λόγο, με τους ισομορφισμούς οφειλόμενους στην επαγωγική μας υπόθεση). □

5.3.13 Πόρισμα. *Έστω ότι M, N είναι δυο R-μόδιοι. Εάν ένας (τουλάχιστον) εκ των M, N είναι ισόπεδος, τότε*

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \begin{cases} M \otimes_R N, & \text{όταν} \quad n = 0, \\ \{0\}, & \text{όταν} \quad n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}. \end{cases}$$

Αποδειξη. Έπεται άμεσα από το λήμμα 5.3.11 και το θεώρημα 5.3.12. □

5.3.14 Πόρισμα. *Για έναν R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) *Ο M είναι ισόπεδος.*

(ii) $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο N.*

(iii) $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο N και για κάθε $n \geqslant 1$.*

Αποδειξη. Οι συνεπαγωγές (i)⇒(ii), (i)⇒(iii) έπονται από το πόρισμα 5.3.13, ενώ η (iii)⇒(ii) είναι προφανής. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί η ισχύς τής συνεπαγωγής (ii)⇒(i). Έστω $\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων. Κατά το θεώρημα 5.3.9 η

$$\mathrm{Tor}_1^R(M,N'') \xrightarrow{\partial_1} M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g} M \otimes_R N'' \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής. Επειδή (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Tor}_1^R(M, N'') \cong \{0\}$, λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g} M \otimes_R N'' \longrightarrow \{0\}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι ο M είναι ισόπεδος. (Βλ. πρόταση 4.5.17.) $\square$

5.3.15 Πόρισμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και οι M, N δυο R-μόδιοι, τότε*

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \begin{cases} M \otimes_R N, & \text{όταν} \quad n = 0, \\ \mathrm{Ker}(f \overline{\otimes} \mathrm{id}_N), & \text{όταν} \quad n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν} \quad n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\}, \end{cases}$$

όπου $f : L \hookrightarrow F$ είναι ένας μονομορφισμός R-μοδίων εμφανιζόμενος σε μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow L \overset{f}{\hookrightarrow} F \overset{g}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}, \tag{5.19}$$

με τον F ελεύθερο.

Αποδειξη. Για $n = 0$ βλ. λήμμα 5.3.5. Όπως έχει ήδη προαναφερθεί στο (ii) τού εδ. 5.1.2, υπάρχει πάντοτε μια βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής (5.19), όπου ο F (και, κατ' επέκταση, και ο L) είναι ελεύθερος R-μόδιος. Κατά συνέπειαν, το ζεύγος $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $\mathbf{P}_\bullet = (P_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, με

$$P_n := \begin{cases} F, & \text{όταν} \quad n = 0, \\ L, & \text{όταν} \quad n = 1, \\ \{0_M\} & \text{όταν} \quad n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\} \end{cases} \qquad d_n := \begin{cases} f, & \text{όταν} \quad n = 1, \\ 0, & \text{όταν} \quad n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{1\}, \end{cases}$$

και $\varepsilon := g$ αποτελεί έναν προβολικό κερματισμό τού M, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ έχουμε

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong H_n(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N) \cong \begin{cases} \mathrm{Ker}(f \overline{\otimes} \mathrm{id}_N), & \text{όταν} \quad n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν} \quad n \neq 1, \end{cases}$$

(διότι $\mathrm{Im}(d_2 \overline{\otimes} \mathrm{id}_N) \cong \{0\}$) και ο ισχυρισμός είναι αληθής. $\square$

5.3.16 Πρόταση. *Εάν $(M_j)_{j \in J}$ είναι μια οικογένεια R-μοδίων και N τυχών R-μόδιος, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R\Big(\bigoplus_{j \in J} M_j, N\Big) \cong \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Tor}_n^R(M_j, N), \ \forall n \in \mathbb{Z}}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R\Big(N, \bigoplus_{j \in J} M_j\Big) \cong \bigoplus_{j \in J} \mathrm{Tor}_n^R(N, M_j,), \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Αποδειξη. Εάν το ζεύγος $(\mathbf{P}_{\bullet,j}, \varepsilon_j)$ είναι τυχών προβολικός κερματισμός τού M_j για κάθε $j \in J$, τότε το $(\bigoplus_{j\in J} \mathbf{P}_{\bullet,j}, \bigoplus_{j\in J} \varepsilon_j)$ αποτελεί προβολικό κερματισμό τού ευθέος αθροίσματος $\bigoplus_{j\in J} M_j$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\mathrm{Tor}_n^R(\bigoplus_{j\in J} M_j, N) \cong H_n((\bigoplus_{j\in J} \mathbf{P}_{\bullet,j}) \otimes_R N) \underset{3.2.10}{\cong} \bigoplus_{j\in J} H_n(\mathbf{P}_{\bullet,j} \otimes_R N) \cong \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Tor}_n^R(M_j, N).$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι αληθής βάσει τού θεωρήματος 5.3.12. □

▸ **Χρήσιμοι υπολογισμοί όταν ο R είναι Π.Κ.Ι.** Όταν ο δακτύλιος αναφοράς μας είναι Π.Κ.Ι., τότε από το πόρισμα 5.3.15 είναι γνωστό ότι τα μόνα ενδιαφέροντα (ήτοι τα μόνα πιθανώς μη τετριμμένα) γινόμενα επεκτάσεως $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ είναι αυτά για τα οποία $n \in \{0, 1\}$. Το γινόμενο επεκτάσεως $\mathrm{Tor}_1^R(M, N)$ όταν οι M, N είναι μη τετριμμένοι, πεπερασμένως παραγόμενοι και μη ελεύθεροι, υπολογίζεται ως ακολούθως:

5.3.17 Θεώρημα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Ας υποθέσουμε ότι M, N είναι δυο μη τετριμμένοι, πεπερασμένως παραγόμενοι, μη ελεύθεροι R-μόδιοι*[14]*. Εάν αυτοί γραφούν υπό τη μορφή $M = \mathrm{tors}\,(M) \oplus \mathrm{frp}(M),\ N = \mathrm{tors}\,(N) \oplus \mathrm{frp}(N)$, όπου*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{tors}\,(M) = \mathrm{tors}\,(M)\,(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{tors}\,(M)\,(p_t) \\ \mathrm{tors}\,(N) = \mathrm{tors}\,(N)\,(q_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{tors}\,(M)\,(q_{t'}) \end{array} \right\}$$

είναι οι ευθείες αποσυνθέσεις των υπομοδίων στρέψεώς τους στις πρωτεύουσες συνιστώσες τους και

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{tors}\,(M)\,(p_j) \cong \left(R/\left\langle p_j^{\ell_{j,1}}\right\rangle\right) \oplus \left(R/\left\langle p_j^{\ell_{j,1}}\right\rangle\right) \oplus \cdots \oplus (R/\left\langle p_j^{\ell_{j,k_j}}\right\rangle) \\ \mathrm{tors}\,(N)\,(q_i) \cong \left(R/\left\langle q_i^{m_{i,1}}\right\rangle\right) \oplus \left(R/\left\langle q_i^{m_{i,2}}\right\rangle\right) \oplus \cdots \oplus \left(R/\left\langle q_i^{m_{i,\kappa_i}}\right\rangle\right) \end{array} \right\}$$

οι (μέχρις ισομορφισμού μονοσημάντως ορισμένες) αποσυνθέσεις αυτών σε ευθέα αθροίσματα κυκλικών υπομοδίων με

$$1 \leqslant \ell_{j,1} \leqslant \cdots \leqslant \ell_{j,k_j} \ \text{ και } \ 1 \leqslant m_{i,1} \leqslant \cdots \leqslant m_{i,\kappa_i}$$

για κάθε $(j, i) \in \{1, ..., t\} \times \{1, ..., t'\}$ (όπως στο δομικό θεώρημα 2.6.30), *τότε*

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{Tor}_1^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(M), \mathrm{tors}(N)) \\ \cong \bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{i=1}^{t'} \bigoplus_{\varrho=1}^{k_j} \bigoplus_{\xi=1}^{\kappa_i} \mathrm{Tor}_1^R(R/\left\langle p_j^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\left\langle q_i^{m_{i,\xi}}\right\rangle), \end{array}} \tag{5.20}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Tor}_1^R(R/\left\langle p_j^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\left\langle q_i^{m_{i,\xi}}\right\rangle) \cong R/\left\langle \mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}\right\rangle,} \tag{5.21}$$

όπου[15] $\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)} \in \mathrm{MK\Delta}_R(p_j^{\ell_{j,\varrho}}, q_i^{m_{i,\xi}})$.

Αποδειξη. Σύμφωνα με την πρόταση 5.3.16,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^R(M,N) &\cong \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{frp}(M),\mathrm{frp}(N)) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{frp}(M),\mathrm{tors}(N))\\ &\oplus \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{frp}(N)) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{tors}(N)).\end{aligned}$$

Επειδή (κατά το πόρισμα 5.3.13) οι τρεις πρώτοι ευθείς προσθετέοι είναι τετριμμένοι, λαμβάνουμε τον πρώτον εκ των ισομορφισμών (5.20). Ο δεύτερος προκύπτει απευθείας από την πρόταση 5.3.16. Έστω τώρα $\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)} \in \mathrm{MK\Delta}_R(p^{\ell_{j,\varrho}}, q^{m_{i,\xi}})$. Γράφουμε $p^{\ell_{j,\varrho}} = r_{(j,\varrho)}\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}$ και $q^{m_{i,\xi}} = s_{(i,\xi)}\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}$ για κατάλληλα (σχετικώς πρώτα) στοιχεία $r_{(j,\varrho)}, s_{(i,\xi)} \in R\smallsetminus\{0_R\}$ και θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow R \overset{p^{\ell_{j,\varrho}}\mathrm{id}_R}{\hookrightarrow} R \overset{\pi^R_{<p^{\ell_{j,\varrho}}>}}{\twoheadrightarrow} R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle \longrightarrow \{0\}.$$

Το πόρισμα 5.3.15 μας πληροφορεί ότι

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle) \cong \mathrm{Ker}((p^{\ell_{j,\varrho}}\mathrm{id}_R)\overline{\otimes}\mathrm{id}_{R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle}).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ισομορφισμό $f_{(i,\xi)} : R\otimes_R R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle \xrightarrow{\cong} R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle$ (τον κατασκευασθέντα στο θεώρημα 4.4.3) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle) \cong \mathrm{Ker}(\theta_{(i,\xi)}),$$

όπου $\theta_{(i,\xi)} := f_{(i,\xi)} \circ ((p^{\ell_{j,\varrho}}\mathrm{id}_R)\overline{\otimes}\,\mathrm{id}_{R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle}) \circ f_{(i,\xi)}^{-1}$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ker}(\theta_{(i,\xi)}) = \left\{a + \langle q^{m_{i,\xi}}\rangle \mid a \in R \text{ και } p^{\ell_{j,\varrho}}(a + \langle q^{m_{i,\xi}}\rangle) \in \langle q^{m_{i,\xi}}\rangle\right\}\\ &= \left\{a + \langle q^{m_{i,\xi}}\rangle \mid a \in R \text{ και } p^{\ell_{j,\varrho}}a \in \langle q^{m_{i,\xi}}\rangle\right\} = \left\{a + \langle q^{m_{i,\xi}}\rangle \mid a \in R \text{ και } q^{m_{i,\xi}} \mid p^{\ell_{j,\varrho}}a\right\}\\ &= \left\{a + \langle q^{m_{i,\xi}}\rangle \mid a \in R \text{ και } s_{(i,\xi)} \mid r_{(j,\varrho)}a\right\} = \left\{a + \langle q^{m_{i,\xi}}\rangle \mid a \in R \text{ και } s_{(i,\xi)} \mid a\right\}\\ &= \left\langle s_{(i,\xi)}\right\rangle / \langle q^{m_{i,\xi}}\rangle = Rs_{(i,\xi)}/Rq^{m_{i,\xi}} \underset{2.6.25}{\cong} R\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)} = \left\langle \mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}\right\rangle,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται και η ύπαρξη ισομορφισμού (5.21). □

5.3.18 Σημείωση. Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., τότε, όπως θα διαπιστώσουμε στο θεώρημα 5.3.23, ένας ισομορφισμός $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{tors}(N))$ εξακολουθεί να υφίσταται και *για τυχόντες* R-μοδίους M και N.

5.3.19 Πόρισμα. *Έστω ότι οι G, H είναι μη τετριμμένες, πεπερασμένως παραγόμενες, μη ελεύθερες αβελιανές ομάδες. Γράφοντας τις τάξεις των υποομάδων στρέψεώς τους υπό τη μορφή $|\mathrm{tors}\,(G)| = p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_t^{n_t}$, $|\mathrm{tors}\,(H)| = p_1^{n_1'}p_2^{n_2'}\cdots p_t^{n_t'}$, για κάποιους πρώτους αριθμούς $p_1,\ldots,p_t$, $t \in \mathbb{N}$, με $p_1 < \cdots < p_t$ (όταν $t \geqslant 2$), όπου $n_1,...,n_t \in \mathbb{N}_0$ (και αντιστοίχως, $n_1',...,n_t' \in \mathbb{N}_0$) με τουλάχιστον έναν εξ αυτών $\neq 0$,*

[14] Εάν υποθέταμε ότι *τουλάχιστον ένας* εκ των M, N είναι *ελεύθερος*, τότε το $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)$ θα ήταν προφανώς *τετριμμένος* R-μόδιος.

[15] Εάν $p_j \underset{\text{συν.}}{\not\sim} q_i$, τότε το γινόμενο στρέψεως (5.21) είναι τετριμμένο. Εάν $p_j \underset{\text{συν.}}{\sim} q_i$, τότε ως $\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}$ μπορεί να ληφθεί το στοιχείο $p_j^{\min\{\ell_{j,\varrho},m_{i,\xi}\}}$. (Βλ. θεώρημα 1.4.54.)

λαμβάνουμε

$$\mathrm{tors}\,(G) = \bigoplus_{\{j\in\{1,\ldots,t\}: n_j\neq 0\}} G\,(p_j)\,,\ \mathrm{tors}\,(H) = \bigoplus_{\{i\in\{1,\ldots,t\}: n'_i\neq 0\}} H\,(p_i)$$

και (για αυτούς τους δείκτες j, i*)*

$$G\,(p_j) \cong \mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,1}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,k_j}}}\,,\ H\,(p_i) \cong \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,1}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,\kappa_i}}}\,,$$

όπου $(\ell_{j,1},\ldots,\ell_{j,k_j}) \in \Pi_{k_j}(n_j)$ *και* $(m_{i,1},\ldots,m_{i,\kappa_i}) \in \Pi_{\kappa_i}(n'_i)$ (όπως στο θεώρημα 2.6.32)*, οπότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_1^R(G,H) \cong \bigoplus_{\{j\in\{1,\ldots,t\}: n_j\neq 0\}} \ \bigoplus_{\{i\in\{1,\ldots,t\}: n'_i\neq 0\}} \ \bigoplus_{\varrho=1}^{k_j} \bigoplus_{\xi=1}^{\kappa_i} \mathbb{Z}_{p^{\min\{\ell_{j,\varrho}, m_{i,\xi}\}}}\,.}$$

Περαιτέρω «κριτήρια ισοπεδότητας». Πέραν τού θεωρήματος 4.5.31, δίδονται και άλλα δύο *επιπρόσθετα κριτήρια* για το υπό ποίες συνθήκες ένας R-μόδιος είναι *ισόπεδος*. (Βλ. θεωρήματα 5.3.20 και 5.3.22.)

5.3.20 Θεώρημα. *Για οιονδήποτε* R*-μόδιο* M *οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*
(i) *Ο* M *είναι ισόπεδος.*
(ii) $\mathrm{Tor}_1^R(R/I,M) \cong \{0\}$ *για κάθε πεπερασμένως παραγόμενο ιδεώδες* I *τού* R.

Αποδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.5.31,

$$[\text{ο } M \text{ είναι ισόπεδος}] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} I\otimes_R M \cong IM \text{ για κάθε πεπερασμένως} \\ \text{παραγόμενο ιδεώδες } I \text{ τού } R \end{array}\right].$$

Κάνοντας χρήση τής 2ης μακράς ακριβούς Tor-ακολουθίας τής επαγομένης μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας $\{0\} \longrightarrow I \overset{\iota}{\hookrightarrow} R \overset{\pi_I^R}{\twoheadrightarrow} R/I \longrightarrow \{0\}$ λαμβάνουμε

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^R(R,M) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(\pi_I^R,\mathrm{id}_M)"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Tor}_1^R(R/I,M) \arrow[d, "\widetilde{\partial}_1"] & M & M/IM \\
\{0\} & I\otimes_R M \arrow[r, "\iota\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] & R\otimes_R M \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\pi_I^R\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] & R/I\otimes_R M \arrow[u, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

όπου ο πρώτος ισομορφισμός έπεται από το λήμμα 4.5.25 και το πόρισμα 5.3.13, ο δεύτερος από το θεώρημα 4.4.3 και ο τρίτος από το πόρισμα 4.5.11. Κατά συνέπειαν,

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/I,M) \cong \{0\} \Longleftrightarrow I\otimes_R M \cong \mathrm{Ker}(\pi_I^R\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) \cong IM,$$

απ' όπου συνάγεται η ισοδυναμία των συνθηκών (i) και (ii). □

5.3.21 Λήμμα. *Εάν M είναι ένας R-μόδιος και $s \in R$ ένα στοιχείο που δεν είναι μηδενοδιαιρέτης, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_1^R(R/\langle s\rangle, M) \cong M[s],}$$

όπου[16] $M[s] := \{x \in M \,|\, sx = 0_M\}$.

Απόδειξη. Έστω *τυχών* μη μηδενοδιαιρέτης $s \in R \smallsetminus \{0_R\}$. Τότε η απεικόνιση

$$s\mathrm{id}_R : R \longrightarrow R, \ \ r \longmapsto sr,$$

είναι μονομορφισμός. Με τη βοήθεια αυτού δημιουργείται η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow R \xrightarrow{s\,\mathrm{id}_R} R \overset{\pi^R_{<s>}}{\twoheadrightarrow} R/\langle s\rangle \longrightarrow \{0\}.$$

Η δεύτερη μακρά ακριβής Tor-ακολουθία 5.3.10 δίδει

$$\{0\} \to \mathrm{Tor}_1^R(R/\langle s\rangle, M) \xrightarrow{\widetilde{\partial}_1} R \otimes_R M \xrightarrow{(s\mathrm{id}_R)\overline{\otimes}\mathrm{id}_M} R \otimes_R M \xrightarrow{\pi^R_{\langle s\rangle}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M} (R/\langle s\rangle) \otimes_R M \to \{0\}$$

διότι $\mathrm{Tor}_1^R(R, M) \cong \{0\}$. (Βλ. 4.5.25 και 5.3.13.) Από το (i) τής προτάσεως 3.1.4 έπεται ότι

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/\langle s\rangle, M) \cong \mathrm{Ker}((s\mathrm{id}_R)\overline{\otimes}\mathrm{id}_M).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ισομορφισμό $f : R \otimes_R M \xrightarrow{\cong} M$ (τον κατασκευασθέντα στο θεώρημα 4.4.3) και θέτοντας $\theta := f \circ ((s\,\mathrm{id}_R)\overline{\otimes}\,\mathrm{id}_M) \circ f^{-1}$ συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Tor}_1^R(R/\langle s\rangle, M) \cong \mathrm{Ker}(\theta)$. Προφανώς, $\mathrm{Ker}(\theta) = M[s]$. □

5.3.22 Θεώρημα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M ένας R-μόδιος, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο M είναι ισόπεδος.*

(ii) *Ο M στερείται στρέψεως.*

Απόδειξη. Επειδή ο R είναι εξ υποθέσεως Π.Κ.Ι., κάθε ιδεώδες του είναι κύριο (και, ως εκ τούτου, πεπερασμένως παραγόμενο). Κατά το θεώρημα 5.3.20,

$$[\text{ο } M \text{ είναι ισόπεδος}] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) \cong \{0\} \\ \text{για κάθε ιδεώδες } I \text{ τού } R \end{array}\right].$$

Εάν I είναι τυχόν ιδεώδες τού R, τότε υπάρχει κάποιο $s \in R : I = \langle s\rangle$. Εάν $s = 0_R$, τότε $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) = \mathrm{Tor}_1^R(R/\{0_R\}, M) \cong \mathrm{Tor}_1^R(R, M) \cong \{0\}$ λόγω τού λήμματος 4.5.25 και τού πορίσματος 5.3.13. Εάν $s \neq 0_R$, τότε το λήμμα 5.3.21 δίδει

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) = \mathrm{Tor}_1^R(R/\langle s\rangle, M) \cong M[s].$$

[16] Αυτός ο συμβολισμός έχει ήδη εισαχθεί στο εδάφιο 2.6.12 (i) *στην ειδική περίπτωση* κατά την οποία ο δακτύλιος αναφοράς R είναι Π.Κ.Ι.

Επομένως η ισοδυναμία των (i) και (ii) έπεται από την αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$\mathrm{tors}(M) = \{0_M\} \Longleftrightarrow (M[s] = \{0_M\},\ \forall s \in R \setminus \{0_R\}).$$

Όμως αυτή έχει ήδη αποδειχθεί στην πρόταση 2.6.14. □

5.3.23 Θεώρημα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M, N τυχόντες R-μόδιοι, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(M,\mathrm{tors}(N))} \tag{5.22}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{tors}(N)).} \tag{5.23}$$

Αποδειξη. Κατά το λήμμα 2.6.5 ο πηλικομόδιος $N/\mathrm{tors}(N)$ στερείται στρέψεως. Κάνοντας χρήση τής 1ης μακράς ακριβούς Tor-ακολουθίας τής επαγομένης μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας $\{0\} \longrightarrow \mathrm{tors}(N) \overset{\iota}{\hookrightarrow} N \overset{\pi^N_{\mathrm{tors}(N)}}{\twoheadrightarrow} N/\mathrm{tors}(N) \longrightarrow \{0\}$ λαμβάνουμε

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_2^R(M,N/\mathrm{tors}(N)) \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Tor}_1^R(M,\mathrm{tors}(N)) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{id}_M,\iota)"] & \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \arrow[d, "\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{id}_M,\pi^N_{\mathrm{tors}(N)})"'] \\
\{0\} & & \{0\} \cong \mathrm{Tor}_1^R(M,N/\mathrm{tors}(N))
\end{tikzcd}$$

με τους ακραίους R-μοδίους τετριμμένους λόγω τού θεωρήματος 5.3.22 και τού πορίσματος 5.3.13. Κατ' αυτόν τον τρόπο αποκτούμε έναν ισομορφισμό (5.22). Στον (5.23) καταλήγουμε ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \underset{(5.22)}{\cong} \mathrm{Tor}_1^R(M,\mathrm{tors}(N)) \underset{5.3.12}{\cong} \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(N),M) \\
&\cong \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(N),\mathrm{tors}(M)) \underset{5.3.12}{\cong} \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{tors}(N)),
\end{aligned}$$

όπου ο τρίτος ισομορφισμός προκύπτει από τον (5.22) εφαρμοζόμενον για τους R-μοδίους $\mathrm{tors}(N)$ και M (στη θέση των M και N, αντιστοίχως). □

5.3.24 Πόρισμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M ένας R-μόδιος, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:

(i) *Ο M στερείται στρέψεως.*

(ii) $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο N.*

Αποδειξη. Έπεται άμεσα από το θεώρημα 5.3.22 και το πόρισμα 5.3.14. □

5.3.25 Σημείωση. (i) Από ιστορική σκοπιά, το πόρισμα 5.3.24 (για $R = \mathbb{Z}$) έδωσε το έναυσμα για την εισαγωγή τού όρου (και συμβόλου) "Tor".

(ii) Αξίζει να επισημανθεί ότι η συνεπαγωγή (ii)⇒(i) στο πόρισμα 5.3.24 ισχύει και για ακέραιες περιοχές R *που δεν είναι κατ' ανάγκην* Π.Κ.Ι.

▸ **Υπολογισμός γινομένων στρέψεως σε μια περίπτωση όπου ο R δεν είναι κατ' ανάγκην ακεραία περιοχή.** Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Από το πόρισμα 1.2.23 είναι γνωστό ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_k$ είναι ακεραία περιοχή *εάν και μόνον εάν* ο k είναι πρώτος αριθμός. Στην επόμενη πρόταση δίδεται ένας τρόπος *απευθείας* υπολογισμού (μέχρις ισομορφισμού) των γινομένων στρέψεως $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}_k}(M, \mathbb{Z}_d)$, όπου d είναι οιοσδήποτε θετικός διαιρέτης τού k και M ένας $\mathbb{Z}_k$-μόδιος *ακόμη και στην περίπτωση κατά την οποία ο k δεν είναι πρώτος αριθμός.*

5.3.26 Πρόταση. *Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, και έστω M ένας $\mathbb{Z}_k$-μόδιος. Εάν $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$, είναι διαιρέτης τού k, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}_k}(M, \mathbb{Z}_d) \cong \begin{cases} M/dM, & \text{όταν } n = 0, \\ M[d]/(\frac{k}{d})M, & \text{όταν ο } n \text{ είναι περιττός } \geqslant 1, \\ M[\frac{k}{d}]/dM, & \text{όταν ο } n \text{ είναι άρτιος } \geqslant 2, \\ \{0\}, & \text{όταν } n < 0, \end{cases}}$$

όπου[17] $M[\lambda] := \{x \in M \mid \lambda x = 0_M\}$, $\forall \lambda \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Λόγω τού θεωρήματος 5.3.12 αρκεί να υπολογισθεί το $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}_k}(\mathbb{Z}_d, M)$. Προς τούτο θεωρούμε τον κάτωθι ελεύθερο κερματισμό τού $\mathbb{Z}_k$-μοδίου $\mathbb{Z}_d$:

$$\cdots \xrightarrow{d \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k}} \mathbb{Z}_k \xrightarrow{\frac{k}{d} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k}} \mathbb{Z}_k \xrightarrow{d \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k}} \mathbb{Z}_k \xrightarrow{\frac{k}{d} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k}} \mathbb{Z}_k \xrightarrow{d \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k}} \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \cdots$$

(όπου $\varepsilon : \mathbb{Z}_k \longrightarrow \mathbb{Z}_d$ ο συνήθης επιμορφισμός, βλ. εδ. 5.1.1). Τανύοντας εκ δεξιών (υπεράνω τού $\mathbb{Z}_k$) καθέναν εκ των όρων του με τον $\mathbb{Z}_k$-μόδιο M λαμβάνουμε

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "(\frac{k}{d} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k}) \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] & \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}_k} M \arrow[r, "(d \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k}) \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] & \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}_k} M \arrow[r, "(\frac{k}{d} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k}) \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] & \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}_k} M \arrow[dll, "(d \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k}) \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"'] \\ & \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}_k} M \arrow[r] & \{0\} \arrow[r] & \{0\} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \tag{5.24}$$

Επειδή (κατά το θεώρημα 4.4.3) $\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}_k} M \cong M$, ο (5.24) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\cdots \xrightarrow{d \cdot \mathrm{id}_M} M \xrightarrow{\frac{k}{d} \cdot \mathrm{id}_M} M \xrightarrow{d \cdot \mathrm{id}_M} M \xrightarrow{\frac{k}{d} \cdot \mathrm{id}_M} M \xrightarrow{d \cdot \mathrm{id}_M} M \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \cdots$$

Προφανώς, $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}_k}(\mathbb{Z}_d, M) \cong \{0\}$ όταν $n < 0$ και

$$\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}_k}(\mathbb{Z}_d, M) \cong M/\operatorname{Im}(d \cdot \mathrm{id}_M) = M/dM.$$

Εάν ο n είναι περιττός $\geqslant 1$, τότε

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}_k}(\mathbb{Z}_d, M) \cong \operatorname{Ker}(d \cdot \mathrm{id}_M)M/\operatorname{Im}(\tfrac{k}{d} \cdot \mathrm{id}_M) = M[d]/(\tfrac{k}{d})M,$$

διότι

$$\operatorname{Ker}(d \cdot \mathrm{id}_M) = \{x \in M \mid dx = 0_M\} =: M[d]$$

[17] Προσοχή! Το σύμβολο αυτό θα εταυτίζετο με εκείνο που εισήχθη στο εδ. 2.6.12 (i) *μόνον εάν* θεωρούσαμε την προσθετική αβελιανή ομάδα τού M ως $\mathbb{Z}$-μόδιο.

και $\mathrm{Im}(\frac{k}{d}\cdot \mathrm{id}_M) = (\frac{k}{d})M$. Από την άλλη μεριά, εάν ο n είναι περιττός $\geqslant 2$, τότε

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}_k}(\mathbb{Z}_d, M) \cong \mathrm{Ker}(\tfrac{k}{d}\cdot \mathrm{id}_M)M/\,\mathrm{Im}(d\cdot \mathrm{id}_M) = M[\tfrac{k}{d}]/dM,$$

διότι

$$\mathrm{Ker}(\tfrac{k}{d}\cdot \mathrm{id}_M) = \big\{x \in M \,|\, \tfrac{k}{d}x = 0_M\big\} =: M[\tfrac{k}{d}]$$

και $\mathrm{Im}(d\cdot \mathrm{id}_M) = dM$. $\square$

5.3.27 Πόρισμα. *Δοθέντων τριών φυσικών αριθμών k, l και d που είναι $\geqslant 2$, και υποτιθεμένου ότι οι l και d είναι διαιρέτες τού k, έχουμε για το γινόμενο στρέψεως των $\mathbb{Z}_k$-μοδίων $\mathbb{Z}_l$ και $\mathbb{Z}_d$,*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}_k}(\mathbb{Z}_l, \mathbb{Z}_d) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{\text{μκδ}(d,l)}, & \text{όταν } n = 0, \\ \mathbb{Z}_{\frac{1}{l}\text{μκδ}(d,l)\cdot\text{μκδ}(\frac{k}{d},l)}, & \text{όταν } n > 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } n < 0. \end{cases}}$$

Ιδιαιτέρως, όταν ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_k$ είναι κληρονομικός,

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}_k}(\mathbb{Z}_l, \mathbb{Z}_d) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{\text{μκδ}(d,l)}, & \text{όταν } n = 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}. \end{cases}}$$

Απόδειξη. Η υποομάδα $\mathbb{Z}_l[d] := \{x \in \mathbb{Z}_l \,|\, dx = 0_{\mathbb{Z}_l}\}$ τής προσθετικής αβελιανής ομάδας τού $\mathbb{Z}_k$-μοδίου $\mathbb{Z}_l$ αποτελείται από εκείνα τα στοιχεία, οι τάξεις των οποίων διαιρούν αφ' ενός μεν τον d, αφ' ετέρου δε τον $l = |\mathbb{Z}_l|$. Επομένως[18] η τάξη τής $\mathbb{Z}_l[d]$ ισούται με[19]

$$|\mathbb{Z}_l[d]| = \sum_{\{i\in\mathbb{N}: i|\text{μκδ}(d,l)\}} \phi(i) = \text{μκδ}(d,l).$$

Από την άλλη μεριά, επειδή η απεικόνιση

$$\mathbb{Z}_l/\mathbb{Z}_l[\tfrac{k}{d}] \ni x + \mathbb{Z}_l[\tfrac{k}{d}] \longmapsto (\tfrac{k}{d})x \in (\tfrac{k}{d})\mathbb{Z}_l$$

είναι ισομορφισμός (τόσον αβελιανών ομάδων όσον και $\mathbb{Z}_k$-μοδίων), έχουμε

$$\big|(\tfrac{k}{d})\mathbb{Z}_l\big| = \big|\mathbb{Z}_l/\mathbb{Z}_l[\tfrac{k}{d}]\big| = \frac{l}{\text{μκδ}(\frac{k}{d}, l)}.$$

[18] Έστω G μια κυκλική ομάδα τάξεως $m \in \mathbb{N}$. Ως γνωστόν, για κάθε θετικό ακέραιο διαιρέτη i τού m υφίσταται *μία και μόνον* υποομάδα τής G τάξεως i. Άρα, για οιονδήποτε *παγιωμένον* θετικό ακέραιο διαιρέτη i τού m, κάθε στοιχείο τής G τάξεως i παράγει την εν λόγω υποομάδα. Ως εκ τούτου, ο αριθμός των στοιχείων τής G που έχουν τάξη i ισούται με τον αριθμό των γεννητόρων τής εν λόγω υποομάδας. Αυτός ο αριθμός ισούται με $\phi(i)$, όπου ϕ η συνάρτηση φι τού Euler.

[19] Για τη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιούμε μια γνωστή ιδιότητα τής ϕ, ήτοι ότι *για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\sum_{\{i\in\mathbb{N}: i|m\}} \phi(i) = m.$$

Κατ' αναλογίαν,

$$\left|\mathbb{Z}_l[\tfrac{k}{d}]\right| = \mu\kappa\delta(\tfrac{k}{d}, l), \quad |d\mathbb{Z}_l| = |\mathbb{Z}_l/\mathbb{Z}_l[d]| = \frac{l}{\mu\kappa\delta(d,l)}.$$

Άρα ο πρώτος ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής επί τη βάσει τής προτάσεως 5.3.26. Εάν ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_k$ είναι κληρονομικός[20], τότε υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$ και πρώτοι αριθμοί $p_1, ..., p_\nu$ με

$$k = \prod_{i=1}^{\nu} p_i, \;\; \text{όπου } p_1 < \cdots < p_\nu \;\; \text{όταν } \nu \geqslant 2.$$

Εξ υποθέσεως, υπάρχουν μη κενά υποσύνολα I_1 και I_2 τού $\{1, ..., \nu\}$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$l = \prod_{i \in I_1} p_i, \;\; d = \prod_{i \in I_2} p_i,$$

οπότε

$$\mu\kappa\delta(d,l) = \begin{cases} \prod\limits_{i \in I_1 \cap I_2} p_i, & \text{όταν } I_1 \cap I_2 \neq \varnothing, \\ 1, & \text{όταν } I_1 \cap I_2 = \varnothing, \end{cases}$$

και

$$\mu\kappa\delta(\tfrac{k}{d}, l) = \begin{cases} \prod\limits_{i \in I_1 \cap (\{1,...,\nu\} \smallsetminus I_2)} p_i, & \text{όταν } I_1 \cap (\{1,...,\nu\} \smallsetminus I_2) \neq \varnothing, \\ 1, & \text{όταν } I_1 \cap (\{1,...,\nu\} \smallsetminus I_2) = \varnothing, \end{cases}$$

Προφανώς,

$$\tfrac{1}{l}\,\mu\kappa\delta(d,l) \cdot \mu\kappa\delta(\frac{k}{d}, l) = \tfrac{1}{l} \prod_{i \in I_1} p_i = 1,$$

οπότε *και* ο δεύτερος ισχυρισμός είναι αληθής. □

▸ **Επιπρόσθετες επισημάνσεις**. Στο τέλος αυτής τής ενότητας παρατίθενται και κάποιες άλλες χαρακτηριστικές ιδιότητες τού γινομένου στρέψεως.

5.3.28 Σημείωση. Παρατηρώντας κανείς προσεκτικά τον ορισμό 5.3.4 είναι εύλογο να θέσει το ερώτημα τού κατά πόσον θα ήταν δυνατόν να ορισθεί ένα είδος n-οστού γινομένου στρέψεως R-μοδίων M και N τανύοντας έναν προβολικό κερματισμό $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ *τού* N *εξ αριστερών με το* M:

$$\boxed{\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,N) := H_n(M \otimes_R \mathbf{P}_\bullet), \; \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Παρότι ο ορισμός αυτός *στέκει* (καθόσον είναι εύκολο να δειχθεί ότι *μέχρις ισομορφισμού* δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη επιλογή τού $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ και μάλιστα είναι δυνατόν να ορισθεί και ένα γινόμενο $\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(\varphi, \psi))$ ανάλογο τού ορισθέντος στο εδ. 5.3.6, και να αποδειχθεί ότι αυτά τα γινόμενα στρέψεως έχουν ιδιότητες ανάλογες *όλων* των προαναφερθεισών ιδιοτήτων των $\mathrm{Tor}_n^R(..)$) *δεν οδηγεί* στη δημιουργία μιας *άλλης οντότητας*, όπως παρεμφαίνεται από το εξής:

[20]Ο $\mathbb{Z}_k$ είναι κληρονομικός *εάν και μόνον εάν* ο k στην παράστασή του ως γινομένου πρώτων αριθμών *στερείται τετραγώνων*. Βλ. Vermani [27], Proposition 8.1.3, σελ. 189-190.

5.3.29 Θεώρημα. *Εάν M, N είναι τυχόντες R-μόδιοι, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,N),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Αποδειξη. Βλ., π.χ., Vermani [27], Theorem 6.2.1, σελ. 147-149, ή Rotman [35], Theorem 6.32, σελ. 355-356. □

5.3.30 Σημείωση. Όπως είναι φυσικό, υφίστανται πολυποίκιλοι *συσχετισμοί των γινομένων επεκτάσεως και στρέψεως*, όπως αυτός τού επομένου θεωρήματος. Οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες παροτρύνονται να ανατρέξουν στην *ειδική* παρατιθέμενη βιβλιογραφία προκειμένου να τους εντοπίσουν και να τους μελετήσουν. (Στην παρούσα εργασία θα περιοριστούμε σε κάποιους χαρακτηριστικούς συσχετισμούς μεταξύ διαφόρων "Tor_1^R" και μεταξύ διαφόρων "Hom_R", "Tor_1^R" και "Ext_R^1" που απορρέουν από την κλασική εκδοχή τού θεωρήματος τού Künneth. Βλ. εδάφια 6.2.9, 6.3.8 και 6.3.9.)

5.3.31 Θεώρημα. *Έστω ότι ο δακτύλιος αναφοράς μας R είναι ναιτεριανός. Εάν M είναι ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος, N τυχών R-μόδιος και L ένας εμβολικός R-μόδιος, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{Hom}_R(N,L),M) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^n(M,N),L),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Αποδειξη. Βλ. Rotman [35], 9.32, σελ. 555-556. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Αλγεβρικές εκδοχές τού θεωρήματος τού Künneth

Σε αυτό το κεφάλαιο παρατίθενται διάφορες αλγεβρικές εκδοχές τού *θεωρήματος τού Künneth* (τόσον για μοδίους ομολογίας όσον και για μοδίους συνομολογίας), εκκινώντας από το επονομαζόμενο *θεώρημα των καθολικών συντελεστών*, το οποίο αποτελεί τρόπον τινά τον «προπομπό» αυτού.

6.1 ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΘΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Έστω $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων και έστω $H_n(\mathbf{C}_\bullet) := Z_n(\mathbf{C}_\bullet)/B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ ο n-οστός μόδιος ομολογίας τού $\mathbf{C}_\bullet$, όπου $Z_n(\mathbf{C}_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n)$ και $B_n(\mathbf{C}_\bullet) := \mathrm{Im}(d_{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. εδ. 3.2.2.)

6.1.1 Ορισμός. Έστω M *τυχών* R-μόδιος. Θεωρούμε το αλυσωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M := (C_n \otimes_R M, d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

(Βλ. εδ. 5.3.1.) Ο n-οστός μόδιος ομολογίας

$$H_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M) := Z_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M)/B_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M)$$

τού $\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M$ καλείται, ιδιαιτέρως, **n-οστός μόδιος ομολογίας τού $\mathbf{C}_\bullet$ με τον M ως μόδιο συντελεστών** ή **n-οστός μόδιος ομολογίας τού $\mathbf{C}_\bullet$ με συντελεστές ειλημμένους από τον** M και συμβολίζεται ως εξής:

$$\boxed{H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) := H_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M).}$$

6.1.2 Σημείωση. Εάν συμβολίσουμε ως $\pi_n := \pi^{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)} : Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $p_n := \pi^{Z_n(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M)}_{B_n(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M)} : Z_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M) \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$ τους φυσικούς επιμορφισμούς και θεωρήσουμε τυχόντα στοιχεία $x \in H_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $y \in M$, τότε, για κάθε $z \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$

με $\pi_n(z) = x$, έχουμε $(d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)(z \otimes y) = d_n(z) \otimes y = 0_{C_{n-1}} \otimes y = 0_{\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M}$, οπότε $z \otimes y \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επιπροσθέτως, το $p_n(z \otimes y) \in H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$ *δεν εξαρτάται από την επιλογή τού* z (οπότε είναι πλήρως καθορισμένο από τα x και y). Πράγματι· εάν θεωρήσουμε ένα $z' \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ με $\pi_n(z') = x$, τότε

$$\pi_n(z) = \pi_n(z') \Rightarrow z - z' \in \mathrm{Ker}(\pi_n) = B_n(\mathbf{C}_\bullet) = \mathrm{Im}(d_{n+1}) \Rightarrow [\exists w \in C_{n+1} : z - z' = d_{n+1}(w)]$$
$$\Rightarrow z \otimes y - z' \otimes y = (d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)(w \otimes y) \in B_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M) \Rightarrow p_n(z \otimes y) = p_n(z' \otimes y).$$

6.1.3 Λήμμα. *Η απεικόνιση $\psi_n : H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$ η οριζόμενη (επί τού συνόλου των αποσυντιθέμενων τανυστών) μέσω τού τύπου[1] $x \otimes y \longmapsto p_n(z \otimes y)$, όπου $\pi_n(z) = x$, είναι ομομορφισμός R-μοδίων. Μάλιστα, εάν ο M είναι ισόπεδος, τότε η ψ_n είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι η (βάσει των προαναφερθέντων στο εδ. 6.1.2, *καλώς ορισμένη* απεικόνιση) ψ_n είναι ομομορφισμός. Ας υποθέσουμε, από εδώ και στο εξής, ότι ο M είναι ισόπεδος. Εάν ως $\iota_n : B_n(\mathbf{C}_\bullet) \hookrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $j_n : Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \hookrightarrow C_n$ συμβολίσουμε τις συνήθεις ενθέσεις και ως $\check{d}_n$ τον επιμορφισμό που δημιουργείται από τον d_n ύστερα από περιορισμό τού πεδίου τιμών του επί τής εικόνας του, τότε προκύπτει το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} & \{0\} \arrow[d] & & \\
\{0\} \arrow[r] & B_n(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[u] \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "j_n"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[r] & \{0\} \\
 & C_{n+1} \arrow[u, "\check{d}_{n+1}"] \arrow[r, "d_{n+1}"'] & C_n \arrow[d, "d_n"] & & \\
 & & C_{n-1} & &
\end{tikzcd}$$

με την κεντρική γραμμή και τις στήλες του ακριβείς. Τανύοντας εκ δεξιών με τον M λαμβάνουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} & \{0\} \arrow[d] & & \\
\{0\} \arrow[r] & B_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[u] \arrow[r, "\iota_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, "\pi_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r] & \{0\} \\
 & C_{n+1} \otimes_R M \arrow[u, "\check{d}_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] \arrow[r, "d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"'] & C_n \otimes_R M \arrow[d, "d_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] & & \\
 & & C_{n-1} \otimes_R M & &
\end{tikzcd}$$

Σύμφωνα με τα θεωρήματα 4.5.8 και 4.5.9 οι στήλες του είναι ακριβείς. Επιπροσθέτως, επειδή ο M είναι ισόπεδος, *και* η κεντρική του γραμμή είναι ακριβής. (Βλ.

[1] Οι τιμές της *και* στους λοιπούς τανυστές ορίζονται με τη βοήθειά του κατά τα ειωθότα. Πρβλ. 4.3.19 (iii).

πρόταση 4.5.19.) Εφαρμόζοντας το (ii) τής προτάσεως 3.1.4 για τους 4 τελευταίους όρους αυτής τής κεντρικής του γραμμής συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ισομορφισμός

$$f_n : H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{\cong} \mathrm{Coker}(\iota_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) := Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M / \,\mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M).$$

Εφαρμόζοντας το (i) τής προτάσεως 3.1.4 για τη δεύτερή του στήλη αποκτούμε έναν ισομορφισμό $Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}(d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)$, μέσω τού οποίου επάγεται ισομορφισμός

$$h_n : Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M / \,\mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}(d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) / \,\mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)$$

σε επίπεδο πηλικομοδίων. Εξάλλου, λόγω τής μεταθετικότητας τού ανωτέρω διαγράμματος έχουμε $(j_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) \circ (\iota_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) \circ (\check{d}_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) = d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M$, οπότε

$$\begin{aligned} &((j_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) \circ (\iota_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M))(B_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M) = (d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)(C_{n+1} \otimes_R M) \\ &\Rightarrow (j_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)(\mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)) = (d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)(C_{n+1} \otimes_R M) \end{aligned}$$

και, ως εκ τούτου,

$$(j_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)(\mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)) = \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M). \tag{6.1}$$

Εξ αυτού έπεται ότι υφίσταται *ισομορφισμός* g_n που συμπληρώνει το κάτωθι μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{tikzcd}
 & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, "\pi^{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R M}_{\mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)}"] \arrow[d, "(j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)\check{}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M / \mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \arrow[d, "\cong"', "g_n"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[l, "\cong"', "f_n"] \arrow[dd, "\psi_n"] \\
C_n \otimes_R M & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\pi^{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R M}_{\mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)}"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M / \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \arrow[d, "\cong"', "h_n"] & \\
 & \mathrm{Ker}(d_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \arrow[r, "\pi^{\mathrm{Ker}(d_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)}_{\mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)}"] & \mathrm{Ker}(d_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) / \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \arrow[r, equal] & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)
\end{tikzcd}$$

Πράγματι· το θεώρημα 2.3.10 (εφαρμοζόμενο για τους R-μοδίους $Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$, $Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$, $\mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)$ και $\mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων M, N, U και W, αντιστοίχως, και με τον ομομορφισμό $j_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M$ στη θέση τού εκεί παρατεθέντος f) διασφαλίζει αρχικώς (λόγω τής (6.1)) την ύπαρξη και τη μοναδικότητα ενός *ομομορφισμού* g_n που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, "\pi^{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R M}_{\mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)}"] \arrow[d, "(j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)\check{}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M / \mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) \arrow[d, dashed, "g_n"] \\
Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, "\pi^{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R M}_{\mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)}"'] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M / \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)
\end{tikzcd}$$

Επειδή ο M είναι ισόπεδος και ο j_n μονομορφισμός, ο $j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M$ είναι ωσαύτως μονομορφισμός (βλ. πόρισμα 4.5.20), η δε ενριπτικότητά του αρκεί (και *μόνον συνολοθεωρητικώς*) για να συναχθεί το ότι

$$(j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)^{-1}(\mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)) \underset{(6.1)}{=} (j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)^{-1}((j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)(\mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)))$$
$$= \mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \underset{2.3.10\,(a)}{\Longrightarrow} [\text{ο } g_n \text{ είναι } \textit{μονομορφισμός}].$$

Από την άλλη μεριά, έχουμε

$$\mathrm{Im}(j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) + \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \subseteq Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M. \tag{6.2}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός. Προς τούτο θεωρούμε *τυχόντα* αποσυντιθέμενο τανυστή[2] $x \otimes y \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$ (για κάποιο ζεύγος στοιχείων $(x,y) \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \times M$). Προφανώς,

$$\begin{aligned}
&(d_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)(x \otimes y) = d_n(x) \otimes y = 0_{C_{n-1}} \otimes y = 0_{C_{n-1} \otimes_R M} \\
&\Longrightarrow x \otimes y \in \mathrm{Ker}(d_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) = \mathrm{Im}(j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \\
&\Longrightarrow [\exists z \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M : (j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)(z) = x \otimes y] \\
&\Longrightarrow x \otimes y = \underbrace{(j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)(z)}_{\in \mathrm{Im}(j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)} + \underbrace{(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)(0_{C_{n+1} \otimes_R M})}_{\in \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)},
\end{aligned}$$

οπότε η (6.2) ισχύει ως ισότητα και ο g_n (σύμφωνα με το 2.3.10 (b)) είναι *και επιμορφισμός*. Τέλος, ο $\psi_n = h_n \circ g_n \circ f_n$ είναι όντως *ισομορφισμός* (ως σύνθεση ισομορφισμών). □

6.1.4 Θεώρημα («Θεώρημα καθολικών συντελεστών για μοδίους ομολογίας»). *Έστω* $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *ένα αλυσωτό σύμπλοκο* R*-μοδίων και ομομορφισμών* R*-μοδίων, και έστω* M *ένας* R*-μόδιος.*

(i) *Εάν* $\mathrm{Tor}_1^R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \cong \{0\} \cong \mathrm{Tor}_1^R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, *τότε για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$ *υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία* R*-μοδίων και ομομορφισμών* R*-μοδίων*

$$\boxed{\{0\} \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{\psi_n} H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \xrightarrow{\varphi_n} \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \longrightarrow \{0\}.} \tag{6.3}$$

(ii) *Εάν, συν τοις άλλοις, ο* $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ *είναι προβολικός για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$, *τότε η* (6.3) *είναι διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία.*

Αποδειξη[3]. (i) Από τη 2η *μακρά* ακριβή Tor-ακολουθία την επαγομένη μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \xrightarrow{j_n} C_n \overset{\check{d}_n}{\twoheadrightarrow} B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \{0\} \tag{6.4}$$

[2] Αρκεί να δειχθεί το ζητούμενο μόνον για *αποσυντιθέμενους τανυστές*, καθόσον κάθε στοιχείο τού $Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$ γράφεται (σύμφωνα με το πόρισμα 4.3.18) ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους αποσυντιθέμενων τανυστών.

[3] Σε αυτήν θα διατηρηθούν οι συμβολισμοί οι εισαχθέντες στα εδάφια 6.1.1, 6.1.2 και 6.1.3. (Σημειωτέον ότι, υπό αυτήν τη μορφή, το θεώρημα πρωτοαπεδείχθη στην ειδική περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$ στο άρθρο τού E. Čech: *Les groupes de Betti d'un complex infini*, Fund. Math. **25** (1935), 33-44.)

(βλ. θεώρημα 5.3.10) λαμβάνουμε τη *βραχεία* ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{j_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M} C_n \otimes_R M \xrightarrow{\check{d}_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M} B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow \{0\}, \tag{6.5}$$

καθόσον $\mathrm{Tor}_1^R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \cong \{0\}$ και η $\check{d}_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M$ είναι επιμορφισμός. (Βλ. το (ii) τής προτάσεως 4.5.6). Εν συνεχεία θεωρούμε τα υποσύμπλοκα

$$\mathbf{Z}_\bullet := (Z_n(\mathbf{C}_\bullet), d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)})_{n\in\mathbb{Z}} \;\; \text{και} \;\; \mathbf{B}_\bullet := (B_n(\mathbf{C}_\bullet), d_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)})_{n\in\mathbb{Z}}$$

τού $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Σημειωτέον ότι $d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)} = 0$ και $d_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)} = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. (Πράγματι· για κάθε στοιχείο $x \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ έχουμε $d_n(x) = 0_{C_{n-1}}$, ενώ για κάθε στοιχείο $y \in B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ υπάρχει $w \in C_{n+1}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $y = d_{n+1}(w)$, οπότε $d_n(y) = (\underbrace{d_n \circ d_{n+1}}_{=0})(w) = 0_{C_{n-1}}$.) Επειδή

$$H_n(\mathbf{Z}_\bullet) := \mathrm{Ker}(\underbrace{d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}}_{=0}) / \mathrm{Im}(\underbrace{d_{n+1}|_{Z_{n+1}(\mathbf{C}_\bullet)}}_{=0})$$

με $\mathrm{Ker}(d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}) = Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $\mathrm{Im}(d_{n+1}|_{Z_{n+1}(\mathbf{C}_\bullet)}) \cong \{0\}$, και

$$H_n(\mathbf{B}_\bullet) := \mathrm{Ker}(\underbrace{d_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)}}_{=0}) / \mathrm{Im}(\underbrace{d_{n+1}|_{B_{n+1}(\mathbf{C}_\bullet)}}_{=0})$$

με $\mathrm{Ker}(d_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)}) = B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $\mathrm{Im}(d_{n+1}|_{B_{n+1}(\mathbf{C}_\bullet)}) \cong \{0\}$, έχουμε

$$H_n(\mathbf{Z}_\bullet) \cong Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \;\; \text{και} \;\; H_n(\mathbf{B}_\bullet) \cong B_n(\mathbf{C}_\bullet), \; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Κατ' αναλογίαν, για τα υποσύμπλοκα

$$\mathbf{Z}_\bullet \otimes_R M := (Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M, \underbrace{d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M}_{=0})_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$\text{και } \mathbf{B}_\bullet \otimes_R M := (B_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M, \underbrace{d_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M}_{=0})_{n\in\mathbb{Z}}$$

τού $\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M$ έχουμε $H_n(\mathbf{Z}_\bullet \otimes_R M) \cong Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$ και

$$H_n(\mathbf{B}_\bullet \otimes_R M) \cong B_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M, \; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Από την (6.5) δημιουργούμε (με τη βοήθεια των ανωτέρω μηδενικών συνοριακών τελεστών) μια βραχεία ακριβή ακολουθία *αλυσωτών συμπλόκων*:

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Z}_\bullet \otimes_R M \xrightarrow{j_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M} \mathbf{C}_\bullet \otimes_R M \xrightarrow{\check{d}_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M} \mathbf{B}_{\bullet-1} \otimes_R M \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

και θεωρούμε την αντίστοιχη *μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας* για αυτήν:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(\mathbf{Z}_\bullet \otimes_R M) \arrow[r, "H_n(j_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)"] \arrow[d, "\cong"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M) \arrow[r, "H_n(\check{d}_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)"] \arrow[d, equal] & H_n(\mathbf{B}_{\bullet-1} \otimes_R M) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\cong"] & H_{n-1}(\mathbf{Z}_\bullet \otimes_R M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
& Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) & B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M & Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M &
\end{tikzcd}$$

με τον δ_n ως συνδετικό ομομορφισμό[4]. (Βλ. θεώρημα 3.2.13.) Κατόπιν τούτου, παρατηρούμε ότι η 2η *μακρά* ακριβής Tor-ακολουθία η επαγομένη μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \overset{\iota_{n-1}}{\hookrightarrow} Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \overset{\pi_{n-1}}{\twoheadrightarrow} H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \{0\} \tag{6.6}$$

δίδει την

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, "\tilde{\partial}_1"] & B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, "\iota_{n-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] & Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[dll, "\pi_{n-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] \\
& H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r] & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

διότι (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Tor}_1^R(Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \cong \{0\}$. Τοποθετούμε τις ανωτέρω στη 2η και στην 3η στήλη τού *μεγάλου διαγράμματος*:

$$\begin{tikzcd}
& & \vdots \arrow[d] & & \\
& B_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\iota_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[d, "\delta_{n+1}"] & & \\
& Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[d, "H_n(j_\bullet\overline{\otimes}\,\mathrm{id}_M)"] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, dashed, "\psi_n"] \arrow[d] & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \arrow[r, dashed, "\varphi_n"] \arrow[d, "H_n(\check{d}_\bullet\overline{\otimes}\,\mathrm{id}_M)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\partial}_1"] & \{0\} \\
& \{0\} & B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[d, "\iota_{n-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] & \\
& & Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[d, "\pi_{n-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] & \\
& & \vdots & H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[d] & \\
& & & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

Η πρώτη στήλη αυτού είναι ωσαύτως ακριβής βάσει τού θεωρήματος 4.5.9 και τής (6.6) (υποκαθιστώντας σε αυτήν τον $n-1$ με τον n).

[4]Για την αποφυγή εξεζητημένου συμβολισμού, θα θεωρούμε από εδώ και στο εξής αυτόν τον ομομορφισμό ("με προσέγγιση πασιφανούς ισομορφισμού" ως προς τον καθορισμό πεδίων ορισμού και τιμών του) ως μια απεικόνιση $\delta_n : B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$.

Εστιάζουμε τώρα περισσότερο στη μελέτη τού συνδετικού ομομορφισμού δ_n (στην ειδική περίπτωση που πραγματευόμαστε), ανακαλώντας στη μνήμη μας τον πλέον φυσικό τρόπο ορισμού του (βλ. παρατήρηση 3.2.14), καθώς και τις λεπτομέρειες τής αποδείξεως τού θεωρήματος 3.2.13: Εξετάζουμε το κάτωθι διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & & H_n(\mathbf{B}_{\bullet-1}\otimes_R M) \arrow[d, "\cong"] \\
 & (C_n\otimes_R M)/B_n(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M) \arrow[r, "\underline{d_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M}"] \arrow[d, "\widetilde{d_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M}"] & B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R M \\
Z_{n-1}(\mathbf{Z}_\bullet\otimes_R M) \arrow[r, "j_{n-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] \arrow[d, equal] & Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M) \arrow[d, hook, "\text{ένθεση}"] & \\
Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R M \arrow[r, "j_{n-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] & C_{n-1}\otimes_R M &
\end{tikzcd}$$

στο οποίο οι ομομορφισμοί $\underline{d_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M}$ και $\widetilde{d_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M}$ προκύπτουν από την καθολική ιδιότητα τού πηλικομοδίου $(C_n\otimes_R M)/B_n(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M)$ (βλ. πρόταση[5] 2.3.6), με τον μεν πρώτο ως τον μοναδικό ομομορφισμό που καθιστά το

$$\begin{tikzcd}
 & C_n\otimes_R M \arrow[dl, "\pi^{C_n\otimes_R M}_{B_n(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M)}"'] \arrow[dr, "\check{d}_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
(C_n\otimes_R M)/B_n(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M) \arrow[rr, dashed, "\underline{d_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M}"'] & {} & B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R M \subseteq C_{n-1}\otimes_R M
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, ήτοι τον

$$(C_n\otimes_R M)/B_n(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M)\ni\xi+B_n(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M)\longmapsto(d_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(\xi)\in B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R M,$$

τον δε δεύτερο ως τον μοναδικό ομομορφισμό που καθιστά το

$$\begin{tikzcd}
 & C_n\otimes_R M \arrow[dl, "\pi^{C_n\otimes_R M}_{B_n(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M)}"'] \arrow[dr, "d_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
(C_n\otimes_R M)/B_n(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M) \arrow[rr, dashed, "\widetilde{d_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M}"'] & {} & Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M)\subseteq C_{n-1}\otimes_R M
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Έστω $x\otimes y$ *τυχών* αποσυντιθέμενος τανυστής τού $B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R M$ (με $x\in B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)$ και $y\in M$). Επειδή $B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet):=\mathrm{Im}(d_n)$, υπάρχει κάποιο $u\in C_n$, τέτοιο ώστε να ισχύει $d_n(u)=x$. Επομένως, $u\otimes y\in(\underline{d_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M})^{-1}(\{x\otimes y\})$ και[6]

$$\begin{aligned}
&\{\delta_n(x\otimes y)\}=(j_{n-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)^{-1}(\{\widetilde{d_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M}(u\otimes y)\})\\
&=(j_{n-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)^{-1}(\{(d_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(u\otimes y)\})=(j_{n-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)^{-1}(\{d_n(u)\otimes y\})\\
&=(j_{n-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)^{-1}(\{x\otimes y\}),
\end{aligned}$$

[5] Εν προκειμένω, η πρόταση 2.3.6 είναι εφαρμόσιμη, διότι $B_n(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M)\subseteq Z_n(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M)$.

[6] Επειδή η (6.5) είναι ακριβής, ο $j_{n-1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ είναι *μονομορφισμός*, οπότε η ίνα υπεράνω *οιουδήποτε* στοιχείου ανήκοντος στο πεδίο τιμών του οφείλει να είναι *μονοσύνολο*.

απ' όπου έπεται ότι $\delta_n(x \otimes y) = x \otimes y$, με το x θεωρούμενο *ως στοιχείο τού* $Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)$, οπότε[7]

$$\delta_n = \iota_{n-1} \overline{\otimes} \, \mathrm{id}_M, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z}. \tag{6.7}$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.1.13 (με τους $\iota_n \overline{\otimes} \, \mathrm{id}_M$ και $\pi_n \overline{\otimes} \, \mathrm{id}_M$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων ομομορφισμών f' και f, αντιστοίχως) υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$ ο οποίος συμπληρώνει το προηγηθέν *μεγάλο διάγραμμα* μεταθετικώς. Αυτός οφείλει να ισούται με τον ψ_n τον ορισθέντα στο λήμμα 6.1.3 (καθόσον ο ψ_n πληροί την εν λόγω συνθήκη). Επίσης, σύμφωνα με την πρόταση 3.1.11 (με τους $\tilde{\partial}_1$ και $\iota_{n-1} \overline{\otimes} \, \mathrm{id}_M$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων g' και g, αντιστοίχως) υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$\varphi_n : H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M)$$

ο οποίος συμπληρώνει το *μεγάλο διάγραμμα* μεταθετικώς. Κατά το «λήμμα των τεσσάρων» 3.1.7 (ii) (και αντιστοίχως, 3.1.7 (i)) ο ψ_n (και αντιστοίχως, ο φ_n) είναι μονομορφισμός (και αντιστοίχως, επιμορφισμός). Αρκεί λοιπόν να δειχθεί η ακρίβεια τής σχηματιζομένης βραχείας ακολουθίας (μέσω των διακεκομμένων βελών) στον μεσαίο όρο $H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$. Από την πρόταση 3.1.5, εφαρμοζόμενη για τους πέντε όρους που έχουν αναγραφεί στη δεύτερη στήλη τού *μεγάλου διαγράμματος*, λαμβάνουμε βραχείες ακριβείς ακολουθίες:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\delta_{n+1}) \arrow[r, hook, "\alpha_n"] \arrow[d, equal] & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \arrow[r, two heads, "\beta_n"] & \mathrm{Ker}(\delta_n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \{0\} \\
& Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M / \mathrm{Im}(\delta_{n+1}) & & \mathrm{Im}(H_n(\check{d}_\bullet \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)) &
\end{tikzcd}$$

όπου για οιαδήποτε $x \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$, $y \in M$, $z \in H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$,

$$\alpha_n((x \otimes y) + \mathrm{Im}(\delta_{n+1})) := H_n(\iota_\bullet \overline{\otimes} \, \mathrm{id}_M)(x \otimes y) = (x \otimes y) + \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \, \mathrm{id}_M),$$

$$\beta_n(z) := H_n(\check{d}_\bullet \overline{\otimes} \, \mathrm{id}_M)(z).$$

Από την ακρίβεια τής

$$B_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{\iota_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M} Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{\pi_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M} H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow \{0\}$$

συνάγεται (βάσει τού (ii) τής προτάσεως 3.1.4) ότι

$$\mathrm{Coker}(\delta_{n+1}) \underset{(6.7)}{=} \mathrm{Coker}(\iota_n \overline{\otimes} \, \mathrm{id}_M) \cong H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$$

και από την ακρίβεια τής

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{\iota_{n-1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M} Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$$

[7] Προφανώς,

$$\begin{aligned}
(j_{n-1} \overline{\otimes} \, \mathrm{id}_M)(\iota_{n-1}(x) \otimes y) &= (j_{n-1} \overline{\otimes} \, \mathrm{id}_M)((\iota_{n-1} \overline{\otimes} \, \mathrm{id}_M)(x \otimes y)) \\
&\underset{4.5.5}{=} ((j_{n-1} \circ \iota_{n-1}) \overline{\otimes} \underbrace{(\mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M)}_{= \mathrm{id}_M})(x \otimes y) = x \otimes y.
\end{aligned}$$

συνάγεται (βάσει τού (i) τής προτάσεως 3.1.4) ότι

$$\mathrm{Ker}(\delta_n) \underset{(6.7)}{=} \mathrm{Ker}(\iota_{n-1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) \cong \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M).$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Coker}(\delta_{n+1}) \arrow[r, hook, "\alpha_n"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \arrow[r, two heads, "\beta_n"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Ker}(\delta_n) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \{0\} \arrow[d, equal] \\
\{0\} \arrow[r] & H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, "\psi_n"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \arrow[r, "\varphi_n"] & \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Επειδή η άνω γραμμή του είναι ακριβής, *και* η κάτω του γραμμή οφείλει να είναι ακριβής.

(ii) Επειδή ο $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι εξ υποθέσεως προβολικός, το θεώρημα 4.2.7 μας πληροφορεί ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία (6.4) διασπάται στον όρο C_n. Ας υποθέσουμε ότι $\kappa_n : C_n \longrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων ο οποίος αποτελεί αριστερό αντίστροφο τού j_n. (Βλ. θεώρημα 3.1.29.) Κάνοντας χρήση των συνθέσεων $\pi_n \circ \kappa_n : C_n \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet)$, $n \in \mathbb{Z}$, κατασκευάζουμε έναν αλυσωτό μετασχηματισμό[8]

$$(\pi \circ \kappa)_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M : \mathbf{C}_\bullet \otimes_R M \longrightarrow H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M,$$

μέσω τού οποίου επάγονται ομομορφισμοί R-μοδίων

$$\theta_n : H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$$

με τύπο ορισμού τους τον

$$(x \otimes y) + \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) \underset{\theta_n}{\longmapsto} \pi_n(\kappa_n(x)) \otimes y = (\kappa_n(x) + \mathrm{Im}(d_{n+1})) \otimes y.$$

Για κάθε $x \in \mathrm{Ker}(d_n) =: Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $y \in M$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&(\theta_n \circ \psi_n)\left((x + B_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes y\right) = \theta_n((x \otimes y) + \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)) \\
&= (\kappa_n(x) + B_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes y \underset{x \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}{=} (x + B_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes y.
\end{aligned}$$

Τούτο σημαίνει ότι $\theta_n \circ \psi_n = \mathrm{id}_{H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M}$ και ότι η (6.3) διασπάται στον όρο $H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$ (εκ νέου λόγω τού θεωρήματος 3.1.29). □

6.1.5 Παράδειγμα. Εάν $k, l \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, \pm 1\}$ και $R = \mathbb{Z}$, τότε για το αλυσωτό σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ το οριζόμενο ως ακολούθως:

$$C_n := \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\}, \\ \mathbb{Z}, & \text{όταν } n \in \{0,1\}, \end{cases} \quad \text{με } \; d_n := \begin{cases} 0, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{1\}, \\ k\, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}, & \text{όταν } n = 1, \end{cases}$$

λαμβάνουμε

$$Z_n(\mathbf{C}_\bullet) = \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}, \\ \mathbb{Z}, & \text{όταν } n = 0, \end{cases} \quad \text{και } \; B_n(\mathbf{C}_\bullet) = \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}, \\ k\mathbb{Z}, & \text{όταν } n = 0, \end{cases}$$

[8] Σημειωτέον ότι ο συνοριακός τελεστής τού $H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός.

οπότε

$$H_0(\mathbf{C}_\bullet) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k \text{ και } H_n(\mathbf{C}_\bullet) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}.$$

Θέτοντας $M = \mathbb{Z}_l$, διαπιστώνουμε ότι[9]

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\{0\}, \mathbb{Z}_l) \cong \{0\},\ \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_l) \cong \{0\},\ \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(k\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_l) \cong \{0\}.$$

Η (6.3) δίδει τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \underbrace{H_0(\mathbf{C}_\bullet)}_{\cong \mathbb{Z}_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \xrightarrow{\psi_0} H_0(\mathbf{C}_\bullet; \mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\varphi_0} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\underbrace{H_{-1}(\mathbf{C}_\bullet)}_{\cong\{0\}}, \mathbb{Z}_l) \longrightarrow \{0\}$$

για $n = 0$, την

$$\{0\} \longrightarrow \underbrace{H_1(\mathbf{C}_\bullet)}_{\cong \{0\}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \xrightarrow{\psi_1} H_1(\mathbf{C}_\bullet; \mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\varphi_1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\underbrace{H_0(\mathbf{C}_\bullet)}_{\cong\mathbb{Z}_k}, \mathbb{Z}_l) \longrightarrow \{0\}$$

για $n = 1$ και την

$$\{0\} \longrightarrow \underbrace{H_n(\mathbf{C}_\bullet)}_{\cong \{0\}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \xrightarrow{\psi_n} H_n(\mathbf{C}_\bullet; \mathbb{Z}_l) \xrightarrow{\varphi_n} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\underbrace{H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)}_{\cong\{0\}}, \mathbb{Z}_l) \longrightarrow \{0\}$$

για $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0, 1\}$, οπότε

$$\boxed{H_n(\mathbf{C}_\bullet; \mathbb{Z}_l) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \underset{(4.9)}{\cong} \mathbb{Z}_{\mu\kappa\delta(k,l)}, & \text{όταν } n = 0, \\ \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}_l) \underset{5.3.19 \text{ και } 1.4.54}{\cong} \mathbb{Z}_{\mu\kappa\delta(k,l)}, & \text{όταν } n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1\}. \end{cases}}$$

6.1.6 Σημείωση. Ως απεικονίσεις, αμφότερες οι φ_n και ψ_n στη βραχεία ακριβή ακολουθία (6.3) είναι *φυσικές*, υπό την έννοια τού ότι για κάθε αλυσωτό μετασχηματισμό $f_\bullet : \mathbf{C}_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}'_\bullet$ και κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $h : M \longrightarrow M'$ το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d, "H_n(f_\bullet)\overline{\otimes} h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d, "H_n(f_\bullet \overline{\otimes} h)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(f_\bullet), h)"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & H_n(\mathbf{C}'_\bullet) \otimes_R M' \arrow[r, "\psi'_n"] & H_n(\mathbf{C}'_\bullet; M') \arrow[r, "\varphi'_n"] & \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet), M') \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

Εάν οι $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι προβολικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε (κατά το 6.1.4 (ii))

$$H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \cong (H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M). \tag{6.8}$$

[9] Επειδή ο $\mathbb{Z}$ είναι ελεύθερος (ως $\mathbb{Z}$-μόδιος), είναι *και* προβολικός (βλ. πρόταση 4.2.4), οπότε αρκεί (για την απόδειξη τού δεύτερου ισομορφισμού) να εφαρμοσθεί το λήμμα 5.3.11. Ο τρίτος ισομορφισμός έπεται ύστερα από συνδυασμό τού πορίσματος 4.2.11 και τού λήμματος 5.3.11 (για τον υπομόδιο $k\mathbb{Z}$ τού $\mathbb{Z}$).

Ωστόσο, αυτή η διάσπαση *δεν είναι κατ' ανάγκην φυσική*, υπό την έννοια τού ότι, εάν οι $B_n(\mathbf{C}'_\bullet)$ είναι ωσαύτως προβολικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ήτοι

$$H_n(\mathbf{C}'_\bullet; M') \cong \left(H_n(\mathbf{C}'_\bullet) \otimes_R M'\right) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet), M'), \tag{6.9}$$

και εάν κανείς εκφράσει την εικόνα ενός $\xi \in H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$ μέσω τού ισομορφισμού (6.8) ως άθροισμα $\xi_1 + \xi_2$ για μονοσημάντως ορισμένα $\xi_1 \in H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$ και $\xi_2 \in \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M)$, τότε η εικόνα τού $H_n(f_\bullet \overline{\otimes} h)(\xi) \in H_n(\mathbf{C}'_\bullet; M')$ μέσω τού ισομορφισμού (6.9) δεν ισούται *κατ' ανάγκην με το άθροισμα*

$$(H_n(f_\bullet)\overline{\otimes} h)(\xi_1) + \left(\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(f_\bullet), h)\right)(\xi_2).$$

6.1.7 Παράδειγμα. Θέτοντας $R = \mathbb{Z}$, $M = M' = \mathbb{Z}_2$, $h = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}$, και θεωρώντας ένα αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ με $C_{m-1} = C_m = \mathbb{Z}$ (για κάποιον *παγιωμένον* ακέραιο αριθμό m, με αδιάφορους λοιπούς όρους, υπό την προϋπόθεση ότι $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), \mathbb{Z}_2) \cong \{0\}$ και ότι οι $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι προβολικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$) και $d_{m+1} = d_{m-1} = 0$, $d_m = 2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, ένα αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{C}'_\bullet = (C'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ με $C'_{m-1} \cong \{0\}, C'_m = \mathbb{Z}$ και $d'_{m+1} = 0$ (για τον ίδιον m, με αδιάφορους λοιπούς όρους, υπό την προϋπόθεση ότι $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(Z_n(\mathbf{C}'_\bullet), \mathbb{Z}_2) \cong \{0\}$ και ότι οι οι $B_n(\mathbf{C}'_\bullet)$ είναι προβολικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$), καθώς και έναν αλυσωτό μετασχηματισμό $f_\bullet : \mathbf{C}_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}'_\bullet$ με τον f_m *ισομορφισμό* (και τους f_n, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{m\}$, αδιάφορους), λαμβάνουμε

$$\begin{gathered}
Z_{m-1}(\mathbf{C}_\bullet) = \mathbb{Z},\ \ B_{m-1}(\mathbf{C}_\bullet) = 2\mathbb{Z},\ \ Z_m(\mathbf{C}_\bullet) \cong B_m(\mathbf{C}_\bullet) \cong \{0\},\\
Z_{m-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \cong B_{m-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \cong \{0\},\ \ Z_m(\mathbf{C}'_\bullet) = \mathbb{Z},\ \ B_m(\mathbf{C}'_\bullet) \cong \{0\},\\
H_{m-1}(\mathbf{C}_\bullet) \cong \mathbb{Z}_2,\ \ H_m(\mathbf{C}_\bullet) \cong \{0\},\ H_{m-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \cong \{0\},\ H_m(\mathbf{C}'_\bullet) = \mathbb{Z},\\
\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\{0\}, \mathbb{Z}_2) \cong \{0\} \underset{4.5.25\ \&\ 5.3.13}{\cong} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2),\ \ \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \underset{5.3.19}{\cong} \mathbb{Z}_2
\end{gathered}$$

και

$$\begin{gathered}
H_{m-1}(f_\bullet) = H_m(f_\bullet) = 0,\ H_m(f_\bullet)\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2} = \mathrm{Tor}_1^R(H_{m-1}(f_\bullet), \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}) = 0,\\
C_{m-1} \otimes_{\mathbb{Z}} M = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \underset{4.4.3}{\cong} \mathbb{Z}_2,\ C_m \otimes_{\mathbb{Z}} M = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \underset{4.4.3}{\cong} \mathbb{Z}_2,\\
d_m\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2} = 0,\ \ H_m(\mathbf{C}_\bullet; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow[H_m(f_\bullet\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2})]{\cong} H_m(\mathbf{C}'_\bullet; \mathbb{Z}_2),
\end{gathered}$$

οπότε το μεταθετικό διάγραμμα τού εδ. 6.1.6 (για $n = m$) είναι τής μορφής:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \{0\} \arrow[r] \arrow[d, "0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & \{0\} \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

μέσω των αναλυτικών υπολογισμών των καταχωρισθέντων στον κατάλογο:

q	$m \qquad m-1$
$\begin{array}{c} C_q \\ \Big\downarrow f_q \\ C'_q \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2\times \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} \\ & \Big\downarrow \cong & & \Big\downarrow & \\ \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \{0\} & \end{array}$
$\begin{array}{c} H_q(\mathbf{C}_\bullet) \\ \Big\downarrow H_q(f_\bullet) \\ H_q(\mathbf{C}'_\bullet) \end{array}$	$\begin{array}{cc} \{0\} & \mathbb{Z}_2 \\ \Big\downarrow & \Big\downarrow \\ \mathbb{Z} & \{0\} \end{array}$
$\begin{array}{c} C_q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \\ \Big\downarrow f_q \overline{\otimes} \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2} \\ C'_q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \end{array}$	$\begin{array}{ccccc} \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{0} \\ & \Big\downarrow \cong & & \Big\downarrow & \\ \xrightarrow{0} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \{0\} & \end{array}$
$\begin{array}{c} H_q(\mathbf{C}_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \\ \Big\downarrow H_q(f_\bullet \overline{\otimes} \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}) \\ H_q(\mathbf{C}'_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \end{array}$	$\begin{array}{cc} \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ \Big\downarrow \cong & \Big\downarrow \\ \mathbb{Z}_2 & \{0\} \end{array}$

Είναι προφανές ότι η εν λόγω διάσπαση τού $H_m(\mathbf{C}_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2)$ *δεν μπορεί να είναι φυσική*.

6.1.8 Παρατήρηση. Εάν (στη διατύπωση τού θεωρήματος 6.1.4) υποτεθεί ότι το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι *ελεύθερο* (βλ. εδ. 3.5.19) και ο δακτύλιος αναφοράς R *περιοχή κυρίων ιδεωδών*, τότε *τόσον* οι συνθήκες (i):

$$\mathrm{Tor}_1^R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \cong \{0\} \cong \mathrm{Tor}_1^R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M),\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

όσον και οι συνθήκες (ii) (ήτοι η προβολικότητα των $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$) *ικανοποιούνται αυτομάτως*[10], οπότε η (6.3) είναι κατ' ανάγκην ακριβής και διασπώμενη. Εντούτοις, όταν ο R *δεν είναι* Π.Κ.Ι., τούτο δεν είναι εν γένει αληθές. Επί παραδείγματι, θεωρώντας τόν πηλικοδακτύλιο $R = \mathbb{Z}[\mathsf{X}]/\left\langle \mathsf{X}^2 - 1\right\rangle$ ως δακτύλιο αναφοράς, ο οποίος *δεν είναι ούτε καν ακεραία περιοχή*[11], το σύνολο $M = \mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών καθίσταται R-μόδιος μέσω τής συνήθους προσθέσεως και τού εξωτερικού πολλαπλασιασμού

$$R \times \mathbb{Z} \ni \Big(\sum_{j=0}^{d} a_j \mathsf{X}^j + \left\langle \mathsf{X}^2 - 1\right\rangle, \kappa\Big) \overset{\star}{\longmapsto} \sum_{j=0}^{d} a_j \kappa^j \in \mathbb{Z} \tag{6.10}$$

[10] Επειδή αμφότεροι οι $Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι υπομόδιοι τού ελευθέρου μοδίου C_n και ο R Π.Κ.Ι., αυτοί οφείλουν (σύμφωνα με το θεώρημα 2.5.47) να είναι ωσαύτως ελεύθεροι και, ως εκ τούτου, προβολικοί. (Βλ. πρόταση 4.2.4.) Άρα αρκεί η εφαρμογή τού λήμματος 5.3.11.

[11] Καθένα των στοιχείων $\mathsf{X}+1+\left\langle \mathsf{X}^2 - 1\right\rangle$ και $\mathsf{X}-1+\left\langle \mathsf{X}^2 - 1\right\rangle$ τού R είναι μη μηδενικό. Ωστόσο, το γινόμενο αυτών ισούται με το 0_R $(= \left\langle \mathsf{X}^2 - 1\right\rangle)$. (Ισοδυνάμως: Το $\left\langle \mathsf{X}^2 - 1\right\rangle$ *δεν είναι* πρώτο ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $\mathbb{Z}[\mathsf{X}]$. Πρβλ. θεώρημα 1.3.28.)

$(d \in \mathbb{N}_0,\ a_j \in \mathbb{Z},\ \forall j \in \{0, ..., d\})$. Για το ελεύθερο αλυσωτό σύμπλοκο

$$C_n := R,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \text{ με }\ d_n := \begin{cases} ((\mathsf{X}+1)+\langle \mathsf{X}^2-1\rangle)\,\mathrm{id}_R, & \text{όταν } n \equiv 1 \pmod 2, \\ ((\mathsf{X}-1)+\langle \mathsf{X}^2-1\rangle)\,\mathrm{id}_R, & \text{όταν } n \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

λαμβάνουμε

$$Z_n(\mathbf{C}_\bullet) = B_n(\mathbf{C}_\bullet) = \begin{cases} \left\{ \vartheta(\mathsf{X}) + \langle \mathsf{X}^2-1\rangle \,\middle|\, \vartheta(\mathsf{X}) \in \langle \mathsf{X}-1\rangle \right\}, & \text{όταν } n \equiv 1 \pmod 2, \\ \left\{ \vartheta(\mathsf{X}) + \langle \mathsf{X}^2-1\rangle \,\middle|\, \vartheta(\mathsf{X}) \in \langle \mathsf{X}+1\rangle \right\}, & \text{όταν } n \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

οπότε $H_n(\mathbf{C}_\bullet) \cong \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Από την άλλη μεριά, λόγω τού θεωρήματος 4.4.3 οι R-μόδιοι $R \otimes_R \mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z}$ είναι ισόμορφοι, και το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbb{Z}$ γράφεται υπό τη μορφή

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{2k+2}\otimes_R \mathbb{Z} \arrow[r, "d_{2k+2}\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, equal] & C_{2k+1}\otimes_R \mathbb{Z} \arrow[r, "d_{2k+1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, equal] & C_{2k}\otimes_R \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & R\otimes_R \mathbb{Z} \arrow[r, "(\mathsf{X}-1)\,\mathrm{id}_R\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}"] & R\otimes_R \mathbb{Z} \arrow[r, "(\mathsf{X}+1)\,\mathrm{id}_R\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}"] \arrow[d, bend right, "\cong"'] & R\otimes_R \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, dashed] \arrow[u, "\cong"] & \mathbb{Z} \arrow[r, dashed] \arrow[u, bend right, "\cong"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Η πρώτη διακεκομμένη γραμμή (η σύνθεση τού κανονιστικού ισομορφισμού, τού ομομορφισμού $d_{2k+2}\overline{\otimes}\ \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ και τού αντιστρόφου τού πρώτου) δηλοί τον μηδενικό ομομορφισμό, καθώς κάθε ακέραιος λ απεικονίζεται μέσω αυτής στο μηδέν:

$$\begin{gathered} \mathbb{Z} \ni \lambda \xmapsto{\cong} 1_R \otimes \lambda \cdot 1 = \lambda(1_R \otimes 1) = \lambda((1+\langle \mathsf{X}^2-1\rangle)\otimes 1) \xmapsto{d_{2k+2}\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} \\ \lambda(((\mathsf{X}-1)+\langle \mathsf{X}^2-1\rangle)\otimes 1) \xmapsto{\cong} \lambda(((\mathsf{X}-1)+\langle \mathsf{X}^2-1\rangle)\star 1) := \lambda(1-1) = \lambda\cdot 0 = 0 \end{gathered}$$

(όπου "$\star$" είναι η πράξη (6.10)). Η δεύτερη διακεκομμένη γραμμή δηλοί τον ομομορφισμό $2\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$:

$$\begin{gathered} \mathbb{Z} \ni \lambda \xmapsto{\cong} 1_R \otimes \lambda \cdot 1 = \lambda(1_R \otimes 1) = \lambda((1+\langle \mathsf{X}^2-1\rangle)\otimes 1) \xmapsto{d_{2k+1}\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} \\ \lambda(((\mathsf{X}+1)+\langle \mathsf{X}^2-1\rangle)\otimes 1) \xmapsto{\cong} \lambda(((\mathsf{X}+1)+\langle \mathsf{X}^2-1\rangle)\star 1) := \lambda(1+1) = 2\lambda \end{gathered}$$

Εάν η (6.3):

$$\{0\} \longrightarrow \underbrace{H_n(\mathbf{C}_\bullet)}_{\cong\{0\}}\otimes_R \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_n} H_n(\mathbf{C}_\bullet;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi_n} \mathrm{Tor}_1^R(\underbrace{H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)}_{\cong\{0\}},\mathbb{Z}) \longrightarrow \{0\}$$

ήταν ακριβής, ο μεσαίος της όρος θα έπρεπε να είναι *τετριμμένος* R-μόδιος και θα καταλήγαμε σε άτοπο για τους *άρτιους δείκτες*, καθώς έχουμε

$$H_n(\mathbf{C}_\bullet;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } n \equiv 1 \pmod 2, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \not\cong \{0\}, & \text{όταν } n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Κατά συνέπειαν, $\mathrm{Tor}_1^R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) = \mathrm{Tor}_1^R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \not\cong \{0\}$ για κάθε *άρτιο* ακέραιο αριθμό n.

6.1.9 Ορισμός. Έστω M *τυχών* R-μόδιος και έστω $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων. Θεωρούμε το συναλυσωτό σύμπλοκο

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M) := (\mathrm{Hom}_R(C_n, M),\ \mathrm{Hom}_R(d_n, \mathrm{id}_M))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

(Βλ. εδ. 5.2.1.) Ο n-οστός μόδιος συνομολογίας

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)) := Z^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M))/B^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M))$$

τού $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)$ καλείται, ιδιαιτέρως, n-**οστός μόδιος συνομολογίας τού $\mathbf{C}_\bullet$ με τον M ως μόδιο συντελεστών** ή n-**οστός μόδιος συνομολογίας τού $\mathbf{C}_\bullet$ με συντελεστές ειλημμένους από τον** M και συμβολίζεται ως εξής:

$$\boxed{H^n(\mathbf{C}_\bullet; M) := H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)).}$$

Με τρόπο παρόμοιον εκείνου με τον οποίο κανείς χειρίζεται τους R-μοδίους τους μετέχοντες στην (6.3) (αλλά μεταβαίνοντας από το *τανυστικό γινόμενο* κατάλληλων αλυσωτών συμπλόκων με το M στο *σύμπλοκο ομομορφισμών* από αυτά στο M) αποδεικνύεται το ακόλουθο:

6.1.10 Θεώρημα («Θεώρημα καθολικών συντελεστών για μοδίους συνομολογίας»). *Έστω $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και έστω M ένας R-μόδιος.*

(i) *Εάν* $\mathrm{Ext}^1_R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \cong \{0\} \cong \mathrm{Ext}^1_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, *τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\boxed{\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \overset{\varphi^n}{\hookrightarrow} H^n(\mathbf{C}_\bullet; M) \overset{\psi^n}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \longrightarrow \{0\}} \quad (6.11)$$

(ii) *Εάν ο R είναι κληρονομικός* (βλ. εδ. 4.2.12) *και ο C_n είναι προβολικός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε η* (6.11) *είναι διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία.*

Απόδειξη. (i) Εν πρώτοις, θεωρούμε εκ νέου την (6.4). Από τη 2η *μακρά* ακριβή Ext-ακολουθία την επαγομένη μέσω αυτής (βλ. θεώρημα 5.2.10) λαμβάνουμε τη *βραχεία* ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \to \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \to \mathrm{Hom}_R(C_n, M) \to \mathrm{Hom}_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \to \{0\}, \quad (6.12)$$

καθόσον $\mathrm{Ext}^1_R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \cong \{0\}$. Εν συνεχεία θεωρούμε εκ νέου τα υποσύμπλοκα

$$\mathbf{Z}_\bullet := (Z_n(\mathbf{C}_\bullet),\ d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)})_{n\in\mathbb{Z}} \ \text{ και } \ \mathbf{B}_\bullet := (B_n(\mathbf{C}_\bullet),\ d_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)})_{n\in\mathbb{Z}}$$

τού $\mathbf{C}_\bullet$ με $d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)} = 0$ και $d_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)} = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Όπως και στην απόδειξη τού θεωρήματος 6.1.4 προκύπτει ότι

$$H_n(\mathbf{Z}_\bullet) \cong Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \ \text{ και } \ H_n(\mathbf{B}_\bullet) \cong B_n(\mathbf{C}_\bullet),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Λόγω τής (6.4) από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & Z_{n+1}(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[r, "d_{n+1}|_{Z_{n+1}(\mathbf{C}_\bullet)}"] \arrow[d, hook, "j_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[r, "d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}"] \arrow[d, hook, "j_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, hook, "j_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, two heads, "\check{d}_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, two heads, "\check{d}_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\check{d}_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_n(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[r, "d_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)}"'] \arrow[d] & B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[r, "d_{n-1}|_{B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)}"'] \arrow[d] & B_{n-2}(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

προκύπτει μια βραχεία ακριβής ακολουθία *αλυσωτών συμπλόκων*:

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Z}_\bullet \xrightarrow{j_\bullet} \mathbf{C}_\bullet \xrightarrow{\check{d}_\bullet} \mathbf{B}_{\bullet-1} \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

και από αυτήν (μέσω τής (6.12)) η βραχεία ακριβής ακολουθία *συναλυσωτών συμπλόκων*:

$$\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{B}_{\bullet-1}, M) \xrightarrow{\check{d}^\bullet} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M) \xrightarrow{j^\bullet} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{Z}_\bullet, M) \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet, \quad (6.13)$$

όπου

$$\check{d}^\bullet := \mathrm{Hom}_R(\check{d}_\bullet, \mathrm{id}_M) \ \text{ και } \ j^\bullet := \mathrm{Hom}_R(j_\bullet, \mathrm{id}_M).$$

Για την (6.13) υφίσταται (επί τη βάσει τού θεωρήματος 3.2.30) η μακρά ακριβής ακολουθία *συνομολογίας*:

$$\begin{tikzcd}
& \cdots \arrow[r, "H^{n-1}(j^\bullet)"] & H^{n-1}(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{Z}_\bullet, M)) \arrow[dll, "\delta^{n-1}"'] \\
H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{B}_{\bullet-1}, M)) \arrow[r, "H^n(\check{d}^\bullet)"] & H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)) \arrow[r, "H^n(j^\bullet)"] & H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{Z}_\bullet, M)) \arrow[dll, "\delta^n"'] \\
H^{n+1}(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{B}_{\bullet-1}, M)) \arrow[r, "H^{n+1}(\check{d}^\bullet)"] & \cdots \, .
\end{tikzcd}$$

με τον δ^n ως συνδετικό ομομορφισμό[12]. Εξ ορισμού,

$$H^{n-1}(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{Z}_\bullet, M)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(\underbrace{d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}}_{=0}, \mathrm{id}_M)) / \operatorname{Im}(\mathrm{Hom}_R(\underbrace{d_{n-1}|_{Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)}}_{=0}, \mathrm{id}_M)).$$

[12] Για την αποφυγή εξεζητημένου συμβολισμού, θα θεωρούμε από εδώ και στο εξής αυτόν τον ομομορφισμό ("με προσέγγιση πασιφανούς ισομορφισμού" ως προς τον καθορισμό πεδίων ορισμού και τιμών του) ως μια απεικόνιση $\delta^n : \mathrm{Hom}_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$.

Επειδή $\mathrm{Hom}_R(\, d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}\, , \mathrm{id}_M) = 0 = \mathrm{Hom}_R(\, d_{n-1}|_{Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)}\, , \mathrm{id}_M)$, έχουμε

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(\, d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}\, , \mathrm{id}_M)) = \mathrm{Hom}_R(Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M)$$

και $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(\, d_{n-1}|_{Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)}\, , \mathrm{id}_M)) \cong \{0\}$, απ' όπου συνάγεται ότι

$$H^{n-1}(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{Z}_\bullet, M)) \cong \mathrm{Hom}_R(Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M)$$

και, κατ' αναλογίαν, ότι $H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{Z}_\bullet, M)) \cong \mathrm{Hom}_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$. Παρομοίως (επιχειρηματολογώντας με το $\mathbf{B}_{\bullet-1}$ στη θέση τού $\mathbf{Z}_\bullet$) λαμβάνουμε

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{B}_{\bullet-1}, M)) \cong \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M)$$

και, κατ' αναλογίαν,

$$H^{n+1}(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{B}_{\bullet-1}, M)) \cong \mathrm{Hom}_R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M).$$

Έτσι, η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία γράφεται ("με προσέγγιση πασιφανών ισομορφισμών") ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
& \cdots \arrow[r, "H^{n-1}(j^\bullet)"] & \mathrm{Hom}_R(Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[dll, "\delta^{n-1}"'] \\
\mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, "H^n(\check{d}^\bullet)"] & H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)) \arrow[r, "H^n(j^\bullet)"] & \mathrm{Hom}_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[dll, "\delta^n"'] \\
\mathrm{Hom}_R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, "H^{n+1}(\check{d}^\bullet)"] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

Κατόπιν τούτου, παρατηρούμε ότι η 2η *μακρά* ακριβής Ext-ακολουθία η επαγομένη μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow B_n(\mathbf{C}_\bullet) \overset{\iota_n}{\hookrightarrow} Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \overset{\pi_n}{\twoheadrightarrow} H_n(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \{0\} \tag{6.14}$$

(όπου $\pi_n := \pi^{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)}$) δίδει την

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\pi_n, \mathrm{id}_M)"] & \mathrm{Hom}_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\iota_n, \mathrm{id}_M)"] & \mathrm{Hom}_R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[dll, "\tilde{\partial}^0"'] \\
& \mathrm{Ext}^1_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

διότι (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Ext}^1_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \cong \{0\}$. (Βλ. θεώρημα 5.2.10.) Τοποθετούμε τις ανωτέρω στη 2η και στην 3η στήλη τού *μεγάλου διαγράμματος*:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \vdots \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{Hom}_R(Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(\iota_{n-1}, \mathrm{id}_M)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[d, "\delta^{n-1}"] & & \\
 & \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\tilde{\partial}^0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[d, "H^n(\check{d}^\bullet)"] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, dashed, "\varphi^n"] \arrow[d] & H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)) \arrow[r, dashed, "\psi^n"] \arrow[d, "H^n(j^\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(\pi_n, \mathrm{id}_M)"] & \{0\} \\
 & \{0\} & \mathrm{Hom}_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta^n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(\iota_n, \mathrm{id}_M)"] & \\
 & & \mathrm{Hom}_R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[d, "\tilde{\partial}^0"] & \\
 & & \vdots & \mathrm{Ext}^1_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[d] & \\
 & & & \{0\} &
\end{tikzcd}
$$

Η πρώτη στήλη αυτού είναι ωσαύτως ακριβής, εκ νέου λόγω τής 2ης μακράς ακριβούς Ext-ακολουθίας τής επαγομένης μέσω τής (6.14) (υποκαθιστώντας τον $n-1$ με τον n).

Εστιάζουμε τώρα περισσότερο στη μελέτη τού συνδετικού ομομορφισμού δ^n (στην ειδική περίπτωση που πραγματευόμαστε), εξετάζοντας το κάτωθι διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, "\check{d}^n"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(d_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)}, \mathrm{id}_M)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(C_n, M) \arrow[r, "j^n"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(d_{n+1}, \mathrm{id}_M)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(d_{n+1}|_{Z_{n+1}(\mathbf{C}_\bullet)}, \mathrm{id}_M)"] & \{0\} \arrow[d, equal] \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, "\check{d}^{n+1}"'] & \mathrm{Hom}_R(C_{n+1}, M) \arrow[r, "j^{n+1}"'] & \mathrm{Hom}_R(Z_{n+1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}
$$

Έστω *τυχών* $f \in \mathrm{Hom}_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$. Επειδή ο j^n είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιος $g \in \mathrm{Hom}_R(C_n, M)$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$j^n(g) = f \Longrightarrow g \circ j_n = f \Longleftrightarrow g|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)} = f.$$

Προφανώς,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R(d_{n+1}, \mathrm{id}_M)(g) &= g \circ d_{n+1} = g \circ (\iota_n \circ \check{d}_{n+1}) \\
&= (g \circ \iota_n) \circ \check{d}_{n+1} = \mathrm{Hom}_R(\check{d}_{n+1}, \mathrm{id}_M)(g \circ \iota_n).
\end{aligned}
$$

Από τον (φυσικό) τρόπο ορισμού τού δ^n λαμβάνουμε

$$\delta^n(f) = g \circ \iota_n = \mathrm{Hom}_R(\iota_n, \mathrm{id}_M)(g) = g|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)},$$
$$g|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)} = f \Rightarrow g|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)} = f|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)} = f \circ \iota_n = \mathrm{Hom}_R(\iota_n, \mathrm{id}_M)(f),$$

οπότε

$$\delta^n = \mathrm{Hom}_R(\iota_n, \mathrm{id}_M), \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{6.15}$$

Σύμφωνα με την πρόταση 3.1.13 (με τους $\mathrm{Hom}_R(\iota_{n-1}, \mathrm{id}_M)$ και $\widetilde{\partial}^0$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων ομομορφισμών f' και f, αντιστοίχως, και με τους δ^{n-1} και $H^n(\check{d}^\bullet)$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων ομομορφισμών g' και g, αντιστοίχως) υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$\varphi^n : \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)) =: H^n(\mathbf{C}_\bullet; M)$$

ο οποίος συμπληρώνει το προηγηθέν *μεγάλο διάγραμμα* μεταθετικώς. Επίσης, σύμφωνα με την πρόταση 3.1.11 (με τους $H^n(j^\bullet)$ και δ^n στη θέση των εκεί παρατεθέντων f' και f, αντιστοίχως, και με τους $\mathrm{Hom}_R(\pi_n, \mathrm{id}_M)$ και $\mathrm{Hom}_R(\iota_n, \mathrm{id}_M)$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων g' και g, αντιστοίχως) υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$\psi^n : H^n(\mathbf{C}_\bullet; M) := H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$$

ο οποίος συμπληρώνει το *μεγάλο διάγραμμα* μεταθετικώς. Κατά το «λήμμα των τεσσάρων» 3.1.7 (ii) (και αντιστοίχως, 3.1.7 (i)) ο φ^n (και αντιστοίχως, ο ψ^n) είναι μονομορφισμός (και αντιστοίχως, επιμορφισμός). Αρκεί λοιπόν να δειχθεί η ακρίβεια τής σχηματιζομένης βραχείας ακολουθίας (μέσω των διακεκομμένων βελών) στον μεσαίο όρο $H^n(\mathbf{C}_\bullet; M) := H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M))$. Από την πρόταση 3.1.5, εφαρμοζόμενη για τους πέντε όρους που έχουν αναγραφεί στη δεύτερη στήλη τού *μεγάλου διαγράμματος*, λαμβάνουμε βραχείες ακριβείς ακολουθίες:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\delta^{n-1}) & \overset{\alpha^n}{\hookrightarrow} & H^n(\mathbf{C}_\bullet; M) & \overset{\beta^n}{\twoheadrightarrow} & \mathrm{Ker}(\delta^n) & \longrightarrow & \{0\} \\ & & \shortparallel & & & & \shortparallel & & \\ & & \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M)/\mathrm{Im}(\delta^{n-1}) & & & & \mathrm{Im}(H^n(j^\bullet)) & & \end{array} \tag{6.16}$$

όπου

$$\alpha^n(x + \mathrm{Im}(\delta^{n-1})) := H^n(\check{d}^\bullet)(x), \ \forall x \in \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M),$$

και $\beta^n(y) := H^n(j^\bullet)(y)$, $\forall y \in H^n(\mathbf{C}_\bullet; M)$. Από την ακρίβεια τής

$$\mathrm{Hom}_R(Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\iota_{n-1}, \mathrm{id}_M)} \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \xrightarrow{\widetilde{\partial}^0} \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \longrightarrow \{0\}$$

συνάγεται (βάσει τού (ii) τής προτάσεως 3.1.4) ότι

$$\mathrm{Coker}(\delta^{n-1}) \underset{(6.15)}{=} \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_R(\iota_n, \mathrm{id}_M)) \cong \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \tag{6.17}$$

και από την ακρίβεια τής

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi_n, \mathrm{id}_M)} \mathrm{Hom}_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\iota_n, \mathrm{id}_M)} \mathrm{Hom}_R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$$

συνάγεται (βάσει τού (i) τής προτάσεως 3.1.4) ότι

$$\mathrm{Ker}(\delta^n) \underset{(6.15)}{=} \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(\iota_n, \mathrm{id}_M)) \cong \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M). \tag{6.18}$$

Από τις (6.16), (6.17) και (6.18) προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Coker}(\delta^{n-1}) \arrow[r, hook, "\alpha^n"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)) \arrow[r, two heads, "\beta^n"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Ker}(\delta^n) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \{0\} \arrow[d, equal] \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, "\varphi^n"] & H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)) \arrow[r, "\psi^n"] & \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Επειδή η άνω γραμμή του είναι ακριβής, *και* η κάτω του γραμμή οφείλει να είναι ακριβής.

(ii) Για οιονδήποτε $n \in \mathbb{Z}$ ο R-μόδιος C_n είναι προβολικός. Επειδή ο R είναι εξ υποθέσεως κληρονομικός, οι υπομόδιοί του $Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι ωσαύτως προβολικοί. Από το θεώρημα 5.2.11 έπεται ότι

$$\mathrm{Ext}^1_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \cong \{0\} \cong \mathrm{Ext}^1_R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$$

και από το (i) ότι η (6.11) είναι ακριβής. Για την απόδειξη τού ότι αυτή διασπάται θα απαιτηθεί να εστιάσουμε ακριβέστερα στον τρόπο ορισμού τού ψ^n. Μεταβαίνοντας από το αλυσωτό σύμπλοκο

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots$$

στο συναλυσωτό σύμπλοκο

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C_{n-1}, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(d_n, \mathrm{id}_M)} \mathrm{Hom}_R(C_n, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(d_{n+1}, \mathrm{id}_M)} \mathrm{Hom}_R(C_{n+1}, M) \longrightarrow \cdots$$

έχουμε $H^n(\mathbf{C}_\bullet; M) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d_{n+1}, \mathrm{id}_M))/\,\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(d_n, \mathrm{id}_M))$. Έστω *τυχών* $f_n \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d_{n+1}, \mathrm{id}_M))$ και έστω $\overline{f_n} := f_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)} = f_n \circ j_n$. Προφανώς,

$$f_n \circ d_{n+1} = 0 \Rightarrow f_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)} = \overline{f_n}|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)} = 0,$$

οπότε η

$$\begin{aligned} g_n : H_n(\mathbf{C}_\bullet) &\longrightarrow M \\ x + B_n(\mathbf{C}_\bullet) &\longmapsto g_n(x + B_n(\mathbf{C}_\bullet)) := \overline{f_n}(x),\ \forall x \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet), \end{aligned}$$

είναι καλώς ορισμένη απεικόνιση[13] και, εκ παραλλήλου, ομομορφισμός R-μοδίων. Ορίζοντας τον ομομορφισμό

$$\psi^n : H^n(\mathbf{C}_\bullet; M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$$

[13] Εάν $h_n \in \mathrm{Hom}_R(C_{n-1}, M)$, τότε $h_n \circ d_n \in \mathrm{Hom}_R(C_n, M)$ και $(h_n \circ d_n) \circ d_{n+1} = h_n \circ (\underbrace{d_n \circ d_{n+1}}_{=0}) = 0$, οπότε $h_n \circ d_n \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d_{n+1}, \mathrm{id}_M))$ και για κάθε $x \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ έχουμε $\overline{h_n \circ d_n}(x) = (h_n \circ d_n)(x) = 0_{C_n}$. Κατά συνέπειαν, ο ορισμός τής g_n *δεν εξαρτάται από την όποια συγκεκριμένη επιλογή τού* f_n.

μέσω τού τύπου

$$\psi^n(f_n + \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(d_n, \mathrm{id}_M)) := g_n$$

παρατηρούμε αφ' ενός μεν ότι

$$\mathrm{Hom}_R(\pi_n, \mathrm{id}_M)(\psi^n(f_n + \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(d_n, \mathrm{id}_M))) = \mathrm{Hom}_R(\pi_n, \mathrm{id}_M)(g_n) = g_n \circ \pi_n,$$

αφ' ετέρου δε ότι

$$H^n(j^\bullet)(f_n + \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(d_n, \mathrm{id}_M)) = f_n \circ j_n,$$

οπότε *για κάθε* στοιχείο $x \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ λαμβάνουμε

$$(f_n \circ j_n)(x) = \overline{f_n}(x) =: g_n(x + B_n(\mathbf{C}_\bullet)) = (g_n \circ \pi_n)(x).$$

Κατά συνέπειαν, ο ανωτέρω ψ^n είναι πράγματι ο *μονοσημάντως ορισμένος* ομομορφισμός οορισθείς στο (i) που ικανοποιεί την

$$\mathrm{Hom}_R(\pi_n, \mathrm{id}_M) \circ \psi^n = H^n(j^\bullet)$$

και συμπληρώνει το *μεγάλο διάγραμμα* μεταθετικώς. Επειδή ο $B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)$, ως υπομόδιος τού προβολικού R-μοδίου C_n, είναι προβολικός, το θεώρημα 4.2.7 μας πληροφορεί ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \overset{j_n}{\hookrightarrow} C_n \overset{\check{d}_n}{\twoheadrightarrow} B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \{0\}$$

διασπάται στον όρο C_n. Ας υποθέσουμε ότι $\kappa_n : C_n \longrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων ο οποίος αποτελεί αριστερό αντίστροφο τού j_n. (Βλ. θεώρημα 3.1.29.) Τότε

$$\kappa_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)} = \kappa_n \circ j_n = \mathrm{id}_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}.$$

Θεωρούμε *τυχόντα* ομομορφισμό $\lambda_n \in \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$. Προφανώς,

$$\lambda_n \circ \pi_n \in \mathrm{Hom}_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M).$$

Ισχυρισμός πρώτος: $(\lambda_n \circ \pi_n \circ \kappa_n) \circ d_{n+1} = 0$. Πράγματι· για κάθε $x \in C_{n+1}$ έχουμε

$$d_n(d_{n+1}(x)) = (\underbrace{d_n \circ d_{n+1}}_{=0})(x) = 0_{C_{n-1}} \Longrightarrow d_{n+1}(x) \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$$

και, ως εκ τούτου, $\kappa_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)} = \mathrm{id}_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)} \Longrightarrow \kappa_n(d_{n+1}(x)) = d_{n+1}(x)$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
&(\lambda_n \circ \pi_n \circ \kappa_n)(d_{n+1}(x)) = (\lambda_n \circ \pi_n)(\kappa_n(d_{n+1}(x))) = (\lambda_n \circ \pi_n)(d_{n+1}(x)) \\
&= \lambda_n(\pi_n(d_{n+1}(x))) = \lambda_n(\pi_n(d_{n+1}(x))) = \lambda_n(\underbrace{d_{n+1}(x)}_{\in B_n(\mathbf{C}_\bullet)} + B_n(\mathbf{C}_\bullet)) \\
&= \lambda_n(B_n(\mathbf{C}_\bullet)) = \lambda_n(0_{H_n(\mathbf{C}_\bullet)}) = 0_M
\end{aligned}$$

και ο ισχυρισμός είναι αληθής. Άρα $\lambda_n \circ \pi_n \circ \kappa_n \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d_{n+1}, \mathrm{id}_M))$ και έχουμε τη δυνατότητα ορισμού μιας απεικονίσεως

$$\vartheta^n : \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \longrightarrow H^n(\mathbf{C}_\bullet; M)$$
$$\lambda_n \longmapsto \vartheta^n(\lambda_n) := \lambda_n \circ \pi_n \circ \kappa_n + \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(d_{n+1}, \mathrm{id}_M)),$$

η οποία (όπως είναι εύκολο να ελεγχθεί) είναι *και* ομομορφισμός R-μοδίων.

Ισχυρισμός δεύτερος: $\psi^n \circ \vartheta^n = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet),M)}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Για κάθε ομομορφισμό $\lambda_n \in \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$ λαμβάνουμε

$$\psi^n(\vartheta^n(\lambda_n)) = \psi^n(\lambda_n \circ \pi_n \circ \kappa_n + \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(d_{n+1}, \mathrm{id}_M))) = g_n,$$

όπου $g_n \in \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$ με

$$x + B_n(\mathbf{C}_\bullet) \longmapsto g_n(x + B_n(\mathbf{C}_\bullet)) := \overline{\lambda_n \circ \pi_n \circ \kappa_n}(x),\ \forall x \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet),$$

οπότε για κάθε $x \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ έχουμε

$$\begin{aligned} g_n(x + B_n(\mathbf{C}_\bullet)) &= \overline{\lambda_n \circ \pi_n \circ \kappa_n}(x) = (\lambda_n \circ \pi_n)(\kappa_n(\underbrace{j_n(x)}_{\in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)})) \\ &= \lambda_n(\pi_n(j_n(x))) = \lambda_n(\pi_n(x)) = \lambda_n(x + B_n(\mathbf{C}_\bullet)). \end{aligned}$$

Εξ αυτού έπεται ότι $g_n = \lambda_n$, ότι ο δεύτερος ισχυρισμός είναι ωσαύτως αληθής και ότι η (6.11) διασπάται στον όρο $H^n(\mathbf{C}_\bullet; M)$ (εκ νέου λόγω τού θεωρήματος 3.1.29). □

6.1.11 Σημείωση. Ως απεικονίσεις, αμφότερες οι ψ^n και φ^n στη βραχεία ακριβή ακολουθία (6.11) είναι *φυσικές*, υπό την έννοια τού ότι για κάθε αλυσωτό μετασχηματισμό $f_\bullet : \mathbf{C}_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}'_\bullet$ και κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $h : M \longrightarrow M'$ το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet), M) \arrow[r, "\varphi^{n\prime}"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(f_\bullet),h)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}'_\bullet, M)) \arrow[r, "\psi^{n\prime}"] \arrow[d, "H^n(\mathrm{Hom}_R(f_\bullet,h))"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}'_\bullet), M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(H_n(f_\bullet),h)"] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M') \arrow[r, "\varphi^n"] & H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M')) \arrow[r, "\psi^n"] & \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M') \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

Εάν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι κληρονομικός και οι C'_n προβολικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε (κατά το 6.1.10 (ii))

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}'_\bullet, M)) \cong \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet), M) \oplus \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}'_\bullet), M). \tag{6.19}$$

Ωστόσο, αυτή η διάσπαση *δεν είναι κατ' ανάγκην φυσική*, υπό την έννοια τού ότι, εάν οι C_n είναι ωσαύτως προβολικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ήτοι

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M')) \cong \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M') \oplus \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M'), \tag{6.20}$$

και εάν κανείς εκφράσει την εικόνα ενός στοιχείου $\xi \in H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}'_\bullet, M))$ μέσω τού ισομορφισμού (6.19) ως άθροισμα $\xi_1 + \xi_2$ για μονοσημάντως ορισμένα $\xi_1 \in \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet), M)$ και $\xi_2 \in \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}'_\bullet), M)$, τότε η εικόνα τού $H^n(\mathrm{Hom}_R(f_\bullet, h))(\xi)$ μέσω τού ισομορφισμού (6.20) δεν ισούται *κατ' ανάγκην* με το άθροισμα

$$\mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(f_\bullet), h)(\xi_1) + \mathrm{Hom}_R(H_n(f_\bullet), h)(\xi_2).$$

6.1.12 Παράδειγμα. Θέτοντας $R = \mathbb{Z}$, $M = M' = \mathbb{Z}_2$, $h = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}$, και θεωρώντας τά αλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{C}'_\bullet$ *ακριβώς όπως* (αυτά ορίσθηκαν) στο εδάφιο 6.1.7, λαμβάνουμε

$$Z_{m-1}(\mathbf{C}_\bullet) = \mathbb{Z},\;\; B_{m-1}(\mathbf{C}_\bullet) = 2\mathbb{Z},\;\; Z_m(\mathbf{C}_\bullet) \cong B_m(\mathbf{C}_\bullet) \cong \{0\},$$
$$Z_{m-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \cong B_{m-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \cong \{0\},\;\; Z_m(\mathbf{C}'_\bullet) = \mathbb{Z},\;\; B_m(\mathbf{C}'_\bullet) \cong \{0\},$$
$$H_{m-1}(\mathbf{C}_\bullet) \cong \mathbb{Z}_2,\;\; H_m(\mathbf{C}_\bullet) \cong \{0\},\; H_{m-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \cong \{0\},\; H_m(\mathbf{C}'_\bullet) = \mathbb{Z},$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\{0\}, \mathbb{Z}_2) \cong \{0\} \underset{4.2.4\ \&\ 5.2.11}{\cong} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2),$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \underset{5.2.18}{\cong} \mathbb{Z}_2$$

και

$$H_{m-1}(f_\bullet) = H_m(f_\bullet) = 0,$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{m-1}(f_\bullet), \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_m(f_\bullet), \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}) = 0,$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\{0\}, \mathbb{Z}_2) \cong \{0\}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \underset{4.1.3\ \text{(i)}}{\cong} \mathbb{Z}_2 \cong \{0, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2),$$
$$\mathrm{Hom}_R(\underbrace{d_{m+1}}_{=0}, \mathrm{id}_M) = 0,$$
$$H^m(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{C}'_\bullet, \mathbb{Z}_2)) \xrightarrow[H^m(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(f_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_2}))]{\cong} H^m(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{C}_\bullet, \mathbb{Z}_2)),$$

οπότε το μεταθετικό διάγραμμα τού εδ. 6.1.11 (για $n = m$) είναι εκ νέου τής μορφής:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & \{0\} \arrow[r] \arrow[d, phantom, ""] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & \{0\} \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Είναι προφανές ότι η εν λόγω διάσπαση τού $H^m(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{C}'_\bullet, \mathbb{Z}_2))$ *δεν μπορεί να είναι φυσική*.

6.1.13 Πόρισμα. *Έστω K ένα σώμα. Εάν $\mathbf{V}_\bullet = (V_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ένα αλυσωτό σύμπλοκο K-διανυσματικών χώρων και W τυχών K-διανυσματικός χώρος, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε*

$$\boxed{H_n(\mathbf{V}_\bullet; W) \cong H_n(\mathbf{V}_\bullet) \otimes_K W \;\;\text{και}\;\; H^n(\mathrm{Hom}_K(\mathbf{V}_\bullet, W)) \cong \mathrm{Hom}_K(H_n(\mathbf{V}_\bullet), W).}$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τα θεωρήματα 6.1.4 και 6.1.10, διότι σε αυτήν την περίπτωση τα πρώτα γινόμενα στρέψεως και επεκτάσεως (τα εμφανιζόμενα στις (6.3) και (6.11)) είναι προδήλως τετριμμένα. □

Άλλη μία εφαρμογή. Ας υποθέσουμε ότι R είναι μια Π.Κ.Ι. και ότι $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ένα αλυσωτό σύμπλοκο πεπερασμένως παραγομένων, ελευθέρων[14] R-μοδίων. Επειδή $B_n(\mathbf{C}_\bullet) \subseteq Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \subseteq C_n$, οι R-μόδιοι $Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι (δυνάμει τού θεωρήματος 2.5.47 και τού πορίσματος 2.5.49) πεπερασμένως παραγόμενοι και ελεύθεροι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Από την άλλη μεριά, οι μόδιοι ομολογίας $H_n(\mathbf{C}_\bullet) := Z_n(\mathbf{C}_\bullet)/B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι (σύμφωνα με το πόρισμα 2.2.8) ωσαύτως πεπερασμένως παραγόμενοι αλλά *όχι κατ' ανάγκην και ελεύθεροι*[15]. Προφανώς,

$$H_n(\mathbf{C}_\bullet) \underset{2.6.6}{=} \mathrm{tors}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)) \oplus \mathrm{frp}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)) \underset{2.5.42}{\cong} \mathrm{tors}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)) \oplus R^{\text{fr-rank}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet))}.$$

Έστω M *τυχών* πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος. Κατ' αναλογίαν, έχουμε

$$M \underset{2.6.6}{=} \mathrm{tors}(M) \oplus \mathrm{frp}(M) \underset{2.5.42}{\cong} \mathrm{tors}(M) \oplus R^{\text{fr-rank}_R(M)}.$$

Εν συνεχεία, ας υποθέσουμε ότι οι υπομόδιοι στρέψεως των $H_n(\mathbf{C}_\bullet)$, $H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)$ και M είναι μη τετριμμένοι και ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{tors}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)) &\cong \bigoplus_{i=1}^{s}\bigoplus_{\rho=1}^{\lambda_i}\left(R/\left\langle p_i^{\ell_{i,\rho}}\right\rangle\right),\\
\mathrm{tors}(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet)) &\cong \bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\sigma=1}^{\mu_j}\left(R/\left\langle q_j^{m_{j,\sigma}}\right\rangle\right),\\
\mathrm{tors}(M) &\cong \bigoplus_{k=1}^{u}\bigoplus_{\tau=1}^{\nu_k}\left(R/\left\langle r_k^{n_{k,\tau}}\right\rangle\right),
\end{aligned}$$

είναι οι ευθείες αποσυνθέσεις τους στις πρωτεύουσες συνιστώσες τους ακολουθούμενες από τις (μέχρις ισομορφισμού μονοσημάντως ορισμένες) αποσυνθέσεις των εκάστοτε συνιστωσών σε ευθέα αθροίσματα κυκλικών υπομοδίων (όπως στο δομικό θεώρημα 2.6.30).

6.1.14 Πόρισμα. *Για τον n-οστό μόδιο ομολογίας τού $\mathbf{C}_\bullet$ με συντελεστές ειλημμένους από τον M έχουμε*

$$\boxed{\begin{aligned}
H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \cong{}& \left(\bigoplus_{i=1}^{s}\bigoplus_{k=1}^{u}\bigoplus_{\rho=1}^{\lambda_i}\bigoplus_{\tau=1}^{\nu_k}\left(R/\left(\left\langle p_i^{\ell_{i,\rho}}\right\rangle + \left\langle r_k^{n_{k,\tau}}\right\rangle\right)\right)\right)\\
&\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{s}\bigoplus_{\rho=1}^{\lambda_i}\left(R/\left\langle p_i^{\ell_{i,\rho}}\right\rangle\right)\right)^{\text{fr-rank}_R(M)} \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{u}\bigoplus_{\tau=1}^{\nu_k}\left(R/\left\langle r_k^{n_{k,\tau}}\right\rangle\right)\right)^{\text{fr-rank}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet))}\\
&\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{k=1}^{u}\bigoplus_{\sigma=1}^{\mu_j}\bigoplus_{\tau=1}^{\nu_k}\mathrm{Tor}_1^R\left(R/\left\langle q_j^{m_{j,\sigma}}\right\rangle, R/\left\langle r_k^{n_{k,\tau}}\right\rangle\right)\right) \oplus R^{(\text{fr-rank}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet)))(\text{fr-rank}_R(M))},
\end{aligned}}$$

με

$$\boxed{\mathrm{Tor}_1^R\left(R/\left\langle q_j^{m_{j,\sigma}}\right\rangle, R/\left\langle r_k^{n_{k,\tau}}\right\rangle\right) \cong R/\left\langle \mathfrak{d}_{(j,\sigma;k,\tau)}\right\rangle,}$$

όπου $\mathfrak{d}_{(j,\sigma;k,\tau)} \in \mathrm{MK\Delta}_R(q_j^{m_{j,\sigma}}, r_k^{n_{k,\tau}})$.

---

[14] Όταν ο R είναι Π.Κ.Ι., οι έννοιες *ελεύθερος* και *προβολικός* R-μόδιος ταυτίζονται. (Βλ. πρόταση 4.2.4 και πόρισμα 4.2.10.) Επιπλέον, κάθε πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος *χωρίς στρέψη* είναι ελεύθερος. (Βλ. πρόταση 2.6.4.)

[15] Π.χ., οι $\mathbb{Z}$-μόδιοι $\mathbb{Z}$ και $2\mathbb{Z}$ είναι ελεύθεροι αλλά ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$ *δεν είναι ελεύθερος*. (Βλ. εδ. 4.5.32 (iii).)

Απόδειξη. Το θεώρημα 6.1.4 των καθολικών συντελεστών είναι, εν προκειμένω, εφαρμόσιμο και δίδει

$$H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \cong (H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M). \tag{6.21}$$

Ο πρώτος ευθύς προσθετέος τής (6.21) γράφεται (λόγω τού θεωρήματος 4.4.6) ως εξής:

$$\begin{aligned} H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \cong\, & (\mathrm{tors}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes_R \mathrm{tors}(M)) \oplus (\mathrm{tors}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes_R \mathrm{frp}(M)) \\ & \oplus (\mathrm{frp}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes_R \mathrm{tors}(M)) \oplus (\mathrm{frp}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes_R \mathrm{frp}(M)) . \end{aligned} \tag{6.22}$$

Ο πρώτος ευθύς προσθετέος τής (6.22) είναι ο

$$\mathrm{tors}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes_R \mathrm{tors}(M) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{k=1}^{u} \bigoplus_{\rho=1}^{\lambda_i} \bigoplus_{\tau=1}^{\nu_k} \left(R/ \left(\left\langle p_i^{\ell_{i,\rho}} \right\rangle + \left\langle r_k^{n_{k,\tau}} \right\rangle \right) \right)$$

(δυνάμει τού θεωρήματος 4.4.6 και τού πορίσματος 4.5.12), ο δεύτερος είναι ο

$$\mathrm{tors}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes_R \mathrm{frp}(M) \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{\rho=1}^{\lambda_i} \left(R/ \left\langle p_i^{\ell_{i,\rho}} \right\rangle \right) \right)^{\mathrm{fr\text{-}rank}_R(M)},$$

(ένεκα των θεωρημάτων 4.4.6 και 4.4.3), ο τρίτος

$$\mathrm{frp}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes_R \mathrm{tors}(M) \cong \left(\bigoplus_{k=1}^{u} \bigoplus_{\tau=1}^{\nu_k} \left(R/ \left\langle r_k^{n_{k,\tau}} \right\rangle \right) \right)^{\mathrm{fr\text{-}rank}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet))},$$

(για τον ίδιον λόγο) και ο τέταρτος

$$\begin{aligned} \mathrm{frp}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes_R \mathrm{frp}(M) &\cong R^{\mathrm{fr\text{-}rank}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet))} \otimes_R R^{\mathrm{fr\text{-}rank}_R(M)} \\ &\cong R^{(\mathrm{fr\text{-}rank}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet)))(\mathrm{fr\text{-}rank}_R(M))}. \end{aligned}$$

(Βλ. θεώρημα 4.4.7.) Τέλος, ένας μέχρις ισομορφισμού βολικός χαρακτηρισμός τού $\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M)$ αποκτάται μέσω τού θεωρήματος 5.3.17. □

6.1.15 Πόρισμα. *Για τον n-οστό μόδιο συνομολογίας τού $\mathbf{C}_\bullet$ με συντελεστές ειλημμένους από τον M έχουμε*

$$\boxed{\begin{aligned} & H^n(\mathbf{C}_\bullet; M) \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{k=1}^{u} \bigoplus_{\rho=1}^{\lambda_i} \bigoplus_{\tau=1}^{\nu_k} \left(R/ \left\langle d_{(i,\rho;k,\tau)} \right\rangle \right) \right) \\ & \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{\rho=1}^{\lambda_i} \left(R/ \left\langle p_i^{\ell_{i,\rho}} \right\rangle \right) \right)^{\mathrm{fr\text{-}rank}_R(M)} \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{u} \bigoplus_{\tau=1}^{\nu_k} \left(R/ \left\langle r_k^{n_{k,\tau}} \right\rangle \right) \right)^{\mathrm{fr\text{-}rank}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet))} \\ & \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{\sigma=1}^{\mu_j} \left(R/ \left\langle q_j^{m_{j,\sigma}} \right\rangle \right) \right)^{\mathrm{fr\text{-}rank}_R(M)} \oplus R^{(\mathrm{fr\text{-}rank}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet)))(\mathrm{fr\text{-}rank}_R(M))} \\ & \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{k=1}^{u} \bigoplus_{\sigma=1}^{\mu_j} \bigoplus_{\tau=1}^{\nu_k} \mathrm{Ext}_R^1 \left(R/ \left\langle q_j^{m_{j,\sigma}} \right\rangle, R/ \left\langle r_k^{n_{k,\tau}} \right\rangle \right) \right), \end{aligned}}$$

με

$$\boxed{\mathrm{Ext}^1_R(R/\left\langle q_j^{m_{j,\sigma}}\right\rangle, R/\left\langle r_k^{n_{k,\tau}}\right\rangle) \cong R/\left\langle \mathfrak{d}_{(j,\sigma;k,\tau)}\right\rangle,}$$

όπου $d_{(i,\rho;k,\tau)} \in \mathrm{MK\Delta}_R(p_i^{\ell_{i,\rho}}, r_k^{n_{k,\tau}})$ *και*

$$\mathfrak{d}_{(j,\sigma;k,\tau)} \in \mathrm{MK\Delta}_R(q_j^{m_{j,\sigma}}, r_k^{n_{k,\tau}}).$$

Αποδειξη. Το θεώρημα 6.1.10 των καθολικών συντελεστών είναι, εν προκειμένω, εφαρμόσιμο και δίδει

$$H^n(\mathbf{C}_\bullet; M) \cong \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \oplus \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M). \tag{6.23}$$

Ο πρώτος ευθύς προσθετέος τής (6.23) γράφεται (λόγω τής προτάσεως 4.1.11 και τού (ii) τής σημειώσεως 2.4.11) ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M) &\cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{tors}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)), \mathrm{tors}(M)) \oplus \mathrm{Hom}_R(\mathrm{tors}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)), \mathrm{frp}(M)) \\ &\oplus \mathrm{Hom}_R(\mathrm{frp}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)), \mathrm{tors}(M)) \oplus \mathrm{Hom}_R(\mathrm{frp}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)), \mathrm{frp}(M)).\end{aligned} \tag{6.24}$$

Ο πρώτος ευθύς προσθετέος τής (6.24) είναι ο

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{tors}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)), \mathrm{tors}(M)) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{k=1}^{u} \bigoplus_{\rho=1}^{\lambda_i} \bigoplus_{\tau=1}^{\nu_k} \mathrm{Hom}_R(R/\left\langle p_i^{\ell_{i,\rho}}\right\rangle, R/\left\langle r_k^{n_{k,\tau}}\right\rangle),$$

όπου (δυνάμει τής προτάσεως 5.2.14 και τού λήμματος 5.2.15)

$$\mathrm{Hom}_R(R/\left\langle p_i^{\ell_{i,\rho}}\right\rangle, R/\left\langle r_k^{n_{k,\tau}}\right\rangle) \cong R/\left\langle d_{(i,\rho;k,\tau)}\right\rangle, \ \ d_{(i,\rho;k,\tau)} \in \mathrm{MK\Delta}_R(p_i^{\ell_{i,\rho}}, r_k^{n_{k,\tau}}),$$

ο δεύτερος είναι ο

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{tors}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)), \mathrm{frp}(M)) \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{\rho=1}^{\lambda_i} \underbrace{\mathrm{Hom}_R(R/\left\langle p_i^{\ell_{i,\rho}}\right\rangle, R)}_{\cong R/\left\langle p_i^{\ell_{i,\rho}}\right\rangle} \right)^{\text{fr-rank}_R(M)},$$

(για τον ίδιον λόγο), ο τρίτος ο

$$\mathrm{Hom}_R((\mathrm{frp}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)), \mathrm{tors}(M)) \cong \left(\bigoplus_{k=1}^{u} \bigoplus_{\tau=1}^{\nu_k} \underbrace{\mathrm{Hom}_R(R, R/\left\langle r_k^{n_{k,\tau}}\right\rangle)}_{\cong R/\left\langle r_k^{n_{k,\tau}}\right\rangle} \right)^{\text{fr-rank}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet))}$$

και ο τέταρτος ο

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{frp}(H_n(\mathbf{C}_\bullet)), \mathrm{frp}(M)) \cong R^{(\text{fr-rank}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet)))(\text{fr-rank}_R(M))}.$$

(Βλ. πρόταση 4.1.2.) Τέλος, ένας μέχρις ισομορφισμού βολικός χαρακτηρισμός τού $\mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M)$ αποκτάται μέσω τού θεωρήματος 5.2.16. □

6.2 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ KÜNNETH ΓΙΑ ΜΟΔΙΟΥΣ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

Παρά το γεγονός ότι το θεώρημα καθολικών συντελεστών 6.1.4 εξασφαλίζει τη δυνατότητα ορισμού μοδίων ομολογίας (ή και *θεωριών ομολογίας*) με συντελεστές ειλημμένους από *τυχόντες* R-μοδίους (κάτι που αποβαίνει λίαν χρήσιμο στο πλαίσιο τής Αλγεβρικής Τοπολογίας), δεν αποτελεί παρά *ένα πρώτο βήμα* για την κατανόηση τού βασικού ερωτήματος: *Πώς σχετίζονται οι μόδιοι ομολογίας τού τανυστικού γινομένου* $(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet$ *δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων* $\mathbf{C}_\bullet$ *και* $\mathbf{D}_\bullet$ (και όχι απλώς ενός αλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{C}_\bullet$ με κάποιον *παγιωμένο* R-μόδιο M) *με τους μοδίους ομολογίας καθενός εξ αυτών;* «Ευειδείς απαντήσεις» σε αυτό το ερώτημα δίδονται μόνον *υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις* ή *υπό συγκεκριμένους περιορισμούς* (που άλλοτε αφορούν σε *ειδικές ιδιότητες* των $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$, και άλλοτε *στη φύση τού δακτυλίου αναφοράς* R) και εμφανίζονται ως διάφορες αλγεβρικές εκδοχές τού λεγομένου *θεωρήματος τού Künneth για μοδίους ομολογίας*. Όπως είναι φυσικό, προτάσσεται η παράθεση τού τρόπου ορισμού τού «τανυστικού γινομένου» *σε επίπεδο αλυσωτών συμπλόκων*.

6.2.1 Ορισμός (Τανυστικό γινόμενο δύο αλυσωτών συμπλόκων). Δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$ (με τα μέλη των ακολουθιών τους συμβολιζόμενα ως C_n και D_n, $n \in \mathbb{Z}$, και με τους συνοριακούς τελεστές τους συμβολιζόμενους ως $d_n^{\mathbf{C}_\bullet}$ και $d_n^{\mathbf{D}_\bullet}$, $n \in \mathbb{Z}$, αντιστοίχως), ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τον R-μόδιο

$$\boxed{(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_n := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} (C_p \otimes_R D_{n-p}) = \bigoplus_{p+q=n} (C_p \otimes_R D_q).}$$

Το ζεύγος

$$(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet = ((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_n, \mathfrak{d}_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

όπου ο ομομορφισμός

$$\mathfrak{d}_n = \mathfrak{d}_n^{(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet} : (\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_n \longrightarrow (\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_{n-1}$$

ορίζεται σε επίπεδο αποσυντιθέμενων τανυστών $x \otimes y \in C_p \otimes_R D_q$ ως εξής:

$$\mathfrak{d}_n(x \otimes y) := x \otimes d_q^{\mathbf{D}_\bullet}(y) + (-1)^q \, d_p^{\mathbf{C}_\bullet}(x) \otimes y,$$

καλείται **τανυστικό γινόμενο των $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$ υπεράνω τού** R (και αποτελεί αφ' εαυτού ένα αλυσωτό σύμπλοκο με τους $\mathfrak{d}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, ως συνοριακούς του τελεστές). Σημειωτέον ότι, εάν $f_\bullet : \mathbf{C}_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{D}_\bullet \longrightarrow \mathbf{D}'_\bullet$ είναι δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί, τότε ορίζεται ως

$$\boxed{(f_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_\bullet : (\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet \longrightarrow (\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{D}'_\bullet)_\bullet}$$

ο *επαγόμενος* αλυσωτός μετασχηματισμός

$$\big((f_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_n : (\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_n \longrightarrow (\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{D}'_\bullet)_n\big)_{n\in\mathbb{Z}},$$

όπου για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : p+q=n$, ο $(f_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_n$ συμβολίζει τον *μονοσημάντως ορισμένο* ομομορφισμό που καθιστά το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_n \arrow[rr, dashed, "(f_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_n"] & & (\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{D}'_\bullet)_n \\
\arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & & \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \\
C_p \otimes_R D_q \arrow[uu, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"] \arrow[rruu, "\mathrm{in}'_{p,q}\circ f_p \overline{\otimes} g_q" description] \arrow[rr, "f_p \overline{\otimes} g_q"'] & & C'_p \otimes_R D'_q \arrow[uu, hook, "\mathrm{in}'_{p,q}"']
\end{tikzcd}$$

Ο ορισμός 6.2.1 γενικεύεται και για «γινόμενα στρέψεως» *σε επίπεδο αλυσωτών συμπλόκων*.

6.2.2 Ορισμός (Γινόμενα στρέψεως δύο αλυσωτών συμπλόκων). Δοθέντων ενός $m \in \mathbb{Z}$ και δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$ (με τα μέλη των ακολουθιών τους συμβολιζόμενα εκ νέου ως C_n και D_n, $n \in \mathbb{Z}$, και με τους συνοριακούς τελεστές τους συμβολιζόμενους ως $d_n^{\mathbf{C}_\bullet}$ και $d_n^{\mathbf{D}_\bullet}$, $n \in \mathbb{Z}$, αντιστοίχως), ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τον R-μόδιο

$$\boxed{\mathrm{Tor}_m^R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)_n := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tor}_m^R(C_p, D_{n-p}) = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Tor}_m^R(C_p, D_q).}$$

Το ζεύγος $\mathrm{Tor}_m^R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)_\bullet = (\mathrm{Tor}_m^R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)_n, \mathfrak{d}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου ο ομομορφισμός

$$\mathfrak{d}_n = \mathfrak{d}_n^{\mathrm{Tor}_m^R(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)_\bullet} : \mathrm{Tor}_m^R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)_n \longrightarrow \mathrm{Tor}_m^R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)_{n-1}$$

ορίζεται (μέσω των ομομορφισμών τού εδ. 5.3.6) επί τού (εκάστοτε γινομένου στρέψεως) $\mathrm{Tor}_m^R(C_p, D_q)$ ως εξής:

$$\mathfrak{d}_n|_{\mathrm{Tor}_m^R(C_p,D_q)} := \mathrm{Tor}_m^R(\mathrm{id}_{C_p}, d_q^{\mathbf{D}_\bullet}) + (-1)^q\, \mathrm{Tor}_m^R(d_p^{\mathbf{C}_\bullet}, \mathrm{id}_{D_q}),$$

καλείται m**-οστό γινόμενο στρέψεως των** $\mathbf{C}_\bullet$ **και** $\mathbf{D}_\bullet$ **υπεράνω τού** R (και αποτελεί αφ' εαυτού ένα αλυσωτό σύμπλοκο με τους $\mathfrak{d}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, ως συνοριακούς του τελεστές).

6.2.3 Συμβολισμός. Για κάθε ζεύγος αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ συμβολίζουμε ως

$$Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \xhookrightarrow{j_n^{\mathbf{C}_\bullet}} C_n, \qquad Z_n(\mathbf{D}_\bullet) \xhookrightarrow{j_n^{\mathbf{D}_\bullet}} D_n$$

τις συνήθεις ενθέσεις, ως

$$Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \xrightarrow{\pi_n^{\mathbf{C}_\bullet}} \!\!\!\!\rightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet), \qquad Z_n(\mathbf{D}_\bullet) \xrightarrow{\pi_n^{\mathbf{D}_\bullet}} \!\!\!\!\rightarrow H_n(\mathbf{D}_\bullet),$$

τους φυσικούς επιμορφισμούς και ως $C_n \xrightarrow{\check{d}_n^{\mathbf{C}_\bullet}} \!\!\!\!\rightarrow B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), D_n \xrightarrow{\check{d}_n^{\mathbf{D}_\bullet}} \!\!\!\!\rightarrow B_{n-1}(\mathbf{D}_\bullet)$ τους επιμορφισμούς τους δημιουργούμενους από τους συνοριακούς τελεστές των ανωτέρω αλυσωτών συμπλόκων ύστερα από περιορισμό τού πεδίου τιμών αυτών επί τής εικόνας τους. Επιπροσθέτως, θέτουμε $j_\bullet^{\mathbf{C}_\bullet} := (j_n^{\mathbf{C}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $j_\bullet^{\mathbf{D}_\bullet} := (j_n^{\mathbf{D}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\pi_\bullet^{\mathbf{C}_\bullet} := (\pi_n^{\mathbf{C}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\pi_\bullet^{\mathbf{D}_\bullet} := (\pi_n^{\mathbf{D}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ κ.ο.κ., και θεωρούμε τα αλυσωτά σύμπλοκα[16] $H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet)$, τα υποσύμπλοκα $Z_\bullet(\mathbf{C}_\bullet)$, $B_\bullet(\mathbf{C}_\bullet)$ τού $\mathbf{C}_\bullet$ και $Z_\bullet(\mathbf{D}_\bullet)$, $B_\bullet(\mathbf{D}_\bullet)$ τού $\mathbf{D}_\bullet$ (τα καθοριζόμενα μέσω των κυκλημάτων και των συνόρων), καθώς και τα αλυσωτά σύμπλοκα

$$\left(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet)\right)_\bullet \ \text{ και } \ H_\bullet((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet).$$

6.2.4 Λήμμα. *Υπάρχει ακριβώς ένας αλυσωτός μετασχηματισμός*

$$\boxed{\left(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet)\right)_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}} H_\bullet((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet)}$$

που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα αλυσωτών μετασχηματισμών μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
Z_\bullet((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, two heads, "\pi_\bullet^{(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R\mathbf{D}_\bullet)_\bullet}"] & H_\bullet((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet) \\
\left(Z_\bullet(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R Z_\bullet(\mathbf{D}_\bullet)\right)_\bullet \arrow[u, "(j_\bullet^{\mathbf{C}_\bullet}\overline{\otimes} j_\bullet^{\mathbf{D}_\bullet})_\bullet"] \arrow[ur, "\pi_\bullet^{(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R\mathbf{D}_\bullet)_\bullet} \circ (j_\bullet^{\mathbf{C}_\bullet}\overline{\otimes} j_\bullet^{\mathbf{D}_\bullet})_\bullet" description] \arrow[r, "(\pi_\bullet^{\mathbf{C}_\bullet}\overline{\otimes}\pi_\bullet^{\mathbf{D}_\bullet})_\bullet"'] & \left(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet)\right)_\bullet \arrow[u, dashed, "\psi_\bullet^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}"']
\end{tikzcd}$$

*Η απεικόνιση $\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}$ είναι **φυσική** υπό την εξής έννοια[17]: Εάν $f_\bullet : \mathbf{C}_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{D}_\bullet \longrightarrow \mathbf{D}'_\bullet$ είναι δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί, τότε το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd}
\left(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet)\right)_n \arrow[r, "\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}"] \arrow[d, "\left(H_\bullet(f_\bullet)\overline{\otimes}H_\bullet(g_\bullet)\right)_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet) \arrow[d, "H_n((f_\bullet\overline{\otimes}g_\bullet)_\bullet)"] \\
\left(H_\bullet(\mathbf{C}'_\bullet) \otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}'_\bullet)\right)_n \arrow[r, "\psi_n^{(\mathbf{C}'_\bullet,\mathbf{D}'_\bullet)}"'] & H_n((\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{D}'_\bullet)_\bullet)
\end{tikzcd}$$

[16] Μέσω οιουδήποτε αλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{C}_\bullet$ ορίζεται το αλυσωτό σύμπλοκο $H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet)$ που έχει ως μέλη του τους μοδίους ομολογίας $H_n(\mathbf{C}_\bullet)$, $n \in \mathbb{Z}$, ενώ όλοι του οι συνοριακοί τελεστές είναι *μηδενικοί*.

[17] Εδώ, η έννοια τής *φυσικότητας* δηλοί (όπως έχουμε ήδη δει στις σημειώσεις 6.1.6 και 6.1.11) τη *συμβατότητα* τής εκάστοτε θεωρούμενης απεικονίσεως με τους ομομορφισμούς που επάγονται μέσω αλυσωτών ή/και συναλυσωτών μετασχηματισμών.

Αποδειξη. Αρκεί η εφαρμογή τού λήμματος A.4.3 και τού θεωρήματος A.4.5 για τον $-\otimes_R -$. □

6.2.5 Σημείωση. Εάν υποτεθεί ότι $n \in \mathbb{Z}$ και $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : p+q = n$, τότε λαμβάνοντας υπ' όψιν το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet) \\
\bigoplus\limits_{p+q=n} (Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R Z_q(\mathbf{D}_\bullet)) \arrow[r, "\bigoplus\limits_{p+q=n} (\pi_p^{\mathbf{C}_\bullet} \overline{\otimes} \pi_q^{\mathbf{D}_\bullet})"] & \bigoplus\limits_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{D}_\bullet)) \arrow[u, "\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)}"'] \\
Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R Z_q(\mathbf{D}_\bullet) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"'] \arrow[r, "\pi_p^{\mathbf{C}_\bullet} \overline{\otimes} \pi_q^{\mathbf{D}_\bullet}"] & H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{D}_\bullet) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"']
\end{tikzcd}$$

αρκεί για οιοδήποτε ζεύγος στοιχείων

$$(x,y) \in H_p(\mathbf{C}_\bullet) \times H_q(\mathbf{D}_\bullet)$$

και για οιοδήποτε ζεύγος $(z,w) \in Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \times Z_q(\mathbf{D}_\bullet)$ με $\pi_p^{\mathbf{C}_\bullet}(z) = x$ και $\pi_q^{\mathbf{D}_\bullet}(w) = y$ να θέσουμε

$$\boxed{\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)}(x \otimes y) := \pi_n^{(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet}(j_p^{\mathbf{C}_\bullet}(z) \otimes j_q^{\mathbf{D}_\bullet}(w)),}$$

παρατηρώντας ότι η έκφραση τού δεξιού μέλους *δεν εξαρτάται* από την επιλογή τού ζεύγους (z,w). (Βλ. εδ. A.4.4 (ii).)

Στο κλασικό σύγγραμμα [29] των Cartan και Eilenberg δίδεται κατ' επανάληψη έμφαση στο ότι είναι πιο πρόσφορο οι διάφορες εκδοχές τού θεωρήματος τού Künneth και οι σχετικές αποδεικτικές τεχνικές να εντάσσονται σε ένα *ευρύτερο εργασιακό πλαίσιο*: Εκείνο ορισμένων *διπλών συναρτητών* που έχουν *τις επιθυμητές ιδιότητες*, χωρίς κανείς να καταφεύγει σε ειδικής φύσεως επιχειρήματα σχετιζόμενα *αποκλειστικώς* με τα "⊗" και "Tor" (και αντιστοίχως με τα "Hom" και "Ext"). Γι' αυτόν τον λόγο, παρότι στην παρούσα και στην επομένη ενότητα *θα παρατεθούν οι συνήθεις* εκδοχές τού θεωρήματος και κάποιες εφαρμογές, οι λεπτομερείς αποδείξεις των *κατηγορικών* γενικεύσεών τους (που εν μέρει διαθέτουν ορισμένα κοινά στοιχεία με τις αποδείξεις των θεωρημάτων καθολικών συντελεστών που έχουμε ήδη δει) έχουν τοποθετηθεί (μαζί με εισαγωγικά σχόλια περί παράγωγων συναρτητών) στο παράρτημα A (προκειμένου να καταστούν αντικείμενο *μιας δεύτερης αναγνώσεως*).

Ξεκινούμε με την *πρώτη εκδοχή* τού θεωρήματος τού Künneth, η οποία περιλαμβάνει την *ισχυρή* προϋπόθεση *τής ισοπεδότητας* των $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$, χωρίς, ωστόσο, να συμπεριλαμβάνει οιουδήποτε είδους περιορισμό ως προς τον δακτύλιο αναφοράς R.

6.2.6 Θεώρημα («Θεώρημα τού Künneth για μοδίους ομολογίας υπό προϋποθέσεις ισοπεδότητας»). *Δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$, ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν οι $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι ισόπεδοι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0}_\bullet \arrow[r] & (H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet))_\bullet \arrow[r, hook, "\psi_\bullet^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}"] & H_\bullet((\mathbf{C}_\bullet\otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet) \arrow[dl, two heads, "\varphi_\bullet^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}"'] & \\
& \operatorname{Tor}_1^R(H_{\bullet-1}(\mathbf{C}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet))_\bullet \arrow[r] & \mathbf{0}_\bullet &
\end{tikzcd}$$

ή, ισοδυνάμως, υφίστανται βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \bigoplus\limits_{p+q=n}(H_p(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R H_q(\mathbf{D}_\bullet)) \arrow[r, hook, "\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}"] & H_n((\mathbf{C}_\bullet\otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet) \arrow[dl, two heads, "\varphi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}"'] & \\
& \bigoplus\limits_{p+q=n-1}\operatorname{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{D}_\bullet)) \arrow[r] & \{0\} &
\end{tikzcd} \tag{6.25}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, με αμφότερες τις $\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}$ και $\varphi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}$ φυσικές, όπου $\psi_\bullet^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}$ είναι ο αλυσωτός μετασχηματισμός τού λήμματος 6.2.4 και

$$\varphi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)} := (\psi_n^{(B_\bullet(\mathbf{C}_{\bullet-1}),\mathbf{D}_\bullet)})^{-1}\circ H_n((\check{d}_\bullet^{\mathbf{C}_\bullet}\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\mathbf{D}_\bullet})_\bullet)^{\check{}}\ ,\ \forall n\in\mathbb{Z}.$$

(ii) *Εάν, πέραν τής ισχύος των προϋποθέσεων τού* (i), *υποτεθεί ότι οι $B_m(\mathbf{D}_\bullet)$ είναι προβολικοί R-μόδιοι για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, τότε οι* (6.25) *είναι διασπώμενες, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε*

$$\boxed{H_n((\mathbf{C}_\bullet\otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet)\cong (H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet))_n\oplus \operatorname{Tor}_1^R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet))_{n-1}} \tag{6.26}$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\boxed{H_n((\mathbf{C}_\bullet\otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet)\cong \Big(\bigoplus_{p+q=n}(H_p(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R H_q(\mathbf{D}_\bullet))\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{p+q=n-1}\operatorname{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{D}_\bullet))\Big).}$$

Μολαταύτα, οι διασπάσεις (6.26) *δεν είναι κατ' ανάγκην φυσικές.*

Απόδειξη. Είναι αρκετό να ελεγχθεί ότι το θεώρημα A.4.22 είναι εφαρμόσιμο για τον συναρτητή $\mathbf{F} = -\otimes_R -$. Σημειωτέον ότι, εάν $\{0\}\longrightarrow A'\longrightarrow A\longrightarrow A''\longrightarrow\{0\}$ είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε (λόγω τής υποθέσεώς μας ότι οι $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι ισόπεδοι) λαμβάνουμε τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\underbrace{\operatorname{Tor}_1^R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), A'')}_{\cong\{0\}}\longrightarrow B_n(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R A'\longrightarrow B_n(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R A\longrightarrow B_n(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R A''\longrightarrow\{0\}$$

$$\text{και} \quad \underbrace{\mathrm{Tor}_1^R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), A'')}_{\cong\{0\}} \longrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R A' \longrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R A \longrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R A'' \longrightarrow \{0\}$$

μέσω τού θεωρήματος 5.3.9 και τού πορίσματος 5.3.14. Είναι δε πρόδηλο ότι οι λοιπές απαιτούμενες συνθήκες ικανοποιούνται από τον εν λόγω $\mathbf{F}$. □

6.2.7 Σημείωση. (i) Σε ορισμένα βιβλία (βλ., π.χ., Rotman [35], Theorem 10.81, σελ. 679-681) αντί τής συνθήκης ισοπεδότητας των $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ συναντά κανείς τη συνθήκη ισοπεδότητας των $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και C_n για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Όμως αυτές οι συνθήκες είναι *ισοδύναμες*, διότι για *τυχόντα* R-μόδιο N η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \xhookrightarrow{j_n^{\mathbf{C}_\bullet}} C_n \xrightarrow{\check{d}_n^{\mathbf{C}_\bullet}} B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \{0\}.$$

μας οδηγεί (μέσω τού θεωρήματος 5.3.10) στη δημιουργία τής μακράς ακριβούς ακολουθίας

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Tor}_2^R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), N)}_{\cong\{0\}} \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(C_n, N) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Tor}_1^R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), N)}_{\cong\{0\}} \longrightarrow \cdots$$

οπότε $\mathrm{Tor}_1^R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), N) \cong \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(C_n, N) \cong \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. πόρισμα 5.3.14.)

(ii) Η πλέον *κλασική* εκδοχή τού θεωρήματος τού Künneth (που παρατίθεται στα περισσότερα βιβλία Αλγεβρικής Τοπολογίας) είναι αυτή τού πορίσματος 6.2.8. Εν προκειμένω, κανείς περιορίζεται στην κλάση των *περιοχών κυρίων ιδεωδών,* έχοντας στη διάθεσή του τη δυνατότητα εφαρμογής τού θεωρήματος 2.5.47. Αρκεί λοιπόν (για την προσδοκώμενη απόδειξη να τεθεί) ως μόνη προϋπόθεση η *ελευθερία* τού ενός (για την κατασκευή τής (6.27)) ή και των δύο (για τη διάσπαση τής (6.27)) εκ των εκάστοτε θεωρούμενων αλυσωτών συμπλόκων $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$.

6.2.8 Πόρισμα («Κλασική εκδοχή τού θεωρήματος τού Künneth για μοδίους ομολογίας»). *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$, εκ των οποίων το $\mathbf{C}_\bullet$ είναι ελεύθερο* (βλ. εδ. 3.5.19), *ισχύουν τα εξής:*

(i) *Υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\{0\} \to \bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{D}_\bullet)) \xhookrightarrow{\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}} H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\varphi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}} \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{D}_\bullet)) \longrightarrow \{0\} \quad (6.27)$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, με τους $\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}$ και $\varphi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}$ όπως στο θεώρημα 6.2.6.

(ii) *Εάν το $\mathbf{D}_\bullet$ είναι ωσαύτως ελεύθερο, τότε η (6.27) είναι διασπώμενη, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε*

$$\boxed{H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet) \cong (H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet))_n \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet))_{n-1}\,.}$$

Απόδειξη. Το (i) έπεται ύστερα από εφαρμογή τού A.4.25 (i) για τον συναρτητή $\mathbf{F} = - \otimes_R -$. Για το (ii) είναι αρκετό κανείς να παρατηρήσει ότι η ελευθερία των αλυσωτών συμπλόκων $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$ συνεπιφέρει (ένεκα τού θεωρήματος 2.5.47) την ελευθερία των R-μοδίων $B_m(\mathbf{C}_\bullet)$ και $B_n(\mathbf{D}_\bullet)$ για κάθε $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, και, κατ' επέκταση, και την προβολικότητα αυτών (μέσω τής προτάσεως 4.2.4), οπότε μπορεί να γίνει απευθείας εφαρμογή τού 6.2.6 (ii). □

6.2.9 Εφαρμογή. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν M, M', M'' είναι τρεις R-μόδιοι, τότε υφίστανται ισομορφισμοί*

$$\boxed{(\mathrm{Tor}_1^R(M,M') \otimes_R M'') \oplus \mathrm{Tor}_1^R(M \otimes_R M', M'') \cong (M \otimes_R \mathrm{Tor}_1^R(M', M'')) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(M, M' \otimes_R M'')}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tor}_1^R(M,M'), M'') \cong \mathrm{Tor}_1^R(M, \mathrm{Tor}_1^R(M', M'')).}$$

Απόδειξη. Επειδή ο R είναι Π.Κ.Ι., υπάρχουν (σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στο εδ. 5.1.2 (ii)) βραχείες ακριβείς ακολουθίες αντιστοιχούσες σε ελεύθερους (ή, ισοδυνάμως, προβολικούς) κερματισμούς:

$$\begin{aligned}
\{0\} \longrightarrow P_1 \hookrightarrow P_0 \twoheadrightarrow M \longrightarrow \{0\},\\
\{0\} \longrightarrow P_1' \hookrightarrow P_0' \twoheadrightarrow M' \longrightarrow \{0\},\\
\{0\} \longrightarrow P_1'' \hookrightarrow P_0'' \twoheadrightarrow M'' \longrightarrow \{0\}.
\end{aligned}$$

Ορίζουμε αλυσωτά σύμπλοκα[18] $\mathbf{C}_\bullet$, $\mathbf{C}'_\bullet$ και $\mathbf{C}''_\bullet$ ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
C_0 := P_0,\ C_1 := P_1,\ C_n \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1\},\\
C_0' := P_0',\ C_1' := P_1',\ C_n' \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1\},\\
C_0'' := P_0'',\ C_1'' := P_1,\ C_n'' \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1\},
\end{aligned}$$

με συνοριακούς τελεστές $d_n^{\mathbf{C}_\bullet}, d_n^{\mathbf{C}'_\bullet}, d_n^{\mathbf{C}''_\bullet}$ μηδενικούς όταν $n \neq 1$ και ίσους με τις ανωτέρω ενθέσεις "$\hookrightarrow$" όταν $n = 1$. Προφανώς,

$$H_0(\mathbf{C}_\bullet) \cong M,\ \ H_0(\mathbf{C}'_\bullet) \cong M',\ \ H_0(\mathbf{C}''_\bullet) \cong M'',$$

ενώ οι λοιποί μόδιοι ομολογίας είναι τετριμμένοι. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.4.5 υφίστανται για κάθε τριάδα ακεραίων αριθμών p, q, r ισομορφισμοί

$$\left(C_p \otimes_R C_q'\right) \otimes_R C_r'' \xrightarrow{\cong} C_p \otimes_R (C_q' \otimes_R C_r''),$$

οπότε σε επίπεδο αλυσωτών συμπλόκων επάγεται αλυσωτός μετασχηματισμός

$$f_\bullet : \left((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet \otimes_R \mathbf{C}''_\bullet\right)_\bullet \longrightarrow \left(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R (\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{C}''_\bullet)_\bullet\right)_\bullet$$

[18] Αυτά *είναι* οι υπονοούμενοι ελεύθεροι κερματισμοί (μαζί με τους επιμορφισμούς "$\twoheadrightarrow$").

που είναι προδήλως ισομορφισμός μεταξύ αυτών και υφίστανται ισομορφισμοί

$$H_n(f_\bullet) : H_n\big(\big((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet \otimes_R \mathbf{C}''_\bullet\big)_\bullet\big) \xrightarrow{\cong} H_n\big(\big(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R (\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{C}''_\bullet)_\bullet\big)_\bullet\big),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(Βλ. σημείωση 3.2.8.) Εφαρμόζοντας το πόρισμα 6.2.8 για το τανυστικό γινόμενο των $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{C}'_\bullet$ λαμβάνουμε

$$H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet) \cong \left(\bigoplus_{p+q=n} \left(H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet)\right)\right) \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\left(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{C}'_\bullet)\right)\right).$$

Τα τανυστικά γινόμενα τού πρώτου ευθέος προσθετέου είναι τετριμμένα όταν $(p,q,n) \neq (0,0,0)$ και τα πρώτα γινόμενα στρέψεως τού δευτέρου ευθέος προσθετέου είναι τετριμμένα όταν $(p,q,n) \neq (0,0,1)$. Επομένως,

$$H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet) \cong \begin{cases} M \otimes_R M', & \text{όταν } n = 0, \\ \mathrm{Tor}_1^R(M, M'), & \text{όταν } n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\}. \end{cases}$$

Εκ νέου εφαρμογή τού πορίσματος 6.2.8 δίδει

$$\begin{aligned} H_n\big(((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet \otimes_R \mathbf{C}''_\bullet)_\bullet\big) \cong & \left(\bigoplus_{p+q=n} \left(H_p((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}''_\bullet)\right)\right) \\ & \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\left(H_p((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet), H_q(\mathbf{C}''_\bullet)\right)\right). \end{aligned}$$

Εδώ, τα τανυστικά γινόμενα (και αντιστοίχως, τα πρώτα γινόμενα στρέψεως) τού πρώτου (και αντιστοίχως, τού δευτέρου) ευθέος προσθετέου είναι τετριμμένα όταν $p \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\}$ ή όταν $q \neq 0$. Απομένουν οι περιπτώσεις όπου

$$(p,q,n) \in \{(0,0,0), (1,0,1), (0,0,1), (1,0,2)\}.$$

Επομένως,

$$H_n\big(((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet \otimes_R \mathbf{C}''_\bullet)_\bullet\big) \cong \begin{cases} (M \otimes_R M') \otimes_R M'', & \text{όταν } n = 0, \\ (\mathrm{Tor}_1^R(M, M') \otimes_R M'') \oplus \mathrm{Tor}_1^R(M \otimes_R M', M''), & \text{όταν } n = 1, \\ \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tor}_1^R(M, M'), M''), & \text{όταν } n = 2, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \notin \{0,1,2\}. \end{cases}$$

Ακολουθώντας ανάλογη συλλογιστική καταλήγουμε, από την άλλη πλευρά, στο εξής:

$$H_n\big((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R (\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{C}''_\bullet)_\bullet)_\bullet\big) \cong \begin{cases} M \otimes_R (M' \otimes_R M''), & \text{όταν } n = 0, \\ (M \otimes_R \mathrm{Tor}_1^R(M', M'')) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(M, M' \otimes_R M''), & \text{όταν } n = 1, \\ \mathrm{Tor}_1^R(M, \mathrm{Tor}_1^R(M', M'')), & \text{όταν } n = 2, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \notin \{0,1,2\}. \end{cases}$$

Αυτά τα αποτελέσματα, εν συνδυασμώ με το ότι οι $H_n(f_\bullet)$ είναι ισομορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, μας οδηγούν αφ' ενός μεν στη γνωστή προσεταιριστικότητα τού "$\otimes_R$" (τού θεωρήματος 4.4.5) για $n = 0$, αφ' ετέρου δε σε δύο «νέους» ισομορφισμούς (για $n \in \{1,2\}$), οι οποίοι δηλούν ένα είδος *γενικευμένης προσεταιριστικότητας* που αφορά στα "$\otimes_R$" και "Tor_1^R". □

▸ **Επέκταση τού τύπου για τρεις όρους.** Ένας γενικότερος *τύπος Künneth* για *τρία* αλυσωτά σύμπλοκα[19] οφείλεται στον Mac Lane[20].

6.2.10 Θεώρημα (S. Mac Lane, 1960). *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν $\mathbf{C}_\bullet$, $\mathbf{C}'_\bullet$ και $\mathbf{C}''_\bullet$ είναι τρία αλυσωτά σύμπλοκα R-μοδίων, με τουλάχιστον δύο εξ αυτών ισόπεδα*[21]*, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχουν υπομόδιοι*

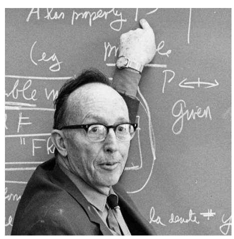
$$L_n \subseteq M_n \subseteq M'_n \subseteq M''_n := H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet \otimes_R \mathbf{C}''_\bullet)_\bullet),$$

τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\boxed{H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet \otimes_R \mathbf{C}''_\bullet)_\bullet) \cong L_n \oplus (M_n/L_n) \oplus (M'_n/M_n) \oplus (M''_n/M'_n),}$$

όπου

$$\boxed{\begin{aligned}
L_n &\cong \bigoplus_{p+q+r=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet) \otimes_R H_r(\mathbf{C}''_\bullet)),\\
M_n/L_n &\cong \bigoplus_{p+q+r=n-1} \left(\mathrm{Tor}_1^R\,(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \otimes_R H_r(\mathbf{C}''_\bullet)\right),\\
M'_n/M_n &\cong \bigoplus_{p+q+r=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet), H_r(\mathbf{C}''_\bullet)),\\
M''_n/M'_n &\cong \bigoplus_{p+q+r=n-2} \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{C}'_\bullet)), H_r(\mathbf{C}''_\bullet)).
\end{aligned}}$$



S. Mac Lane

[19] Βλ. S. Mac Lane: *Triple torsion products and multiple Künneth formulas*, Mathematische Annalen **140** (1960), 51-64.

[20] Mac Lane, *Saunders* (4/8/1909-14/4/2005). Αμερικανός μαθηματικός. Βασικές σπουδές στα Πανεπιστήμια τού Yale (1926-1939) και τού Chicago (1930-1931). Διδακτορική διατριβή υπό τους Hermann Weyl (1885-1955) και Paul Bernays (1888-1977) στο Πανεπιστήμιο τού Göttingen. (Κατετέθη την 19η Ιουλίου και το [υποχρεωτικό] Rigorosum έλαβε χώρα την 26η Μαΐου 1933. Αμέσως μετά ήταν αναγκασμένος να εγκαταλείψει τη Γερμανία, διότι ήδη από τα τέλη Ιανουαρίου 1933 ο A. Hitler είχε αναλάβει καθήκοντα Καγκελαρίου.) Ερευνητικός υπότροφος στο Yale (1933-1934), Pierce-Instructor στο Harvard (1934-1936), Instructor στο Cornell (1936-1937). Tenure track appointment στο Harvard (1938-1947). Καθηγητής από το 1963 έως τη συνταξιοδότησή του (το 1982) τού Πανεπιστημίου τού Chicago. Οι πρώτες εργασίες του αφορούσαν στη Θεωρία Σωμάτων και στη Θεωρία Εκτιμήσεων. Ιδιαίτερα καρποφόρα υπήρξε η κατοπινή συνεργασία του με τους Garett Birkhoff (1911-1996) και Samuel Eilenberg (1913-1998). Με τον δεύτερο υπήρξαν από κοινού οι δημιουργοί τής Θεωρίας Κατηγοριών. Συγγραφέας άνω των 150 ερευνητικών εργασιών (τόσον σε περιοχές τής Λογικής και τής Σύγχρονης Άλγεβρας όσον και τής Τοπολογίας) και πολλών πασίγνωστων (διδακτικών και ερευνητικών) βιβλίων. Υπήρξε επιβλέψας καθηγητής 42 διδακτορικών διατριβών. (Μεταξύ αυτών των διδακτόρων συγκαταλέγοντο οι Irving Kaplansky, Anil Nerode, John Thompson, Robert Solovay, David Eisenbud κ.ά.) Ετιμήθη, μεταξύ άλλων, με τα Humboldt-Forschungspreis, Steele Prize και National Medal of Science.

[21] Ένα αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)$ καλείται **ισόπεδο** όταν οι C_n είναι ισόπεδοι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. (Εδώ, επειδή υπετέθη ότι ο R είναι Π.Κ.Ι., ο C_n είναι ισόπεδος εάν και μόνον εάν στερείται στρέψεως. Βλ. θεώρημα 5.3.22.)

Επιπροσθέτως, ο Mac Lane αναδιευθέτησε (στο ίδιο άρθρο, ιδιαιτέρως για $R = \mathbb{Z}$) αυτόν τον κεντρικό ισομορφισμό, εξαλείφοντας την ασυμμετρία του και μετατρέποντας τους 4 ευθείς προσθετέους σε 3 (μέσω χρήσεως κατάλληλων *τριαδικών* συναρτητών και απευθείας χειρισμού των σχέσεων που ορίζουν τα εκάστοτε μετέχοντα τανυστικά γινόμενα). Τα αποτελέσματά του αυτά γενικεύθηκαν αργότερα (για οσαδήποτε πεπερασμένου πλήθους αλυσωτά σύμπλοκα) από τον Hungerford[22].

▸ **Το πλέον γενικευμένο θεώρημα τού Künneth για δύο όρους**. Κάνοντας χρήση των λεγομένων *ελεύθερων προσεγγίσεων* κανείς μπορεί (για R μια Π.Κ.Ι.) να απαλλαγεί από την προϋπόθεση περί τής ελευθερίας των θεωρούμενων αλυσωτών συμπλόκων στο πόρισμα 6.2.8 και να αρκεσθεί (τόσον για τη δημιουργία όσον και για τη διάσπαση τής επιθυμητής βραχείας ακριβούς ακολουθίας) στην *πολύ ασθενή* συνθήκη (6.28) τής ακυκληματικότητας τού αλυσωτού συμπλόκου $\mathrm{Tor}_1^R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)_\bullet$. (Για την κατηγορική εκδοχή, βλ. θεώρημα A.4.33.) Μάλιστα, μέσω χρησιμοποιήσεως *προβολικών προσεγγίσεων* τούτο (όπως έπεται είτε από κατάλληλη εφαρμογή μιας *φασματικής ακολουθίας* είτε *στοιχειωδώς* από μια εργασία τού Kelly[23]) είναι επεκτάσιμο *ακόμη και εάν* στον δακτύλιο αναφοράς R επιτραπεί να είναι *κληρονομικός*. (Βλ. εδάφιο 4.2.12.)

6.2.11 Θεώρημα («Θεώρημα τού Künneth για μοδίους ομολογίας υπεράνω κληρονομικών R»). *Δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$, όπου ο R είναι κληρονομικός, ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathrm{Tor}_1^R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)_\bullet$ είναι ακυκληματικό, ήτοι*

$$\boxed{H_n(\mathrm{Tor}_1^R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)_\bullet) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z},} \tag{6.28}$$

(πρβλ. εδ. 3.2.3), *τότε υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{D}_\bullet)) \xhookrightarrow{\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}} H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet) \overset{\chi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}}{\twoheadrightarrow} \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{D}_\bullet)) \longrightarrow \{0\} \tag{6.29}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου αμφότερες οι $\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}$ και $\chi_n^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}$ είναι φυσικές (με το $\psi_\bullet^{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)}$ όπως στο λήμμα 6.2.4*).*

(ii) *Η* (6.29) *είναι (άνευ άλλων επιπρόσθετων προϋποθέσεων) διασπώμενη, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε*

$$\boxed{H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet) \cong (H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet))_n \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet))_{n-1}\,.}$$

[22] Βλ. T.W. Hungerford: *Multiple Künneth formulas for abelian groups*, Transactions of the American Mathematical Society **118** (1965), 257-275.

[23] Βλ. G.M. Kelly: *Observations on the Künneth theorem*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **59** (1963), 575-587.

Αποδειξη. Έπεται κατόπιν εφαρμογής τού θεωρήματος A.4.49 για τον διπλό συναρτητή $\mathbf{F} = - \otimes_R -$ και τα αλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$. □

▸ **Ομολογικά σταυρωτά γινόμενα**. Έστω R τυχών μεταθετικός (μη τετριμμένος) δακτύλιος. Δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$ (με τα μέλη των ακολουθιών τους συμβολιζόμενα ως C_n και D_n, $n \in \mathbb{Z}$, και με τους συνοριακούς τελεστές τους συμβολιζόμενους ως $d_n^{\mathbf{C}_\bullet}$ και $d_n^{\mathbf{D}_\bullet}$, $n \in \mathbb{Z}$, αντιστοίχως), καθώς και δυο R-μοδίων M και N, θα μελετήσουμε τον τρόπο συσχετισμού των μοδίων ομολογίας $H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet; M \otimes_R N)$ τού $(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet$ (με συντελεστές ειλημμένους από το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_R N$ των M και N) με τους μόδιους ομολογίας $H_k(\mathbf{C}_\bullet; M)$ και $H_l(\mathbf{D}_\bullet; N)$. Για οιοδήποτε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ υφίσταται κανονιστικός ισομορφισμός

$$(C_p \otimes_R M) \otimes_R (D_q \otimes_R N) \xrightarrow{\cong} (C_p \otimes_R D_q) \otimes_R (M \otimes_R N)$$

(βάσει των θεωρημάτων 4.4.1 και 4.4.5), οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υφίσταται (κατά το θεώρημα 4.4.6) κανονιστικός ισομορφισμός

$$\xi_n : \bigoplus_{p+q=n} ((C_p \otimes_R M) \otimes_R (D_q \otimes_R N)) \xrightarrow{\cong} \left(\bigoplus_{p+q=n} (C_p \otimes_R D_q) \right) \otimes_R (M \otimes_R N)$$

και, σε επίπεδο αλυσωτών συμπλόκων,

$$\xi_\bullet : ((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M) \otimes_R (\mathbf{D}_\bullet \otimes_R N))_\bullet \xrightarrow{\cong} (\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet \otimes_R (M \otimes_R N)$$

απ' όπου προκύπτουν ισομορφισμοί

$$H_n(\xi_\bullet) : H_n(((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M) \otimes_R (\mathbf{D}_\bullet \otimes_R N))_\bullet) \xrightarrow{\cong} H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet; M \otimes_R N)$$

(βλ. εδ. 3.2.8), όπου $H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet; M \otimes_R N) := H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet \otimes_R (M \otimes_R N))$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Από την άλλη πλευρά, επειδή τα $\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M$ και $\mathbf{D}_\bullet \otimes_R N$ είναι αλυσωτά σύμπλοκα, ορίζεται (μέσω τού λήμματος 6.2.4 και τής σημειώσεως 6.2.5) ο ομομορφισμός

$$\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M, \mathbf{D}_\bullet \otimes_R N)} : (H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet; M) \otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet; N))_n \longrightarrow H_n(((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M) \otimes_R (\mathbf{D}_\bullet \otimes_R N))_\bullet)$$

και, κατ' επέκταση, ο ομομορφισμός

$$\boxed{H_n(\xi_\bullet) \circ \psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M, \mathbf{D}_\bullet \otimes_R N)} : (H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet; M) \otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet; N))_n \longrightarrow H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet; M \otimes_R N).} \tag{6.30}$$

6.2.12 Ορισμός. Ο ομομορφισμός (6.30) καλείται n-**οστό ομολογικό σταυρωτό γινόμενο** (homology cross product) των $H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet; M)$ και $H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet; N)$. Ειδικότερα, για οιοδήποτε ζεύγος ακεραίων αριθμών (p,q) και οιοδήποτε ζεύγος στοιχείων $(x,y) \in H_p(\mathbf{C}_\bullet; M) \times H_q(\mathbf{D}_\bullet; N)$, το στοιχείο

$$\boxed{x \times_{\text{ομ.}} y := (H_{p+q}(\xi_\bullet) \circ \psi_{p+q}^{(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M, \mathbf{D}_\bullet \otimes_R N)})(x \otimes y) \in H_{p+q}((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet; M \otimes_R N)}$$

καλείται **ομολογικό σταυρωτό γινόμενο** των x και y.

6.2.13 Θεώρημα. *Εάν ο δακτύλιος R είναι κληρονομικός, τα $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$ ισόπεδα και* $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \{0\}$, *τότε υφίσταται διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & (H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet;M)\otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet;N))_n \arrow[r, hook, "H_n(\xi_\bullet)\circ\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M,\mathbf{D}_\bullet\otimes_R N)}"] & H_n((\mathbf{C}_\bullet\otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet;M\otimes_R N) \arrow[dll, two heads, "\chi_n^{(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M,\mathbf{D}_\bullet\otimes_R N)}\circ H_n(\xi_\bullet)^{-1}"] \\ & \mathrm{Tor}_1^R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M),H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet\otimes_R N))_{n-1} \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, με τους $\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M,\mathbf{D}_\bullet\otimes_R N)}$ και $\chi_n^{(\mathbf{C}_\bullet\otimes_R M,\mathbf{D}_\bullet\otimes_R N)}$ όπως στο θεώρημα 6.2.11.

Απόδειξη. Κατά το πόρισμα 2.5.23 υπάρχει κάποιος *ελεύθερος* R-μόδιος L, καθώς και ένας υπομόδιος L' τού L, ούτως ώστε να ισχύει $M \cong L/L'$. Λόγω αυτού δημιουργείται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow L' \overset{\iota}{\hookrightarrow} L \overset{\varpi}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}.$$

Επειδή $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)\cong\{0\}$, από το θεώρημα 5.3.10 λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow L'\otimes_R N \xhookrightarrow{\iota\,\overline{\otimes}\,\mathrm{id}_N} L\otimes_R N \xrightarrow{\varpi\,\overline{\otimes}\,\mathrm{id}_N} M\otimes_R N \longrightarrow \{0\}. \tag{6.31}$$

Για οιονδήποτε $p\in\mathbb{Z}$ ο C_p είναι *ισόπεδος*, οπότε η βραχεία ακολουθία

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & C_p\otimes_R(L'\otimes_R N) \arrow[r, hook, "\mathrm{id}_{C_p}\overline{\otimes}(\iota\overline{\otimes}\mathrm{id}_N)"] & C_p\otimes_R(L\otimes_R N) \arrow[dll, two heads, "\mathrm{id}_{C_p}\overline{\otimes}(\varpi\overline{\otimes}\mathrm{id}_N)"] \\ & C_p\otimes_R(M\otimes_R N) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd} \tag{6.32}$$

είναι ακριβής. (Βλ. πρόταση 4.5.17.) Κατ' αναλογίαν, για οιονδήποτε $q\in\mathbb{Z}$ ο D_q είναι *ισόπεδος*, οπότε τανύοντας την (6.32) *εκ δεξιών* με D_q αποκτούμε (μέσω τής προτάσεως 4.5.19) μια βραχεία ακριβή ακολουθία, η οποία, ύστερα από αναδιάταξη όρων (κατόπιν εφαρμογής τής μεταθετικής και τής προσεταιριστικής ιδιότητας 4.4.1 και 4.4.5 τού τανυστικού γινομένου), γίνεται

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & (C_p\otimes_R L')\otimes_R(D_q\otimes_R N) \arrow[r, hook, "(\mathrm{id}_{C_p}\overline{\otimes}\iota)\overline{\otimes}\mathrm{id}_{D_q\otimes_R N}"] & (C_p\otimes_R L)\otimes_R(D_q\otimes_R N) \arrow[dll, two heads, "(\mathrm{id}_{C_p}\overline{\otimes}\varpi)\overline{\otimes}\mathrm{id}_{D_q\otimes_R N}"] \\ & (C_p\otimes_R M)\otimes_R(D_q\otimes_R N) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd} \tag{6.33}$$

Επειδή ο C_p είναι *ισόπεδος*, μέσω τής (6.31) και τής προτάσεως 4.5.17 λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow C_p\otimes_R L' \xhookrightarrow{\mathrm{id}_{C_p}\overline{\otimes}\iota} C_p\otimes_R L \xrightarrow{\mathrm{id}_{C_p}\overline{\otimes}\varpi} C_p\otimes_R M \longrightarrow \{0\}.$$

Ο L, ως ελεύθερος, είναι *και* ισόπεδος. (Βλ. πρόταση 4.2.4 και θεώρημα 4.5.26.) Αλλά *και* το τανυστικό γινόμενο $C_p \otimes_R L$ είναι *ισόπεδος* R-μόδιος. (Βλ. πόρισμα 4.5.22.) Κατά συνέπειαν, $\mathrm{Tor}_1^R(C_p \otimes_R L, D_q \otimes_R N) \cong \{0\}$. (Βλ. πόρισμα 5.3.14.) Λόγω αυτού, η δεύτερη μακρά ακριβής Tor-ακολουθία 5.3.10 δίδει την ακριβή ακολουθία

$$\begin{aligned}
&\{0\} \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(C_p \otimes_R M, D_q \otimes_R N) \xhookrightarrow{\widetilde{\partial}_1} (C_p \otimes_R L') \otimes_R (D_q \otimes_R N) \\
&\xrightarrow{(\mathrm{id}_{C_p} \overline{\otimes} \iota) \overline{\otimes} \mathrm{id}_{D_q \otimes_R N}} (C_p \otimes_R L) \otimes_R (D_q \otimes_R N) \to \{0\}
\end{aligned}$$

όπου ως $\widetilde{\partial}_1$ συμβολίζεται ο συνδετικός ομομορφισμός (που εδώ επέχει τον ρόλο τής ενθέσεως). Ο επαγόμενος επιμορφισμός

$$\widetilde{\partial}_1^{\,\breve{}} \; : \mathrm{Tor}_1^R(C_p \otimes_R M, D_q \otimes_R N) \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(\widetilde{\partial}_1)$$

είναι ισομορφισμός. Επομένως,

$$\mathrm{Tor}_1^R(C_p \otimes_R M, D_q \otimes_R N) \cong \mathrm{Im}(\widetilde{\partial}_1) = \mathrm{Ker}((\mathrm{id}_{C_p} \overline{\otimes} \iota) \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_{D_q \otimes_R N}) \cong \{0\},$$

διότι ο $(\mathrm{id}_{C_p} \overline{\otimes} \iota) \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_{D_q \otimes_R N}$ είναι μονομορφισμός (ένεκα τής (6.33)). Αυτό σημαίνει (σε επίπεδο αλυσωτών συμπλόκων) ότι $\mathrm{Tor}_1^R(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M, \mathbf{D}_\bullet \otimes_R N)_\bullet = \mathbf{0}_\bullet$, οπότε ικανοποιείται αυτομάτως η συνθήκη (6.28) για τα $\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M$ και $\mathbf{D}_\bullet \otimes_R N$ και άμεση εφαρμογή τού θεωρήματος 6.2.11 (με αυτά στη θέση των εκεί παρατεθέντων $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$) δίδει τη διασπώμενη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\begin{aligned}
&\{0\} \to (H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet; M) \otimes_R H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet; N))_n \xhookrightarrow{\psi_n^{(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M, \mathbf{D}_\bullet \otimes_R N)}} H_n(((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M) \otimes_R (\mathbf{D}_\bullet \otimes_R N))_\bullet) \\
&\xrightarrow{\chi_n^{(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M, \mathbf{D}_\bullet \otimes_R N)}} \mathrm{Tor}_1^R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M), H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet \otimes_R N))_{n-1} \longrightarrow \{0\}
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, καταλήγοντας στην επιθυμητή κατόπιν διαμεσολαβήσεως τού ισομορφισμού $H_n(\xi_\bullet)$. □

6.3 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ KÜNNETH ΓΙΑ ΜΟΔΙΟΥΣ ΣΥΝΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

Και εδώ, παρά το γεγονός ότι το θεώρημα καθολικών συντελεστών 6.1.10 εξασφαλίζει τη δυνατότητα ορισμού μοδίων *συνομολογίας* με συντελεστές ειλημμένους από *τυχόντες* R-μοδίους, δεν αποτελεί παρά *ένα πρώτο βήμα* για την κατανόηση τού βασικού ερωτήματος: *Πώς σχετίζονται οι μόδιοι συνομολογίας τού συναλυσωτού συμπλόκου ομομορφισμών* $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet$ από ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων $\mathbf{C}_\bullet$ σε ένα συναλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων $\mathbf{D}^\bullet$ *με τους μοδίους ομολογίας τού πρώτου και συνομολογίας τού δεύτερου; Και* εδώ, «ευειδείς απαντήσεις» στο ερώτημα είναι δυνατόν να δοθούν μόνον *υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις* ή *υπό συγκεκριμένους περιορισμούς* (που άλλοτε αφορούν σε *ειδικές ιδιότητες* των $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}^\bullet$, και άλλοτε *στη φύση τού δακτυλίου αναφοράς* R) και εμφανίζονται ως διάφορες αλγεβρικές εκδοχές τού λεγομένου *θεωρήματος τού Künneth για μοδίους συνομολογίας*. Όπως είναι φυσικό, προτάσσεται η παράθεση τού τρόπου ορισμού τού $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet$.

6.3.1 Ορισμός (Συναλυσωτό σύμπλοκο ομομορφισμών). Δοθέντων δυο συμπλόκων R-μοδίων, ενός αλυσωτού $\mathbf{C}_\bullet$ και ενός συναλυσωτού $\mathbf{D}^\bullet$ (με τα μέλη των ακολουθιών τους συμβολιζόμενα ως C_n και D^n, $n \in \mathbb{Z}$, και με τους (συσ)συνοριακούς τελεστές τους συμβολιζόμενους ως $d_n^{\mathbf{C}_\bullet}$ και $d^n_{\mathbf{D}_\bullet}$, $n \in \mathbb{Z}$, αντιστοίχως), ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τον R-μόδιο

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^n := \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(C_p, D^{n-p}) = \prod_{p+q=n} \mathrm{Hom}_R(C_p, D^q).}$$

Το ζεύγος $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet = (\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^n, \mathfrak{d}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, όπου ο ομομορφισμός

$$\mathfrak{d}^n = \mathfrak{d}^n_{\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet} : \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^n \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^{n+1}$$

ορίζεται για κάθε $\varphi = \{\varphi_p \in \mathrm{Hom}_R(C_p, D^{n-p}) | \, p \in \mathbb{Z}\} \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^n$ ως εξής:

$$\mathfrak{d}^n(\varphi)_p(x) := \varphi_{p-1}(d_p^{\mathbf{C}_\bullet}(x)) + (-1)^p \, d^{n-p}_{\mathbf{D}_\bullet}(\varphi_p(x)), \ \forall x \in C_p,$$

(με $\mathfrak{d}^n(\varphi)_p \in \mathrm{Hom}_R(C_p, D^{n+1-p})$), καλείται **σύμπλοκο ομομορφισμών από το $\mathbf{C}_\bullet$ στο $\mathbf{D}^\bullet$ υπεράνω τού** R (και αποτελεί ένα *συναλυσωτό* σύμπλοκο με τους $\mathfrak{d}^n$, $n \in \mathbb{Z}$, ως συσσυνοριακούς του τελεστές). Σημειωτέον ότι, εάν $f_\bullet : \mathbf{C}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}_\bullet$ είναι ένας αλυσωτός και $g^\bullet : \mathbf{D}^\bullet \longrightarrow \mathbf{D}'^\bullet$ ένας συναλυσωτός μετασχηματισμός, τότε ορίζεται ως

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(f_\bullet, g^\bullet)^\bullet : \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{D}'^\bullet)^\bullet}$$

ο *επαγόμενος* συναλυσωτός μετασχηματισμός

$$(\mathrm{Hom}_R(f_\bullet, g^\bullet)^n : \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^n \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{D}'^\bullet)^n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

όπου για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p + q = n$ ο ομομορφισμός $\mathrm{Hom}_R(f_\bullet, g^\bullet)^n$ συμβολίζει τον *μονοσημάντως ορισμένο* ομομορφισμό που καθιστά το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^n \arrow[rr, dashed, "\mathrm{Hom}_R(f_\bullet, g^\bullet)^n"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{p,q}"'] \arrow[drr, "\mathrm{Hom}_R(f_p, g^q) \circ \mathrm{pr}_{p,q}" description] & & \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{D}'^\bullet)^n \arrow[d, "\mathrm{pr}'_{p,q}"] \\
\mathrm{Hom}_R(C_p, D^q) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_R(f_p, g^q)"'] & & \mathrm{Hom}_R(C'_p, D'^q)
\end{tikzcd}$$

6.3.2 Σημείωση. Ορισμένοι συγγραφείς οι οποίοι αρέσκονται να παρουσιάζουν ακόμη και *τα δυϊκά θεωρήματα τού Künneth* με τον «ομολογικό τους μανδύα» ορίζουν[24] *αλυσωτό* σύμπλοκο ομομορφισμών *δύο αλυσωτών συμπλόκων* $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$ θέτοντας

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)_n := \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R(C_p, D_{p+n}) = \prod_{q-p=n} \mathrm{Hom}_R(C_p, D_q)$$

και για κάθε $\varphi = \{\varphi_p \in \mathrm{Hom}_R(C_p, D_{p+n}) | \, p \in \mathbb{Z}\} \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)_n$,

$$\mathfrak{d}_n = \mathfrak{d}_n^{\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}_\bullet)_\bullet} : \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)_n \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}_\bullet)_{n-1}$$

$$\mathfrak{d}_n(\varphi)_p(x) := d_{p+n}^{\mathbf{D}_\bullet}(\varphi_p(x)) + (-1)^{n+1}\varphi_{p-1}(d_p^{\mathbf{C}_\bullet}(x)), \ \forall x \in C_p,$$

με $\mathfrak{d}_n(\varphi)_p \in \mathrm{Hom}_R(C_p, D_{p+n-1})$. (Πρβλ. Weibel [36], εδάφια 2.7.4.και 2.7.5., σελ. 62-63.)

Ο ορισμός 6.3.1 γενικεύεται[25] για «γινόμενα επεκτάσεως».

6.3.3 Ορισμός (Γινόμενα επεκτάσεως συμπλόκων). Δοθέντων ενός $m \in \mathbb{Z}$ και δυο συμπλόκων R-μοδίων, ενός αλυσωτού $\mathbf{C}_\bullet$ και ενός συναλυσωτού $\mathbf{D}^\bullet$ (με τα μέλη των ακολουθιών τους συμβολιζόμενα ως C_n και D^n, $n \in \mathbb{Z}$, και με τους (συσ)συνοριακούς τελεστές τους συμβολιζόμενους ως $d_n^{\mathbf{C}_\bullet}$ και $d^n_{\mathbf{D}_\bullet}$, $n \in \mathbb{Z}$, αντιστοίχως), ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τον R-μόδιο

$$\boxed{\mathrm{Ext}_R^m(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^n := \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}_R^m(C_p, D^{n-p}) = \prod_{p+q=n} \mathrm{Ext}_R^m(C_p, D^q).}$$

Το ζεύγος $\mathrm{Ext}_R^m(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet = (\mathrm{Ext}_R^m(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^n, \mathfrak{d}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου ο ομομορφισμός

$$\mathfrak{d}^n = \mathfrak{d}^n_{\mathrm{Ext}_R^m(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)^\bullet} : \mathrm{Ext}_R^m(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^n \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^m(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^{n+1}$$

ορίζεται (μέσω των ομομορφισμών τού εδ. 5.2.6) επί τού (εκάστοτε γινομένου επεκτάσεως) $\mathrm{Ext}_R^m(C_p, D^q)$ ως εξής:

$$\mathfrak{d}^n|_{\mathrm{Ext}_R^m(C_p,D^q)} := \mathrm{Ext}_R^m(d_p^{\mathbf{C}_\bullet}, \mathrm{id}_{D^q}) + (-1)^p \, \mathrm{Ext}_R^m(\mathrm{id}_{C_p}, d^{q-1}_{\mathbf{D}_\bullet}),$$

καλείται m-**οστό γινόμενο επεκτάσεως των $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}^\bullet$ υπεράνω τού** R (και αποτελεί αφ' εαυτού ένα συναλυσωτό σύμπλοκο με τους $\mathfrak{d}^n$, $n \in \mathbb{Z}$, ως συσσυνοριακούς του τελεστές).

6.3.4 Συμβολισμός. Για κάθε ζεύγος συμπλόκων R-μοδίων $(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)$ (ενός αλυσωτού και ενός συναλυσωτού) και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ συμβολίζουμε ως

$$Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \xhookrightarrow{j_n^{\mathbf{C}_\bullet}} C_n, \qquad Z^n(\mathbf{D}^\bullet) \xhookrightarrow{j^n_{\mathbf{D}^\bullet}} D^n$$

[24] Βλ., π.χ., Hilton & Stammbach [32], Chapter V, §1 & §3, σελ. 167-171 και 177-179, Rotman [35], σελ. 638, και Dold [61], Chapter VI, §10, σελ. 167-168.

[25] Φυσικά, *και* τα τής σημειώσεως 6.3.2 γενικεύονται αναλόγως (όταν κανείς επιδιώκει να παραμείνει σε μοδίους *ομολογίας*) *και* για «γινόμενα επεκτάσεως».

τις συνήθεις ενθέσεις, ως

$$Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \xrightarrow{\pi_n^{\mathbf{C}_\bullet}} H_n(\mathbf{C}_\bullet), \qquad Z^n(\mathbf{D}^\bullet) \xrightarrow{\pi^n_{\mathbf{D}^\bullet}} H^n(\mathbf{D}^\bullet),$$

τους φυσικούς επιμορφισμούς και ως

$$C_n \xrightarrow{\check{d}_n^{\mathbf{C}_\bullet}} B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), \qquad D^n \xrightarrow{\check{d}^n_{\mathbf{D}^\bullet}} B^{n+1}(\mathbf{D}^\bullet).$$

τους επιμορφισμούς τους επαγόμενους από τους (συσ)συνοριακούς τελεστές των ανωτέρω συμπλόκων κατόπιν περιορισμού τού πεδίου τιμών αυτών επί τής εικόνας τους. Επιπροσθέτως, θέτουμε $j_\bullet^{\mathbf{C}_\bullet} := (j_n^{\mathbf{C}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $j^\bullet_{\mathbf{D}^\bullet} := (j^n_{\mathbf{D}^\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\pi_\bullet^{\mathbf{C}_\bullet} := (\pi_n^{\mathbf{C}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\pi^\bullet_{\mathbf{D}^\bullet} := (\pi^n_{\mathbf{D}^\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ κ.ο.κ., και θεωρούμε τα σύμπλοκα[26] $H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet)$, τα υποσύμπλοκα $Z_\bullet(\mathbf{C}_\bullet)$, $B_\bullet(\mathbf{C}_\bullet)$ τού $\mathbf{C}_\bullet$ και $Z^\bullet(\mathbf{D}^\bullet)$, $B^\bullet(\mathbf{D}^\bullet)$ τού $\mathbf{D}^\bullet$ καθώς και τα συναλυσωτά σύμπλοκα

$$H^\bullet(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \ \text{ και } \ \mathrm{Hom}_R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^\bullet.$$

Το αντίστοιχο τού λήμματος 6.2.4 είναι το ακόλουθο:

6.3.5 Λήμμα. *Υπάρχει ακριβώς ένας συναλυσωτός μετασχηματισμός*

$$\boxed{H^\bullet(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \xrightarrow{\psi^\bullet_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}} \mathrm{Hom}_R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^\bullet}$$

που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα συναλυσωτών μετασχηματισμών μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
Z^\bullet(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \arrow[r, two heads, "\pi^\bullet_{\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)^\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(j_\bullet^{\mathbf{C}_\bullet}, j^\bullet_{\mathbf{D}^\bullet})^\bullet"'] \arrow[dr, "\psi^\bullet_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)} \circ \pi^\bullet_{\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)^\bullet}" description] & H^\bullet(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \arrow[d, dashed, "\psi^\bullet_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}"] \\
\mathrm{Hom}_R(Z_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), Z^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^\bullet \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\pi_\bullet^{\mathbf{C}_\bullet}, \pi^\bullet_{\mathbf{D}^\bullet})^\bullet"'] & \mathrm{Hom}_R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^\bullet
\end{tikzcd}$$

*Η απεικόνιση $\psi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}$ είναι **φυσική** υπό την εξής έννοια: Εάν $f_\bullet : \mathbf{C}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}_\bullet$ είναι ένας αλυσωτός και $g^\bullet : \mathbf{D}^\bullet \longrightarrow \mathbf{D}^{\bullet\prime}$ ένας συναλυσωτός μετασχηματισμός, τότε το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd}
H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \arrow[r, "\psi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}"] \arrow[d, "H^n(\mathrm{Hom}_R(f_\bullet, g^\bullet)^\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^n \arrow[d, "\mathrm{Hom}_R(H_\bullet(f_\bullet), H^\bullet(g^\bullet))^n"] \\
H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{D}^{\bullet\prime})^\bullet) \arrow[r, "\psi^n_{(\mathbf{C}'_\bullet,\mathbf{D}^{\bullet\prime})}"'] & \mathrm{Hom}_R(H_\bullet(\mathbf{C}'_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^{\bullet\prime}))^n
\end{tikzcd}$$

Το αντίστοιχο τού θεωρήματος 6.2.6 είναι το ακόλουθο:

[26] Μέσω οιουδήποτε αλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{C}_\bullet$ (και αντιστοίχως, συναλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{D}^\bullet$) ορίζεται το αλυσωτό σύμπλοκο $H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet)$ (και αντιστοίχως, το συναλυσωτό σύμπλοκο $H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet)$) που έχει ως μέλη του τους μοδίους ομολογίας $H_n(\mathbf{C}_\bullet)$, $n \in \mathbb{Z}$, (και αντιστοίχως, τους μοδίους συνομολογίας $H^n(\mathbf{D}^\bullet)$, $n \in \mathbb{Z}$,) ενώ όλοι του οι συνοριακοί (και αντιστοίχως, συσσυνοριακοί) τελεστές είναι *μηδενικοί*.

6.3.6 Θεώρημα («Θεώρημα τού Künneth για μοδίους συνομολογίας υπό προϋποθέσεις προβολικότητας»). *Δοθέντων δυο συμπλόκων R-μοδίων, ενός αλυσωτού $\mathbf{C}_\bullet$ και ενός συναλυσωτού $\mathbf{D}^\bullet$, ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν οι $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι προβολικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων*

$$\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(H_{\bullet-1}(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^\bullet \xhookrightarrow{\varphi^\bullet_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}} H^\bullet(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \xrightarrow[\quad]{\psi^\bullet_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}} \hspace{-1em}\twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^\bullet \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet$$

ή, ισοδυνάμως, υφίστανται βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \to \prod_{p+q=n-1} \operatorname{Ext}^1_R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H^q(\mathbf{D}^\bullet)) \xhookrightarrow{\varphi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}} H^n(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \xrightarrow{\psi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}} \hspace{-1em}\twoheadrightarrow \prod_{p+q=n} \operatorname{Hom}_R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H^q(\mathbf{D}^\bullet)) \longrightarrow \{0\} \qquad (6.34)$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου $\psi^\bullet_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}$ ο συναλυσωτός μετασχηματισμός τού λήμματος 6.3.5 *και*

$$\varphi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)} \circ \theta^{n-1} = H^n(\operatorname{Hom}_R(\check{d}^{\mathbf{C}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{D}^\bullet})^\bullet) \circ (\psi^n_{(B_\bullet(\mathbf{C}_{\bullet-1}),\mathbf{D}^\bullet)})^{-1}, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

όπου $\theta^{n-1} : \operatorname{Hom}_R(B_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^{n-1} \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^{n-1}$ ο ομομορφισμός ο δημιουργούμενος από τις αντίστοιχες δεύτερες μακρές Ext-ακολουθίες[27].

(ii) *Εάν, πέραν τής ισχύος των προϋποθέσεων τού* (i)*, υποτεθεί ότι οι $B^m(\mathbf{D}^\bullet)$ είναι εμβολικοί (ή ότι οι $H^m(\mathbf{D}^\bullet)$ είναι προβολικοί) R-μόδιοι για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, τότε οι* (6.34) *είναι διασπώμενες, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε*

$$\boxed{H^n(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \cong \operatorname{Hom}_R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^n \oplus \operatorname{Ext}^1_R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^{n-1}} \qquad (6.35)$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\boxed{H^n(\operatorname{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \cong \left(\prod_{p+q=n} \operatorname{Hom}_R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H^q(\mathbf{D}^\bullet))\right) \oplus \left(\prod_{p+q=n-1} \operatorname{Ext}^1_R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H^q(\mathbf{D}^\bullet))\right).}$$

Μολαταύτα, οι διασπάσεις (6.35) *δεν είναι κατ' ανάγκην φυσικές.*

Απόδειξη. Αρκεί για τον διπλό συναρτητή $\mathbf{F} = \operatorname{Hom}_R(-,-)$, το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet$ και το συναλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{D}^\bullet$ να εφαρμοσθεί το θεώρημα A.4.60. Για μια ad hoc απόδειξη, βλ.[28] Bourbaki [28], §5, No. 6, σελ. 94-98. Ειδικότερα για το (ii):

[27] Αρκεί να θεωρηθούν οι συνδετικοί ομομορφισμοί εκείνων που αντιστοιχούν στις βραχείες ακριβείς ακολουθίες $\{0\} \to B_{p-1}(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow Z_{p-1}(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow H_{p-1}(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \{0\}$, $p \in \mathbb{Z}$, (με δεύτερη, σταθερή εγγραφή τον $H^q(\mathbf{D}^\bullet)$) και να γίνει μετάβαση σε ευθέα γινόμενα για τα ζεύγη (p,q) με $p+q = n-1$.

[28] Για το πώς η ειδική περίπτωση κατά την οποία ο R είναι Π.Κ.Ι., το $\mathbf{C}_\bullet$ ελεύθερο και το $\mathbf{D}^\bullet$ εμβολικό, μπορεί να εξαχθεί *και* από μια *ειδική φασματική ακολουθία*, πρβλ. Godement [103], Théorème 5.4.2, σελ. 101.

Από την προβολικότητα των $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ έπεται ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \to H_n(\mathbf{C}_\bullet) \hookrightarrow C_n/B_n(\mathbf{C}_\bullet) \twoheadrightarrow C_n/Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \cong \mathrm{Im}(d_n^{\mathbf{C}_\bullet}) =: B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \to \{0\}$$

είναι διασπώμενη. (Βλ. θεώρημα 4.2.7.) Κατ' αναλογίαν, από την εμβολικότητα των $B^m(\mathbf{D}^\bullet)$ (ή, αντιστοίχως, από την προβολικότητα των $H^m(\mathbf{D}^\bullet)$) έπεται ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία $\{0\} \longrightarrow B^m(\mathbf{D}^\bullet) \hookrightarrow Z^m(\mathbf{D}^\bullet) \twoheadrightarrow H^m(\mathbf{D}^\bullet) \longrightarrow \{0\}$ είναι διασπώμενη. (Βλ. θεωρήματα 4.2.29 και 4.2.7.) Μέσω αυτών των δύο διασπώμενων ακριβών ακολουθιών αποδεικνύεται η διάσπαση των (6.34). □

Το αντίστοιχο τού πορίσματος 6.2.8 είναι το ακόλουθο:

6.3.7 Πόρισμα («Κλασική εκδοχή τού θεωρήματος τού Künneth για μοδίους συνομολογίας»). *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Δοθέντων δυο συμπλόκων R-μοδίων, ενός αλυσωτού $\mathbf{C}_\bullet$ και ενός συναλυσωτού $\mathbf{D}^\bullet$, ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν το $\mathbf{C}_\bullet$ είναι ελεύθερο, τότε υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\begin{aligned} \{0\} \to \prod_{p+q=n-1} \mathrm{Ext}_R^1(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H^q(\mathbf{D}^\bullet)) &\xhookrightarrow{\varphi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}} H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \\ &\xrightarrow{\psi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}} \!\!\!\!\!\!\to \prod_{p+q=n} \mathrm{Hom}_R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H^q(\mathbf{D}^\bullet)) \longrightarrow \{0\} \end{aligned} \tag{6.36}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, με τους $\varphi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}$ και $\psi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}$ όπως στο θεώρημα 6.3.6.

(ii) *Εάν το $\mathbf{D}^\bullet$ είναι ωσαύτως ελεύθερο, τότε η (6.36) είναι διασπώμενη, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε*

$$\boxed{H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^n \oplus \mathrm{Ext}_R^1(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^{n-1}.}$$

6.3.8 Εφαρμογή. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν M, M', M'' είναι τρεις R-μόδιοι, τότε υφίστανται ισομορφισμοί*

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_1^R(M,M'),M'') \oplus \mathrm{Ext}_R^1(M \otimes_R M', M'') \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Ext}_R^1(M',M'')) \oplus \mathrm{Ext}_R^1(M, \mathrm{Hom}_R(M',M'')) \end{aligned}}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tor}_1^R(M,M'),M'') \cong \mathrm{Ext}_R^1(M, \mathrm{Ext}_R^1(M',M'')).}$$

Απόδειξη. Επειδή ο R είναι Π.Κ.Ι., υπάρχουν (σύμφωνα με το (ii) τού εδ. 5.1.2) βραχείες ακριβείς ακολουθίες αντιστοιχούσες σε ελεύθερους (ή, ισοδυνάμως, προβολικούς) κερματισμούς:

$$\begin{aligned} \{0\} \longrightarrow P_1 \hookrightarrow P_0 \twoheadrightarrow M \longrightarrow \{0\}, \\ \{0\} \longrightarrow P_1' \hookrightarrow P_0' \twoheadrightarrow M' \longrightarrow \{0\}, \\ \{0\} \longrightarrow P_1'' \hookrightarrow P_0'' \twoheadrightarrow M'' \longrightarrow \{0\}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε αλυσωτά σύμπλοκα[29] $\mathbf{C}_\bullet$, $\mathbf{C}'_\bullet$ και $\mathbf{C}''_\bullet$ ως ακολούθως:

$$C_0 := P_0,\ C_1 := P_1,\ C_n \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\},$$
$$C'_0 := P'_0,\ C'_1 := P'_1,\ C'_n \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\},$$
$$C''_0 := P''_0,\ C''_1 := P_1,\ C''_n \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\},$$

με συνοριακούς τελεστές $d_n^{\mathbf{C}_\bullet}, d_n^{\mathbf{C}'_\bullet}, d_n^{\mathbf{C}''_\bullet}$ μηδενικούς όταν $n \neq 1$ και ίσους με τις ανωτέρω ενθέσεις "$\hookrightarrow$" όταν $n = 1$. Προφανώς,

$$H_0(\mathbf{C}_\bullet) \cong M,\ \ H_0(\mathbf{C}'_\bullet) \cong M',\ \ H_0(\mathbf{C}''_\bullet) \cong M'',$$

ενώ οι λοιποί μόδιοι ομολογίας είναι τετριμμένοι. Εν συνεχεία, θεωρούμε το συναλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{D}^\bullet$ με $D^n := C''_{-n}$ και $d^n_{\mathbf{D}^\bullet} := d^{\mathbf{C}''_\bullet}_{-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Προφανώς, $H^0(\mathbf{D}^\bullet) = H_0(\mathbf{C}''_\bullet) \cong M''$, ενώ οι λοιποί μόδιοι συνομολογίας τού $\mathbf{D}^\bullet$ είναι τετριμμένοι. Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στο θεώρημα 4.5.35, υφίστανται για κάθε τριάδα ακεραίων αριθμών p, q, r ισομορφισμοί

$$\mathrm{Hom}_R\left(C_p \otimes_R C'_q, D^r\right) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(C_p, \mathrm{Hom}_R(C'_q, D^r)),$$

οπότε σε επίπεδο συναλυσωτών συμπλόκων επάγεται[30] συναλυσωτός μετασχηματισμός

$$f^\bullet : \mathrm{Hom}_R((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet)^\bullet$$

που είναι προδήλως ισομορφισμός μεταξύ αυτών, οπότε υφίστανται ισομορφισμοί

$$H^n(f^\bullet) : H^n(\mathrm{Hom}_R((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet)^\bullet),$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κατά την απόδειξη τού 6.2.9 έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι

$$H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet) \cong \begin{cases} M \otimes_R M', & \text{όταν } n = 0, \\ \mathrm{Tor}_1^R(M, M'), & \text{όταν } n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\}. \end{cases}$$

Εφαρμογή τού πορίσματος 6.3.7 δίδει

$$\begin{aligned} H^n(\mathrm{Hom}_R((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \cong & \left(\prod_{p+q=n} \mathrm{Hom}_R(H_p((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet), H^q(\mathbf{D}^\bullet))\right) \\ & \oplus \left(\prod_{p+q=n-1} \mathrm{Ext}^1_R(H_p((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet), H^q(\mathbf{D}^\bullet))\right). \end{aligned}$$

Εδώ, τα "Hom" (και αντιστοίχως, τα πρώτα γινόμενα επεκτάσεως) τού πρώτου (και αντιστοίχως, τού δευτέρου) ευθέος προσθετέου είναι τετριμμένα όταν $p \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\}$ ή όταν $q \neq 0$. Απομένουν οι περιπτώσεις όπου

$$(p, q, n) \in \{(0,0,0), (1,0,1), (0,0,1), (1,0,2)\}.$$

[29] Αυτά *είναι* οι υπονοούμενοι ελεύθεροι κερματισμοί (μαζί με τους επιμορφισμούς "$\twoheadrightarrow$").

[30] Βλ. πρόταση 4.1.11 και θεώρημα 4.4.6.

Επομένως,

$$H^n(\mathrm{Hom}_R((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}'_\bullet)_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \cong \begin{cases} \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R M', M''), & \text{όταν } n = 0, \\ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_1^R(M, M'), M'') \oplus \mathrm{Ext}_R^1(M \otimes_R M', M''), & \text{όταν } n = 1, \\ \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Tor}_1^R(M, M'), M''), & \text{όταν } n = 2, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1,2\}. \end{cases}$$

Ακολουθώντας ανάλογη συλλογιστική καταλήγουμε, από την άλλη πλευρά, στο εξής:

$$H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \cong \begin{cases} \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(M', M'')), & \text{όταν } n = 0, \\ \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Ext}_R^1(M', M'')) \oplus \mathrm{Ext}_R^1(M, \mathrm{Hom}_R(M', M'')), & \text{όταν } n = 1, \\ \mathrm{Ext}_R^1(M, \mathrm{Ext}_R^1(M', M'')), & \text{όταν } n = 2, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1,2\}. \end{cases}$$

Αυτά τα αποτελέσματα, εν συνδυασμώ με το ότι οι $H^n(f^\bullet)$ είναι ισομορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, μας οδηγούν αφ' ενός μεν στον γνωστό (4.25) (τού θεωρήματος 4.5.35) για $n = 0$, αφ' ετέρου δε σε δύο «νέους» ισομορφισμούς (για $n \in \{1, 2\}$), οι οποίοι δηλούν ένα είδος *γενικευμένης προσεταιριστικότητας* που αφορά στα "Hom", "Ext_R^1" και "Tor_1^R". □

6.3.9 Πόρισμα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν M, M', M'' είναι τρεις R-μόδιοι, τότε υφίστανται ισομορφισμοί*

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Ext}_R^1(M', M'')) \oplus \mathrm{Ext}_R^1(M, \mathrm{Hom}_R(M', M'')) \\ &\cong \mathrm{Hom}_R(M', \mathrm{Ext}_R^1(M, M'')) \oplus \mathrm{Ext}_R^1(M', \mathrm{Hom}_R(M, M'')) \end{aligned}}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Ext}_R^1(M, \mathrm{Ext}_R^1(M', M'')) \cong \mathrm{Ext}_R^1(M', \mathrm{Ext}_R^1(M, M'')).}$$

Αποδειξη. Επειδή τα "$\otimes_R$" και "Tor_1^R" είναι (μέχρις ισομορφισμού) μεταθετικά (βλ. θεωρήματα 4.4.1 και 5.3.12), αυτοί οι ισομορφισμοί έπονται άμεσα από τους ισομορφισμούς τής εφαρμογής 6.3.8 ύστερα από εναλλαγή των R-μοδίων M και M' στο «αριστερό μέλος τους» και εκ νέου έκφραση αυτού που προκύπτει με το εκάστοτε «νέο δεξιό μέλος». □

6.3.10 Πόρισμα. *Έστω G μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα χωρίς στρέψη. Τότε ο $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, H)$ (ως $\mathbb{Z}$-μόδιος) είναι εμβολικός για οιαδήποτε αβελιανή ομάδα H.*

Αποδειξη. Για $R = \mathbb{Z}$, $M' = G$ και $M'' = H$, ο δεύτερος ισομορφισμός τού 6.3.8 δίδει για *τυχόντα* $\mathbb{Z}$-μόδιο M,

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, G), H) \cong \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(M, \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, H)). \tag{6.37}$$

Επειδή (υπεράνω τής Π.Κ.Ι. $\mathbb{Z}$) η G είναι ισόπεδος $\mathbb{Z}$-μόδιος (βλ. θεώρημα 5.3.22), έχουμε (σύμφωνα με το πόρισμα 5.3.14) $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, G) \cong \{0\}$ και από την (6.37) έπεται ότι $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, G), H) \cong \{0\} \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(M, \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, H)) \cong \{0\}$, οπότε ο $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(G, H)$ είναι ένας εμβολικός $\mathbb{Z}$-μόδιος (δυνάμει τής ισοδυναμίας των (i) και (ii) στο θεώρημα 5.2.13). □

6.3.11 Λήμμα. *Έστω G μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα. Εάν $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z}) \cong \{0\}$, τότε η G δεν διαθέτει στρέψη.*

Απόδειξη. Μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{tors}(G) \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/\mathrm{tors}(G) \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται η δεύτερη μακρά ακριβής Ext-ακολουθία 5.2.10,

$$\begin{aligned}
&\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G/\mathrm{tors}(G),\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{tors}(G),\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \\
&\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G/\mathrm{tors}(G),\mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{tors}(G),\mathbb{Z}) \\
&\longrightarrow \underbrace{\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(G/\mathrm{tors}(G),\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \longrightarrow \cdots,
\end{aligned}$$

απ' όπου συνάγεται[31] ότι $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G/\mathrm{tors}(G),\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z})$ και

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G/\mathrm{tors}(G),\mathbb{Z}) \cong \{0\} \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{tors}(G),\mathbb{Z}).$$

Ως γνωστόν[32],

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{tors}(G),\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{tors}(G),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \tag{6.38}$$

όπου η $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{tors}(G),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι ανηγμένη[33]. Επειδή

$$\mathrm{tors}(G) = \bigoplus_{p \text{ πρώτος αριθμός}} G(p), \text{ όπου } G(p) := \{g \in G \mid p^{\nu} g = 0_G \text{ για κάποιον } \nu \in \mathbb{N}_0\}$$

και $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigoplus_{p \text{ πρώτος αριθμός}} \mathbb{Z}(p^{\infty})$ (βλ. εδ. 2.2.21 (ii)), λαμβάνουμε (μέσω τής προτάσεως 4.1.11)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{tors}(G),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \prod_{p \text{ πρώτος αριθμός}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(p),\mathbb{Z}(p^{\infty})). \tag{6.39}$$

Επιπροσθέτως, για οιαδήποτε ομάδα $G(p)$ με $G(p) \neq \{0_G\}$ ισχύει[34]

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G(p),\mathbb{Z}(p^{\infty})) \cong \left(\prod_{\nu\in\mathbb{N}}\prod_{\mathfrak{m}_{\nu}} \mathbb{Z}_{p^{\nu}}\right) \oplus \left(\prod_{\mathfrak{k}} \mathbb{J}_p\right) \neq \{0_G\}, \tag{6.40}$$

[31] Προφανώς, εάν $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{tors}(G),\mathbb{Z})$, τότε $f(\mathrm{tors}(G)) \subseteq \mathrm{tors}(\mathbb{Z}) = \{0\}$, οπότε $f = 0$. Επιπροσθέτως, $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(G/\mathrm{tors}(G),\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ για κάθε $n \geqslant 2$. (Βλ. πόρισμα 5.2.12.)

[32] Βλ. Fuchs [16], Theorem 3.5 & Corollary 3.6, σελ. 268.

[33] Μια αβελιανή ομάδα G καλείται **διαιρετή** (divisible) όταν $kG = G$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. (Επί παραδείγματι, οι προσθετικές ομάδες $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ και $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι διαιρετές αλλά η $\mathbb{Z}$ δεν είναι.) Μια αβελιανή ομάδα είναι διαιρετή *εάν και μόνον εάν* είναι εμβολικός $\mathbb{Z}$-μόδιος. (Βλ. Fuchs [16], Chapter 4, Theorem 2.6, σελ. 136, ή Rotman [35], Corollary 3.35 (ii), σελ. 121.) Για οιαδήποτε αβελιανή ομάδα G συμβολίζουμε ως $\mathrm{div}(G)$ την υποομάδα τής G την παραγόμενη από όλες τις διαιρετές υποομάδες της. Η $\mathrm{div}(G)$ αποτελεί τη *μέγιστη* διαιρετή υποομάδα τής G. Μια αβελιανή ομάδα G καλείται **ανηγμένη** (reduced) όταν $\mathrm{div}(G) = \{0_G\}$, δηλαδή όταν πέραν τής τετριμμένης δεν διαθέτει άλλες διαιρετές υποομάδες. *Κάθε* αβελιανή ομάδα G γράφεται ως ευθύ άθροισμα $G = \mathrm{div}(G) \oplus L$, όπου L κάποια ανηγμένη υποομάδα της. Εάν G είναι μια ομάδα στρέψεως, τότε η $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι ανηγμένη. (Βλ. [16], Chapter 7, Theorem 2.1, σελ. 220.)

[34] Βλ. το θεώρημα των Harrison, Hulanicki και Fuchs, π.χ., στο βιβλίο [16], Chapter 7, Theorem 2.3 & Corollary 2.4, σελ. 221-222. Εν προκειμένω, οι πληθικοί αριθμοί $\mathfrak{m}_{\nu}$ και $\mathfrak{k}$ των εμφανιζόμενων αντιτύπων των $\mathbb{Z}_{p^{\nu}}$ και $\mathbb{J}_p$, αντιστοίχως, ενδέχεται να είναι άπειροι.

όπου η $\mathbb{J}_p := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(p^\infty), \mathbb{Z}(p^\infty))$ είναι ισόμορφη με την (προσθετική) ομάδα τής ακεραίας περιοχής των p-αδικών ακεραίων αριθμών. Από το γεγονός ότι η $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{tors}(G), \mathbb{Z})$ είναι τετριμμένη συνάγεται (μέσω των (6.38), (6.39) και (6.40)) ότι $G(p) = \{0_G\}$ *για κάθε* πρώτον αριθμό p. Επομένως, $\mathrm{tors}(G) = \{0_G\}$. □

6.3.12 Πόρισμα. *Έστω ότι G είναι μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα. Εάν ισχύει $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$ και $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$, τότε η G (ως $\mathbb{Z}$-μόδιος) είναι κατ' ανάγκην τετριμμένη.*

Αρχικες επισημανσεις. Το λήμμα 6.3.11 μας πληροφορεί ότι η G δεν διαθέτει στρέψη. Θα δοθούν δύο αποδείξεις. Η πρώτη κάνει χρήση επεκτάσεως βαθμωτών μεγεθών (από το $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{Q}$) και τού 6.3.8, και η δεύτερη τού θεωρήματος ταξινομήσεως (μέχρις ισομορφισμού) όλων των διαιρετών αβελιανών ομάδων χωρίς στρέψη.

Αποδειξη πρωτη. Η αβελιανή ομάδα $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G$ δεν εφοδιάζεται μόνον με τη δομή $\mathbb{Z}$-μοδίου αλλά και με εκείνην ενός $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χώρου μέσω τού ακόλουθου αριθμητικού πολλαπλασιασμού (σε επίπεδο αποσυντιθέμενων τανυστών):

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G) &\longrightarrow \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G \\ \lambda(\mu \otimes g) &\longmapsto (\lambda\mu) \otimes g. \end{aligned}$$

Επομένως υπάρχει κάποιο σύνολο J με $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G \cong \mathbb{Q}^{(J)}$, όπου εδώ το σύμβολο "$\cong$" δηλοί τόσον ισομορφισμό αβελιανών ομάδων ($\mathbb{Z}$-μοδίων) όσον και ισομορφισμό $\mathbb{Q}$-διανυσματικών χώρων (με $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G) = \mathrm{card}(J)$). Εάν $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Q}$, $M' = G$ και $M'' = \mathbb{Z}$, τότε (επειδή η προσθετική ομάδα $\mathbb{Q}$ είναι -σύμφωνα με το πόρισμα 4.5.30- ένας *ισόπεδος* $\mathbb{Z}$-μόδιος) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\mathbb{Q}, G), \mathbb{Z}) \underset{5.3.14}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\{0\}, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$ και ο πρώτος ισομορφισμός τού 6.3.8 δίδει

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \underbrace{\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z})}_{\cong\{0\}}) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z})}_{\cong\{0\}}) \cong \{0\}.$$

Από την άλλη μεριά, το πρώτο γινόμενο επεκτάσεως των $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Z}$ είναι ως γνωστόν[35] ισόμορφο με την (προσθετική) ομάδα των πραγματικών αριθμών:

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}. \tag{6.41}$$

Κατά συνέπειαν, $\{0\} \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}^{(J)}, \mathbb{Z}) \underset{(5.12)}{\cong} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})^J \underset{(6.41)}{\cong} \mathbb{R}^J$, οπότε $J = \varnothing$ και η G είναι κατ' ανάγκην τετριμμένη. (Πρβλ. εδ. 2.4.11 (iii).)

Αποδειξη δευτερη. Έστω *τυχών* $k \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow G \overset{k\,\mathrm{id}_G}{\hookrightarrow} G \twoheadrightarrow G/kG \longrightarrow \{0\}. \tag{6.42}$$

Η πρώτη απεικόνιση τού *πολλαπλασιασμού επί* k είναι *μονομορφισμός*, διότι $\mathrm{tors}(G) = \{0_G\}$. Σημειωτέον ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο επαγόμενος ομομορφισμός

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(k\,\mathrm{id}_G, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}) : \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z})$$

[35] Βλ. J. Wiegold: Ext$(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ *is the additive group of real numbers*, Bulletin of the Australian Mathematical Society **1** (1969), 341-343. (Πρβλ. Bredon [101], Lemma 14.8, σελ. 368.)

είναι και πάλι *πολλαπλασιασμός επί* k, ήτοι[36] $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(k\,\mathrm{id}_G, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}) = k\,\mathrm{id}_{\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z})}$. Μέσω τής (6.42) δημιουργείται η δεύτερη μακρά ακριβής Ext-ακολουθία 5.2.10,

$$\begin{aligned}
&\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G/kG,\mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \\
&\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G/kG,\mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \\
&\longrightarrow \underbrace{\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(G/kG,\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \longrightarrow \cdots .
\end{aligned}$$

Από αυτήν έπεται ότι $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G/kG,\mathbb{Z}) \cong \{0\} \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G/kG,\mathbb{Z})$. Εκ νέου εφαρμογή τού λήμματος 6.3.11 (με την G/kG στη θέση τής εκεί παρατεθείσας G) δίδει $\mathrm{tors}(G/kG) = \{0_G\}$. Εκ παραλλήλου, $\mathrm{tors}(G/kG) = G/kG$. Κατά συνέπειαν, η G/kG είναι αφ' εαυτής τετριμμένη, οπότε $kG = G$. Άρα η G είναι (ταυτοχρόνως) *διαιρετή* και *χωρίς στρέψη*. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο σύνολο J, τέτοιο ώστε να ισχύει[37] $G \cong \mathbb{Q}^{(J)} \Rightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}^{(J)},\mathbb{Z}) \underset{(5.12)}{\cong} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})^J \underset{(6.41)}{\cong} \mathbb{R}^J$. Επειδή (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z}) \cong \{0\}$, πρέπει να ισχύει $J = \varnothing$, οπότε η G είναι κατ' ανάγκην τετριμμένη. □

6.3.13 Πόρισμα. *Δεν υπάρχει (προσθετική) αβελιανή ομάδα* G, *τέτοια ώστε να ισχύει* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ *και* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια (προσθετική) αβελιανή ομάδα G με αυτές τις ιδιότητες. Επειδή το τανυστικό γινόμενο $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G$ είναι $\mathbb{Q}$-διανυσματικός χώρος, υπάρχει (κατά τα προαναφερθέντα στην πρώτη απόδειξη τού πορίσματος 6.3.12) κάποιο σύνολο J με $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G \cong \mathbb{Q}^{(J)}$. Άρα έχουμε αφ' ενός μεν

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}^{(J)},\mathbb{Z}) \underset{(5.12)}{\cong} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})^J \underset{(6.41)}{\cong} \mathbb{R}^J, \tag{6.43}$$

αφ' ετέρου δε[38] (μέσω τού πρώτου ισομορφισμού τού 6.3.8)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G,\mathbb{Z}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \underbrace{\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z})}_{\cong\mathbb{Q}}) \oplus \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}}) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}.
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Οι (6.43) και (6.44) οδηγούν σε *αντίφαση*, διότι η ομάδα $\mathbb{R}^J$ είναι *είτε* τετριμμένη (όταν $J = \varnothing$) *είτε* υπεραριθμήσιμη (όταν $J \neq \varnothing$), ενώ η $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμη και μη τετριμμένη. Άρα όντως *δεν* υπάρχει τέτοια G. □

[36] Βλ. Vermani [27], Theorem 7.2.7, σελ. 183.

[37] Τούτο προκύπτει από το θεώρημα ταξινομήσεως των διαιρετών αβελιανών ομάδων. (Βλ. [16], Chapter 4, Theorem 3.1, σελ. 140-141.)

[38] Σημειωτέον ότι η απεικόνιση $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \ni f \longmapsto f(1) \in \mathbb{Q}$ αποτελεί *ισομορφισμό*.

▸ **Το πλέον γενικευμένο θεώρημα τού Künneth για δύο όρους**. Κάνοντας χρήση των λεγομένων *ελεύθερων προσεγγίσεων* κανείς μπορεί (για R μια Π.Κ.Ι.) να απαλλαγεί από την προϋπόθεση περί τής ελευθερίας των θεωρούμενων αλυσωτών συμπλόκων στο πόρισμα 6.3.7 και να αρκεσθεί (τόσο για τη δημιουργία όσον και για τη διάσπαση τής επιθυμητής βραχείας ακριβούς ακολουθίας) στην *πολύ ασθενή* συνθήκη (6.45) τής ακυκληματικότητας τού συναλυσωτού συμπλόκου $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet$. Μάλιστα, μέσω χρησιμοποιήσεως *εμβολικών προσεγγίσεων*[39] τούτο είναι επεκτάσιμο *ακόμη και εάν* στον δακτύλιο αναφοράς R επιτραπεί να είναι *κληρονομικός*[40]. (Βλ. εδάφιο 4.2.12.)

6.3.14 Θεώρημα («Θεώρημα τού Künneth για μοδίους συνομολογίας υπεράνω κληρονομικών R»). *Δοθέντων δυο συμπλόκων R-μοδίων, ενός αλυσωτού $\mathbf{C}_\bullet$ και ενός συναλυσωτού $\mathbf{D}^\bullet$, όπου ο R είναι κληρονομικός, ισχύουν τα εξής:*
(i) *Εάν το συναλυσωτό σύμπλοκο $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet$ είναι ακυκληματικό, ήτοι*

$$\boxed{H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z},} \tag{6.45}$$

τότε υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \to \prod_{p+q=n-1} \mathrm{Ext}^1_R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H^q(\mathbf{D}^\bullet)) \xhookrightarrow{\chi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}} H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \xrightarrow{\psi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}} \!\!\!\!\!\rightarrow \prod_{p+q=n} \mathrm{Hom}_R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H^q(\mathbf{D}^\bullet)) \longrightarrow \{0\} \tag{6.46}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου αμφότερες οι $\psi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}$ και $\chi^n_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}$ είναι φυσικές (με το $\psi^\bullet_{(\mathbf{C}_\bullet,\mathbf{D}^\bullet)}$ όπως στο λήμμα 6.3.5).
(ii) *Η (6.46) είναι (άνευ άλλων επιπρόσθετων προϋποθέσεων) διασπώμενη, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε*

$$\boxed{H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^n \oplus \mathrm{Ext}^1_R(H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{D}^\bullet))^{n-1}.}$$

Απόδειξη. Είναι αρκετό να εφαρμοσθεί το θεώρημα A.4.62 για τον διπλό συναρτητή $\mathbf{F} = \mathrm{Hom}_R(-,-)$, το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet$ και το συναλυσωτό $\mathbf{D}^\bullet$. □

▸ **Μετάβαση σε "$\otimes$" για συναλυσωτά σύμπλοκα**. Επειδή (σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στη σημείωση 3.2.31) κάθε *αλυσωτό* σύμπλοκο μπορεί να μετατραπεί (με αλλαγή προσήμου στους δείκτες διαβαθμίσεως των θεωρούμενων ακολουθιών) σε *συναλυσωτό* (και τανάπαλιν), δικαιούμεθα να ορίσουμε *απευθείας* και να χρησιμοποιούμε τανυστικά γινόμενα και γινόμενα στρέψεως *συναλυσωτών* συμπλόκων, και μοδίους *συνομολογίας*[41] (αντί των μοδίων ομολογίας).

---

[39] Αρκεί κανείς στον ορισμό A.4.34 να αντικαταστήσει το επίθετο *προβολικός* με το επίθετο *εμβολικός*, αλυσωτά με συναλυσωτά σύμπλοκα και μοδίους ομολογίας με μοδίους συνομολογίας.

[40] Ο R είναι κληρονομικός εάν και μόνον εάν κάθε πηλικομόδιος τής μορφής M/U, όπου M εμβολικός R-μόδιος, είναι εμβολικός. Βλ. [27], Theorem 8.1.13, σελ. 195-196.

[41] Αυτή η προσέγγιση προτιμάται κυρίως στο πλαίσιο τής Θεωρίας Δραγμάτων. (Βλ., π.χ., [101], σελ. 18, 25 και 57, [105], σελ. 118-122, και [106], σελ. 90 και 95.)

6.3.15 Ορισμός (Τανυστικό γινόμενο συναλυσωτών συμπλόκων). Δοθέντων δυο συναλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{C}^\bullet$ και $\mathbf{D}^\bullet$ (με τα μέλη των ακολουθιών τους συμβολιζόμενα ως C^n και D^n, $n \in \mathbb{Z}$, και με τους συσσυνοριακούς τελεστές τους συμβολιζόμενους ως $d^n_{\mathbf{C}^\bullet}$ και $d^n_{\mathbf{D}^\bullet}$, $n \in \mathbb{Z}$, αντιστοίχως), ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τον R-μόδιο

$$\boxed{(\mathbf{C}^\bullet \otimes_R \mathbf{D}^\bullet)^n := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} (C^p \otimes_R D^{n-p}) = \bigoplus_{p+q=n} (C^p \otimes_R D^q).}$$

Το ζεύγος $(\mathbf{C}^\bullet \otimes_R \mathbf{D}^\bullet)^\bullet = ((\mathbf{C}^\bullet \otimes_R \mathbf{D}^\bullet)^n, \mathfrak{d}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου ο ομομορφισμός

$$\mathfrak{d}^n = \mathfrak{d}^n_{(\mathbf{C}^\bullet \otimes_R \mathbf{D}^\bullet)^\bullet} : (\mathbf{C}^\bullet \otimes_R \mathbf{D}^\bullet)^n \longrightarrow (\mathbf{C}^\bullet \otimes_R \mathbf{D}^\bullet)^{n+1}$$

ορίζεται σε επίπεδο αποσυντιθέμενων τανυστών $x \otimes y \in C^p \otimes_R D^q$ ως εξής:

$$\mathfrak{d}^n(x \otimes y) := x \otimes d^q_{\mathbf{D}^\bullet}(y) + (-1)^q\, d^p_{\mathbf{C}^\bullet}(x) \otimes y,$$

καλείται **τανυστικό γινόμενο των $\mathbf{C}^\bullet$ και $\mathbf{D}^\bullet$ υπεράνω τού** R (και αποτελεί αφ' εαυτού ένα συναλυσωτό σύμπλοκο με τους $\mathfrak{d}^n$, $n \in \mathbb{Z}$, ως συσσυνοριακούς του τελεστές).

Ο ορισμός 6.3.15 γενικεύεται και για «γινόμενα στρέψεως» *σε επίπεδο συναλυσωτών συμπλόκων*.

6.3.16 Ορισμός (Γινόμενα στρέψεως συναλυσωτών συμπλόκων). Δοθέντων ενός $m \in \mathbb{Z}$ και δυο συναλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{C}^\bullet$ και $\mathbf{D}^\bullet$ (με τα μέλη των ακολουθιών τους συμβολιζόμενα ως C^n και D^n, $n \in \mathbb{Z}$, και με τους συσσυνοριακούς τελεστές τους συμβολιζόμενους ως $d^n_{\mathbf{C}^\bullet}$ και $d^n_{\mathbf{D}^\bullet}$, $n \in \mathbb{Z}$, αντιστοίχως), ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τον R-μόδιο

$$\boxed{\mathrm{Tor}^R_m(\mathbf{C}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^n := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tor}^R_m(C^p, D^{n-p}) = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Tor}^R_m(C^p, D^q).}$$

Το ζεύγος $\mathrm{Tor}^R_m(\mathbf{C}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet = (\mathrm{Tor}^R_m(\mathbf{C}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^n, \mathfrak{d}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου ο ομομορφισμός

$$\mathfrak{d}^n = \mathfrak{d}^n_{\mathrm{Tor}^R_m(\mathbf{C}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^\bullet} : \mathrm{Tor}^R_m(\mathbf{C}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^n \longrightarrow \mathrm{Tor}^R_m(\mathbf{C}^\bullet, \mathbf{D}^\bullet)^{n+1}$$

ορίζεται (μέσω των ομομορφισμών τού εδ. 5.3.6) επί τού (εκάστοτε γινομένου στρέψεως) $\mathrm{Tor}^R_m(C^p, D^q)$ ως εξής:

$$\mathfrak{d}^n|_{\mathrm{Tor}^R_m(C^p, D^q)} := \mathrm{Tor}^R_m(\mathrm{id}_{C^p}, d^q_{\mathbf{D}^\bullet}) + (-1)^q\, \mathrm{Tor}^R_m(d^p_{\mathbf{C}^\bullet}, \mathrm{id}_{D^q}),$$

καλείται m-**οστό γινόμενο στρέψεως των $\mathbf{C}^\bullet$ και $\mathbf{D}^\bullet$ υπεράνω τού** R (και αποτελεί αφ' εαυτού ένα συναλυσωτό σύμπλοκο με τους $\mathfrak{d}^n$, $n \in \mathbb{Z}$, ως συσσυνοριακούς του τελεστές).

Από το θεώρημα 6.2.11 έπεται άμεσα το ακόλουθο:

6.3.17 Θεώρημα («Θεώρημα τού Künneth για μοδίους συνομολογίας με χρήση “$\otimes$” και “Tor” υπεράνω κληρονομικών R»). *Δοθέντων δυο συναλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{C}^{\bullet}$ και $\mathbf{D}^{\bullet}$, όπου ο R είναι κληρονομικός, ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν το συναλυσωτό σύμπλοκο $\mathrm{Tor}_1^R(\mathbf{C}^{\bullet},\mathbf{D}^{\bullet})^{\bullet}$ είναι ακυκληματικό, ήτοι*

$$\boxed{H^n(\mathrm{Tor}_1^R(\mathbf{C}^{\bullet},\mathbf{D}^{\bullet})^{\bullet}) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z},} \tag{6.47}$$

τότε υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\begin{array}{l} \{0\} \longrightarrow \bigoplus\limits_{p+q=n} (H^p(\mathbf{C}^{\bullet}) \otimes_R H^q(\mathbf{D}^{\bullet})) \xhookrightarrow{\psi^n_{(\mathbf{C}^{\bullet},\mathbf{D}^{\bullet})}} H^n((\mathbf{C}^{\bullet} \otimes_R \mathbf{D}^{\bullet})^{\bullet}) \\ \xrightarrow{\chi^n_{(\mathbf{C}^{\bullet},\mathbf{D}^{\bullet})}} \bigoplus\limits_{p+q=n+1} \mathrm{Tor}_1^R(H^p(\mathbf{C}^{\bullet}), H^q(\mathbf{D}^{\bullet})) \longrightarrow \{0\} \end{array} \tag{6.48}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου αμφότερες οι απεικονίσεις $\psi^n_{(\mathbf{C}^{\bullet},\mathbf{D}^{\bullet})}$ και $\chi^n_{(\mathbf{C}^{\bullet},\mathbf{D}^{\bullet})}$ είναι φυσικές.

(ii) *Η (6.48) είναι (άνευ άλλων επιπρόσθετων προϋποθέσεων) διασπώμενη, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε*

$$\boxed{H^n((\mathbf{C}^{\bullet} \otimes_R \mathbf{D}^{\bullet})^{\bullet}) \cong (H^{\bullet}(\mathbf{C}^{\bullet}) \otimes_R H^{\bullet}(\mathbf{D}^{\bullet}))^n \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H^{\bullet}(\mathbf{C}^{\bullet}), H^{\bullet}(\mathbf{D}^{\bullet}))^{n+1}.}$$

▸ **Συνομολογικά σταυρωτά γινόμενα.** Έστω R τυχών (μη τετριμμένος) μεταθετικός δακτύλιος. Δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{C}_{\bullet}$ και $\mathbf{D}_{\bullet}$ (με τα μέλη των ακολουθιών τους συμβολιζόμενα ως C_n και D_n, $n \in \mathbb{Z}$, και με τους συνοριακούς τελεστές τους συμβολιζόμενους ως $d_n^{\mathbf{C}_{\bullet}}$ και $d_n^{\mathbf{D}_{\bullet}}$, $n \in \mathbb{Z}$, αντιστοίχως), καθώς και δυο R-μοδίων M και N, θα μελετήσουμε τον τρόπο συσχετισμού των μοδίων συνομολογίας $H^n((\mathbf{C}_{\bullet} \otimes_R \mathbf{D}_{\bullet})_{\bullet}; M \otimes_R N) := H^n(\mathrm{Hom}_R((\mathbf{C}_{\bullet} \otimes_R \mathbf{D}_{\bullet})_{\bullet}, M \otimes_R N))$τού τανυστικού γινομένου $(\mathbf{C}_{\bullet} \otimes_R \mathbf{D}_{\bullet})_{\bullet}$ των $\mathbf{C}_{\bullet}$ και $\mathbf{D}_{\bullet}$ (με συντελεστές ειλημμένους από το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_R N$ των M και N) με τους μόδιους συνομολογίας

$$H^k(\mathbf{C}_{\bullet}; M) := H^k(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_{\bullet}, M)) \ \text{ και } \ H^l(\mathbf{D}_{\bullet}; N) := H^l(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_{\bullet}, N)).$$

(Βλ. ορισμό 6.1.9.) Για οιοδήποτε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ορίζεται ο κανονιστικός ομομορφισμός

$$\begin{gathered} \mathrm{Hom}_R(C_p, M) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(D_q, N) \xrightarrow{\mathfrak{z}^{p,q}} \mathrm{Hom}_R(C_p \otimes_R D_q, M \otimes_R N) \\ (f,g) \longmapsto \mathfrak{z}^{p,q}(f,g) := f \overline{\otimes} g. \end{gathered}$$

(Βλ. σελ. 271.) Μεταβαίνοντας στα ευθέα αθροίσματα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και κάθε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p+q=n$ λαμβάνουμε (σύμφωνα με την πρόταση 4.1.11) κανονιστικό ομομορφισμό

$$\bigoplus_{p+q=n} (\mathrm{Hom}_R(C_p, M) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(D_q, N)) \xrightarrow{\mathfrak{z}^n} \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{p+q=n} (C_p \otimes_R D_q), M \otimes_R N)$$

και, σε επίπεδο συναλυσωτών συμπλόκων, συναλυσωτό μετασχηματισμό

$$\mathfrak{z}^{\bullet} : (\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_{\bullet}, M) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_{\bullet}, N))^{\bullet} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R((\mathbf{C}_{\bullet} \otimes_R \mathbf{D}_{\bullet})_{\bullet}, M \otimes_R N),$$

απ' όπου προκύπτουν οι ομομορφισμοί

$$H^n(\mathfrak{z}^\bullet) : H^n((\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet, N))^\bullet) \longrightarrow H^n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet; M \otimes_R N)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Εξάλλου, επειδή τα $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)$ και $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet, N)$ είναι συναλυσωτά σύμπλοκα (έχοντα τους $\mathrm{Hom}_R(d_n^{\mathbf{C}_\bullet}, \mathrm{id}_M)$ και $\mathrm{Hom}_R(d_n^{\mathbf{D}_\bullet}, \mathrm{id}_N)$, $n \in \mathbb{Z}$, ως συσσυνοριακούς τους τελεστές), ορίζεται (μέσω τού θεωρήματος 6.3.17) ο (φυσικός) ομομορφισμός

$$\psi^n_{(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M), \mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet, N))} : (H^\bullet(\mathbf{C}_\bullet; M) \otimes_R H^\bullet(\mathbf{D}_\bullet; N))^n \longrightarrow H^n((\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet, N))^\bullet)$$

και, κατ' επέκταση, ο ομομορφισμός

$$\boxed{H^n(\mathfrak{z}^\bullet) \circ \psi^n_{(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M), \mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet, N))} : (H^\bullet(\mathbf{C}_\bullet; M) \otimes_R H^\bullet(\mathbf{D}_\bullet; N))^n \longrightarrow H^n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet; M \otimes_R N).} \quad (6.49)$$

6.3.18 Ορισμός. Ο ομομορφισμός (6.49) καλείται n-**οστό συνομολογικό σταυρωτό γινόμενο** (cohomology cross product) των $H^\bullet(\mathbf{C}_\bullet; M)$ και $H^\bullet(\mathbf{D}_\bullet; N)$. Ειδικότερα, για οιοδήποτε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ και οιοδήποτε ζεύγος στοιχείων $(x, y) \in H^p(\mathbf{C}_\bullet; M) \times H^q(\mathbf{D}_\bullet; N)$, το στοιχείο

$$\boxed{x \times_{\text{συνομ.}} y := (H^{p+q}(\mathfrak{z}^\bullet) \circ \psi^{p+q}_{(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M), \mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet, N))})(x \otimes y) \in H^{p+q}((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet; M \otimes_R N)}$$

καλείται **συνομολογικό σταυρωτό γινόμενο** των x και y.

6.3.19 Λήμμα. *Εάν υποτεθεί ότι τα* $\mathbf{C}_\bullet$ *και* $\mathbf{D}_\bullet$ *είναι πεπερασμένου τύπου* (βλ. εδ. 4.2.18), *με το μεν* $\mathbf{C}_\bullet$ *προβολικό, το δε* $\mathbf{D}_\bullet$ *ελεύθερο, τότε ισχύει η εξής συνεπαγωγή*:

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, N) \cong \{0\} \Longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M), \mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet, N))^\bullet = \mathbf{0}^\bullet. \quad (6.50)$$

Απόδειξη. Προς τούτο αρκεί να αποδειχθεί για οιοδήποτε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ η συνεπαγωγή

$$\mathrm{Tor}_1^R(M, N) \cong \{0\} \Longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Hom}_R(C_p, M), \mathrm{Hom}_R(D_q, N)) \cong \{0\}. \quad (6.51)$$

Επειδή (εξ υποθέσεως) υπάρχει είτε κενό είτε πεπερασμένο σύνολο $\mathscr{Y}_q$, τέτοιο ώστε να ισχύει[42]

$$D_q \cong R^{(\mathscr{Y}_q)} \Rightarrow \mathrm{Hom}_R(D_q, N) \cong N^{(\mathscr{Y}_q)}, \ \forall q \in \mathbb{Z},$$

για να καταλήξουμε στην (6.51) είναι αρκετό (λόγω τής προτάσεως 5.3.16) να δειχθεί ότι

$$\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Hom}_R(C_p, M), N) \cong \{0\}, \ \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Κατά το πόρισμα 2.5.23 υπάρχει κάποιος *ελεύθερος* R-μόδιος L, καθώς και ένας υπομόδιος L' τού L, ούτως ώστε να ισχύει $N \cong L/L'$. Λόγω αυτού δημιουργείται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow L' \overset{\iota}{\hookrightarrow} L \overset{\varpi}{\twoheadrightarrow} N \longrightarrow \{0\}.$$

[42] Για την απόδειξη τού ότι $\mathrm{Hom}_R(D_q, N) \cong N^{(\mathscr{Y}_q)}$ βλ. προτάσεις 5.3.16 και 4.1.2.

Επειδή
$$\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \{0\}$$
(εξ υποθέσεως), από το θεώρημα 5.3.10 λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow M \otimes_R L' \overset{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} \iota}{\hookrightarrow} M \otimes_R L \overset{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} \varpi}{\twoheadrightarrow} M \otimes_R N \longrightarrow \{0\}.$$

Για οιονδήποτε $p \in \mathbb{Z}$ ο C_p είναι *προβολικός*, οπότε η βραχεία ακολουθία

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_p, M \otimes_R L') \arrow[r, hook, "\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{C_p}, \mathrm{id}_M \overline{\otimes} \iota)"] & \mathrm{Hom}_R(C_p, M \otimes_R L) \arrow[dll, two heads, "\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{C_p}, \mathrm{id}_M \overline{\otimes} \varpi)"] \\ & \mathrm{Hom}_R(C_p, M \otimes_R N) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd} \tag{6.52}$$

είναι ακριβής. (Βλ. τη συνεπαγωγή (i)⇒(iv) στο θεώρημα 4.2.7.) Επειδή για οιονδήποτε $p \in \mathbb{Z}$ ο C_p είναι *προβολικός* και *πεπερασμένως παραγόμενος*, οι κανονιστικοί ομομορφισμοί (4.24):

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{Hom}_R(C_p, M) \otimes_R L' \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C_p, M \otimes_R L'), \\ \mathrm{Hom}_R(C_p, M) \otimes_R L \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C_p, M \otimes_R L), \\ \mathrm{Hom}_R(C_p, M) \otimes_R N \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C_p, M \otimes_R N), \end{array}\right] \tag{6.53}$$

είναι (σύμφωνα με το (iii) τού θεωρήματος 4.5.33) *ισομορφισμοί* και, ως εκ τούτου, η βραχεία ακριβής ακολουθία (6.52) μπορεί να εκφρασθεί υπό τη μορφή

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_p, M) \otimes_R L' \arrow[r, hook, "\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(C_p,M)} \overline{\otimes} \iota"] & \mathrm{Hom}_R(C_p, M) \otimes_R L \arrow[dll, two heads, "\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(C_p,M)} \overline{\otimes} \varpi"] \\ & \mathrm{Hom}_R(C_p, M) \otimes_R N \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd} \tag{6.54}$$

Επειδή ο L είναι ελεύθερος (και, κατ' επέκταση, σύμφωνα με την πρόταση 4.2.4, *προβολικός*), έχουμε
$$\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Hom}_R(C_p, M), L) \cong \{0\}.$$
(Βλ. λήμμα 5.3.11 και θεώρημα 5.3.12.) Λόγω αυτού, η πρώτη μακρά ακριβής Tor-ακολουθία δίδει την ακριβή ακολουθία

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Hom}_R(C_p, M), N) \arrow[r, hook, "\partial_1"] & \mathrm{Hom}_R(C_p, M) \otimes_R L' \arrow[dll, "\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(C_p,M)} \overline{\otimes} \iota"] \\ \mathrm{Hom}_R(C_p, M) \otimes_R L \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C_p, M) \otimes_R N \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

Επομένως,
$$\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Hom}_R(C_p, M), N) \underset{3.1.4\,(\mathrm{i})}{\cong} \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(C_p,M)} \overline{\otimes} \iota) \cong \{0\},$$

διότι ο $\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(C_p,M)} \overline{\otimes} \iota$ είναι μονομορφισμός (ένεκα τής (6.54)). □

6.3.20 Λήμμα. *Εάν υποτεθεί ότι αμφότερα τα* $\mathbf{C}_\bullet$ *και* $\mathbf{D}_\bullet$ *είναι ελεύθερα, το* $\mathbf{D}_\bullet$ *πεπερασμένου τύπου, το* N *πεπερασμένως παραγόμενος* R*-μόδιος και ο* R *μια Π.Κ.Ι., τότε η συνεπαγωγή* (6.50) *εξακολουθεί να ισχύει.*

Αποδειξη. Αρκεί κανείς να ακολουθήσει κατά γράμμα την απόδειξη τού λήμματος 6.3.19, με μόνη διαφοροποίηση στο ότι οι ομομορφισμοί (6.53) είναι *ισομορφισμοί* λόγω τού (iv) (και όχι πλέον λόγω τού (iii)) τού θεωρήματος 4.5.33. □

6.3.21 Λήμμα. *Οι ομομορφισμοί* $H^n(\mathfrak{z}^\bullet)$ *είναι ισομορφισμοί για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$ *όταν ικανοποιείται (τουλάχιστον) μία εκ των κάτωθι συνθηκών:*

(a) *Αμφότερα τα* $\mathbf{C}_\bullet$ *και* $\mathbf{D}_\bullet$ *είναι προβολικά και πεπερασμένου τύπου.*

(b) *Το* $\mathbf{C}_\bullet$ *είναι προβολικό και πεπερασμένου τύπου, και ο* R*-μόδιος* M *είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος.*

(c) *Το* $\mathbf{D}_\bullet$ *είναι προβολικό και πεπερασμένου τύπου, και ο* R*-μόδιος* N *είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος.*

Αποδειξη. Για να είναι οι $H^n(\mathfrak{z}^\bullet)$ ισομορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ αρκεί (ένεκα τής προτάσεως 4.1.11 και των προαναφερθέντων στη σημείωση 3.2.8) οι

$$\mathrm{Hom}_R(C_p, M) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(D_q, N) \xrightarrow{\mathfrak{z}^{p,q}} \mathrm{Hom}_R(C_p \otimes_R D_q, M \otimes_R N)$$

να είναι ισομορφισμοί για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Η αλήθεια τού ισχυρισμού αποδεικνύεται ύστερα από εφαρμογή τού θεωρήματος 4.5.36. □

Για το ακροτελεύτιο θεώρημα αυτού τού κεφαλαίου παρατίθενται εκ των προτέρων οι ακόλουθες τετράδες συνθηκών που συγκαταλέγονται στις προϋποθέσεις του (περί των R, $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$):

Α/Α	**Τετράδα συνθηκών Α**
(i)	Ο R είναι κληρονομικός.
(ii)	Αμφότερα τα $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$ είναι πεπερασμένου τύπου.
(iii)	Το $\mathbf{C}_\bullet$ είναι προβολικό.
(iv)	Το $\mathbf{D}_\bullet$ είναι ελεύθερο.

Α/Α	**Τετράδα συνθηκών Β**
(i)	Ο R είναι κληρονομικός και ναιτεριανός.
(ii)	Το $\mathbf{C}_\bullet$ είναι προβολικό.
(iii)	Το $H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι πεπερασμένου τύπου.
(iv)	Το $\mathbf{D}_\bullet$ είναι ελεύθερο και πεπερασμένου τύπου.

και

Α/Α	**Τετράδα συνθηκών Γ**
(i)	Ο R είναι Π.Κ.Ι.
(ii)	Το $\mathbf{C}_\bullet$ είναι προβολικό.
(iii)	Το $\mathbf{D}_\bullet$ είναι ελεύθερο.
(iv)	Αμφότερα τα $H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet)$ και $H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet)$ είναι πεπερασμένου τύπου.

Α/Α	**Τετράδα συνθηκών Δ**
(i)	Ο R είναι Π.Κ.Ι.
(ii)	Αμφότερα τα $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{D}_\bullet$ είναι ελεύθερα.
(iii)	Το $H_\bullet(\mathbf{D}_\bullet)$ είναι πεπερασμένου τύπου.
(iv)	Ο R-μόδιος N είναι πεπερασμένως παραγόμενος.

6.3.22 Θεώρημα. *Εάν* $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) \cong \{0\}$ *και εάν για τον δακτύλιο αναφοράς* R *και για τα αλυσωτά σύμπλοκα* $\mathbf{C}_\bullet$ *και* $\mathbf{D}_\bullet$ *πληρούνται οι συνθήκες οι ανήκουσες σε μία (τουλάχιστον) εκ των ανωτέρω τετράδων* **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ**, *τότε υφίσταται διασπώμενη* *βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{0\} \rightarrow (H^\bullet(\mathbf{C}_\bullet;M)\otimes_R H^\bullet(\mathbf{D}_\bullet;N))^n \arrow[r, hook, "H^n(\mathfrak{z}^\bullet)\circ\psi^n_{(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,M),\mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet,N))}"] & H^n((\mathbf{C}_\bullet\otimes_R\mathbf{D}_\bullet)_\bullet;M\otimes_R N) \arrow[dl, "\chi^n_{(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,M),\mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet,N))}\circ H^n(\mathfrak{z}^\bullet)^{-1}", two heads] \\ \mathrm{Tor}_1^R(H^\bullet(\mathbf{C}_\bullet;M),H^\bullet(\mathbf{D}_\bullet;N))^{n+1} \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, με τους ομομορφισμούς $\psi^n_{(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,M),\mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet,N))}$ και $\chi^n_{(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,M),\mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet,N))}$ όπως στο θεώρημα 6.3.17.

Απόδειξη. **Βήμα 1ο.** Εάν υποτεθεί ότι

(I) ισχύει η συνεπαγωγή (6.50) και

(II) οι $H^n(\mathfrak{z}^\bullet)$ είναι ισομορφισμοί για κάθε $n\in\mathbb{Z}$,

τότε ο ισχυρισμός είναι αληθής, διότι λόγω τής

$$\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,M),\mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet,N))^\bullet=\mathbf{0}^\bullet$$

ικανοποιείται αυτομάτως η (6.47) για τα $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,M)$ και $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet,N)$ και άμεση εφαρμογή τού θεωρήματος 6.3.17 (με αυτά στη θέση των εκεί παρατεθέντων $\mathbf{C}^\bullet$ και $\mathbf{D}^\bullet$) δίδει τη διασπώμενη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{0\} \rightarrow (H^\bullet(\mathbf{C}_\bullet;M)\otimes_R H^\bullet(\mathbf{D}_\bullet;N))^n \arrow[r, hook, "\psi^n_{(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,M),\mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet,N))}"] & H^n((\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,M)\otimes_R\mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet,N))^\bullet) \arrow[dl, "\chi^n_{(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet,M),\mathrm{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet,N))}", two heads] \\ \mathrm{Tor}_1^R(H^\bullet(\mathbf{C}_\bullet;M),H^\bullet(\mathbf{D}_\bullet;N))^{n+1} \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, καταλήγοντας στην επιθυμητή κατόπιν διαμεσολαβήσεως τού ισομορφισμού $H^n(\mathfrak{z}^\bullet)$.

Βήμα 2ο. Εάν πληρούνται οι συνθήκες οι ανήκουσες *στην τετράδα* **A**, τότε το (I) έπεται άμεσα από το λήμμα 6.3.19 και το (II) από το (a) τού λήμματος 6.3.21. Εάν πληρούνται οι συνθήκες οι ανήκουσες *στην τετράδα* **B**, τότε λόγω τής συνθήκης (iii) έχουμε τη δυνατότητα εφαρμογής τού θεωρήματος 4.2.19 και τής αντικαταστάσεως τού $\mathbf{C}_\bullet$ με ένα ομοτοπικώς ισοδύναμό του $\mathbf{C}'_\bullet$ που είναι προβολικό και πεπερασμένου τύπου, οπότε επανερχόμαστε στις συνθήκες (ii)-(iv) τής τετράδας **A**. Εάν πληρούνται οι συνθήκες οι ανήκουσες *στην τετράδα* **Γ**, τότε έχουμε εκ νέου τη δυνατότητα εφαρμογής τού θεωρήματος 4.2.19, αντικαταστάσεως τού $\mathbf{C}_\bullet$ με ένα ομοτοπικώς ισοδύναμό του $\mathbf{C}'_\bullet$ που είναι προβολικό και πεπερασμένου τύπου, αντικαταστάσεως τού $\mathbf{D}_\bullet$ με ένα ομοτοπικώς ισοδύναμό του $\mathbf{D}'_\bullet$ που είναι ελεύθερο και πεπερασμένου τύπου και επιστροφής μας στις συνθήκες (ii)-(iv) τής τετράδας **A**. Τέλος, εάν πληρούνται οι συνθήκες οι ανήκουσες *στην τετράδα* **Δ**, τότε μέσω τού θεωρήματος 4.2.19 αντικαθιστούμε το $\mathbf{D}_\bullet$ με ένα ομοτοπικώς ισοδύναμό του $\mathbf{D}'_\bullet$ που είναι ελεύθερο και πεπερασμένου τύπου, οπότε το (I) έπεται άμεσα από το λήμμα 6.3.20 και το (II) από το (c) τού λήμματος 6.3.21. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Βασικές εφαρμογές τού θεωρήματος των Mayer και Vietoris

Οι βασικές εφαρμογές των αλγεβρικών εκδοχών τού θεωρήματος των Mayer και Vietoris (βλ. εδ. 3.1.26 και 3.3.1) εντάσσονται στο πλαίσιο τής κλασικής Αλγεβρικής Τοπολογίας. (Γι' αυτό και στο παρόν κεφάλαιο θα χρησιμοποιηθεί ελευθέρως η ορολογία η εισαχθείσα στα παραρτήματα B, C, D και E.) Έστω R ένας μεταθετικός μη τετριμμένος δακτύλιος και έστω $\mathscr{C}$ μια ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία. Εάν $X = (X, \varnothing) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ και $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ είναι μια R-θεωρία ομολογίας επί τής $\mathscr{C}$ (υπό την έννοια τού ορισμού C.1.2), τότε, δοθέντων δύο υποχώρων A και B τού X με $X = A \cup B$ και

$$(X, A),\ (X, B),\ (X, A \cap B),\ (A, A \cap B),\ (B, A \cap B) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}), \tag{7.1}$$

είναι εύλογο το ερώτημα τού κατά πόσον κανείς μπορεί να υπολογίζει τους μοδίους ομολογίας τού X εάν θεωρήσει ως γνωστούς (ή εκ των προτέρων υπολογισθέντες) τους μοδίους ομολογίας καθενός εξ αυτών, καθώς και τους μοδίους ομολογίας τής τομής αυτών. Πρώτες απαντήσεις εδόθησαν στο τέλος τής δεκαετίας τού 1920 στην περίπτωση όπου κανείς εργάζεται με τριγωνίσιμους τοπολογικούς χώρους (και υποχώρους). Ωστόσο, η κεντρική ιδέα τής αποδείξεως των αντιστοίχων τοπολογικών εκδοχών τού εν λόγω θεωρήματος παραμένει ισχύουσα ακόμη και για τις άλλες ομολογικώς επιτρεπτές κατηγορίες. (Θα πρέπει, βεβαίως, να τονισθεί ότι η δημιουργία μιας μακράς ακριβούς ακολουθίας για την επίτευξη τού ζητούμενου υπολογισμού είναι δυνατή μόνον για υποχώρους που πληρούν κάποιες *επιπρόσθετες συνθήκες*.) Στην §7.1 ορίζεται η μακρά ακριβής ακολουθία *τοπολογικής τριάδας* και μέσω αυτής, στην §7.2, καθορίζονται οι κλασικές ακριβείς *MV-ακολουθίες*. Στις ενότητες 7.3, 7.4, 7.5 και 7.6 δίδονται σημαντικές τοπολογικές εφαρμογές τους. Τέλος, στην §7.7 οι ακριβείς MV-ακολουθίες χρησιμοποιούνται ως κύρια τεχνικά μέσα για το κτίσιμο μιας *εν πολλοίς αλγεβρικής* αποδείξεως τού *θεωρήματος διαχωρισμού των Jordan και Brouwer*.

7.1 ΜΑΚΡΑ ΑΚΡΙΒΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗΣ ΤΡΙΑΔΑΣ

7.1.1 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ορίζουμε ως **τοπολογική τριάδα** (αφορώσα στον X) κάθε διατεταγμένη τριάδα τής μορφής (X, A, B), όπου A, B είναι δύο τοπολογικοί υπόχωροι τού X. (Σε αρκετές περιπτώσεις θα θεωρούμε τέτοιες τριάδες με την επιπρόσθετη ιδιότητα: $B \subseteq A$.)

7.1.2 Θεώρημα. *Έστω $\mathscr{C}$ μια ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία και έστω $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ μια R-θεωρία ομολογίας επί τής $\mathscr{C}$. Εάν (X, A, B) είναι μια τοπολογική τριάδα (υπό την έννοια τού ορισμού 7.1.1) με $B \subseteq A$ και (X, A), (X, B), $(A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, και εάν συμβολίσουμε ως $i : (A, B) \hookrightarrow (X, B)$, $j : (X, B) \hookrightarrow (X, A)$, $k : A \hookrightarrow (A, B)$ τις συνήθεις ενθέσεις και ως $\partial_n(X, A, B)$ τη σύνθεση των ομομορφισμών R-μοδίων:*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_n(X,A;R) \arrow[r, "\partial_n(X,A)"] \arrow[rr, bend right, "\partial_n(X,A,B)"'] & \mathscr{H}_{n-1}(A;R) \arrow[r, "\mathscr{H}_{n-1}(k)"] & \mathscr{H}_{n-1}(A,B;R)
\end{tikzcd}$$

τότε η μακρά ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathscr{H}_n(A,B;R) \arrow[r, "\mathscr{H}_n(i)"] & \mathscr{H}_n(X,B;R) \arrow[r, "\mathscr{H}_n(j)"] & \mathscr{H}_n(X,A;R) \arrow[dll, "\partial_n(X,A,B)"] & \\
& \mathscr{H}_{n-1}(A,B;R) \arrow[r, "\mathscr{H}_{n-1}(i)"] & \mathscr{H}_{n-1}(X,B;R) \arrow[r, "\mathscr{H}_{n-1}(j)"] & \mathscr{H}_{n-1}(X,A;R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{7.2}$$

είναι ακριβής (και καλείται, ιδιαιτέρως, ***μακρά ακριβής ακολουθία τής τοπολογικής τριάδας*** *(X, A, B)* ***ως προς την*** *$(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$).*

Απόδειξη. Θεωρούμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα αλληλοεμπλεκομένων ακολουθιών:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathscr{H}_{n+1}(X,A;R) \arrow[rr, bend left, "\partial_{n+1}(X,A,B)"] \arrow[dr, "\partial_{n+1}(X,A)"'] & & \mathscr{H}_n(A,B;R) \arrow[rr, bend left, "\partial_n(A,B)"] \arrow[dr, "\mathscr{H}_n(i)"'] & & \mathscr{H}_{n-1}(B;R) \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & \mathscr{H}_{n-1}(X;R) \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & \mathscr{H}_{n-1}(X,A;R) \\
\cdots & \mathscr{H}_n(A;R) \arrow[ur, "\mathscr{H}_n(k)"'] \arrow[dr] & & \mathscr{H}_n(X,B;R) \arrow[ur, "\partial_n(X,B)"'] \arrow[dr, "\mathscr{H}_n(j)"] & & \mathscr{H}_{n-1}(A;R) \arrow[ur] \arrow[dr, "\mathscr{H}_{n-1}(k)"] & & \mathscr{H}_{n-1}(X,B;R) \arrow[ur, "\mathscr{H}_{n-1}(j)"'] \arrow[dr, "\partial_{n-1}(X,B)"] & \cdots \\
\mathscr{H}_n(B;R) \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \mathscr{H}_n(X;R) \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \mathscr{H}_n(X,A;R) \arrow[ur, "\partial_n(X,A)"] \arrow[rr, bend right, "\partial_n(X,A,B)"'] & & \mathscr{H}_{n-1}(A,B;R) \arrow[ur, "\mathscr{H}_{n-1}(i)"] \arrow[rr, bend right, "\partial_{n-1}(A,B)"'] & & \mathscr{H}_{n-2}(B;R)
\end{tikzcd}$$

Η πρώτη εξ αυτών είναι η (7.2), ενώ η δεύτερη, η τρίτη και η τέταρτη είναι οι (λόγω τού αξιώματος $\boxed{\textbf{ES-A1}}$ τού εδ. C.1.6 υπάρχουσες) μακρές *ακριβείς* ακολουθίες των ζευγών (X, A), (X, B) και (A, B). Επιπροσθέτως, η σύνθεση $\mathscr{H}_n(j) \circ \mathscr{H}_n(i)$

παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_n(A,B;R) \arrow[rr, "\mathscr{H}_n(i)"] \arrow[dr] \arrow[rrrr, bend left, "\mathscr{H}_n(j)\circ\mathscr{H}_n(i)"] & & \mathscr{H}_n(X,B;R) \arrow[rr, "\mathscr{H}_n(j)"] & & \mathscr{H}_n(X,A;R) \\
& \mathscr{H}_n(A,A;R)\cong\{0\} \arrow[urrr] & & &
\end{tikzcd}$$

οπότε είναι κατ' ανάγκην ο μηδενικός ομομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα *και* η πρώτη μακρά ακολουθία υποχρεούται να είναι *ακριβής* επί τη βάσει τού θεωρήματος 3.1.27 τού Wall. □

7.2 ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΤΩΝ MAYER ΚΑΙ VIETORIS

7.2.1 Ορισμός. Έστω $\mathscr{C}$ μια ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία και έστω $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ μια R-θεωρία ομολογίας επί τής $\mathscr{C}$. Εάν (X, A, B) είναι μια τοπολογική τριάδα (όπως στον ορισμό 7.1.1) με

$$(X, A),\ (X, B),\ (A, A \cap B),\ (B, A \cap B) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}),$$

τότε κατόπιν θεωρήσεως των μακρών ακριβών ακολουθιών ομολογίας για τα τοπολογικά ζεύγη (X, B) και $(A, A \cap B)$ προκύπτει το εξής μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathscr{H}_n(B;R) \arrow[r] & \mathscr{H}_n(X;R) \arrow[r] & \mathscr{H}_n(X,B;R) \arrow[r, "\partial_n(X,B)"] & \mathscr{H}_{n-1}(B;R) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathscr{H}_n(A\cap B;R) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathscr{H}_n(A;R) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathscr{H}_n(A,A\cap B;R) \arrow[r, "\partial_n(A,A\cap B)"'] \arrow[u, "\mathscr{H}_n(i_{A,B})"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathscr{H}_{n-1}(A\cap B;R) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(με τα κατακόρυφα βέλη υποδηλούντα ομομορφισμούς R-μοδίων επαγομένους από τις εκάστοτε συνήθεις ενθέσεις). Ονομάζουμε την τοπολογική τριάδα (X, A, B) **εκτμητική** (excisive) **για την R-θεωρία ομολογίας** $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ όταν οι ομομορφισμοί R-μοδίων $\mathscr{H}_n(i_{A,B}) : \mathscr{H}_n(A, A \cap B; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(X, B; R)$ και

$$\mathscr{H}_n(i_{B,A}) : \mathscr{H}_n(B, A \cap B; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(X, A; R)$$

οι επαγόμενοι από τις συνήθεις ενθέσεις

$$i_{A,B} : (A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B) \quad i_{B,A} : (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$$

είναι ισομορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

7.2.2 Σημείωση. (i) Εάν οι ανωτέρω υπόχωροι είναι τέτοιοι, ώστε να ισχύει η ισότητα $X = \mathrm{int}_X(A) \cup \mathrm{int}_X(B)$ (όπως, π.χ., στην περίπτωση όπου οι A, B είναι ανοικτοί υπόχωροι και $X = A \cup B$), τότε από την εναλλακτική μορφή $\boxed{\textbf{ES-A3}}^{\star}$ τού αξιώματος τής εκτομής (βλ. πρόταση C.2.7) έπεται ότι η τριάδα (X, A, B) είναι εκτμητική.

(ii) Όταν $X = A \cup B$ ο ως άνω ορισμός *δεν εξαρτάται* κατ' ουσίαν από τη διάταξη των A, B στην τοπολογική τριάδα $(A \cup B, A, B)$! Όπως θα δούμε κατωτέρω (στην πρόταση 7.2.6) η τριάδα $(A \cup B, A, B)$ είναι εκτμητική εάν και μόνον εάν η $(A \cup B, B, A)$ είναι εκτμητική. (Εν τοιαύτη περιπτώσει, αρκετοί συγγραφείς καλούν το ίδιο το ζεύγος (A, B) **εκτμητικό ζεύγος**.)

7.2.3 Θεώρημα. *Έστω ότι $\mathscr{C}$ είναι μια ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία, $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ μια R-θεωρία ομολογίας επί τής $\mathscr{C}$ και (X, A, B) μια εκτμητική τοπολογική τριάδα για την $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ (όπως στο εδ. 7.2.1). Εάν C είναι υπόχωρος τού X με $C \subseteq A \cap B$ και*

$$(X,C),\ (X, A\cap B),\ (A,C),\ (B,C),\ (A\cap B, C),\ (A, A\cap B),\ (B, A\cap B) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}),$$

και εάν συμβολίσουμε ως

$$\begin{aligned} k_A &: (A\cap B, C) \hookrightarrow (A,C),\ \ k_B : (A\cap B, C) \hookrightarrow (B,C), \\ l_A &: (A,C) \hookrightarrow (X,C),\ \ l_B : (B,C) \hookrightarrow (X,C) \end{aligned}$$

και $m_{C,B} : (X,C) \hookrightarrow (X,B)$ τις συνήθεις ενθέσεις και ως $\mathfrak{D}_n(A,B)$ τη σύνθεση των ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}_n(X,C;R) \arrow[r, "\mathscr{H}_n(m_{C,B})"] \arrow[rrr, bend right, "\mathfrak{D}_n(A,B)"'] & \mathscr{H}_n(X,B;R) \arrow[r, "\mathscr{H}_n(i_{A,B})^{-1}"] & \mathscr{H}_n(A, A\cap B;R) \arrow[r, "\partial_n(A,A\cap B,C)"] & \mathscr{H}_{n-1}(A\cap B, C;R) \end{tikzcd}$$

τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\mathfrak{D}_{n+1}(A,B)"] & \mathscr{H}_n(A\cap B,C;R) \arrow[r, "(\mathscr{H}_n(k_A){,}\mathscr{H}_n(k_B))"] & \mathscr{H}_n(A,C;R)\oplus\mathscr{H}_n(B,C;R) \arrow[dll, "\mathscr{H}_n(l_A)-\mathscr{H}_n(l_B)"] \\ \mathscr{H}_n(X,C;R) \arrow[r, "\mathfrak{D}_n(A,B)"'] & \mathscr{H}_{n-1}(A\cap B,C;R) \arrow[r, "(\mathscr{H}_{n-1}(k_A){,}\mathscr{H}_{n-1}(k_B))"'] & \cdots \end{tikzcd}$$

*(η λεγομένη **ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris** (για τους A, B) **ως προς την** $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$).*

Απόδειξη. Λαμβάνουμε υπ' όψιν το γεγονός ότι οι $\mathscr{H}_n(i_{A,B})$ και $\mathscr{H}_n(i_{B,A})$ είναι ισομορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και εντάσσουμε τις μακρές ακριβείς ακολουθίες των τοπολογικών τριάδων

$$(A, A\cap B, C),\ (B, A\cap B, C),\ (X, A, C),\ (X, B, C) \text{ και } (X, A\cap B, C)$$

(τις κατασκευασθείσες μέσω τού θεωρήματος 7.1.2) στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[dr, "\partial_{n+1}(B,A\cap B,C)"'] & \vdots \arrow[d, "\partial_{n+1}(X,A\cap B,C)"] & {} \arrow[dl, "\partial_{n+1}(A,A\cap B,C)"] \\
& \mathscr{H}_n(A\cap B,C;R) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\mathscr{H}_n(A,C;R) \arrow[dr] \arrow[dddd, bend right=60] & & \mathscr{H}_n(B,C;R) \arrow[dl] \arrow[dddd, bend left=60] \\
& \mathscr{H}_n(X,C;R) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\mathscr{H}_n(X,B;R) \arrow[dddd, bend right=60, "\partial_n(X,B,C)"'] & & \mathscr{H}_n(X,A;R) \arrow[dddd, bend left=60, "\partial_n(X,A,C)"] \\
& \mathscr{H}_n(X,A\cap B;R) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dd, "\partial_n(X,A\cap B,C)"] & \\
\mathscr{H}_n(A,A\cap B;R) \arrow[uu, "\mathscr{H}_n(i_{A,B})", "\cong"'] \arrow[ur] \arrow[dr, "\partial_n(A,A\cap B,C)"'] & & \mathscr{H}_n(B,A\cap B;R) \arrow[uu, "\cong", "\mathscr{H}_n(i_{B,A})"'] \arrow[ul] \arrow[dl, "\partial_n(B,A\cap B,C)"] \\
& \mathscr{H}_{n-1}(A\cap B,C;R) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\mathscr{H}_{n-1}(B,C;R) & & \mathscr{H}_{n-1}(A,C;R) \\
& \vdots &
\end{tikzcd}$$

Επειδή όλα τα τρίγωνά του, καθώς και τα τετράπλευρα

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_n(A,C;R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}_n(X,C;R) \arrow[d] & \mathscr{H}_n(B,C;R) \arrow[l] \arrow[d] \\
\mathscr{H}_n(A,A\cap B;R) \arrow[r] & \mathscr{H}_n(X,A\cap B;R) & \mathscr{H}_n(B,A\cap B;R) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικά και η ακρίβεια διατηρείται κατά μήκος των διαγωνίων τού σχηματιζόμενου εξαγώνου, ο ισχυρισμός είναι αληθής δυνάμει τού θεωρήματος 3.1.26. (Γράφοντας στη διατύπωση τού θεωρήματος (εν συντομία) “$\mathscr{H}_n(l_A) - \mathscr{H}_n(l_B)$” εννοούμε -όπως και στο 3.1.26- την απεικόνιση $\mathscr{H}_n(l_A) \oplus (-\mathscr{H}_n(l_B))$.) $\square$

7.2.4 Σημείωση. (i) Εάν $C = \varnothing$, τότε από το θεώρημα 7.2.3 προκύπτει **η (συνήθης) ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris (για την εκτμητική τριάδα** (X,A,B)**)**:

$$\boxed{\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\mathfrak{D}_{n+1}(A,B)"] & \mathscr{H}_n(A\cap B;R) \arrow[r, "(\mathscr{H}_n(k_A){,}\mathscr{H}_n(k_B))"] & \mathscr{H}_n(A;R)\oplus\mathscr{H}_n(B;R) \arrow[dll, rounded corners, "\mathscr{H}_n(l_A)-\mathscr{H}_n(l_B)"] \\
\mathscr{H}_n(X;R) \arrow[r, "\mathfrak{D}_n(A,B)"'] & \mathscr{H}_{n-1}(A\cap B;R) \arrow[r, "(\mathscr{H}_{n-1}(k_A){,}\mathscr{H}_{n-1}(k_B))"'] & \cdots
\end{tikzcd}}$$

(ii) Εάν $C = \{\mathrm{pt}\}$ και $A \cap B \neq \varnothing$, τότε από το θεώρημα 7.2.3 και από το (ii) τού πορίσματος C.3.5 (με το C στη θέση τού εκεί παρατεθέντος A) προκύπτει **η ανηγμένη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris (για την** (X, A, B)):

$$\begin{aligned}
&\cdots \xrightarrow{\widetilde{\mathfrak{D}}_{n+1}(A,B)} \widetilde{\mathscr{H}}_n(A \cap B; R) \xrightarrow{(\widetilde{\mathscr{H}}_n(k_A), \widetilde{\mathscr{H}}_n(k_B))} \widetilde{\mathscr{H}}_n(A; R) \oplus \widetilde{\mathscr{H}}_n(B; R) \xrightarrow{\widetilde{\mathscr{H}}_n(l_A) - \widetilde{\mathscr{H}}_n(l_B)} \\
&\widetilde{\mathscr{H}}_n(X; R) \xrightarrow[\widetilde{\mathfrak{D}}_n(A,B)]{} \widetilde{\mathscr{H}}_{n-1}(A \cap B; R) \xrightarrow[(\widetilde{\mathscr{H}}_{n-1}(k_A), \widetilde{\mathscr{H}}_{n-1}(k_B))]{} \cdots
\end{aligned}$$

7.2.5 Θεώρημα. *Έστω ότι X είναι ένας τοπολογικός χώρος και οι A, B δυο υπόχωροί του. Εάν $\mathscr{C}$ είναι μια ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία, $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ μια R-θεωρία ομολογίας επί τής $\mathscr{C}$ και $(A \cup B, A, B)$ μια εκτμητική τοπολογική τριάδα για την $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ (όπως στον ορισμό 7.2.1) με (X, A), (X, B), $(X, A \cup B)$, $(X, A \cap B) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, και εάν συμβολίσουμε ως*

$$\nu_A : (X, A \cap B) \hookrightarrow (X, A), \;\; \nu_B : (X, A \cap B) \hookrightarrow (X, B),$$

$$\xi_A : (X, A) \hookrightarrow (X, A \cup B), \;\; \xi_B : (X, B) \hookrightarrow (X, A \cup B)$$

και $\rho_A : (A, A \cap B) \hookrightarrow (X, A \cap B)$ τις συνήθεις ενθέσεις, και ως $\widehat{\mathfrak{D}}(A, B)$ τη σύνθεση των ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_n(X, A \cup B; R) \arrow[r, "\partial_n(X, A\cup B, B)"] \arrow[drr, "\widehat{\mathfrak{D}}(A,B)"'] & \mathscr{H}_{n-1}(A \cup B, B; R) \arrow[r, "\mathscr{H}_{n-1}(i_{A,B})^{-1}"] & \mathscr{H}_{n-1}(A, A \cap B; R) \arrow[d, "\mathscr{H}_{n-1}(\rho_A)"] \\
& & \mathscr{H}_{n-1}(X, A \cap B; R)
\end{tikzcd}$$

τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\begin{aligned}
&\cdots \xrightarrow{\widehat{\mathfrak{D}}_{n+1}(A,B)} \mathscr{H}_n(X, A \cap B; R) \xrightarrow{(\mathscr{H}_n(\nu_A), \mathscr{H}_n(\nu_B))} \mathscr{H}_n(X, A; R) \oplus \mathscr{H}_n(X, B; R) \xrightarrow{\mathscr{H}_n(\xi_A) - \mathscr{H}_n(\xi_B)} \\
&\mathscr{H}_n(X, A \cup B; R) \xrightarrow[\widehat{\mathfrak{D}}_n(A,B)]{} \mathscr{H}_{n-1}(X, A \cap B; R) \xrightarrow[(\mathscr{H}_{n-1}(\nu_A), \mathscr{H}_{n-1}(\nu_B))]{} \cdots
\end{aligned}$$

(η λεγομένη ***σχετική ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris τού*** *X* ***ως προς τους*** *A, B* ***και την*** *$(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$).*

Αποδειξη. Λαμβάνουμε υπ' όψιν το γεγονός ότι οι $\mathscr{H}_{n-1}(i_{A,B})$ και $\mathscr{H}_{n-1}(i_{B,A})$ είναι ισομορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και εντάσσουμε τις μακρές ακριβείς ακολουθίες των τοπολογικών τριάδων

$$(X, A \cup B, A),\ (X, A \cup B, B),\ (X, A, A \cap B),\ (X, B, A \cap B) \text{ και } (X, A \cup B, A \cap B)$$

(τις κατασκευασθείσες μέσω τού θεωρήματος 7.1.2) στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[drr] & & \vdots \arrow[d] & & {} \arrow[dll] \\
& & \mathscr{H}_n(X, A \cap B; R) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \\
& \mathscr{H}_n(X, A; R) \arrow[dr] \arrow[dddd, bend right=60, "\partial_n(X;A,A\cap B)"'] & & \mathscr{H}_n(X, B; R) \arrow[dl] \arrow[dddd, bend left=60, "\partial_n(X;B,A\cap B)"] & \\
& & \mathscr{H}_n(X, A \cup B; R) \arrow[dl, "\partial_n(X;A\cup B,B)"'] \arrow[dr, "\partial_n(X;A\cup B,A)"] \arrow[dd, "\partial_n(X;A \cup B, A \cap B)"] & & \\
& \mathscr{H}_{n-1}(A \cup B, B; R) \arrow[dddd, bend right=60] & & \mathscr{H}_{n-1}(A \cup B, A; R) \arrow[dddd, bend left=60] & \\
& & \mathscr{H}_{n-1}(A \cup B, A \cap B; R) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dd] & & \\
& \mathscr{H}_{n-1}(A, A \cap B; R) \arrow[uu, "\mathscr{H}_{n-1}(i_{A,B})"] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathscr{H}_{n-1}(B, A \cap B; R) \arrow[uu, "\mathscr{H}_{n-1}(i_{B,A})"'] \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
& & \mathscr{H}_{n-1}(X, A \cap B; R) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \\
& \mathscr{H}_{n-1}(X, B; R) & & \mathscr{H}_{n-1}(X, A; R) & \\
& & \vdots & &
\end{tikzcd}
$$

Επειδή όλα τα τρίγωνά του, καθώς και τα τετράπλευρα

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_n(X, A; R) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n(X, A, A \cap B)"] & \mathscr{H}_n(X, A \cup B; R) \arrow[d, "\partial_n(X, A \cup B, A \cap B)"] & \mathscr{H}_n(X, B; R) \arrow[l] \arrow[d, "\partial_n(X, B, A \cap B)"] \\
\mathscr{H}_{n-1}(A, A \cap B; R) \arrow[r] & \mathscr{H}_{n-1}(A \cup B, A \cap B; R) & \mathscr{H}_{n-1}(B, A \cap B; R) \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

είναι μεταθετικά και η ακρίβεια διατηρείται κατά μήκος των διαγωνίων τού σχηματιζόμενου εξαγώνου, ο ισχυρισμός είναι αληθής δυνάμει τού θεωρήματος 3.1.26. □

7.2.6 Πρόταση. *Έστω ότι X είναι ένας τοπολογικός χώρος και ότι οι A, B είναι δυο υπόχωροί του, τέτοιοι ώστε να ισχύει $A \cup B \subseteq X$. Εάν $\mathscr{C}$ είναι μια ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία και $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ είναι μια R-θεωρία ομολογίας επί τής $\mathscr{C}$ με*

$$(X, A \cup B), (X, A), (X, B), (X, A \cap B),$$
$$(A \cup B, A), (A \cup B, B), (A, A \cap B), (B, A \cap B), (A \cup B, A \cap B)$$

τοπολογικά ζεύγη ανήκοντα στην $\mathscr{C}$, τότε οι κάτωθι συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) *Η τοπολογική τριάδα $(A \cup B, A, B)$ είναι εκτμητική για την $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$.*

(ii) *Η τοπολογική τριάδα $(A \cup B, B, A)$ είναι εκτμητική για την $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$.*

(iii) *Η (κανονιστικώς οριζόμενη) απεικόνιση*

$$\mathscr{H}_n(A, A\cap B; R) \oplus \mathscr{H}_n(B, A\cap B; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(A\cup B, A\cap B; R)$$

είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) *Η (κανονιστικώς οριζόμενη) απεικόνιση*

$$\mathscr{H}_n(A\cup B, A\cap B; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(A\cup B, A; R) \oplus \mathscr{H}_n(A\cup B, B; R)$$

είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Αποδειξη. (i)⇒(iii) Εάν η $(A \cup B, A, B)$ είναι εκτμητική, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα 7.2.3 (με τους σε αυτό εισαχθέντες συμβολισμούς) για $X := A\cup B$ και $C := A\cap B$ λαμβάνουμε για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ ισομορφισμούς

$$\{0\} \longrightarrow \mathscr{H}_n(A, A\cap B; R) \oplus \mathscr{H}_n(B, A\cap B; R) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}_n(A\cup B, A\cap B; R) \xrightarrow{\mathfrak{D}_n(A,B)} \{0\}.$$

(ii)⇒(iii) Εάν η τριάδα $(A\cup B, B, A)$ είναι εκτμητική, τότε εναλλάσσοντας τους ρόλους των A και B και χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα (σε συνδυασμό με την -μέχρις ισομορφισμού- μεταθετικότητα τού ευθέος αθροίσματος R-μοδίων) καταλήγουμε εκ νέου στην ύπαρξη των ανωτέρω ισομορφισμών.

(iii)⇒[(i) και (ii)] Εάν $\mathscr{H}_n(A, A\cap B; R)\oplus\mathscr{H}_n(B, A\cap B; R) \cong \mathscr{H}_n(A\cup B, A\cap B; R)$, για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα 7.2.3 (με τους σε αυτό εισαχθέντες συμβολισμούς) για $X := A\cup B$ και $C := A\cap B$ λαμβάνουμε από το ευμεγέθες διάγραμμα τής σελ. 371 το εξής:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{H}_n(A\cup B, A\cap B; R) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & \\
\mathscr{H}_n(A\cup B, B; R) & & \mathscr{H}_n(A\cup B, A; R) \\
 & \mathscr{H}_n(A\cup B, A\cap B; R) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
\mathscr{H}_n(A, A\cap B; R) \arrow[uu, "\mathscr{H}_n(i_{A,B})"] \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathscr{H}_n(B, A\cap B; R) \arrow[uu, "\mathscr{H}_n(i_{B,A})"'] \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

και οι

$$\left\{\begin{array}{l} \mathscr{H}_n(A, A\cap B; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(A\cup B, A\cap B; R) \\ \mathscr{H}_n(B, A\cap B; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(A\cup B, A\cap B; R) \end{array}\right\}$$

είναι μονομορφισμοί για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, ενώ στη μακρά ακριβή ακολουθία των τοπολογικών τριάδων $(A\cup B, A, A\cap B)$ και $(A\cup B, B, A\cap B)$ οι συνδετικοί ομομορφισμοί είναι μηδενικοί. Τούτο σημαίνει ότι οι

$$\left\{\begin{array}{l} \mathscr{H}_n(A\cup B, A\cap B; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(A\cup B, A; R) \\ \mathscr{H}_n(A\cup B, A\cap B; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(A\cup B, B; R) \end{array}\right\}$$

είναι επιμορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Βάσει λοιπόν τού λήμματος 3.1.22 διαπιστώνουμε ότι αμφότεροι οι $\mathscr{H}_n(i_{A,B})$ και $\mathscr{H}_n(i_{B,A})$ είναι ισομορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

(i)⇒(iv) Εάν η τριάδα $(A \cup B, A, B)$ είναι εκτμητική, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα 7.2.5 (με τους σε αυτό εισαχθέντες συμβολισμούς) για $X := A \cup B$ λαμβάνουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισομορφισμούς

$$\{0\} \xrightarrow{\widehat{\mathfrak{D}}_{n+1}(A,B)} \mathscr{H}_n(A \cup B, A \cap B; R) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}_n(A \cup B, A; R) \oplus \mathscr{H}_n(A \cup B, B; R) \longrightarrow \{0\}$$

(ii)⇒(iv) Εάν η τριάδα $(A \cup B, B, A)$ είναι εκτμητική, τότε εναλλάσσοντας τους ρόλους των A και B και χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα (σε συνδυασμό με την -μέχρις ισομορφισμού- μεταθετικότητα τού ευθέος αθροίσματος R-μοδίων) καταλήγουμε εκ νέου στην ύπαρξη των ανωτέρω ισομορφισμών.

(iv)⇒[(i) και (ii)] Εάν $\mathscr{H}_n(A \cup B, A \cap B; R) \cong \mathscr{H}_n(A \cup B, B; R) \oplus \mathscr{H}_n(A \cup B, B; R)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα 7.2.5 (με τους σε αυτό εισαχθέντες συμβολισμούς) για $X := A \cup B$ λαμβάνουμε από το ευμεγέθες διάγραμμα τής σελ. 373 το εξής:

$$\begin{tikzcd}
& & \{0\} \arrow[dll] \arrow[drr] \arrow[dd] & & \\
\mathscr{H}_n(A \cup B, B; R) & & & & \mathscr{H}_n(A \cup B, A; R) \\
& & \mathscr{H}_n(A \cup B, A \cap B; R) \arrow[ull] \arrow[urr] \arrow[dd, equal] & & \\
\mathscr{H}_n(A, A \cap B; R) \arrow[uu, "\mathscr{H}_n(i_{A,B})"] \arrow[urr] \arrow[drr] & & & & \mathscr{H}_n(B, A \cap B; R) \arrow[uu, "\mathscr{H}_n(i_{B,A})"'] \arrow[ull] \arrow[dll] \\
& & \mathscr{H}_n(A \cup B, A \cap B; R) & &
\end{tikzcd}$$

και οι

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathscr{H}_n(A \cup B, A \cap B; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(A \cup B, A; R) \\ \mathscr{H}_n(A \cup B, A \cap B; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(A \cup B, B; R) \end{array} \right\}$$

είναι επιμορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ενώ στη μακρά ακριβή ακολουθία των τοπολογικών τριάδων $(A \cup B, A, A \cap B)$ και $(A \cup B, B, A \cap B)$ είναι μηδενικοί. Τούτο σημαίνει ότι οι

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathscr{H}_n(A, A \cap B; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(A \cup B, A \cap B; R) \\ \mathscr{H}_n(B, A \cap B; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(A \cup B, A \cap B; R) \end{array} \right\}$$

είναι μονομορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Βάσει τού λήμματος 3.1.22 διαπιστώνουμε ότι αμφότεροι οι $\mathscr{H}_n(i_{A,B})$ και $\mathscr{H}_n(i_{B,A})$ είναι ισομορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

7.2.7 Πόρισμα. *Ύστερα από εναλλαγή των ρόλων των A και B στα θεωρήματα 7.2.3* *και 7.2.5 οι συνδετικοί ομομορφισμοί αλλάζουν πρόσημο, δηλαδή ισχύει*

$$\mathfrak{D}_n(A,B) = -\mathfrak{D}_n(B,A) \text{ και } \widehat{\mathfrak{D}}_n(A,B) = -\widehat{\mathfrak{D}}_n(B,A),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Αποδειξη. Έπεται άμεσα από τα προαναφερθέντα στο θεώρημα 3.1.26. □

7.2.8 Σημείωση. (i) Εάν οι X_1, X_2 είναι δυο τοπολογικοί χώροι και X_1+X_2 το τοπολογικό άθροισμα αυτών (βλ. B.2.11 (iii), σελ. 640), τότε η τριάδα (X_1+X_2, X_1, X_2) είναι εκτμητική (βάσει τού αξιώματος τής εκτομής), ενώ η συνήθης ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris 7.2.4 (i) για την (X_1+X_2, X_1, X_2) μας δίδει ισομορφισμούς

$$\mathscr{H}_n(X_1+X_2;R) \cong \mathscr{H}_n(X_1;R) \oplus \mathscr{H}_n(X_2;R),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Εάν οι $X_1, ..., X_k$, $k \geqslant 2$, είναι τοπολογικοί χώροι, τότε χρησιμοποιώντας τό (i) και μαθηματική επαγωγή επί τού n είμαστε σε θέση να αποδείξουμε τους ισομορφισμούς:

$$\mathscr{H}_n(\sum_{j=1}^{k} X_j;R) \cong \bigoplus_{j=1}^{k} \mathscr{H}_n(X_j;R),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Εν αντιθέσει προς τα (i), (ii), εάν κανείς θεωρήσει το τοπολογικό άθροισμα $\sum_{j\in J} X_j$ μιας μη πεπερασμένης οικογένειας $(X_j)_{j\in J}$ (τοπολογικών χώρων), τότε οι αντίστοιχοι ισομορφισμοί είναι αδύνατον να συναχθούν από τα αξιώματα $\boxed{\textbf{ES-A1}}$, $\boxed{\textbf{ES-A2}}$, $\boxed{\textbf{ES-A3}}$ και $\boxed{\textbf{ES-A4}}$ τού εδ. C.1.6, εξ ου προέκυψε και η ανάγκη εισαγωγής τού αξιώματος $\boxed{\textbf{ES-A5}}$.

7.2.9 Παρατήρηση. Η χρήση τής ακριβούς ακολουθίας των Mayer και Vietoris είναι θεμελιώδους σημασίας στο πλαίσιο τής Αλγεβρικής Τοπολογίας (όπως συμβαίνει με το θεώρημα[1] των Seifert[2] και van Kampen[3] όταν κανείς εργάζεται με τη *θεμελιώδη ομάδα* B.6.13). Με τη βοήθειά της μπορεί κανείς να υπολογίσει τους μοδίους ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου, αρκεί να τον έχει διασπάσει σε κατάλληλους «δομικούς λίθους». Ωστόσο, απαιτείται προσοχή προκειμένου να διασφαλίζεται αυτή η «καταλληλότητα». Επί παραδείγματι, θεωρώντας τή μη εκτμητική τοπολογική τριάδα (X,A,B), $X := A\cup B$ ($\supsetneqq \text{int}_X(A)\cup\text{int}_X(B)$), ως προς την R-θεωρία ιδιάζουσας

[1] Για αποδείξεις και κάποιες πρώτες εφαρμογές αυτού τού θεωρήματος βλ. Armstrong [37], σελ. 138-140, Bredon [57], §III.9, σελ. 158-161, Fulton [65], §14.c, σελ. 197-200, Hatcher [68], σελ. 43-46, Kosniowski [54], Chapters 23-25, σελ. 181-201, Massey [77], Chapter IV, σελ. 86-116, Mayer [79], §II.3, σελ. 89-95, Munkres [41], Chapter 11, σελ. 407-445, Rotman [84], Theorem 7.40, σελ. 175-176, και Stöcker & Zieschang [87], §5.3, σελ. 110-120.

[2] Seifert, *Herbert* (27/5/1907-1/10/1996). Γερμανός μαθηματικός. Εξεπόνησε επιστημονικές διατριβές το 1930 στο Πανεπιστήμιο τής Δρέσδης υπό τον W. Threlfall (με τον οποίο τον συνέδεε μια στενή φιλία που οδήγησε αργότερα σε ένα κοινό ερευνητικό πρόγραμμα και στη συγγραφή τού περίφημου βιβλίου [50] υπό τον τίτλο *Lehrbuch der Topologie*) και το 1932 στο Πανεπιστήμιο τής Λειψίας υπό τον van der Waerden. Η έρευνά του επικεντρώθηκε κυρίως στη μελέτη των τοπολογικών ιδιοτήτων των τριδιαστάτων ινικών χώρων, των ομάδων μεταφορών τού τριδιαστάτου σφαιρικού χώρου, τού γένους των κόμπων και των αναλλοιώτων ζευγμάτων ορισμένων χαρακτηριστικών κόμπων. Έως τη συνταξιοδότησή του διετέλεσε καθηγητής τού Πανεπιστημίου τής Χαϊδελβέργης. Για περισσότερα βιογραφικά στοιχεία βλ. D. Puppe: *H. Seifert.* In: *History of Topology*, North-Holland, Amsterdam, (1999), σελ. 1021-1027.

[3] van Kampen, *Egbert Rudolf* (28/5/1908-11/2/1942). Ολλανδός μαθηματικός. Σπούδασε στα Πανεπιστήμια τής Leiden και τού Göttingen (κατά τα έτη 1924-1927) και επηρεάσθηκε από τις τοπολογικές εργασίες των van der Waerden (1903-1996) και Alexandoff (1896-1982). Εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό τον van der Woude (1876-1982) στη Leiden (1929) υπό τον τίτλο *Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze* και από το 1931 μετέβη στις Η.Π.Α., όπου και δίδαξε στο Johns Hopkins University. Παρήγαγε αρκετές σημαντικές ερευνητικές εργασίες μέχρι τον πρόωρο θάνατό του (το 1942) που ήταν αποτέλεσμα τής επαράτου νόσου, η οποία τον καταπόνησε επί τουλάχιστον μία τριετία.

ομολογίας $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$ επί τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$ (βλ. D.2.16 και D.2.27), όπου

$$A := \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geqslant -1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2},\, y \geqslant \sin(\frac{1}{x})\},$$

$$B := \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leqslant -1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2},\, y \leqslant \sin(\frac{1}{x})\},$$

$$X = \left\{ \begin{array}{c} \text{κλειστή κατακόρυφη λωρίδα εντός τού } \mathbb{R}^2 \text{ κείμενη} \\ \text{μεταξύ τού άξονα των } y \text{ και τής ευθείας } x = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\},$$

$$A \cap B = \left\{ (0,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -1 \leqslant y \leqslant 1 \right\} \cup \left\{ (x, \sin(\tfrac{1}{x})) \middle| 0 < x \leqslant \tfrac{\pi}{2} \right\}$$

(με τους A, B κλειστούς υπόχωρους τού X και το $A \cap B$ έχον *δύο* δρομοσυνεκτικές συνιστώστες), δεν υφίσταται ακριβής ακολουθία τύπου Mayer-Vietoris, όταν ο R είναι μια Π.Κ.Ι! Πράγματι· εάν η

$$\cdots \longrightarrow H_1^{\text{sing.}}(X;R) \longrightarrow H_0^{\text{sing.}}(A \cap B;R) \longrightarrow H_0^{\text{sing.}}(A;R) \oplus H_0^{\text{sing.}}(B;R) \longrightarrow H_0^{\text{sing.}}(X;R) \longrightarrow \{0\}$$

ήταν ακριβής, τότε, επειδή $H_0^{\text{sing.}}(A \cap B;R) \underset{\text{D.2.24}}{\xrightarrow{\cong}} R \oplus R$ και οι X, A, B είναι συσταλτοί με

$$H_1^{\text{sing.}}(X;R) \cong \{0\},\ H_0^{\text{sing.}}(X;R) \cong H_0^{\text{sing.}}(A;R) \cong H_0^{\text{sing.}}(B;R) \cong R$$

(βλ. C.2.3, C.1.7 (iii)), θα προέκυπτε η $\{0\} \longrightarrow R \oplus R \longrightarrow R \oplus R \longrightarrow R \longrightarrow \{0\}$, οπότε θα είχαμε $3 = \text{rank}_R((R \oplus R) \oplus R) \underset{3.4.4}{=} \text{rank}_R(R \oplus R) = 2$. Άτοπο!

▸ **Εναλλακτικός τρόπος δημιουργίας MV-ακολουθιών μέσω αλυσωτών συμπλόκων**. Όταν κανείς εργάζεται, π.χ., με τις συνηθέστερες θεωρίες ομολογίας, ήτοι με τις θεωρίες ιδιάζουσας και μονοπλεκτικής ομολογίας, ορισμένες ακολουθίες των Mayer και Vietoris μπορούν να εξαχθούν *και* απευθείας κάνοντας χρήση τού θεωρήματος 3.3.1. Επί παραδείγματι, εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και A, B υπόχωροι αυτού, τότε το αντίστοιχο τής 7.2.6 ως προς την $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$ είναι το εξής:

7.2.10 Λήμμα. *Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) *Ο αλυσωτός μετασχηματισμός* $S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R) \longrightarrow S_\bullet(A \cup B;R)$ *επάγει ισομορφισμούς*

$$H_n(S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R)) \cong H_n(S_\bullet(A \cup B;R)) =: H_n^{\text{sing.}}(A \cup B;R),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(ii) *Ο* $(S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R))/S_\bullet(B;R) \longrightarrow S_\bullet(A \cup B;R)/S_\bullet(B;R)$ *επάγει ισομορφισμούς*

$$H_n((S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R))/S_\bullet(B;R)) \cong H_n(S_\bullet(A \cup B;R)/S_\bullet(B;R)),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(iii) *Ο* $(S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R))/S_\bullet(A;R) \longrightarrow S_\bullet(A \cup B;R)/S_\bullet(A;R)$ *επάγει ισομορφισμούς*

$$H_n((S_\bullet(A;R) + S_\bullet(B;R))/S_\bullet(A;R)) \cong H_n(S_\bullet(A \cup B;R)/S_\bullet(A;R)),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(iv) *Ο* $S_\bullet(A;R)/S_\bullet(A \cap B;R) \longrightarrow S_\bullet(A \cup B)/S_\bullet(B;R)$ *επάγει ισομορφισμούς*

$$H_n^{\text{sing.}}(A, A \cap B;R) \cong H_n^{\text{sing.}}(A \cup B, B;R),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(v) *Ο* $S_\bullet(B;R)/S_\bullet(A\cap B;R) \longrightarrow S_\bullet(A\cup B)/S_\bullet(A;R)$ *επάγει ισομορφισμούς*

$$H_n^{\text{sing.}}(B, A\cap B; R) \cong H_n^{\text{sing.}}(A\cup B, A; R),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(vi) $H_n(S_\bullet(X;R)/(S_\bullet(A;R)+S_\bullet(B;R))) \cong H_n^{\text{sing.}}(X, A\cup B; R),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$

(vii) $H_n^{\text{sing.}}(A, A\cap B; R) \oplus H_n^{\text{sing.}}(B, A\cap B; R) \cong H_n^{\text{sing.}}(A\cup B, A\cap B; R), \forall n \in \mathbb{Z}.$

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των συνθηκών (i) και (ii) έπεται ύστερα από εφαρμογή τού λήμματος 3.1.8 «των πέντε» στις μακρές ακριβείς ακολουθίες ομολογίας (τις κατασκευαζόμενες μέσω τού θεωρήματος 3.2.13) για τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες αλυσωτών συμπλόκων τού κάτωθι μεταθετικού διαγράμματος.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0}_\bullet \arrow[r] & S_\bullet(B;R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & S_\bullet(A;R)+S_\bullet(B;R) \arrow[r] \arrow[d] & (S_\bullet(A;R)+S_\bullet(B;R))/S_\bullet(B;R) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0}_\bullet \\
\mathbf{0}_\bullet \arrow[r] & S_\bullet(B;R) \arrow[r] & S_\bullet(A\cup B) \arrow[r] & S_\bullet(A\cup B;R)/S_\bullet(B;R) \arrow[r] & \mathbf{0}_\bullet
\end{tikzcd}$$

Η ισοδυναμία των (ii) και (iv) έπεται ύστερα από θεώρηση των μοδίων ομολογίας των αλυσωτών συμπλόκων τού κάτωθι μεταθετικού τριγώνου

$$\begin{tikzcd}
S_\bullet(A;R)/S_\bullet(A\cap B;R) \arrow[rr] \arrow[dr] & & (S_\bullet(A;R)+S_\bullet(B;R))/S_\bullet(B;R) \arrow[dl] \\
& S_\bullet(A\cup B;R)/S_\bullet(B;R) &
\end{tikzcd}$$

και εφαρμογή τού 2ου θεωρήματος ισομορφισμών 2.3.12. Η ισοδυναμία των (i), (iii) και (v) προκύπτει ύστερα από εναλλαγή των ρόλων των A και B, ενώ οι ισοδυναμίες μεταξύ των λοιπών συνθηκών είναι προφανείς. □

7.2.11 Πόρισμα. *Εάν ισχύει μία (και, κατ' επέκταση, και οι επτά) εκ των συνθηκών τού λήμματος* 7.2.10 *και* $X = A\cup B$, *τότε κατασκευάζεται απευθείας η ακολουθία* 7.2.4 (i) *των Mayer και Vietoris*

$$\boxed{\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\mathfrak{D}_{n+1}"] & H_n^{\text{sing.}}(A\cap B;R) \arrow[r] & H_n^{\text{sing.}}(A;R)\oplus H_n^{\text{sing.}}(B;R) \arrow[dll, rounded corners] & \\
H_n^{\text{sing.}}(X;R) \arrow[r, "\mathfrak{D}_n"'] & H_{n-1}^{\text{sing.}}(A\cap B;R) \arrow[r] & \cdots &
\end{tikzcd}}$$

ως προς την $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$ (*μέσω τού θεωρήματος* 3.3.1).

Απόδειξη. Είναι αρκετό να εφαρμοσθεί το θεώρημα 3.3.1 θέτοντας τα αλυσωτά σύμπλοκα $S_\bullet(X;R)$, $S_\bullet(A;R)$ και $S_\bullet(B;R)$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων $\mathbf{M}_\bullet$, $\mathbf{M}'_\bullet$ και $\mathbf{M}''_\bullet$, αντιστοίχως. □

7.2.12 Παρατήρηση. Το λήμμα 7.2.10 και το πόρισμα 7.2.11 εξακολουθούν να ισχύουν (ως έχουν) και ως προς τη θεωρία μονοπλεκτικής ομολογίας $(H_\bullet^{\text{simpl.}}, \partial_\bullet^{\text{simpl.}})$.

(Βλ. D.1.61.) Επιπροσθέτως, εάν K_1 και K_2 είναι υποσυμπλέγματα ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος K (βλ. D.1.26), όπου $K = K_1 \cup K_2$, και τα $S_\bullet(A;R)$ και $S_\bullet(B;R)$ αντικατασταθούν με τα $C_\bullet(K_1;R)$ και $C_\bullet(K_2;R)$, αντιστοίχως (βλ. D.1.42), τότε οι επτά (ισοδύναμες) συνθήκες στο 7.2.10 *ικανοποιούνται αυτομάτως* (διότι $C_\bullet(K_1;R) + C_\bullet(K_2;R) = C_\bullet(K;R)$) και, ως εκ τούτου, η ακολουθία τού 7.2.11 είναι *πάντοτε* ακριβής. (Βλ. Rotman [84], Thm. 7.16 και Cor. 7.17, σελ. 147.)

▸ **Μετάβαση σε MV-ακολουθίες ως προς τις θεωρίες συνομολογίας**. Με εντελώς ανάλογο τρόπο μπορεί κανείς να κατασκευάσει τη μακρά ακριβή ακολουθία μιας τοπολογικής τριάδας και να ορίσει εκτμητικές τριάδες για *θεωρίες συνομολογίας* επί *ομολογικώς επιτρεπτών κατηγοριών*, καθώς και να αποδείξει συνομολογικές εκδοχές των θεωρημάτων 7.2.3 και 7.2.5, και τής προτάσεως 7.2.6.

7.3 ΕΞΩΘΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Μια πολύ χρήσιμη ακριβής ακολουθία τύπου Mayer-Vietoris είναι αυτή που δημιουργείται στην περίπτωση θεωρήσεως *εξωθήσεων*.

7.3.1 Ορισμός. Ένα μεταθετικό διάγραμμα τοπολογικών χώρων και συνεχών απεικονίσεων μεταξύ αυτών τής μορφής

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \\ X_1 \arrow[r, "j_1"'] & X \end{tikzcd}$$

ονομάζεται **εξώθηση** (pushout) όταν πληροί την ακόλουθη «καθολική συνθήκη»: Για οιονδήποτε τοπολογικό χώρο Y και οιεσδήποτε συνεχείς απεικονίσεις

$$f_1 : X_1 \longrightarrow Y,\ \ f_2 : X_2 \longrightarrow Y \ \text{ με } \ f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2$$

υπάρχει μονοσημάντως ορισμένη συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ που καθιστά το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} & X_0 \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[dr, "i_2"] \arrow[dd, phantom, "\circlearrowright"] & \\ X_1 \arrow[dr, "j_1"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "j_2"'] \arrow[ddl, bend left, "f_2"] \\ & X \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ & Y & \end{tikzcd}$$

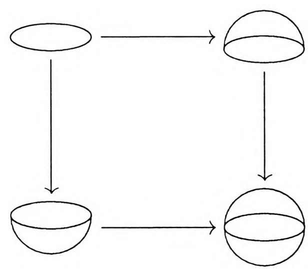
7.3.2 Σημείωση. (i) Η μοναδικότητα τής ως άνω f (μέχρις ομοιομορφισμού) έπεται άμεσα από την «καθολική συνθήκη».

(ii) Η ύπαρξη τριάδας (X, j_1, j_2) με την εν λόγω ιδιότητα αποδεικνύεται θέτοντας

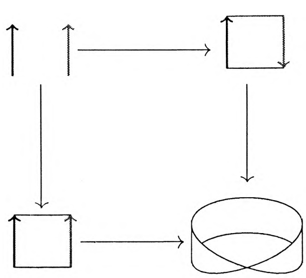
$$\boxed{X := X_1 \cup_{X_0} X_2 := (X_1 + X_2)/\sim,} \text{ όπου } i_1(x_0) \sim i_2(x_0),\ \forall x_0 \in X_0,$$

$p : X_1 + X_2 \longrightarrow X$ η φυσική επίρριψη και $j_1 := p|_{X_1}$, $j_2 := p|_{X_2}$.

(iii) Στην περίπτωση κατά την οποία η $i_1 : X_0 \longrightarrow X_1$ παριστά μια ένθεση (τού X_0 εντός τού X_1), τότε κανείς μπορεί να εκλάβει εποπτικώς την αντίστοιχη εξώθηση ως τον χώρο ο οποίος ορίζεται *για κάθε* $x_0 \in X_0$ ύστερα από συγκόλληση των σημείων $i_1(x_0) \in X_1$ και $i_2(x_0) \in X_2$. Π.χ., εάν $X_1 = \mathbb{S}^2_- := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 |\, x_3 \leqslant 0\}$ είναι το κάτω και, αντιστοίχως, $X_2 = \mathbb{S}^2_+ := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 |\, x_3 \geqslant 0\}$ είναι το άνω ημισφαίριο τής σφαίρας $\mathbb{S}^2$, X_0 η τομή αυτών $\mathbb{S}^2_+ \cap \mathbb{S}^2_- = \mathbb{S}^1$ (ήτοι ο *ισημερινός*) και i_1, i_2 οι συνήθεις ενθέσεις, τότε $X_1 \approx X_2 \approx \mathbb{B}^2$ και η εξώθηση αυτών (μέσω τού X_0) δίδει την ίδια τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$:



Από την άλλη μεριά, εάν υποτεθεί ότι $X_1 = X_2 = \mathbf{I} \times \mathbf{I}$, $X_0 = \{0, 1\} \times \mathbf{I}$, ότι η $i_1 : X_0 \longrightarrow X_1$ παριστά τη συνήθη ένθεση και $i_2 : \{0, 1\} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I} \times \mathbf{I}$, $(0, t) \longmapsto (0, t)$, $(1, t) \longmapsto (1, 1 - t)$, για κάθε $t \in \mathbf{I}$, τότε λαμβάνουμε ως εξώθηση αυτών μια ταινία τού Möbius:



7.3.3 Ορισμός. Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος. Ο υπόχωρος A τού X καλείται **περιοχική παραμορφωτική σύμπτυξη** τού X όταν υπάρχει ανοικτή περιοχή U τού A εντός τού X, τέτοια ώστε ο A να είναι παραμορφωτική σύμπτυξη τής U. (Βλ. εδ. B.5.22.)

7.3.4 Θεώρημα. *Έστω R τυχών μεταθετικός μη τετριμμένος δακτύλιος. Εάν υποτεθεί ότι $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ είναι μια R-θεωρία ομολογίας επί τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$, και ότι*

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \\ X_1 \arrow[r, "j_1"'] & X \end{tikzcd} \tag{7.3}$$

είναι μια εξώθηση των τοπολογικών χώρων X_1, X_2 (μέσω τού X_0), όπου η απεικόνιση

$$i_1 : X_0 \longrightarrow X_1$$

παριστά την ένθεση ενός κλειστού υπόχωρου X_0 τού X_1 εντός αυτού και όπου ο X_0 αποτελεί μια περιοχική παραμορφωτική σύμπτυξη τού X_1, τότε η $j_2 : X_2 \longrightarrow X$ είναι κατ' ανάγκην η ένθεση ενός κλειστού υπόχωρου X_2 τού X εντός αυτού, ο X_2 περιοχική παραμορφωτική σύμπτυξη τού X, οι ομομορφισμοί R-μοδίων[4]

$$\mathscr{H}_n(j_1, i_2) : \mathscr{H}_n(X_1, X_0; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(X, X_2; R)$$

ισομορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ενώ για κάθε υπόχωρο A τού X_0 υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\begin{aligned} \cdots \xrightarrow{\mathfrak{D}_{n+1}} \mathscr{H}_n(X_0, A; R) &\xrightarrow{(\mathscr{H}_n(i_1), \mathscr{H}_n(i_2))} \mathscr{H}_n(X_1, A; R) \oplus \mathscr{H}_n(X_2, A; R) \\ &\xrightarrow{\mathscr{H}_n(j_1) - \mathscr{H}_n(j_2)} \mathscr{H}_n(X, A; R) \xrightarrow[\mathfrak{D}_n]{} \mathscr{H}_{n-1}(X_0, A; R) \xrightarrow[(\mathscr{H}_{n-1}(i_1), \mathscr{H}_{n-1}(i_2))]{} \cdots \end{aligned}$$

*(η λεγομένη **ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris για την εξώθηση** (7.3) **ως προς την** $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$).*

Απόδειξη. Επειδή ο X_0 αποτελεί μια περιοχική παραμορφωτική σύμπτυξη τού X_1, υπάρχει μια ανοικτή περιοχή U τού X_0 εντός τού X_1, καθώς και μια απεικόνιση συμπτύξεως $r : U \longrightarrow X$ και μια ομοτοπία

$$h : U \times \mathbf{I} \longrightarrow U (\text{σχ. } X_0)$$

με $i_1' \circ r \underset{h}{\simeq} \mathrm{id}_U$, όπου $i_1' : X_0 \hookrightarrow U$ η συνήθης ένθεση. Θέτοντας

$$V := j_1(U) \cup j_2(X_2) \subseteq X,$$

η $j_2 : X_2 \longrightarrow X$ είναι η ένθεση ενός *κλειστού* υποχώρου τού X και το V αποτελεί μια ανοικτή περιοχή τού X_2 εντός τού X. Έστω $j_2' : X_2 \hookrightarrow V$ η μέσω τής j_2 επαγόμενη

[4]Προσοχή! Γράφουμε $\mathscr{H}_n(j_1, i_2)$ αντί $\mathscr{H}_n(j_1)$ απλώς για να υποδηλώνεται με έμφαση η ταύτιση τού X_0 με το $i_1(X_0)$.

ένθεση και έστω $j_1' := j_1|_U$. Τότε προκύπτουν οι εξωθήσεις

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[d, "j_2'"] \\ U \arrow[r, "j_1'"'] & V \end{tikzcd} \quad \text{και} \quad \begin{tikzcd} X_0 \times \mathbf{I} \arrow[r, "i_2 \times \mathrm{id}_{\mathbf{I}}"] \arrow[d, "i_1' \times \mathrm{id}_{\mathbf{I}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \times \mathbf{I} \arrow[d, "j_2' \times \mathrm{id}_{\mathbf{I}}"] \\ U \times \mathbf{I} \arrow[r, "j_1' \times \mathrm{id}_{\mathbf{I}}"'] & V \times \mathbf{I}. \end{tikzcd}$$

Οι $i_2 \circ r : U \longrightarrow X_2$ και $\mathrm{id}_{X_2} : X_2 \longrightarrow X_2$ ορίζουν (λόγω τής πρώτης εξ αυτών των εξωθήσεων) μια απεικόνιση συμπτύξεως $\overline{r} : V \longrightarrow X_2$ για την ένθεση $j_2' : X_2 \hookrightarrow V$. Κατ' αναλογίαν, οι απεικονίσεις

$$j_1' \circ h : U \times \mathbf{I} \longrightarrow V \;\; \text{και} \;\; X_2 \times \mathbf{I} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} X_2 \overset{j_2'}{\hookrightarrow} V$$

ορίζουν (λόγω τής δεύτερης εξ αυτών των εξωθήσεων) μια ομοτοπία H: $V \times \mathbf{I} \longrightarrow V$. Μέσω των $\overline{r}$ και H διαπιστώνουμε ότι ο X_2 αποτελεί παραμορφωτική σύμπτυξη τού V και περιοχική παραμορφωτική σύμπτυξη τού X. Ιδιαιτέρως βλέπουμε ότι οι ενθέσεις $i_1' : X_0 \hookrightarrow U$ και $j_2' : X_2 \hookrightarrow V$ αποτελούν ομοτοπικές ισοδυναμίες. Μέσω των μακρών ακριβών ακολουθιών των τοπολογικών ζευγών

$$(X_1, X_0), \; (X_1, U), \; (X, X_2) \;\; \text{και} \;\; (X, V)$$

(η ύπαρξη των οποίων διασφαλίζεται από το αξίωμα $\boxed{\textbf{ES-A1}}$ τού εδ. C.1.6) λαμβάνουμε τα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & \mathscr{H}_n(X_0;R) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_n(X_1;R) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_n(X_1,X_0;R) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mathscr{H}_n(\mathrm{id}_{X_1},i_1')"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_{n-1}(X_0;R) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_{n-1}(X_1;R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathscr{H}_n(U;R) \arrow[r] & \mathscr{H}_n(X_1;R) \arrow[r] & \mathscr{H}_n(X_1,U;R) \arrow[r] & \mathscr{H}_{n-1}(U;R) \arrow[r] & \mathscr{H}_{n-1}(X_1;R) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & \mathscr{H}_n(X_2;R) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_n(X;R) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_n(X,X_2;R) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mathscr{H}_n(\mathrm{id}_X,j_2')"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_{n-1}(X_2;R) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_{n-1}(X;R) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathscr{H}_n(V;R) \arrow[r] & \mathscr{H}_n(X;R) \arrow[r] & \mathscr{H}_n(X,V;R) \arrow[r] & \mathscr{H}_{n-1}(V;R) \arrow[r] & \mathscr{H}_{n-1}(X;R) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Βάσει τού «λήμματος των πέντε» 3.1.8 οι ομομορφισμοί R-μοδίων

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathscr{H}_n(\mathrm{id}_{X_1}, i_1') : \mathscr{H}_n(X_1, X_0; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(X_1, U; R) \\ \mathscr{H}_n(\mathrm{id}_X, j_2') : \mathscr{H}_n(X, X_2; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(X, V; R) \end{array} \right\}$$

είναι ισομορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Οι μέσω των

$$j_1 : X_1 \longrightarrow X \quad \text{και} \quad j_1' : U \longrightarrow V$$

επαγόμενες απεικονίσεις

$$j_1'' : X_1 \smallsetminus X_0 \longrightarrow X \smallsetminus X_2 \quad \text{και} \quad j_1''' : U \smallsetminus X_0 \longrightarrow V \smallsetminus X_2$$

είναι αμφιρριπτικές ταυτισμικές απεικονίσεις και, ως εκ τούτου, ομοιομορφισμοί. (Βλ. B.2.7 (ii).) Συνεπώς προκύπτουν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισομορφισμοί R-μοδίων

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathscr{H}_n(j_1'') : \mathscr{H}_n(X_1 \smallsetminus X_0; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(X \smallsetminus X_2; R) \\ \mathscr{H}_n(j_1''') : \mathscr{H}_n(U \smallsetminus X_0; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(V \smallsetminus X_2; R) \end{array} \right\}.$$

Από τις μακρές ακριβείς ακολουθίες των τοπολογικών ζευγών $(X_1 \smallsetminus X_0, U \smallsetminus X_0)$ και $(X \smallsetminus X_2, V \smallsetminus X_2)$ (και έχοντας ταυτίσει το X_0 με το $i_1(X_0)$ και το X_2 με το $j_2(X_2)$) καταλήγουμε στο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathscr{H}_n(U \smallsetminus X_0; R) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}_n(j_1''')"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_n(X_1 \smallsetminus X_0; R) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}_n(j_1'')"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_n(X_1 \smallsetminus X_0, U \smallsetminus X_0; R) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\mathscr{H}_n(j_1'', j_1''')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_{n-1}(U \smallsetminus X_0; R) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}_{n-1}(j_1''')"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_{n-1}(X_1 \smallsetminus X_0; R) \arrow[r] \arrow[d, "\mathscr{H}_{n-1}(j_1'')"', "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathscr{H}_n(V \smallsetminus X_2; R) \arrow[r] & \mathscr{H}_n(X \smallsetminus X_2; R) \arrow[r] & \mathscr{H}_n(X \smallsetminus X_2, V \smallsetminus X_2; R) \arrow[r] & \mathscr{H}_{n-1}(V \smallsetminus X_2; R) \arrow[r] & \mathscr{H}_{n-1}(X \smallsetminus X_2; R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Εκ νέου εφαρμογή τού λήμματος 3.1.8 «των πέντε» δίδει για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισομορφισμούς R-μοδίων

$$\mathscr{H}_n(j_1'', j_1''') : \mathscr{H}_n(X_1 \smallsetminus X_0, U \smallsetminus X_0; R) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}_n(X \smallsetminus X_2, V \smallsetminus X_2; R).$$

Εν συνεχεία, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι ενθέσεις

$$k : (X_1 \smallsetminus X_0, U \smallsetminus X_0) \hookrightarrow (X, U) \quad \text{και} \quad l : (X \smallsetminus X_2, V \smallsetminus X_2) \hookrightarrow (X, V)$$

επάγουν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισομορφισμούς R-μοδίων

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathscr{H}_n(k) : \mathscr{H}_n(X_1 \smallsetminus X_0, U \smallsetminus X_0; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(X, U; R) \\ \mathscr{H}_n(l) : \mathscr{H}_n(X \smallsetminus X_2, V \smallsetminus X_2; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(X, V; R) \end{array} \right\},$$

(δυνάμει τού αξιώματος $\boxed{\textbf{ES-A3}}$ τής εκτομής) καταλήγουμε στο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_n(X_1, X_0; R) \arrow[r, "\mathscr{H}_n(\mathrm{id}_{X_1}, i_1')", "\cong"'] \arrow[d, "\mathscr{H}_n(j_1, i_2)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_n(X_1, U; R) \arrow[d, "\mathscr{H}_n(j_1, j_1')"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_n(X_1 \smallsetminus X_0, U \smallsetminus X_0; R) \arrow[l, "\mathscr{H}_n(k)"', "\cong"] \arrow[d, "\cong"', "\mathscr{H}_n(j_1'', j_1''')"] \\
\mathscr{H}_n(X, X_2; R) \arrow[r, "\cong", "\mathscr{H}_n(\mathrm{id}_X, j_2')"'] & \mathscr{H}_n(X, V; R) & \mathscr{H}_n(X \smallsetminus X_2, V \smallsetminus X_2; R) \arrow[l, "\cong"', "\mathscr{H}_n(l)"]
\end{tikzcd}$$

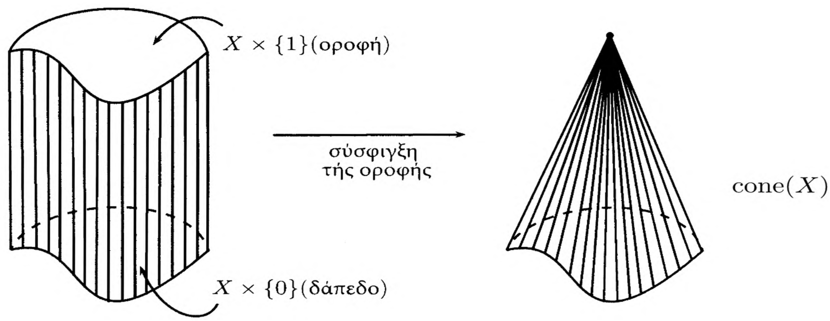
απ' όπου έπεται ότι τόσον οι $\mathscr{H}_n(j_1, j_1')$ όσον και οι

$$\mathscr{H}_n(j_1, i_2) : \mathscr{H}_n(X_1, X_0; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(X, X_2; R)$$

είναι ισομορφισμοί R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Για την αποπεράτωση τής αποδείξεως αρκεί κανείς να επαναλάβει τα επιχειρήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη τού θεωρήματος 7.2.3. (Εν προκειμένω, τα X_1, X_2 θα διαδραματίζουν τον ρόλο των εκεί παρατεθέντων A, B και το X_0 τον ρόλο τής εκεί παρατεθείσας τομής $A \cap B$, παρότι *δεν* έχουμε προϋποθέσει ότι $X_1 \cap X_2 = X_0$!) $\square$

7.3.5 Ορισμός. Εάν X είναι τυχών τοπολογικός χώρος και $\mathrm{cyl}(X) := X \times \mathbf{I}$ ο (μοναδιαίος) **κύλινδρος υπεράνω τού** X (εφοδιασμένος με την τοπολογία γινομένου), τότε ως **κώνος** $\mathrm{cone}(X)$ **υπεράνω τού** X ορίζεται ο πηλικόχωρος

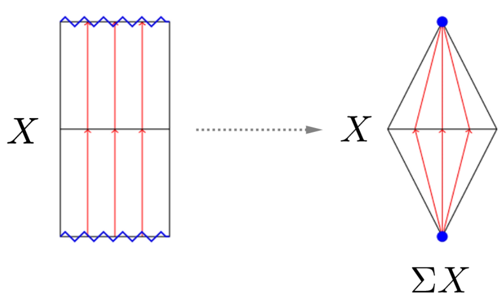
$$\boxed{\mathrm{cone}(X) := \mathrm{cyl}(X)/X \times \{1\}.}$$



Κατ' αναλογίαν, ως **ανάρτηση** (suspension) **τού** X (ή ως **διπλός κώνος επί τού** X) ορίζεται ο πηλικόχωρος

$$\boxed{\Sigma X := (X \times [-1,1])/\sim}$$

ως προς τη σχέση ισοδυναμίας "$\sim$" με: $(x,-1) \sim (x',-1)$ και $(x,1) \sim (x',1)$ για οιαδήποτε $x, x' \in X$.

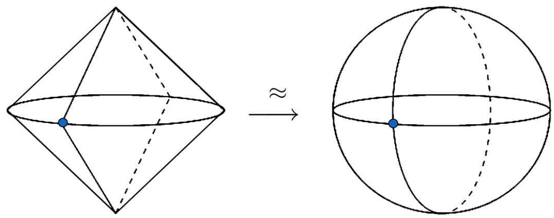


(Εν προκειμένω, τόσον το δάπεδο όσον και η οροφή τού $X \times [-1,1]$ συσφίγγονται δίδοντας δύο σημεία ύστερα από την επιβληθείσα ταύτιση.)

7.3.6 Παράδειγμα. Για την ανάρτηση τής d-διάστατης σφαίρας $\mathbb{S}^d$ υφίσταται ομοιομορφισμός:

$$\boxed{\begin{array}{c} \Sigma\mathbb{S}^d \xrightarrow{\approx} \mathbb{S}^{d+1} \\ [(\mathbf{x},t)]_\sim \longmapsto (\cos(\frac{\pi}{2}t)\mathbf{x}, \sin(\frac{\pi}{2}t)) \end{array}} \tag{7.4}$$

(Βλ. το κάτωθι σχήμα για $d = 1$.)

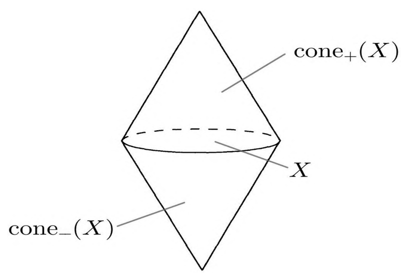


7.3.7 Παρατήρηση. Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος και έστω

$$p : X \times [-1, 1] \longrightarrow \Sigma X$$

η φυσική επίρριψη. Ταυτίζοντας τον X με την εικόνα $p(X \times \{0\})$ και θέτοντας

$$\mathrm{cone}_+(X) := p(X \times [0, 1]), \;\; \mathrm{cone}_-(X) := p(X \times [-1, 0]),$$



έχουμε τη δυνατότητα θεωρήσεως τής αναρτήσεως ΣX τού X ως την εξώθηση

$$\Sigma X = \mathrm{cone}_+(X) \cup_X \mathrm{cone}_-(X),$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{cone}_+(X) \arrow[d, hook] \\ \mathrm{cone}_-(X) \arrow[r, hook] & \Sigma X \end{tikzcd} \tag{7.5}$$

7.3.8 Θεώρημα (Ισομορφισμοί επαγόμενοι από ανάρτηση). *Έστω $(X, \{x\})$ ένας εστιγμένος τοπολογικός χώρος. Εάν R είναι τυχών μεταθετικός μη τετριμμένος δακτύλιος και $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ μια R-θεωρία ομολογίας επί τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$, τότε*

$$\boxed{\mathscr{H}_n(X, \{x\}; R) \cong \mathscr{H}_{n+1}(\Sigma X, \{x\}; R), \; \forall n \in \mathbb{Z}.} \tag{7.6}$$

Απόδειξη. Επειδή $\mathrm{cone}_+(X) \approx \mathrm{cone}_-(X) \approx \mathrm{cone}(X)$ και ο $\mathrm{cone}(X)$ είναι συσταλτός (μέσω τής $\mathrm{cone}(X) \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathrm{cone}(X)$, $([(x,t)]_{\mathfrak{R}_{X\times\{1\}}}, s) \longmapsto [(x, st)]_{\mathfrak{R}_{X\times\{1\}}}$), μπορούμε να εκλάβουμε τις ενθέσεις $\{x\} \hookrightarrow \mathrm{cone}_-(X)$ και $\{x\} \hookrightarrow \mathrm{cone}_+(X)$ ως ομοτοπικές ισοδυναμίες. Βάσει των C.3.5 (i) και C.3.4 (ii),

$$\mathscr{H}_n(\mathrm{cone}_+(X), \{x\}; R) \cong \{0\} \cong \mathscr{H}_n(\mathrm{cone}_-(X), \{x\}; R),\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

οπότε θεωρώντας τή μακρά ακριβή ακολουθία των Mayer και Vietoris για την ανωτέρω εξώθηση (7.5) (βλ. θεώρημα 7.3.4) διαπιστώνουμε ότι η

$$\{0\} \longrightarrow \mathscr{H}_n(\Sigma X, \{x\}; R) \xrightarrow{\mathfrak{D}_n} \mathscr{H}_{n-1}(X, \{x\}; R) \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής και, ως εκ τούτου, ο $\mathfrak{D}_n$ ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οπότε η ύπαρξη ισομορφισμών (7.6) είναι αληθής (εάν κανείς θεωρήσει τον $\mathfrak{D}_{n+1}^{-1}$). □

7.3.9 Παρατήρηση. Σε επίπεδο *ανηγμένων* μοδίων ομολογίας σχηματίζονται ισομορφισμοί

$$\boxed{\widetilde{\mathscr{H}}_{n+1}(\Sigma X; R) \cong \widetilde{\mathscr{H}}_n(X; R),\ \forall n \in \mathbb{Z},} \tag{7.7}$$

ως συνθέσεις τριών ισομορφισμών

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathscr{H}}_{n+1}(\Sigma X; R) \arrow[r, "\cong", "\widetilde{\mathscr{H}}_{n+1}(j)"'] \arrow[rrr, bend left] & \mathscr{H}_{n+1}(\Sigma X, \{x\}; R) \arrow[r, "\cong"] & \mathscr{H}_{n+1}(X, \{x\}; R) \arrow[r, "\cong", "\partial_{n+1}(X,\{x\})"'] & \widetilde{\mathscr{H}}_n(X; R) \end{tikzcd}$$

Ο πρώτος εξ αυτών των ισομορφισμών δημιουργείται κατόπιν εφαρμογής τού C.3.5 (ii) (με τα ΣX και $\{x\}$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων X και A, αντιστοίχως, και $j : \Sigma X \hookrightarrow (\Sigma X, \{x\})$ τη συνήθη ένθεση), ο δεύτερος είναι αυτός που προκύπτει από το θεώρημα 7.3.8 και ο τρίτος αυτός που προκύπτει ύστερα από εφαρμογή τού C.3.5 (i) (με το $\{x\}$ στη θέση τού εκεί παρατεθέντος A).

7.4 ΜΟΔΙΟΙ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟΡΟΥ

Εργαζόμενοι με οιαδήποτε R-θεωρία ομολογίας $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ ορισμένης επί μιας κατηγορίας $\mathscr{C} \in \{\mathfrak{Top}^{[2]}_{\mathrm{pol.}}, \mathfrak{Top}^{[2]}_{\mathrm{CW}}, \mathfrak{Top}^{[2]}\}$, για την οποία ισχύει $\mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\}; R) \cong R$, είναι δυνατόν για τον υπολογισμό των μοδίων ομολογίας μιας σφαίρας, αντί τού θεωρήματος C.4.3 και τού πορίσματος C.4.4, να χρησιμοποιηθεί ο ομοιομορφισμός (7.4).

7.4.1 Εφαρμογή. *Οι μόδιοι ομολογίας τής d-διάστατης σφαίρας $\mathbb{S}^d$ (ως προς την $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$) είναι (μέχρις ισομορφισμού R-μοδίων) οι ακόλουθοι:*

$$\boxed{\mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d; R) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, d\}, \\ R, & \text{όταν } n \in \{0, d\} \text{ και } d > 0, \\ R \oplus R, & \text{όταν } n = d = 0. \end{cases}} \tag{7.8}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. **Βήμα 1ο**. Επειδή $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$, η εφαρμογή των αξιωμάτων $\boxed{\textbf{ES-A5}}$ (αθροίσματος) και $\boxed{\textbf{ES-A4}}$ (διαστάσεως) (τού εδ. C.1.6) δίδει

$$\mathscr{H}_n(\mathbb{S}^0; R) \cong \mathscr{H}_n(\{1\}; R) \oplus \mathscr{H}_n(\{-1\}; R) \cong \mathscr{H}_n(\{\mathrm{pt}\}; R) \oplus \mathscr{H}_n(\{\mathrm{pt}\}; R)$$

$$\cong \begin{cases} R \oplus R, & \text{όταν } n = 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}, \end{cases} \quad \text{οπότε } \widetilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{S}^0; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}. \end{cases}$$

Βήμα 2ο. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\widetilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{S}^d; R) \underset{(7.4)}{\cong} \widetilde{\mathscr{H}}_n(\Sigma\mathbb{S}^{d-1}; R) \underset{(7.7)}{\cong} \widetilde{\mathscr{H}}_{n-1}(\mathbb{S}^{d-1}; R). \tag{7.9}$$

Κάνοντας χρήση μαθηματικής επαγωγής επί τού d θα αποδείξουμε ότι

$$\widetilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{S}^d; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = d, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{d\}. \end{cases}$$

Για $d = 0$ τούτο είναι αληθές (βάσει τού 1ου βήματος). Έστω τώρα $d \geqslant 1$ και ότι τούτο είναι αληθές για τις σφαίρες διαστάσεως $< d$. Προφανώς,

$$\widetilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{S}^d; R) \underset{(7.9)}{\cong} \widetilde{\mathscr{H}}_{n-1}(\mathbb{S}^{d-1}; R) \underset{\text{επαγ. υπόθ.}}{\cong} \begin{cases} R, & \text{όταν } n-1 = d-1 \ (\Leftrightarrow n = d), \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{d\}. \end{cases}$$

Βήμα 3ο. Από το βήμα 2, το (iii) τής σημειώσεως C.3.2 και το αξίωμα $\boxed{\textbf{ES-A4}}$ (τής διαστάσεως) λαμβάνουμε τους ισομορφισμούς (7.8). □

7.4.2 Θεώρημα. *Εάν $d \in \mathbb{N}_0$ και εάν X είναι τυχών τοπολογικός χώρος, τότε υφίστανται ισομορφισμοί R-μοδίων*

$$\boxed{\mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d \times X; R) \cong \mathscr{H}_n(X; R) \oplus \mathscr{H}_{n-d}(X; R), \ \forall n \in \mathbb{Z}.} \tag{7.10}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε την εξώθηση

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{d-1} \times X \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{S}^d_+ \times X \arrow[d, hook] \\ \mathbb{S}^d_- \times X \arrow[r, hook] & \mathbb{S}^d \times X \end{tikzcd}$$

όπου $\mathbb{S}^d_+ \cap \mathbb{S}^d_- = \mathbb{S}^{d-1} \subseteq \mathbb{S}^d$, τον βόρειο πόλο $P^{[d]}_+ := (1, 0, ..., 0)$ τής $\mathbb{S}^d$ (ως σημείο αναφοράς), καθώς και την προβολή $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{S}^d \times X \longrightarrow X$ στον δεύτερο παράγοντα. Επιχειρηματολογώντας όπως στην απόδειξη τού θεωρήματος 7.3.8 και λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ομοιομορφισμό (7.4) καταλήγουμε στην κατασκευή ισομορφισμών R-μοδίων

$$\mathscr{H}_n((\mathbb{S}^d, P^{[d]}_+) \times X; R) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}_{n-1}((\mathbb{S}^{d-1}, P^{[d-1]}_+) \times X; R), \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{7.11}$$

Η ένθεση $X \hookrightarrow (\mathbb{S}^0, P_+^{[d]}) \times X$ επάγει ισομορφισμούς

$$\mathscr{H}_n(X;R) \cong \mathscr{H}_n((\mathbb{S}^0, P_+^{[0]}) \times X;R),\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{7.12}$$

Οι (7.11) και (7.12) δίδουν για $d = 1$

$$\mathscr{H}_n((\mathbb{S}^1, P_+^{[1]}) \times X;R) \cong \mathscr{H}_{n-1}((\mathbb{S}^0, P_+^{[0]}) \times X;R) \cong \mathscr{H}_{n-1}(X;R)$$

και, γενικότερα, μέσω μαθηματικής επαγωγής επί τού d, ισομορφισμούς

$$\mathscr{H}_n((\mathbb{S}^d, P_+^{[d]}) \times X;R) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}_{n-d}(X;R),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Η μακρά ακριβής ακολουθία τού[5] $((\mathbb{S}^d, P_+^{[d]}) \times X)$ (η ύπαρξη τής οποίας διασφαλίζεται από το αξίωμα $\boxed{\textbf{ES-A1}}$ τού εδ. C.1.6) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow \mathscr{H}_{n+1}(\mathbb{S}^d \times X, \{P_+^{[d]}\} \times X;R) \longrightarrow \underbrace{\mathscr{H}_n(\{P_+^{[d]}\} \times X;R)}_{\cong \mathscr{H}_n(X;R)} \longrightarrow \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d \times X;R) \\ \longrightarrow \underbrace{\mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d \times X, \{P_+^{[d]}\} \times X;R)}_{\cong \mathscr{H}_{n-d}(X;R)} \xrightarrow{\partial_n(\mathbb{S}^d \times X, \{P_+^{[d]}\} \times X)} \mathscr{H}_{n-1}(\{P_+^{[d]}\} \times X;R) \longrightarrow \cdots\end{aligned}$$

Επειδή η σύνθεση

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}_n(X;R) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d \times X;R) \arrow[r, "\mathscr{H}_n(\mathrm{pr}_2)"] & \mathscr{H}_n(X;R) \end{tikzcd}$$

ισούται με την ταυτοτική $\mathrm{id}_{\mathscr{H}_n(X;R)}$, το τρίτο βέλος τής άνω γραμμής και το τρίτο βέλος τής κάτω γραμμής τής ανωτέρω παρατεθείσας μακράς ακριβούς ακολουθίας υποδηλούν *μονομορφισμούς* (βλ. λήμμα 2.2.23), οπότε

$$\partial_n(\mathbb{S}^d \times X, \{P_+^{[d]}\} \times X) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Αυτό (λόγω τής ακριβείας) σημαίνει ότι το πρώτο βέλος τής κάτω γραμμής τής ανωτέρω παρατεθείσας μακράς ακριβούς ακολουθίας υποδηλοί *επιμορφισμό*. Ως εκ τούτου, προκύπτει μια *διασπώμενη* βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathscr{H}_n(X;R) \hookrightarrow \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d \times X;R) \twoheadrightarrow \mathscr{H}_{n-d}(X;R) \longrightarrow \{0\},$$

μέσω τής οποίας καταλήγουμε στους ισομορφισμούς (7.10) για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. θεώρημα 3.1.29.) □

7.4.3 Ορισμός. Εάν $d \in \mathbb{N}$, τότε ο τοπολογικός χώρος

$$\boxed{\mathbb{T}^d := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{d \text{ φορές}}}$$

(εφοδιασμένος με τη συνήθη τοπολογία γινομένου) καλείται d-**διάστατος τόρος**.

[5]Αυτό ταυτίζεται (ως γνωστόν) με το τοπολογικό ζεύγος $(\mathbb{S}^d \times X, \{P_+^{[d]}\} \times X)$.

7.4.4 Εφαρμογή. *Οι μόδιοι ομολογίας τού d-διάστατου τόρου $\mathbb{T}^d$ (ως προς την $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$) είναι (μέχρις ισομορφισμού R-μοδίων) οι ακόλουθοι:*

$$\boxed{\mathscr{H}_n(\mathbb{T}^d; R) \cong \begin{cases} R^{\binom{d}{n}}, & \text{όταν } n \in \{0, ..., d\}, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, ..., d\}. \end{cases}} \tag{7.13}$$

Αποδειξη. Θα χρησιμοποιηθεί μαθηματική επαγωγή επί τού d. Εάν $d = 1$, ο ισχυρισμός είναι αληθής λόγω των (7.8). Εάν παγιώσουμε κάποιον ακέραιο $d \geqslant 2$ και εάν υποθέσουμε ότι ο εν λόγω ισχυρισμός είναι ωσαύτως αληθής για όλους τους τόρους διαστάσεως $< d$, λαμβάνουμε μέσω των (7.10) (εφαρμοζόμενων για το $\mathbb{S}^1$ και τον χώρο $X = \mathbb{T}^{d-1}$) και την επαγωγική μας υπόθεση:

$$\mathscr{H}_n(\mathbb{T}^d; R) = \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^{d-1}; R) \cong \mathscr{H}_n(\mathbb{T}^{d-1}; R) \oplus \mathscr{H}_{n-1}(\mathbb{T}^{d-1}; R)$$
$$\cong \left\{ \begin{array}{ll} R^{\binom{d-1}{n}}, & \text{όταν } n \in \{0, ..., d-1\} \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, ..., d-1\} \end{array} \right\} \oplus \left\{ \begin{array}{ll} R^{\binom{d-1}{n-1}}, & \text{όταν } n \in \{1, ..., d\} \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{1, ..., d\} \end{array} \right\}$$
$$\cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0, d\}, \\ R^{\binom{d-1}{n}} \oplus R^{\binom{d-1}{n-1}} \cong R^{\binom{d}{n}}, & \text{όταν } n \in \{1, ..., d-1\}, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, ..., d-1, d\}, \end{cases}$$

όπου οι τελευταίοι ισομορφισμοί μπορούν να γραφούν υπό τη μορφή (7.13). □

7.5 ΜΟΔΙΟΙ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΠΟΙΩΝ ΠΡΟΒΟΛΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Οι d-διάστατοι *προβολικοί χώροι* $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ υπεράνω τού $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}\}$ έχουν ορισθεί στην §B.3 μέσω τής κλασικής σχέσεως ισοδυναμίας "$\underset{\text{προβ.}}{\sim}$" και στην §B.4 ως *τροχιακοί χώροι*. Έστω ότι $\nu := \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$ (όπως στην (B.4)). Καθένα εκ των στοιχείων τού $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ γράφεται υπό τη μορφή ομογενών συντεταγμένων[6] $[\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_d]$, όπου $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$. Ως $|\xi_j|$, $j \in \{0, ..., d\}$, συμβολίζεται το μέτρο τού ξ_j και ως $||\boldsymbol{\xi}||$ η (συνήθης) στάθμη τού $\boldsymbol{\xi}$. Σημειωτέον ότι κάθε στοιχείο τού προβολικού χώρου $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ (ως κλάση ισοδυναμίας ως προς την "$\underset{\text{προβ.}}{\sim}$") διαθέτει πάντοτε κάποιον εκπρόσωπο $[\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_d]$ με $||\boldsymbol{\xi}|| = 1$. Επιπροσθέτως, όταν $d \geqslant 1$, ο $\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}$ θα *ταυτίζεται* με τον υπόχωρο

$$\{[x_0 : x_1 : ... : x_d] \in \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} \,|\, x_d = 0_{\mathbb{K}}\}$$

τού $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$. Οι μόδιοι ομολογίας $\mathscr{H}_n(\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}; R)$ ως προς μια R-θεωρία ομολογίας $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ ορισμένης επί μιας $\mathscr{C} \in \{\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{pol.}}, \mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{CW}}, \mathfrak{Top}^{[2]}\}$ με $\mathscr{H}_0(\{\text{pt}\}; R) \cong R$ είναι δυνατόν

[6] Εδώ ακολουθείται ένας ενιαίος συμβολισμός των συντεταγμένων (ανεξαρτήτως τού ποιο εκ των τριών είναι το $\mathbb{K}$), εν αντιθέσει προς τη σχετική παρουσίαση στην αρχή τής §B.3.

να προσδιορισθούν (μέχρις ισομορφισμού) με τη βοήθεια διαφόρων μεθόδων. Στην παρούσα ενότητα θα μελετηθεί το τι υπολογισμοί είναι εφικτοί κάνοντας *αποκλειστική χρήση* μιας (κατάλληλης) ακριβούς MV-*ακολουθίας*.

Κατ' αρχάς, ο $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ μπορεί να γραφεί ως ένωση $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} = A \cup B$ δύο υποχώρων του:

$$A := \left\{ [\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_d] \in \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} \middle| \sum_{j=0}^{d} |\xi_j|^2 = 1 \text{ και } |\xi_d| \leqslant \tfrac{1}{2} \right\},$$

$$B := \left\{ [\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_d] \in \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} \middle| \sum_{j=0}^{d} |\xi_j|^2 = 1 \text{ και } |\xi_d| \geqslant \tfrac{1}{2} \right\}.$$

Ο υπόχωρος A είναι ομοτοπικώς ισοδύναμος προς τον $\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}$, διότι ο $\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}$ αποτελεί *παραμορφωτική σύμπτυξή* του. (Βλ. εδάφια B.5.13, B.5.17, B.5.22 και B.5.23.) Πράγματι· η απεικόνιση[7]

$$r : A \longrightarrow \mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}},$$

$$[\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_{d-1} : \xi_d] \longmapsto [\tfrac{\xi_0}{\sqrt{1-|\xi_d|^2}} : \tfrac{\xi_1}{\sqrt{1-|\xi_d|^2}} : \ldots : \tfrac{\xi_{d-1}}{\sqrt{1-|\xi_d|^2}} : 0_{\mathbb{K}}],$$

είναι απεικόνιση συμπτύξεως, διότι για κάθε $[\zeta_0 : \zeta_1 : \ldots : \zeta_{d-1} : 0_{\mathbb{K}}] \in \mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}$,

$$r([\zeta_0 : \zeta_1 : \ldots : \zeta_{d-1} : 0_{\mathbb{K}}]) = [\zeta_0 : \zeta_1 : \ldots : \zeta_{d-1} : 0_{\mathbb{K}}],$$

και, εκ παραλλήλου, η συνεχής απεικόνιση

$$H : A \times \mathbf{I} \longrightarrow A,$$

$$([\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_{d-1} : \xi_d], t) \longmapsto [\lambda_t\xi_0 : \lambda_t\xi_1 : \ldots : \lambda_t\xi_{d-1} : t\xi_d],$$

με $H_t(-) := H(-,t)$, $\lambda_t := \sqrt{\frac{1-t^2|\xi_d|^2}{1-|\xi_d|^2}}$, αποτελεί μια ομοτοπία μεταξύ των $i \circ r$ και id_A (όπου $i : \mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}} \hookrightarrow A$ η συνήθης ένθεση), καθόσον

$$H_0 = i \circ r \quad \text{και} \quad H_1 = \mathrm{id}_A.$$

Από την άλλη μεριά, ο ομοιομορφισμός

$$\eta : \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} \smallsetminus \mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}^d, \ \ [\xi_0 : \xi_1 : \ldots : \xi_{d-1} : \xi_d] \longmapsto (\tfrac{\xi_0}{\xi_d}, \tfrac{\xi_1}{\xi_d}, \ldots, \tfrac{\xi_{d-1}}{\xi_d}),$$

απεικονίζει (ομοιομορφικώς) τον μεν υπόχωρο B επί τής νd-μπάλας

$$\left\{ \boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) \in \mathbb{K}^d \middle| \ ||\boldsymbol{\xi}|| \leqslant 1 \right\} \approx \mathbb{B}^{\nu d},$$

τον δε υπόχωρο $A \cap B$ επί τής $(\nu d - 1)$-σφαίρας

$$\left\{ \boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{d-1}) \in \mathbb{K}^d \middle| \ ||\boldsymbol{\xi}|| = 1 \right\} \approx \mathbb{S}^{\nu d-1} = \partial\mathbb{B}^{\nu d}.$$

Εκτός τούτου, η σύνθεση $\varpi := H_1 \circ \eta^{-1}$ είναι εκείνη που στέλνει κάθε στοιχείο $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \ldots, \xi_{d-1}) \in \mathbb{K}^d$ με στάθμη $||\boldsymbol{\xi}|| = 1$ να απεικονισθεί στο $[\xi_0 : \ldots : \xi_{d-1} : 0_{\mathbb{K}}]$. Επειδή $\mathscr{H}_n(A; R) \underset{\text{C.3.4 (i)}}{\cong} \mathscr{H}_n(\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}; R)$,

$$\widetilde{\mathscr{H}_n}(B; R) \cong \widetilde{\mathscr{H}_n}(\mathbb{B}^{\nu d}; R) \underset{\text{C.4.2}}{\cong} \{0\}$$

[7] Εδώ τα προαναφερθέντα εδάφια τίθενται σε εφαρμογή με τα A και $\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων X και A, αντιστοίχως!

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και

$$\widetilde{\mathscr{H}_n}(A \cap B; R) \cong \widetilde{\mathscr{H}_n}(\mathbb{S}^{\nu d-1}; R) \underset{7.4.1,\, C.4.3}{\cong} \begin{cases} R, & \text{όταν } n = \nu d - 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{\nu d - 1\}, \end{cases}$$

η ανηγμένη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris 7.2.4 (ii) για την εκτμητική τριάδα $(\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}, A, B)$ δίδει

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \widetilde{\mathscr{H}_n}(\mathbb{S}^{\nu d-1}; R) \arrow[r, "\widetilde{\mathscr{H}_n}(\varpi)"] & \widetilde{\mathscr{H}_n}(\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}; R) \arrow[r] & \widetilde{\mathscr{H}_n}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}; R) \arrow[dlll, "\widetilde{\mathfrak{D}}_n(A,B)"] \\
& \widetilde{\mathscr{H}_{n-1}}(\mathbb{S}^{\nu d-1}; R) \arrow[r, "\widetilde{\mathscr{H}_{n-1}}(\varpi)"] & \widetilde{\mathscr{H}_{n-1}}(\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}; R) \arrow[r] & \widetilde{\mathscr{H}_{n-1}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}; R) \arrow[dlll, "\widetilde{\mathfrak{D}}_{n-1}(A,B)"] \\
& \widetilde{\mathscr{H}_{n-2}}(\mathbb{S}^{\nu d-1}; R) \arrow[r, "\widetilde{\mathscr{H}_{n-2}}(\varpi)"] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

οπότε

$$\widetilde{\mathscr{H}_n}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}; R) \cong \widetilde{\mathscr{H}_n}(\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}; R), \ \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{\nu d - 1, \nu d\}. \tag{7.14}$$

7.5.1 Θεώρημα. *Για τους μοδίους ομολογίας τού $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $(\nu = 2)$ ή $\mathbb{K} = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ $(\nu = 4)$, έχουμε*

$$\boxed{\mathscr{H}_n(\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = \nu j \ \text{ και } \ j \in \{0, ..., d\}, \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}} \tag{7.15}$$

Αποδειξη. Αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\widetilde{\mathscr{H}_n}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = \nu j \ \text{ και } \ j \in \{1, ..., d\}, \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{7.16}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή επί τής διαστάσεως d. Για $d = 0$ η (7.16) είναι αληθής, διότι ο $\mathbb{P}^0_{\mathbb{K}}$ είναι μονοσημειακός χώρος. Για $d = 1$ η (7.16) είναι ωσαύτως αληθής, διότι ο $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα $\mathbb{S}^2$ και ο $\mathbb{P}^1_{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}}$ είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα $\mathbb{S}^4$. Ας υποθέσουμε ότι $d \geqslant 2$ και ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για τον $\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}$, ήτοι ότι

$$\widetilde{\mathscr{H}_n}(\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = \nu j \ \text{ και } \ j \in \{1, ..., d-1\}, \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Για $n \notin \{\nu d - 1, \nu d\}$ δεν απαιτούνται περαιτέρω υπολογισμοί λόγω των (7.14). Για αυτές τις ειδικές τιμές θεωρούμε το εξής τμήμα τής ανωτέρω παρατεθείσας MV-ακολουθίας:

$$
\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow \underbrace{\widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d}(\mathbb{S}^{\nu d-1};R)}_{\cong\{0\}} &\xrightarrow{\widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d}(\varpi)} \widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d}(\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}};R) \longrightarrow \widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d}(\mathbb{P}^{d}_{\mathbb{K}};R) \xrightarrow{\widetilde{\mathfrak{D}}_{\nu d}(A,B)} \\
\longrightarrow \underbrace{\widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d-1}(\mathbb{S}^{\nu d-1};R)}_{\cong R} &\xrightarrow{\widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d-1}(\varpi)} \widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d-1}(\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}};R) \longrightarrow \widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d-1}(\mathbb{P}^{d}_{\mathbb{K}};R) \xrightarrow{\widetilde{\mathfrak{D}}_{\nu d-1}(A,B)} \\
\longrightarrow \underbrace{\widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d-2}(\mathbb{S}^{\nu d-1};R)}_{\cong\{0\}} &\xrightarrow{\widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d-2}(\varpi)} \cdots
\end{aligned}
$$

Από την επαγωγική μας υπόθεση οι $\widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d}(\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}};R)$ και $\widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d-1}(\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}};R)$ είναι τετριμμένοι, οπότε $\widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d}(\mathbb{P}^{d}_{\mathbb{K}};R) \cong R$ και $\widetilde{\mathscr{H}}_{\nu d-1}(\mathbb{P}^{d}_{\mathbb{K}};R) \cong \{0\}$, και οι ισομορφισμοί (7.16) (και, κατ' επέκταση, οι (7.15)) αληθεύουν. $\square$

7.5.2 Σημείωση. Παρά τους ισομορφισμούς (7.14), στην περίπτωση όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\nu = 1$) η θεωρηθείσα MV-ακολουθία (για τις ειδικές τιμές δεικτών $d-1$ και d) δίδει μόνον μια ακριβή ακολουθία το πολύ τεσσάρων μη τετριμμένων όρων:

$$\{0\} \longrightarrow \widetilde{\mathscr{H}}_{d}(\mathbb{P}^{d}_{\mathbb{R}};R) \xrightarrow{\widetilde{\mathfrak{D}}_{d}(A,B)} \widetilde{\mathscr{H}}_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1};R) \xrightarrow{\widetilde{\mathscr{H}}_{d-1}(\varpi)} \widetilde{\mathscr{H}}_{d-1}(\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{R}};R) \longrightarrow \widetilde{\mathscr{H}}_{d-1}(\mathbb{P}^{d}_{\mathbb{R}};R) \longrightarrow \{0\}$$

και, ως εκ τούτου, για τον υπολογισμό όλων των μοδίων ομολογίας τού $\mathbb{P}^{d}_{\mathbb{R}}$ απαιτείται να χρησιμοποιηθούν επιπρόσθετα τεχνικά μέσα. (Πρβλ. θεώρημα D.3.26.)

7.6 ΜΟΔΙΟΙ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ ΚΛΕΙΣΤΩΝ ΣΥΝΕΚΤΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Έστω R τυχών μεταθετικός μη τετριμμένος δακτύλιος. Στην παρούσα ενότητα επίκειται να υπολογισθούν (μέχρις ισομορφισμού) οι μόδιοι ομολογίας *όλων των κλειστών συνεκτικών επιφανειών* ως προς την ιδιάζουσα θεωρία ομολογίας $(H^{\text{sing.}}_{\bullet}, \partial^{\text{sing.}}_{\bullet})$ επί τής (ευρύτερης δυνατής) ομολογικώς επιτρεπτής κατηγορίας $\mathfrak{Top}^{[2]}$ *όλων* των τοπολογικών ζευγών με τη βοήθεια *κατάλληλων ακριβών MV-ακολουθιών*. Προς τούτο υιοθετούνται οι συμβολισμοί και η ορολογία τής §E.4. Λόγω τού θεωρήματος E.4.8 τής *ταξινομήσεως* (των προαναφερθεισών επιφανειών μέχρις ομοιομορφισμού) αρκεί να θεωρηθούν οι *θεμελιακές προσανατολίσιμες επιφάνειες γένους*[8] $g \geqslant 1$:

$$\boxed{X^{\text{or.}}_{g} := \mathfrak{E}_{4g}/\mathfrak{R}}$$

[8] Για $g = 0$ έχουμε $X^{\text{or.}}_{0} := \mathbb{S}^2$, με *γνωστούς* μοδίους ομολογίας. (Βλ. εδ. 7.4.1, C.4.4 και D.2.27.)

(όπου $\mathfrak{E}_{4g} := \mathrm{conv}(\{z_n | 1 \leqslant n \leqslant 4g\}) \subsetneqq \mathbb{B}^2$ και $z_n := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{4g}n) \in \mathbb{S}^1$) και οι *θεμελιακές μη προσανατολίσιμες επιφάνειες γένους* $g \geqslant 1$:

$$\boxed{X_g^{\text{nonor.}} := \begin{cases} \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, & \text{όταν } g = 1, \\ \mathfrak{E}_{2g}/\mathfrak{R}', & \text{όταν } g \geqslant 2, \end{cases}}$$

(όπου $\mathfrak{E}_{2g} := \mathrm{conv}(\{z_n | 1 \leqslant n \leqslant 2g\}) \subsetneqq \mathbb{B}^2$ και $z_n := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2g}n) \in \mathbb{S}^1$). Οι $X_g^{\text{or.}}$ και $X_g^{\text{nonor.}}$ μπορούν να αποκτηθούν από τη μονοσημειακή ένωση (πεπερασμένου πλήθους) μοναδιαίων κύκλων ύστερα από προσάρτηση ενός και μόνον 2-κυττάρου μέσω καταλλήλων απεικονίσεων, οι οποίες θα περιγραφούν διεξοδικώς.

$\rhd$ Έστω $r \in \mathbb{N}$. Ο «j-οστός άξονας συντεταγμένων» Λ_j εντός τού χώρου γινομένου $\underbrace{\mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1}_{r \text{ φορές}}$, $1 \leqslant j \leqslant r$, ύπο την έννοια τού εδ. B.2.11, (iii) (c), είναι ένας κύκλος $\Lambda_j = \mathbb{S}^1_j \, (\approx \mathbb{S}^1)$ και

$$\Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_r \approx \mathbb{S}^1_1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1_r \subseteq \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{r \text{ φορές}} \text{ (με σημείο αναφοράς καθενός } \mathbb{S}^1 \text{ το } 1).$$

$\rhd$ Για $j \in \{1, 2, ..., r\}$ και $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\boxed{\begin{gathered} \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} = \mathbb{S}^1 \xrightarrow{i_j^n} \mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_r, \\ z \longmapsto i_j^n(z) := (1, 1, ..., 1, z^n, 1, ..., 1). \end{gathered}}$$

(Για $n = 1$, η $i_j^1 = i_j$ είναι η συνήθης ένθεση.)

$\rhd$ Για παγιωμένον $m \in \mathbb{N}$ και $k \in \{1, ..., m\}$ ορίζουμε το

$$B_k := \{\exp(\tfrac{2\pi\sqrt{-1}t}{m}) \,|\, k - 1 \leqslant t \leqslant k\}$$

και την απεικόνιση

$$f_k : B_k \longrightarrow \mathbb{S}^1, \, \exp(\tfrac{2\pi\sqrt{-1}t}{m}) \longmapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}(t - k + 1)).$$

Το B_k είναι ένα τόξο μήκους $2\pi/m$, ενώ η f_k περιελίσσει αυτό το τόξο περί τον $\mathbb{S}^1$. Εν συνεχεία, για τυχόντες $1 \leqslant j_1, ..., j_m \leqslant r$ και $n_1, ..., n_m \in \mathbb{Z}$, συμβολίζουμε ως

$$\boxed{i_{j_1}^{n_1} \cdot i_{j_2}^{n_2} \cdots i_{j_m}^{n_m} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_r} \tag{7.17}$$

εκείνη την απεικόνιση, η οποία ταυτίζεται με την $i_{j_k}^{n_k} \circ f_k$ επί τού B_k για κάθε δείκτη $k \in \{1, ..., m\}$, και είναι συνεχής. Η εν λόγω απεικόνιση διαθέτει μια απλή *γεωμετρική ερμηνεία*: Εάν ένα σημείο $x \in \mathbb{S}^1$, ξεκινώντας από το $1 \in \mathbb{S}^1$ διατρέχει τον κύκλο $\mathbb{S}^1$, τότε η εικόνα του μέσω τής (7.17) διατρέχει $|n_1|$ φορές τον $\mathbb{S}^1_{j_1}$, κατόπιν $|n_2|$ φορές τον $\mathbb{S}^1_{j_2}$ κ.ο.κ. (και μάλιστα κατά την ίδια ή την αντίθετη φορά, αναλόγως με το κατά πόσον ο εκάστοτε n_k είναι θετικός ή αρνητικός). Μέσω τής (7.17) μπορεί κανείς να επικολλήσει στον $\mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_r$ ένα 2-κύτταρο. (Βλ. B.2.17.)

$\rhd$ Επί παραδείγματι, για $r = 1$ και $g_n := i_1^n : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}_1^1 \approx \mathbb{S}^1$, $z \longmapsto g_n(z) := z^n$, προσαρτώντας στον $\mathbb{S}^1$ ένα 2-κύτταρο μέσω τής g_n λαμβάνουμε

$$\mathbb{S}^1 \cup_{g_0} \mathfrak{e}^2 \approx \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1,\ \ \mathbb{S}^1 \cup_{g_1} \mathfrak{e}^2 \approx \mathbb{B}^2,\ \ \mathbb{S}^1 \cup_{g_n} \mathfrak{e}^2 \approx \mathbb{S}^1 \cup_{g_{-n}} \mathfrak{e}^2.$$

Κατά την πρόταση B.2.18, ο $\mathbb{S}^1 \cup_{g_n} \mathfrak{e}^n$ δημιουργείται από την μπάλα $\mathbb{B}^2$ ύστερα από την ταύτιση δυο σημείων $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{B}^2$ εάν και μόνον εάν $\mathbf{x}^n = \mathbf{y}^n$. Όταν $n = 2$, τούτο σημαίνει ότι εκτελείται ταύτιση των αντιποδικών σημείων τού $\mathbb{S}^1$, οπότε $\mathbb{S}^1 \cup_{g_2} \mathfrak{e}^2 \approx \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Αυτός ο ομοιομορφισμός δίδει το έναυσμα για το ακόλουθο γενικό θεώρημα:

7.6.1 Θεώρημα. *Έστω g ένας φυσικός αριθμός $\geqslant 1$. Εάν προσαρτήσουμε στη μονοσημειακή ένωση $\mathbb{S}_1^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}_{2g}^1$ (και αντιστοίχως, στην $\mathbb{S}_1^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}_g^1$) ένα 2-κύτταρο μέσω τής απεικονίσεως*

$$i_1 i_2 i_1^{-1} i_2^{-1} \cdots i_{2g-1} i_{2g} i_{2g-1}^{-1} i_{2g}^{-1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}_1^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}_{2g}^1$$

(και αντιστοίχως, μέσω τής $i_1^2 i_2^2 \cdots i_g^2 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}_1^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}_g^1$), τότε αποκτούμε την $X_g^{\mathrm{or.}}$ (και αντιστοίχως, την $X_g^{\mathrm{nonor.}}$).

Απόδειξη. Έστω $h := i_1 i_2 i_1^{-1} i_2^{-1} \cdots i_{2g-1} i_{2g} i_{2g-1}^{-1} i_{2g}^{-1}$ η εν λόγω απεικόνιση και έστω $Y_g := \mathbb{S}_1^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}_{2g}^1 \cup_h \mathfrak{e}^2$. Κατά την πρόταση B.2.18 έχουμε $Y_g \approx \mathbb{B}^2/\mathfrak{S}$, όπου

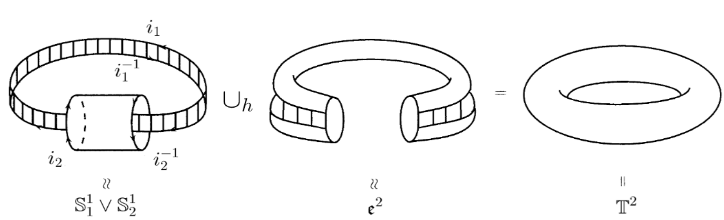
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathfrak{S} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{B}^2 \ \text{ και } \ h(\mathbf{x}) = h(\mathbf{y})].$$

Από τον ορισμό τής h διαβλέπουμε ότι ο κύκλος $\mathbb{S}^1$ διαιρείται σε $4g$ ίσα τόξα $B_1, B_2, \ldots, B_{4g}$ και η $\mathfrak{S}$ ταυτίζει το B_j με το B_{j+2}, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, 4g - 2\}$, και μάλιστα κατά την αντίθετη φορά. Ο ομοιομορφισμός

$$\mathfrak{E}_{4g} \xrightarrow{\ \approx\ } \mathbb{B}^2,\ \ t\mathbf{x} \longmapsto \frac{t\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||},\ \ \forall \mathbf{x} \in \partial\mathfrak{E}_{4g},\ \forall t \in \mathbf{I},$$

καθώς και ο αντίστροφός του είναι συμβατοί προς τις $\mathfrak{R}$ και $\mathfrak{S}$. Κατά συνέπειαν, $X_g^{\mathrm{or.}} \approx Y_g$. (Βλ. πρόταση B.2.5.) Η απόδειξη για την $X_g^{\mathrm{nonor.}}$ είναι ανάλογη. $\square$

7.6.2 Παρατήρηση. Κατά το θεώρημα 7.6.1 η μονοσημειακή ένωση $\mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_{2g}^1$ μπορεί να εμφυτευθεί κατά τέτοιον τρόπο εντός τής $X_g^{\mathrm{or.}}$, ώστε το συμπλήρωμά της να είναι ένα 2-κύτταρο. Ως εκ τούτου, κατόπιν αποκοπής $2g$ (πεπλατυσμένων) περιγραμμάτων κύκλων από την $X_g^{\mathrm{or.}}$ αποκτούμε ένα 2-κύτταρο. (Το ίδιο συμβαίνει και για την $X_g^{\mathrm{nonor.}}$ κάνοντας χρήση g περιγραμμάτων κύκλων.) Το κάτωθι σχήμα εξηγεί εποπτικώς αυτή τη διαδικασία για τον τόρο $\mathbb{T}^2 = X_1^{\mathrm{or.}}$:



7.6.3 Σημείωση. (i) Έστω $p : \mathfrak{E}_{4g} \longrightarrow X_g^{\text{or.}}$ (με $g \geqslant 1$) η φυσική επίρριψη και έστω

$$h := i_1 i_2 i_1^{-1} i_2^{-1} ... i_{2g-1} i_{2g} i_{2g-1}^{-1} i_{2g}^{-1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_{2g}^1$$

η απεικόνιση η ορισθείσα στο θεώρημα 7.6.1. Τότε η απεικόνιση $\overline{h}$ τού μεταθετικού διαγράμματος[9]:

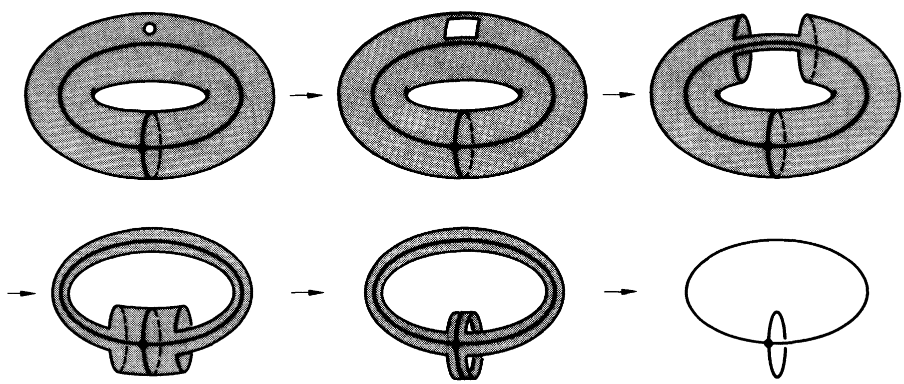
$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "h"] & \mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_{2g}^1 \\ \partial\mathfrak{E}_{4g} \arrow[u, "\approx"] \arrow[r, "p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & p(\partial\mathfrak{E}_{4g}) \arrow[u, "\overline{h}"'] \end{tikzcd}$$

με $\overline{h}(p(\mathbf{x})) := h(\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||})$, $\forall \mathbf{x} \in \partial\mathfrak{E}_{4g}$, είναι ομοιομορφισμός. Έτσι, ταυτίζοντας το $\mathfrak{E}_{4g}$ με τον δίσκο $\mathbb{B}^2$, μπορούμε να γράψουμε την $X_g^{\text{or.}}$ ως εξής:

$$\boxed{X_g^{\text{or.}} \approx p(\partial\mathfrak{E}_{4g}) \cup_{p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}}} \mathfrak{E}_{4g}.}$$

(Βλ. B.2.17.)

(ii) Εάν από το $\mathfrak{E}_{4g}$ αφαιρεθεί ένα σημείο τού εσωτερικού του, φερειπείν το κέντρο του, τότε ο κύκλος $\mathbb{S}^1$, θεωρούμενος ως κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{B}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$, αποτελεί ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $\mathbb{B}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\} \approx \mathfrak{E}_{4g} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$. (Βλ. εδ. B.5.24 (i).) Εφαρμόζοντας την πρόταση[10] B.5.25 συμπεραίνουμε ότι η μονοσημειακή ένωση $\mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_{2g}^1$ αποτελεί *ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τής* (*σε ένα σημείο*) «*τρυπημένης*» επιφανείας $X_g^{\text{or.}}$. Στο κάτωθι σχήμα εικονογραφείται αυτή η ιδιότητα για τον τόρο[11] $\mathbb{T} = X_1^{\text{or.}}$.



(iii) Έστω τώρα $p : \mathfrak{E}_{2g} \longrightarrow X_g^{\text{nonor.}}$ (με $g \geqslant 2$) η φυσική επίρριψη για την $X_g^{\text{nonor.}}$ και έστω

$$h := i_1^2 i_2^2 ... i_g^2 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_g^1$$

[9] Το πρώτο κατακόρυφο βέλος συμβολίζει τον ομοιομορφισμό $\partial\mathfrak{E}_{4g} \ni \mathbf{x} \longmapsto \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} \in \mathbb{S}^1$ *τής ακτινικής προβολής*.

[10] Αρκεί η πρόταση B.5.25 να εφαρμοσθεί με τα $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{B}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\} \approx \mathfrak{E}_{4g} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_{2g}^1$ και h στη θέση των εκεί παρατεθέντων A, X, Y και f, αντιστοίχως.

[11] Πρβλ. https://www.youtube.com/watch?v=j2HxBUaoaPU και https://www.youtube.com/watch?v=qzaqOuxEbzA

η απεικόνιση η ορισθείσα στο θεώρημα 7.6.1. Τότε η απεικόνιση $\overline{h}$ τού μεταθετικού διαγράμματος[12]:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "h"] & \mathbb{S}^1_1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1_g \\ \partial\mathfrak{E}_{2g} \arrow[u, "\approx"] \arrow[r, "p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & p(\partial\mathfrak{E}_{2g}) \arrow[u, "\overline{h}"'] \end{tikzcd}$$

με $\overline{h}(p(\mathbf{x})) := h(\frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||})$, $\forall \mathbf{x} \in \partial\mathfrak{E}_{2g}$, είναι ομοιομορφισμός. Έτσι, ταυτίζοντας το $\mathfrak{E}_{2g}$ με τον δίσκο $\mathbb{B}^2$, μπορούμε να γράψουμε την $X_g^{\text{nonor.}}$ ως εξής:

$$\boxed{X_g^{\text{nonor.}} \approx p(\partial\mathfrak{E}_{2g}) \cup_{p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}}} \mathfrak{E}_{2g}.}$$

(Βλ. B.2.17.)

(iv) Με επιχειρήματα πανομοιότυπα εκείνων τού (ii) αποδεικνύεται ότι η μονοσημειακή ένωση $\mathbb{S}^1_1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}^1_g$ αποτελεί *ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τής* (*σε ένα σημείο*) «*τρυπημένης*» επιφανείας $X_g^{\text{nonor.}}$.

▸ **Υπολογισμός ομάδων ιδιάζουσας ομολογίας τής** $\mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_r$. Αυτός ο υπολογισμός είναι απαραίτητος για ό,τι ακολουθήσει.

7.6.4 Πρόταση. *Έστω r ένας φυσικός αριθμός. Για κάθε $j \in \{1, ..., r\}$ θεωρούμε έναν εστιγμένο τοπολογικό χώρο $(\mathbb{S}^1_j, \{z^0_j\})$, όπου $\mathbb{S}^1_j \approx \mathbb{S}^1 \, (:= \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\})$, καθώς και τη μονοσημειακή ένωση*

$$\mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_r := (\mathbb{S}^1_1 + \cdots + \mathbb{S}^1_r)/\{z^0_1, ..., z^0_r\}$$

την προκύπτουσα ύστερα από την ταύτιση των σημείων $z^0_1, ..., z^0_r$ με ένα και μόνον σημείο (ας το πούμε z^0). Τότε υφίσταται ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\boxed{\bigoplus_{j=1}^{r} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1_j; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_r; \mathbb{Z})}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ και, ως εκ τούτου,

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_r; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n = 0, \\ \mathbb{Z}^r, & \text{όταν } n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, 1\}, \end{cases}}$$

όπου $\mathbb{Z}^r := \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ φορές}}$.

Απόδειξη. Για $r = 1$ αμφότεροι οι ισχυρισμοί είναι προδήλως αληθείς. Εάν υποθέσουμε ότι $r \geqslant 2$ και ότι ο πρώτος εξ αυτών είναι αληθής *και* για τη μονοσημειακή

[12]Το πρώτο κατακόρυφο βέλος συμβολίζει τον ομοιομορφισμό $\partial\mathfrak{E}_{2g} \ni \mathbf{x} \longmapsto \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} \in \mathbb{S}^1$ τής *ακτινικής προβολής*.

ένωση $\mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_{r-1}$, τότε θεωρούμε τους εξής υποχώρους τής $\mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_r$:

$$X_1 := \varpi(\mathbb{S}^1_1 + \cdots + \mathbb{S}^1_{r-1}), \;\; X_2 := \varpi(\mathbb{S}^1_r),$$

όπου $\varpi : \mathbb{S}^1_1 + \cdots + \mathbb{S}^1_r \twoheadrightarrow \mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_r$ είναι η φυσική επίρριψη. Προφανώς,

$$\bigvee_{j=1}^{r} \mathbb{S}^1_j = X_1 \cup X_2, \;\; X_1 \approx \bigvee_{j=1}^{r-1} \mathbb{S}^1_j, \;\; X_2 \approx \mathbb{S}^1_r, \;\; \text{και} \;\; X_1 \cap X_2 = \{z^0\}.$$

Το μονοσύνολο $\{z^0\}$ αποτελεί μια *περιοχική παραμορφωτική σύμπτυξη*[13] τόσον τού X_1 όσον και τού X_2, διότι εάν επιλέξουμε για κάθε $j \in \{1, ..., r\}$ ένα ανοικτό ημικύκλιο (ή, γενικότερα, ένα ανοικτό τόξο) V_j επί τής $\mathbb{S}^1_j$ με $z^0_j \in V_j$ και εάν θέσουμε

$$U_1 := \varpi(V_1 + \cdots + V_{r-1}), \;\; U_2 := \varpi(V_r),$$

τότε το $\{z^0\}$ είναι μια παραμορφωτική σύμπτυξη τόσον τού ανοικτού υπόχωρου U_1 τού X_1 όσον και τού ανοικτού υποχώρου U_2 τού X_2. Έτσι, η ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris για την εξώθηση[14], π.χ.,

$$\begin{tikzcd}
\{z^0\} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[d, hook] \\
X_1 \arrow[r, hook] & \mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_r
\end{tikzcd}$$

δίδει για $n \geqslant 2$

$$\cdots \to \underbrace{H_n^{\text{sing.}}(\{z^0\};\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \to \underbrace{H_n^{\text{sing.}}(X_1;\mathbb{Z})}_{\cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1_1 \vee \dots \vee \mathbb{S}^1_{r-1};\mathbb{Z})} \oplus \underbrace{H_n^{\text{sing.}}(X_2;\mathbb{Z})}_{\cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1_r;\mathbb{Z})} \to H_n^{\text{sing.}}(\bigvee_{j=1}^{r} \mathbb{S}^1_j;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathfrak{D}_1} \underbrace{H_{n-1}^{\text{sing.}}(\{z^0\};\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \to \cdots$$

οπότε (κάνοντας χρήση τής επαγωγικής μας υποθέσεως)

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{r-1} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1_j;\mathbb{Z})\right) \oplus H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1_r;\mathbb{Z}) = \bigoplus_{j=1}^{r} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1_j;\mathbb{Z}) \cong H_n^{\text{sing.}}(\bigvee_{j=1}^{r} \mathbb{S}^1_j;\mathbb{Z}).$$

Τούτο είναι προφανές για $n \leqslant -1$ αλλά ισχύει και για $n = 1$, διότι εν τοιαύτη περιπτώσει είναι εύκολο να δειχθεί ότι $\mathfrak{D}_1 = 0$. Άρα ο πρώτος ισχυρισμός είναι αληθής για κάθε $r \geqslant 1$. Σε ό,τι αφορά στον δεύτερο (για $r \geqslant 2$), επειδή η μονοσημειακή ένωση $\mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_r$ είναι χώρος δρομοσυνεκτικός, έχουμε

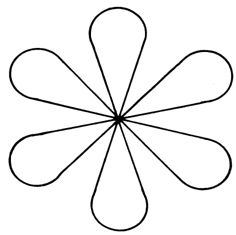
$$H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1_1 \vee ... \vee \mathbb{S}^1_r;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

λόγω τού θεωρήματος D.2.23, οπότε οι λοιποί ισομορφισμοί για $n \neq 0$ έπονται εκ νέου με χρήση μαθηματικής επαγωγής επί τού r. □

[13] Βλ. εδ. 7.3.3.

[14] Βάσει των προαναφερθέντων, μπορούμε στην υπό εξέταση περίπτωση να εφαρμόσουμε το θεώρημα 7.3.4 εναλλάσσοντας τους ρόλους των X_1 και X_2 χωρίς κανένα πρόβλημα. Επίσης, εδώ χρησιμοποιούμε την ακριβή ακολουθία των Mayer και Vietoris τού θεωρήματος 7.3.4 με το εκεί παρατεθέν *A κενό*!

7.6.5 Σημείωση. Η μονοσημειακή ένωση $\mathbb{S}_1^1 \vee ... \vee \mathbb{S}_r^1$ (η οποία συναντάται ενίοτε στη βιβλιογραφία και ως **μπουκέτο** r **κύκλων**), πέραν τής περιγραφής της ως ενώσεως $\Lambda_1 \cup ... \cup \Lambda_r$ των «αξόνων» (εντός τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$), μπορεί να ιδωθεί και ως ένα *συνεκτικό γράφημα*, το οποίο (αποδεικνύεται ότι) είναι ομοτοπικώς ισοδύναμο με μια **ροζέτα με** r **φύλλα**. Ιδού μια τέτοια εξάφυλλη ροζέτα:



▸ **Υπολογισμός μοδίων ιδιάζουσας ομολογίας τής $X_g^{\text{or.}}$ (όπου** $g \geqslant 1$). Θεωρούμε δυο θετικούς πραγματικούς αριθμούς ϱ, ϱ' με[15] $\varrho < \varrho' \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{4g}\right)$, καθώς και τα εξής δύο *ανοικτά* υποσύνολα τής επιφανείας $X_g^{\text{or.}}$:

$$A := p\left(\{ z \in \mathfrak{E}_{4g} |\ |z| > \varrho\}\right), \ \ B := p\left(\left\{ z \in \mathfrak{E}_{4g} |\ |z| < \varrho'\right\}\right).$$

Προφανώς έχουμε $X_g^{\text{or.}} = A \cup B$ και $A \cap B = p\left(\{ z \in \mathbb{C} |\ \varrho < |z| < \varrho'\}\right)$, η τριάδα $(X_g^{\text{or.}}, A, B)$ είναι εκτμητική (βλ. εδ. 7.2.2 (i)) και η ανηγμένη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris 7.2.4 (ii) είναι η

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r, "\widetilde{\mathfrak{D}}_{n+1}(A,B)"] & \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(A \cap B; \mathbb{Z}) \arrow[rr, "(\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(k_A), \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(k_B))"] & & \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(A; \mathbb{Z}) \oplus \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(B; \mathbb{Z}) \arrow[dll, "\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(l_A) - \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(l_B)"'] \\
& \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}; \mathbb{Z}) \arrow[r, "\widetilde{\mathfrak{D}}_n(A,B)"'] & \widetilde{H}_{n-1}^{\text{sing.}}(A \cap B; \mathbb{Z}) \arrow[r, "(\widetilde{H}_{n-1}^{\text{sing.}}(k_A), \widetilde{H}_{n-1}^{\text{sing.}}(k_B))"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Σημειωτέον ότι τόσον το $\{ z \in \mathfrak{E}_{4g} |\ |z| < \varrho'\}$ όσον και το ίδιο το υποσύνολο B είναι ένα 2-κύτταρο (βλ. B.1.3 (i)), ήτοι ένας χώρος συσταλτός. (Βλ. B.5.6 (v).) Κατά συνέπειαν, ένεκα τής παρατηρήσεως C.3.4 και τού θεωρήματος D.2.27,

$$\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(B; \mathbb{Z}) \cong \{0\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{7.18}$$

Από την άλλη μεριά, το σύνολο

$$\{ z \in \mathfrak{E}_{4g} |\ |z| > \varrho\} = \mathfrak{E}_{4g} \smallsetminus \{ z \in \mathbb{C} |\ |z| \leqslant \varrho\} \approx \mathbb{B}^2 \smallsetminus \{ z \in \mathbb{C} |\ |z| \leqslant \varrho\} = \{ z \in \mathbb{C} |\ \varrho < |z| \leqslant 1\}$$

προκύπτει από τον *τρυπημένον δίσκο* $\mathbb{B}^2$ (ήτοι από τον $\mathbb{B}^2$ από τον οποίο έχουμε αφαιρέσει το $\{\mathbf{0}\}$) *ύστερα από μεγέθυνση τής διανοιχθείσας τρύπας*. (Βλ. εδ. B.1.3 (vi), σελ. 627.) Επομένως,

$$\{ z \in \mathfrak{E}_{4g} |\ |z| > \varrho\} \approx \mathbb{B}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\} \simeq \partial \mathbb{B}^2 \approx \partial \mathfrak{E}_{4g} \approx \mathbb{S}^1,$$

[15] Η ακτίνα τού κύκλου τού εγγεγραμμένου στο $\partial \mathfrak{E}_{4g}$ ισούται με $\cos\left(\frac{\pi}{4g}\right)$.

όπου η σχέση με το “$\simeq$” έπεται από το γεγονός ότι ο κύκλος $\partial\mathbb{B}^2 \approx \mathbb{S}^1$ αποτελεί ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $\mathbb{B}^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$. (Βλ. εδ. B.5.24 (i) και B.5.18.) Αυτό έχει ως συνέπεια ότι
$$A \simeq p(\partial\mathfrak{E}_{4g}) \approx \mathbb{S}^1_1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}^1_{2g}$$
και ότι (μέσω τής προτάσεως 7.6.4, τής παρατηρήσεως C.3.4 (i) και τού θεωρήματος D.2.27)
$$\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{2g}, & \text{όταν } n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{1\}. \end{cases} \tag{7.19}$$
Τέλος, παρατηρούμε ότι η απεικόνιση
$$\mathbb{S}^1 \longrightarrow A \cap B = p\left(\{\, z \in \mathbb{C} |\ \varrho < |z| < \varrho' \}\right),$$
$$z \longmapsto p\left(\tfrac{\varrho+\varrho'}{2} z\right),$$
είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία, καθόσον η εικόνα $p(\frac{\varrho+\varrho'}{2}\mathbb{S}^1)$ τού κύκλου[16] $\frac{\varrho+\varrho'}{2}\mathbb{S}^1$ αποτελεί μια παραμορφωτική σύμπτυξη[17] τού $A \cap B$. Εξ αυτού έπεται ότι
$$\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(A \cap B;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{1\}. \end{cases} \tag{7.20}$$
(Βλ. εδ. C.4.3, C.3.4 (i) και D.2.27.) Λαμβανομένων υπ’ όψιν των (7.18), (7.19) και (7.20), από την ανωτέρω μακρά ακολουθία των Mayer και Vietoris συμπεραίνουμε ότι
$$H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) = \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \cong \{0\}$$
όταν είτε $n \geqslant 3$ είτε $n \leqslant -1$, οπότε απομένει ο προσδιορισμός τής $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z})$ για $n \in \{0,1,2\}$ μέσω τού πλέον «ενδιαφέροντος» τμήματός της:
$$\begin{aligned}
&\cdots \to \underbrace{\widetilde{H}_2^{\text{sing.}}(A \cap B;\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \to \underbrace{\widetilde{H}_2^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \longrightarrow \widetilde{H}_2^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \xrightarrow{\widetilde{\mathfrak{D}}_2(A,B)} \\
&\to \underbrace{\widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(A \cap B;\mathbb{Z})}_{\cong\mathbb{Z}} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z})}_{\cong\mathbb{Z}^{2g}} \longrightarrow \widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \xrightarrow{\widetilde{\mathfrak{D}}_1(A,B)} \\
&\to \underbrace{\widetilde{H}_0^{\text{sing.}}(A \cap B;\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_0^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \to \widetilde{H}_0^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \to \{0\}
\end{aligned}$$
το οποίο δίδει αφ’ ενός μεν $\widetilde{H}_0^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \cong \{0\}$, αφ’ ετέρου δε την ακριβή ακολουθία το πολύ τεσσάρων μη τετριμμένων όρων[18] ως την άνω γραμμή τού ακολούθου

[16] Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ θέτουμε $\xi\mathbb{S}^1 := \left\{\, \xi z |\ z \in \mathbb{S}^1 \right\}$.

[17] Για την απόδειξη τού ότι ο $\frac{\varrho+\varrho'}{2}\mathbb{S}^1$ αποτελεί μια παραμορφωτική σύμπτυξη τής δακτυλιωτής περιοχής $\{\, z \in \mathbb{C} |\ \varrho < |z| < \varrho' \}$ αρκεί να θεωρηθεί κατάλληλη ομοτοπία ευθυγράμμων τμημάτων ανάλογη εκείνης των παραδειγμάτων B.5.18 και B.5.24 (iii). (Η επουσιώδης διαφοροποίηση έγκειται στο ότι εδώ υπάρχει μια και μόνον *μεγενθυμένη* τρύπα και ότι ο κύκλος αναφοράς δεν έχει ακτίνα 1 αλλά $\frac{\varrho+\varrho'}{2}$.)

[18] Επειδή οι συνήθεις ομάδες ομολογίας διαφοροποιούνται από τις ανηγμένες μόνον για $n = 0$, μπορούμε εδώ να γράψουμε το εναπομένον «ενδιαφέρον» τμήμα τής ακριβούς MV-ακολουθίας απαλλασσόμενοι από τις περισπωμένες.

διαγράμματος:

$$
\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & H_2^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathfrak{D}_2"'] & H_1^{\text{sing.}}(A\cap B;\mathbb{Z}) \arrow[r, "H_1^{\text{sing.}}(k_A)"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] & H_1^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z}) \arrow[r, "H_1^{\text{sing.}}(l_A)"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & H_1^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \arrow[r] & \{0\} \\
& & H_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{4g};\mathbb{Z}) \arrow[r, "H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}})"'] & H_1^{\text{sing.}}(p(\partial\mathfrak{E}_{4g});\mathbb{Z}) & & \\
& \mathbb{Z}\cong\boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1,1) \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] & \boldsymbol{\pi}_1(\partial\mathfrak{E}_{4g},z_1) \arrow[r, "\boldsymbol{\pi}_1(p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}})"'] \arrow[u, "\varphi^{\text{Hur}}_{\partial\mathfrak{E}_{4g},z_1}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \boldsymbol{\pi}_1(p(\partial\mathfrak{E}_{4g}),p(z_1)) \arrow[u, "\varphi^{\text{Hur}}_{p(\partial\mathfrak{E}_{4g}),p(z_1)}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

όπου $\mathfrak{D}_2=\mathfrak{D}_2(A,B)$, $k_A:A\cap B\hookrightarrow A$ και $l_A:A\hookrightarrow X_g^{\text{or.}}$ οι συνήθεις ενθέσεις. Εν προκειμένω, ο $\boldsymbol{\pi}_1(p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}})$ είναι ο ομομορφισμός ομάδων

$$\boldsymbol{\pi}_1(p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}}):\boldsymbol{\pi}_1(\partial\mathfrak{E}_{4g},z_1)\longrightarrow\boldsymbol{\pi}_1(p(\partial\mathfrak{E}_{4g}),p(z_1)),\ \ [\alpha]^{\text{ομ.}}\longmapsto[p\circ\alpha]^{\text{ομ.}},$$

ενώ οι

$$\varphi^{\text{Hur}}_{\partial\mathfrak{E}_{4g},z_1}:\boldsymbol{\pi}_1(\partial\mathfrak{E}_{4g},z_1)\xrightarrow{\cong}H_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{4g};\mathbb{Z}) \tag{7.21}$$

και

$$\varphi^{\text{Hur}}_{p(\partial\mathfrak{E}_{4g}),p(z_1)}:\boldsymbol{\pi}_1(p(\partial\mathfrak{E}_{4g}),p(z_1))\longrightarrow H_1^{\text{sing.}}(p(\partial\mathfrak{E}_{4g});\mathbb{Z})$$

συμβολίζουν τους ομομορφισμούς Hurewicz (βλ. εδ. D.2.31 και D.2.32), με τον πρώτον εξ αυτών *ισομορφισμό* ομάδων, διότι

$$\boldsymbol{\pi}_1(\partial\mathfrak{E}_{4g},z_1)\cong\boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1,1)\underset{\text{B.6.18}}{\cong}\mathbb{Z}.$$

7.6.6 Λήμμα. $H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}})=0.$

Απόδειξη. Εντός τού κανονικού $4g$-γώνου $\partial\mathfrak{E}_{4g}$ ορίζουμε δρόμους

$$a_j,b_j,c_j,d_j:\mathbf{I}\longrightarrow\partial\mathfrak{E}_{4g}$$

ως ακολούθως:

$$a_j:=\sigma_{\text{conv}(\{z_{4j-3},z_{4j-2}\})}\circ\boldsymbol{\eta}^{-1},\qquad b_j:=\sigma_{\text{conv}(\{z_{4j-2},z_{4j-1}\})}\circ\boldsymbol{\eta}^{-1},$$
$$c_j:=\sigma_{\text{conv}(\{z_{4j-1},z_{4j}\})}\circ\boldsymbol{\eta}^{-1},\qquad d_j:=\sigma_{\text{conv}(\{z_{4j},z_{4j+1}\})}\circ\boldsymbol{\eta}^{-1},$$

για κάθε $j\in\{1,\dots,g\}$, όπου $\sigma_{\text{conv}(\{z_\nu,z_{\nu+1}\})}:\Delta_1\longrightarrow\partial\mathfrak{E}_{4g}$ είναι το ιδιάζον 1-μονόπλοκο εντός τού $\partial\mathfrak{E}_{4g}$ (εδώ, ιδιαιτέρως, συσχετική απεικόνιση) που στέλνει το $\mathbf{e}_0^1$ να απεικονισθεί στο z_ν και το $\mathbf{e}_1^1$ να απεικονισθεί στο $z_{\nu+1}$, ενώ ο $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ είναι ο ομοιομορφισμός (D.3) από το $\mathbf{I}$ επί τού Δ_1. Επειδή $\partial\mathfrak{E}_{4g}\approx\mathbb{S}^1$ και $H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$, η κλάση ομολογίας τού 1-κυκλήματος $u\in Z_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{4g};\mathbb{Z})$, όπου

$$u:=\sum_{j=1}^{g}\left(\sigma_{\text{conv}(\{z_{4j-3},z_{4j-2}\})}+\sigma_{\text{conv}(\{z_{4j-2},z_{4j-1}\})}+\sigma_{\text{conv}(\{z_{4j-1},z_{4j}\})}+\sigma_{\text{conv}(\{z_{4j},z_{4j+1}\})}\right),$$

καθορίζει έναν γεννήτορα $u+B_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{4g};\mathbb{Z})$ τής $H_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{4g};\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$. Σημειωτέον ότι ο τύπος ορισμού τού (7.21) είναι ο

$$\boldsymbol{\pi}_1(\partial\mathfrak{E}_{4g},z_1)\ni[\alpha]^{\text{ομ.}}\longmapsto\varphi^{\text{Hur}}_{\partial\mathfrak{E}_{4g},z_1}([\alpha]^{\text{ομ.}}):=\alpha\circ\boldsymbol{\eta}+B_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{4g};\mathbb{Z})\in H_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{4g};\mathbb{Z}),$$

όπου $\boldsymbol{\eta}$ ο ομοιομορφισμός (D.2) από το Δ_1 επί τού διαστήματος $\mathbf{I}$. Ορίζοντας τον δρόμο $\varepsilon : \mathbf{I} \longrightarrow \partial\mathfrak{E}_{4g}$ μέσω τού πολλαπλού τύπου

$$\varepsilon(t) := \begin{cases} a_j(4g(t - \frac{4j-3}{4g})), & \text{όταν } t \in \left[\frac{4j-3}{4g}, \frac{4j-2}{4g}\right], \\ b_j(4g(t - \frac{4j-2}{4g})), & \text{όταν } t \in \left[\frac{4j-2}{4g}, \frac{4j-1}{4g}\right], \\ c_j(4g(t - \frac{4j-1}{4g})), & \text{όταν } t \in \left[\frac{4j-1}{4g}, \frac{4j}{4g}\right], \\ d_j(4g(t - \frac{4j}{4g})), & \text{όταν } t \in \left[\frac{4j}{4g}, \frac{4j+1}{4g}\right], \end{cases}$$

για κάθε $j \in \{1, ..., g\}$, η πρόταση B.6.8 (περί ενός συρμού διαδοχικών δρόμων) μας πληροφορεί ότι

$$\varepsilon \simeq ((a_1 \circledast b_1 \circledast c_1 \circledast d_1) \circledast \cdots \circledast (a_g \circledast b_g \circledast c_g \circledast d_g)) \text{ σχ. } \{0, 1\},$$

οπότε (εκ κατασκευής τού ε)

$$\varphi^{\mathrm{Hur}}_{\partial\mathfrak{E}_{4g}, z_1}([\varepsilon]^{\text{ομ.}}) = u + B_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{4g}; \mathbb{Z}).$$

Από το τελευταίο διάγραμμα λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} p(u) + B_1^{\text{sing.}}(p(\partial\mathfrak{E}_{4g}); \mathbb{Z}) &= H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}}) \left(u + B_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{4g}; \mathbb{Z})\right) = H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}}) \left(\varphi^{\mathrm{Hur}}_{\partial\mathfrak{E}_{4g}, z_1}([\varepsilon]^{\text{ομ.}})\right) \\ &= \varphi^{\mathrm{Hur}}_{p(\partial\mathfrak{E}_{4g}), p(z_1)} \left(\pi_1(p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}})\right)([\varepsilon]^{\text{ομ.}}) = \varphi^{\mathrm{Hur}}_{p(\partial\mathfrak{E}_{4g}), p(z_1)}([p \circ \varepsilon]^{\text{ομ.}}) \\ &= \varphi^{\mathrm{Hur}}_{p(\partial\mathfrak{E}_{4g}), p(z_1)}([(p \circ a_1) \circledast (p \circ b_1) \circledast \cdots \circledast (p \circ d_g)]^{\text{ομ.}}). \end{aligned} \tag{7.22}$$

Επειδή για κάθε $t \in \mathbf{I}$ και κάθε $j \in \{1, ..., g\}$, ισχύει

$$(p \circ a_j)(t) = (p \circ b_j)(1 - t), \ \ (p \circ c_j)(t) = (p \circ d_j)(1 - t),$$

(λόγω τού τρόπου ορισμού τής $\mathfrak{R}$) έχουμε $p \circ b_j = \overline{p \circ a_j}$ και $p \circ d_j = \overline{p \circ c_j}$ (βλ. B.6.1), οπότε

$$[p \circ a_j]^{\text{ομ.}} \odot [p \circ b_j]^{\text{ομ.}} = [\mathrm{const}_{p(z_1)}]^{\text{ομ.}} = [p \circ c_j]^{\text{ομ.}} \odot [p \circ d_j]^{\text{ομ.}}. \tag{7.23}$$

Οι (7.22) και (7.23) δίδουν

$$\begin{aligned} p(u) + B_1^{\text{sing.}}(p(\partial\mathfrak{E}_{4g}); \mathbb{Z}) &= \varphi^{\mathrm{Hur}}_{p(\partial\mathfrak{E}_{4g}), p(z_1)}([(p \circ a_1) \circledast (p \circ b_1) \circledast \cdots \circledast (p \circ d_g)]^{\text{ομ.}}) \\ &= \varphi^{\mathrm{Hur}}_{p(\partial\mathfrak{E}_{4g}), p(z_1)}(([p \circ a_1]^{\text{ομ.}} \odot [p \circ b_1]^{\text{ομ.}}) \odot \cdots \odot ([p \circ c_g]^{\text{ομ.}} \odot [p \circ d_g]^{\text{ομ.}})) \\ &= \varphi^{\mathrm{Hur}}_{p(\partial\mathfrak{E}_{4g}), p(z_1)}([\mathrm{const}_{p(z_1)}]^{\text{ομ.}}) = 0_{H_1^{\text{sing.}}(p(\partial\mathfrak{E}_{4g}); \mathbb{Z})} = B_1^{\text{sing.}}(p(\partial\mathfrak{E}_{4g}); \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $p(u) \in B_1^{\text{sing.}}(p(\partial\mathfrak{E}_{4g}); \mathbb{Z})$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(\{u + B_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{4g}; \mathbb{Z})\}) = H_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{4g}; \mathbb{Z}),$$

είναι πρόδηλο ότι $H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}}) = 0$. □

7.6.7 Λήμμα. *Για κάθε $g \in \mathbb{N}$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n \in \{0,2\}, \\ \mathbb{Z}^{2g}, & \text{όταν } n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1,2\}. \end{cases}} \tag{7.24}$$

Απόδειξη. Κατά τα προαναφερθέντα έχουμε

$$H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \cong \{0\}$$

για κάθε δείκτη $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1,2\}$. Επειδή η επιφάνεια $X_g^{\text{or.}}$ (ως συνεχής εικόνα τού δρομοσυνεκτικού χώρου $\mathfrak{E}_{4g}$ μέσω τής p, βλ. πρόταση B.1.19) είναι χώρος δρομοσυνεκτικός, ο ισχυρισμός για $n = 0$ είναι αληθής επί τη βάσει τού θεωρήματος D.2.23. Από την (ακριβή) άνω γραμμή τού τελευταίου διαγράμματος και την πρόταση 3.1.4 λαμβάνουμε

$$H_2^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Ker}(H_1^{\text{sing.}}(k_A)) \;\text{ και }\; H_1^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Coker}(H_1^{\text{sing.}}(k_A)).$$

Από το λήμμα 7.6.6 γνωρίζουμε ότι $H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{4g}}) = 0$, οπότε $H_1^{\text{sing.}}(k_A) = 0$. Κατά συνέπειαν,

$$H_2^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \cong H_1^{\text{sing.}}(A \cap B;\mathbb{Z}) \cong H_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{4g};\mathbb{Z}) \cong H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

και $H_1^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \cong H_1^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z}) = \widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z}) \underset{(7.19)}{\cong} \mathbb{Z}^{2g}$. □

7.6.8 Θεώρημα. *Για κάθε μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R, για κάθε $g \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0,2\}, \\ R^{2g}, & \text{όταν } n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1,2\}. \end{cases}} \tag{7.25}$$

Απόδειξη. Για $g = 0$ τούτο είναι αληθές[19]. Ας υποθέσουμε ότι $g \geqslant 1$. Επειδή ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ είναι Π.Κ.Ι., έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,

$$H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};R) \underset{(8.3),\, 8.1.3\,(\text{i})}{\cong} (H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R) \oplus \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z});R).$$

Από τις (7.24) έπεται ότι οι αβελιανές ομάδες $H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z})$ είναι ελεύθερες (ως $\mathbb{Z}$-μόδιοι), οπότε από την πρόταση 4.2.4 και το λήμμα 5.3.11 λαμβάνουμε

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};\mathbb{Z});R) \cong \{0\}, \;\forall n \in \mathbb{Z}.$$

Άρα οι (7.25) έπονται από τις (7.24), καθότι $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong R$. (Βλ. θεώρημα 4.4.3.) □

[19] Βλ. εδ. 7.4.1, C.4.4 και D.2.27.

▸ **Υπολογισμός μοδίων ιδιάζουσας ομολογίας τού** $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = X_1^{\text{nonor.}}$. Εδώ το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ θα ταυτισθεί με το σταυρωτό διαπέτασμα $\mathbb{B}^2/\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}$, όπου

$$\mathfrak{Z} := \left\{ \left\{ \{\mathbf{x}\} \middle| \, \mathbf{x} \in \mathbb{B}^2 \smallsetminus \mathbb{S}^1 \right\}, \left\{ \{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\} \middle| \, \mathbf{x} \in \mathbb{S}^1 \right\} \right\}$$

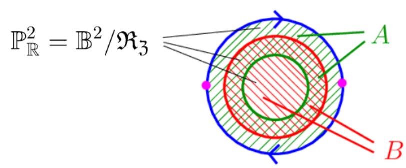
ο συνήθης διαμελισμός τού $\mathbb{B}^2$. (Βλ. εδ. B.2.11 (i) και B.3.2 (iii).) Έστω

$$p : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{B}^2/\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}$$

η φυσική επίρριψη. Θεωρούμε τα εξής δύο *ανοικτά* υποσύνολα τού[20] $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$:

$$A := p\left(\left\{ z \in \mathbb{B}^2 \middle| \, |z| > \tfrac{1}{4} \right\}\right), \;\; B := p\left(\left\{ z \in \mathbb{B}^2 \middle| \, |z| < \tfrac{3}{4} \right\}\right).$$

Προφανώς, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = A \cup B$, $A \cap B = p\left(\left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \, \frac{1}{4} < |z| < \frac{3}{4} \right\}\right)$ και η τριάδα $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, A, B)$ είναι εκτμητική (βλ. εδ. 7.2.2 (i)).



Τόσον το $\left\{ z \in \mathbb{B}^2 \middle| \, |z| < \frac{3}{4} \right\}$ όσον και το ίδιο το B είναι ένα 2-κύτταρο (βλ. B.1.3 (i)), ήτοι ένας χώρος συσταλτός. (Βλ. B.5.6 (v).) Κατά συνέπειαν, ένεκα τής παρατηρήσεως C.3.4 και τού θεωρήματος D.2.27,

$$\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(B; \mathbb{Z}) \cong \{0\}, \; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Από την άλλη μεριά, η απεικόνιση

$$j : \mathbb{S}^1 \longrightarrow A \cap B, \;\; z \longmapsto j(z) := p(\tfrac{1}{2}z),$$

είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία, διότι η εικόνα $p(\frac{1}{2}\mathbb{S}^1)$ τού $\frac{1}{2}\mathbb{S}^1$ μέσω τής p αποτελεί παραμορφωτική σύμπτυξη τής τομής $A \cap B$. Μέσω τής παρατηρήσεως C.3.4 (i) και των θεωρημάτων C.4.3 και D.2.27 συνάγεται ότι $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(A \cap B; \mathbb{Z}) \cong \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{1\}$ και ότι ο

$$\widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(j) : \underbrace{\widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z})}_{\cong \mathbb{Z}} \longrightarrow \widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(A \cap B; \mathbb{Z})$$

είναι ισομορφισμός. Επιπροσθέτως, η απεικόνιση συμπτύξεως

$$r : A \longrightarrow \mathbb{S}^1/(\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}|_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1}), \;\; p(s \exp(\sqrt{-1}\theta)) \longmapsto \exp(\sqrt{-1}\theta),$$

(εκφρασθείσα σε πολικές συντεταγμένες) αποτελεί μια ομοτοπική ισοδυναμία. Συμβολίζοντας ως f τον ομοιομορφισμό

$$f : \mathbb{S}^1/(\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}|_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1}) \xrightarrow{\approx} \mathbb{S}^1, \;\; z \bmod(\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}|_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1}) \longmapsto z^2,$$

[20] Είναι βολικότερο *και εδώ* να θεωρούμε τον δίσκο $\mathbb{B}^2$ *εντός τού* $\mathbb{C}$.

παρατηρούμε (όπως προηγουμένως) ότι $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{1\}$ και ότι ο

$$\widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(f \circ r) : \widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z})}_{\cong\mathbb{Z}}$$

είναι ισομορφισμός.

7.6.9 Λήμμα. *Για τις ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας τού πραγματικού προβολικού επιπέδου $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = X_1^{\text{nonor.}}$ έχουμε:*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n = 0, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1\}. \end{cases}} \tag{7.26}$$

Απόδειξη. Βάσει τού θεωρήματος D.2.23, $H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, και η ανηγμένη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris 7.2.4 (ii) για την $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, A, B)$ δίδει $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}) \cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1,2\}$, ενώ το εναπομένον «ενδιαφέρον» τμήμα της (στο οποίο μπορούμε να παραλείψουμε τις περισπωμένες) είναι το εξής:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathfrak{D}_2"'] & H_1^{\text{sing.}}(A\cap B;\mathbb{Z}) \arrow[r, "H_1^{\text{sing.}}(k_A)"'] & H_1^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z}) \arrow[r, "H_1^{\text{sing.}}(l_A)"'] \arrow[d, "\cong"', "H_1^{\text{sing.}}(f\circ r)"] & H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}) \arrow[r] & \{0\} \\
& & H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \arrow[u, "H_1^{\text{sing.}}(j)", "\cong"'] \arrow[r, "H_1^{\text{sing.}}(f\circ r\circ k_A\circ j)"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) & &
\end{tikzcd}$$

Επειδή κάθε $z \in \mathbb{S}^1$ απεικονίζεται μέσω τής συνθέσεως $f \circ r \circ k_A \circ j$ στο

$$(f \circ r \circ k_A \circ j)(z) = (f \circ r \circ k_A)(p(\tfrac{1}{2}z)) = (f \circ r)(p(\tfrac{1}{2}z)) = f(z) = z^2$$

και $H_1^{\text{sing.}}(f \circ r \circ k_A \circ j) = \deg(f \circ r \circ k_A \circ j)\cdot \mathrm{id}_{H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z})}$ (βλ. εδ. C.6.1), το πόρισμα C.6.9 μας πληροφορεί ότι

$$\deg(f \circ r \circ k_A \circ j) = 2.$$

Άρα η ανωτέρω ακριβής ακολουθία γράφεται ως ακολούθως:

$$\{0\} \to H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \overset{2\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}}{\longrightarrow} \mathbb{Z} \to H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}) \to \{0\}$$

και από την πρόταση 3.1.4 λαμβάνουμε

$$H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Ker}(\mathbb{Z} \overset{2\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}}{\longrightarrow} \mathbb{Z}) \cong \{0\} \;\text{ και }\; H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}) \cong \operatorname{Coker}(\mathbb{Z} \overset{2\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}}{\longrightarrow} \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2,$$

οπότε όλοι οι ισομορφισμοί (7.26) είναι αληθείς. □

7.6.10 Θεώρημα. *Για κάθε μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R έχουμε:*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n=0, \\ R/2R, & \text{όταν } n=1, \\ \mathfrak{t}_2(R), & \text{όταν } n=2, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1,2\}, \end{cases}} \tag{7.27}$$

όπου $2R := \{2r \mid r \in R\}$ *και* $\mathfrak{t}_2(R) := \{r \in R \mid 2r = 0_R\}$.

Αποδειξη. Επειδή ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ είναι Π.Κ.Ι., έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};R) \underset{(8.3),\ 8.1.3\ (\text{i})}{\cong} (H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z});R).$$

Επειδή η $H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z})$ είναι η μόνη ομάδα ιδιάζουσας ομολογίας τού $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ που δεν είναι ελεύθερη, αρκεί να εξετασθεί το τι συμβαίνει όταν $n \in \{1,2\}$. Προφανώς,

$$H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};R) \cong (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} R) \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z};R)}_{\cong\{0\}} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \cong R/2R$$

(βλ. πόρισμα[21] 4.5.11) και

$$\begin{aligned} H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};R) &\cong (\underbrace{H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \otimes_{\mathbb{Z}} R) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\underbrace{H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}};\mathbb{Z})}_{\cong\mathbb{Z}_2};R) \\ &\cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z};R) \cong R[2] = \mathfrak{t}_2(R) \end{aligned}$$

(βλ. λήμμα[22] 5.3.21), οπότε όλοι οι ισομορφισμοί (7.27) είναι αληθείς. □

‣ **Υπολογισμός μοδίων ιδιάζουσας ομολογίας τής $X_g^{\text{nonor.}}$ (όπου $g \geqslant 2$).** Θεωρούμε δυο θετικούς πραγματικούς αριθμούς ϱ, ϱ' με[23] $\varrho < \varrho' \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{2g}\right)$, καθώς και τα εξής δύο *ανοικτά* υποσύνολα τής επιφανείας $X_g^{\text{nonor.}}$:

$$A := p\left(\{z \in \mathfrak{E}_{2g} \mid |z| > \varrho\}\right), \quad B := p\left(\{z \in \mathfrak{E}_{2g} \mid |z| < \varrho'\}\right).$$

Προφανώς έχουμε $X_g^{\text{nonor.}} = A \cup B$ και $A \cap B = p\left(\{z \in \mathbb{C} \mid \varrho < |z| < \varrho'\}\right)$, η τριάδα $(X_g^{\text{nonor.}}, A, B)$ είναι εκτμητική (βλ. εδ. 7.2.2 (i)) και η ανηγμένη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris 7.2.4 (ii) είναι η

$$\cdots \xrightarrow{\widetilde{\mathfrak{D}}_{n+1}(A,B)} \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(A\cap B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{(\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(k_A),\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(k_B))} \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z}) \oplus \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(l_A)-\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(l_B)} \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) \xrightarrow[\widetilde{\mathfrak{D}}_n(A,B)]{} \widetilde{H}_{n-1}^{\text{sing.}}(A\cap B;\mathbb{Z}) \xrightarrow[(\widetilde{H}_{n-1}^{\text{sing.}}(k_A),\widetilde{H}_{n-1}^{\text{sing.}}(k_B))]{} \cdots$$

---

[21] Το πόρισμα 4.5.11 πρέπει να εφαρμοσθεί με τους $\mathbb{Z}$ και R στη θέση των εκεί παρατεθέντων R και M, αντιστοίχως.

[22] Το λήμμα 5.3.21 πρέπει να εφαρμοσθεί με τους $\mathbb{Z}$ και R στη θέση των εκεί παρατεθέντων R και M, αντιστοίχως. (Σημειωτέον ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ είναι ακεραία περιοχή, οπότε το $2 \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$ δεν είναι μηδενοδιαιρέτης.)

[23] Η ακτίνα τού κύκλου τού εγγεγραμμένου στο $\partial\mathfrak{E}_{2g}$ ισούται με $\cos\left(\frac{\pi}{2g}\right)$.

Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα πανομοιότυπα εκείνων, στα οποία είχαμε στηριχθεί κατά την εξέταση τού $X_g^{\text{or.}}$, διαπιστώνουμε ότι το B είναι συσταλτό, οπότε

$$\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(B;\mathbb{Z}) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{7.28}$$

ότι το A είναι ομοτοπικώς ισοδύναμο τής μονοσημειακής ενώσεως $\mathbb{S}_1^1 \vee \ldots \vee \mathbb{S}_g^1$, οπότε

$$\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^g, & \text{όταν } n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{1\}. \end{cases} \tag{7.29}$$

και ότι η τομή $A \cap B$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμη τού κύκλου $\mathbb{S}^1$, οπότε

$$\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(A \cap B;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{1\}. \end{cases} \tag{7.30}$$

Λαμβανομένων υπ' όψιν των (7.28), (7.29) και (7.30), από την ανωτέρω μακρά ακολουθία των Mayer και Vietoris συμπεραίνουμε ότι

$$H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) = \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) \cong \{0\}$$

όταν είτε $n \geqslant 3$ είτε $n \leqslant -1$, οπότε απομένει ο προσδιορισμός τής $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z})$ για $n \in \{0,1,2\}$ μέσω τού πλέον «ενδιαφέροντος» τμήματός της:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \underbrace{\widetilde{H}_2^{\text{sing.}}(A\cap B;\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \arrow[r] & \underbrace{\widetilde{H}_2^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \arrow[r] & \widetilde{H}_2^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) \arrow[dll, "\widetilde{\mathfrak{D}}_2(A,B)"] & \\
& \underbrace{\widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(A\cap B;\mathbb{Z})}_{\cong\mathbb{Z}} \arrow[r] & \underbrace{\widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z})}_{\cong\mathbb{Z}^{2g}} \arrow[r] & \widetilde{H}_1^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) \arrow[dll, "\widetilde{\mathfrak{D}}_1(A,B)"] & \\
& \underbrace{\widetilde{H}_0^{\text{sing.}}(A\cap B;\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \arrow[r] & \underbrace{\widetilde{H}_0^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \arrow[r] & \widetilde{H}_0^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

το οποίο δίδει αφ' ενός μεν $\widetilde{H}_0^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) \cong \{0\}$, αφ' ετέρου δε την ακριβή ακολουθία το πολύ τεσσάρων μη τετριμμένων όρων[24] ως την άνω γραμμή τού ακολούθου διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & H_2^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathfrak{D}_2"'] & H_1^{\text{sing.}}(A\cap B;\mathbb{Z}) \arrow[r, "H_1^{\text{sing.}}(k_A)"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"'] & H_1^{\text{sing.}}(A;\mathbb{Z}) \arrow[r, "H_1^{\text{sing.}}(l_A)"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & H_1^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) \arrow[r] & \{0\} \\
& & H_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{2g};\mathbb{Z}) \arrow[r, "H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}})"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_1^{\text{sing.}}(p(\partial\mathfrak{E}_{2g});\mathbb{Z}) & & \\
& \mathbb{Z} \cong \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1,1) \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] & \boldsymbol{\pi}_1(\partial\mathfrak{E}_{2g},z_1) \arrow[r, "\boldsymbol{\pi}_1(p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}})"'] \arrow[u, "\varphi^{\text{Hur}}_{\partial\mathfrak{E}_{2g},z_1}"] & \boldsymbol{\pi}_1(p(\partial\mathfrak{E}_{2g}),p(z_1)) \arrow[u, "\varphi^{\text{Hur}}_{p(\partial\mathfrak{E}_{2g}),p(z_1)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

[24] Επειδή οι συνήθεις ομάδες ομολογίας διαφοροποιούνται από τις ανηγμένες μόνον για $n = 0$, μπορούμε εδώ να γράψουμε το εναπομένον «ενδιαφέρον» τμήμα τής ακριβούς MV-ακολουθίας απαλλασσόμενοι από τις περισπωμένες.

όπου $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_2(A, B)$, $k_A : A \cap B \hookrightarrow A$ και $l_A : A \hookrightarrow X_g^{\text{or.}}$ οι συνήθεις ενθέσεις. Εν προκειμένω, ο $\boldsymbol{\pi}_1(p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}})$ είναι ο ομομορφισμός ομάδων

$$\boldsymbol{\pi}_1(p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}}) : \boldsymbol{\pi}_1(\partial\mathfrak{E}_{2g}, z_1) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(p(\partial\mathfrak{E}_{2g}), p(z_1)),\ \ [\alpha]^{\text{ομ.}} \longmapsto [p \circ \alpha]^{\text{ομ.}},$$

ενώ οι

$$\varphi^{\text{Hur}}_{\partial\mathfrak{E}_{2g}, z_1} : \boldsymbol{\pi}_1(\partial\mathfrak{E}_{2g}, z_1) \xrightarrow{\cong} H_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{2g}; \mathbb{Z}) \tag{7.31}$$

και

$$\varphi^{\text{Hur}}_{p(\partial\mathfrak{E}_{2g}), p(z_1)} : \boldsymbol{\pi}_1(p(\partial\mathfrak{E}_{2g}), p(z_1)) \longrightarrow H_1^{\text{sing.}}(p(\partial\mathfrak{E}_{2g}); \mathbb{Z})$$

συμβολίζουν τους ομομορφισμούς Hurewicz (βλ. εδ. D.2.31 και D.2.32), με τον πρώτον εξ αυτών *ισομορφισμό* ομάδων, διότι

$$\boldsymbol{\pi}_1(\partial\mathfrak{E}_{2g}, z_1) \cong \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1, 1) \underset{\text{B.6.18}}{\cong} \mathbb{Z}.$$

7.6.11 Λήμμα. *Υφίσταται γεννήτορας τής $H_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{2g}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, ο οποίος απεικονίζεται μέσω τής $H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}})$ στο διπλάσιο τού αθροίσματος $2(\mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathfrak{x}_g)$ των στοιχείων μιας βάσεως $\{\mathfrak{x}_1, ..., \mathfrak{x}_g\}$ τής ελεύθερης ομάδας $H_1^{\text{sing.}}(p(\partial\mathfrak{E}_{2g}); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^g$.*

Απόδειξη. Εντός τού κανονικού $2g$-γώνου $\partial\mathfrak{E}_{2g}$ ορίζουμε δρόμους

$$a_j, b_j : \mathbf{I} \longrightarrow \partial\mathfrak{E}_{2g}$$

ως ακολούθως:

$$a_j := \sigma_{\text{conv}(\{z_{2j-1}, z_{2j}\})} \circ \boldsymbol{\eta}^{-1}, \qquad b_j := \sigma_{\text{conv}(\{z_{2j}, z_{2j+1}\})} \circ \boldsymbol{\eta}^{-1},$$

για κάθε $j \in \{1, ..., g\}$, όπου $\sigma_{\text{conv}(\{z_\nu, z_{\nu+1}\})} : \Delta_1 \longrightarrow \partial\mathfrak{E}_{2g}$ είναι το ιδιάζον 1-μονόπλοκο εντός τού $\partial\mathfrak{E}_{2g}$ (εδώ, ιδιαιτέρως, συσχετική απεικόνιση) που στέλνει το $\mathbf{e}_0^1$ να απεικονισθεί στο z_ν και το $\mathbf{e}_1^1$ να απεικονισθεί στο $z_{\nu+1}$, ενώ ο $\boldsymbol{\eta}^{-1}$ είναι ο ομοιομορφισμός (D.3) από το $\mathbf{I}$ επί τού Δ_1. Επειδή $\partial\mathfrak{E}_{2g} \approx \mathbb{S}^1$ και $H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, η κλάση ομολογίας τού 1-κυκλήματος $w \in Z_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{2g}; \mathbb{Z})$, όπου

$$w := \sum_{j=1}^{g} \left(\sigma_{\text{conv}(\{z_{2j-1}, z_{2j}\})} + \sigma_{\text{conv}(\{z_{2j}, z_{2j+1}\})}\right),$$

καθορίζει έναν γεννήτορα $w + B_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{2g}; \mathbb{Z})$ τής $H_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{2g}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Σημειωτέον ότι ο τύπος ορισμού τού (7.31) είναι ο

$$\boldsymbol{\pi}_1(\partial\mathfrak{E}_{2g}, z_1) \ni [\alpha]^{\text{ομ.}} \longmapsto \varphi^{\text{Hur}}_{\partial\mathfrak{E}_{2g}, z_1}([\alpha]^{\text{ομ.}}) := \alpha \circ \boldsymbol{\eta} + B_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{2g}; \mathbb{Z}) \in H_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{2g}; \mathbb{Z}),$$

όπου $\boldsymbol{\eta}$ ο ομοιομορφισμός (D.2) από το Δ_1 επί τού διαστήματος $\mathbf{I}$. Ορίζοντας τον δρόμο $\varepsilon : \mathbf{I} \longrightarrow \partial\mathfrak{E}_{2g}$ μέσω τού διπλού τύπου

$$\varepsilon(t) := \begin{cases} a_j(2g(t - \frac{2j-1}{2g})), & \text{όταν } t \in \left[\frac{2j-1}{2g}, \frac{2j}{2g}\right], \\ b_j(2g(t - \frac{2j}{2g})), & \text{όταν } t \in \left[\frac{2j}{2g}, \frac{2j+1}{2g}\right], \end{cases}$$

για κάθε $j \in \{1, ..., g\}$, η πρόταση B.6.8 (περί ενός συρμού διαδοχικών δρόμων) μας πληροφορεί ότι

$$\varepsilon \simeq ((a_1 \circledast b_1) \circledast (a_2 \circledast b_2) \circledast \cdots \circledast (a_g \circledast b_g)) \text{ σχ. } \{0,1\}$$

οπότε (εκ κατασκευής τού ε)

$$\varphi^{\text{Hur}}_{\partial \mathfrak{E}_{2g}, z_1}([\varepsilon]^{\text{ομ.}}) = w + B_1^{\text{sing.}}(\partial \mathfrak{E}_{2g}; \mathbb{Z}).$$

Από το τελευταίο διάγραμμα λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} p(w) + B_1^{\text{sing.}}(p(\partial \mathfrak{E}_{2g}); \mathbb{Z}) &= H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial \mathfrak{E}_{2g}}) \left(w + B_1^{\text{sing.}}(\partial \mathfrak{E}_{2g}; \mathbb{Z})\right) = H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial \mathfrak{E}_{2g}}) \left(\varphi^{\text{Hur}}_{\partial \mathfrak{E}_{2g}, z_1}([\varepsilon]^{\text{ομ.}})\right) \\ &= \varphi^{\text{Hur}}_{p(\partial \mathfrak{E}_{2g}), p(z_1)} \left(\pi_1(p|_{\partial \mathfrak{E}_{2g}})\right)([\varepsilon]^{\text{ομ.}}) = \varphi^{\text{Hur}}_{p(\partial \mathfrak{E}_{2g}), p(z_1)}([p \circ \varepsilon]^{\text{ομ.}}) \\ &= \varphi^{\text{Hur}}_{p(\partial \mathfrak{E}_{2g}), p(z_1)}([(p \circ a_1) \circledast (p \circ b_1) \circledast \cdots \circledast (p \circ a_g) \circledast (p \circ d_g)]^{\text{ομ.}}). \end{aligned} \tag{7.32}$$

Επειδή για κάθε $t \in \mathbf{I}$ και κάθε $j \in \{1, ..., g\}$, ισχύει $(p \circ a_j)(t) = (p \circ b_j)(t)$ (λόγω τού τρόπου ορισμού τής $\mathfrak{R}'$), έχουμε

$$[p \circ a_j]^{\text{ομ.}} = [p \circ b_j]^{\text{ομ.}}. \tag{7.33}$$

Οι (7.32) και (7.33) δίδουν

$$\begin{aligned} p(w) + B_1^{\text{sing.}}(p(\partial \mathfrak{E}_{2g}); \mathbb{Z}) &= \varphi^{\text{Hur}}_{p(\partial \mathfrak{E}_{2g}), p(z_1)}([(p \circ a_1) \circledast (p \circ b_1) \circledast \cdots \circledast (p \circ a_g) \circledast (p \circ d_g)]^{\text{ομ.}}) \\ &= \varphi^{\text{Hur}}_{p(\partial \mathfrak{E}_{2g}), p(z_1)}(([p \circ a_1]^{\text{ομ.}} \odot [p \circ b_1]^{\text{ομ.}}) \odot \cdots \odot ([p \circ a_g]^{\text{ομ.}} \odot [p \circ b_g]^{\text{ομ.}})) \\ &= \varphi^{\text{Hur}}_{p(\partial \mathfrak{E}_{2g}), p(z_1)}(\prod_{j=1}^{g} ([p \circ a_j]^{\text{ομ.}})^2) \\ &= 2 \left(\sum_{j=1}^{g} p \circ \sigma_{\text{conv}(\{z_{2j-1}, z_{2j}\})} \right) + B_1^{\text{sing.}}(p(\partial \mathfrak{E}_{2g}); \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Εάν για κάθε $j \in \{1, ..., g\}$ θέσουμε

$$\mathfrak{x}_j := p \circ \sigma_{\text{conv}(\{z_{2j-1}, z_{2j}\})} + B_1^{\text{sing.}}(p(\partial \mathfrak{E}_{2g}); \mathbb{Z}),$$

τότε το $\{\mathfrak{x}_1, ..., \mathfrak{x}_g\}$ είναι (εκ κατασκευής) μια βάση τής $H_1^{\text{sing.}}(p(\partial \mathfrak{E}_{2g}); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^g$ και ο γεννήτορας $w + B_1^{\text{sing.}}(\partial \mathfrak{E}_{2g}; \mathbb{Z})$ τής $H_1^{\text{sing.}}(\partial \mathfrak{E}_{2g}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ πράγματι απεικονίζεται μέσω τού ομομορφισμού $H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial \mathfrak{E}_{2g}})$ στο $2(\mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathfrak{x}_g)$. □

7.6.12 Λήμμα. *Για κάθε $g \in \mathbb{N}$, $g \geqslant 2$, και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n = 0, \\ \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } n = 1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\}. \end{cases}} \tag{7.34}$$

Απόδειξη. Κατά τα προαναφερθέντα έχουμε

$$H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z}) \cong \{0\}$$

για κάθε δείκτη $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1,2\}$. Επειδή η επιφάνεια $X_g^{\text{nonor.}}$ (ως συνεχής εικόνα τού δρομοσυνεκτικού χώρου $\mathfrak{E}_{4g}$ μέσω τής p, βλ. πρόταση B.1.19) είναι χώρος δρομοσυνεκτικός, ο ισχυρισμός για $n=0$ είναι αληθής επί τη βάσει τού θεωρήματος D.2.23. Από την (ακριβή) άνω γραμμή τού τελευταίου διαγράμματος και την πρόταση 3.1.4 λαμβάνουμε

$$H_2^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) \cong \ \operatorname{Ker}(H_1^{\text{sing.}}(k_A))$$

και

$$\begin{aligned} H_1^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) &\cong \ \operatorname{Coker}(H_1^{\text{sing.}}(k_A)) \cong \ \operatorname{Coker}(H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}})) \\ &= H_1^{\text{sing.}}(p(\partial\mathfrak{E}_{2g});\mathbb{Z}) / \operatorname{Im}(H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}})) \cong \mathbb{Z}^g / \operatorname{Im}(H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}})). \end{aligned}$$

Για την «ταξινόμηση» τής πεπερασμένως παραγόμενης αβελιανής ομάδας ($\mathbb{Z}$-μοδίου) $\mathbb{Z}^g / \operatorname{Im}(H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}}))$ (υπό την έννοια τού θεωρήματος 2.6.32) θα λάβουμε υπ' όψιν το λήμμα 7.6.11 και θα καταφύγουμε στην αναζήτηση τής αντίστοιχης *διευθετημένης μορφής Smith* (Smith normal form). Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε στη θέση τού ομομορφισμού $H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}})$ τού πλήρως καθοριζόμενου από την εικόνα τού γεννήτορα $w + B_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{2g};\mathbb{Z})$

$$H_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{2g};\mathbb{Z}) \ni w + B_1^{\text{sing.}}(\partial\mathfrak{E}_{2g};\mathbb{Z}) \xmapsto[H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}})]{} 2(\mathfrak{x}_1 + \cdots + \mathfrak{x}_g) \in H_1^{\text{sing.}}(p(\partial\mathfrak{E}_{2g});\mathbb{Z})$$

να θεωρήσουμε τον ομομορφισμό

$$h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^g, \ \ 1 \longmapsto 2(\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_g),$$

όπου[25]

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots\ldots, \ \mathbf{e}_g := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \ \operatorname{Mat}_{g\times 1}(\mathbb{Z}).$$

Θέτοντας

$$\mathbf{U} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \ \operatorname{GL}_g(\mathbb{Z}),$$

παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{U}\,(2(\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_g)) = 2\mathbf{e}_1.$$

Εξ αυτού συνάγεται ότι[26]

$$H_1^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^g / \operatorname{Im}(H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial\mathfrak{E}_{2g}})) \cong \mathbb{Z}^g / \operatorname{Im}(h) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

[25] Εάν το $2(\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_g)$ δεν ήταν η εικόνα τού 1 αλλά η εικόνα τού -1, το τελικό αποτέλεσμα δεν θα άλλαζε.

[26] Βλ. [12], Chapter 5, σελ. 289-340, [15], Ex. 16-19, σελ. 470-471, ή [17], Appendix of Chapter VII, σελ. 343-345.

Επιπροσθέτως,

$$\mathrm{Ker}(h) = \{\lambda \in \mathbb{Z} |\, h(\lambda) = \lambda h(1) = 0_{\mathbb{Z}^g}\} = \{\lambda \in \mathbb{Z} |\, 2\lambda(\mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_g) = 0_{\mathbb{Z}^g}\} = \{0\},$$

οπότε τόσον ο h όσον και οι $H_1^{\text{sing.}}(p|_{\partial \mathfrak{E}_{2g}})$ και $H_1^{\text{sing.}}(k_A)$ είναι μονομορφισμοί. Αυτό, λόγω τής ακριβείας τής MV-ακολουθίας, σημαίνει ότι $\mathfrak{D}_2 = 0$, απ' όπου έπεται ότι

$$H_2^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z}) \cong \{0\}$$

και ότι πλέον όλοι οι ισομορφισμοί (7.34) είναι αληθείς. □

7.6.13 Θεώρημα. *Για κάθε μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R, για κάθε $g \in \mathbb{N}$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = 0, \\ R^{g-1} \oplus (R/2R), & \text{όταν } n = 1, \\ \mathfrak{t}_2(R), & \text{όταν } n = 2, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1,2\}, \end{cases}} \tag{7.35}$$

όπου $2R := \{2r |\, r \in R\}$ και $\mathfrak{t}_2(R) := \{r \in R |\, 2r = 0_R\}$.

Απόδειξη. Το ότι τούτο είναι αληθές για $g = 1$ το γνωρίζουμε από το θεώρημα 7.6.10. Ας υποθέσουμε ότι $g \geqslant 2$. Επειδή ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ είναι Π.Κ.Ι., έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,

$$H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}}; R) \underset{(8.3),\, 8.1.3\,(\text{i})}{\cong} (H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z}); R).$$

Επειδή η $H_1^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z})$ είναι η μόνη ομάδα ιδιάζουσας ομολογίας τής $X_g^{\text{nonor.}}$ που δεν είναι ελεύθερη, αρκεί να εξετασθεί το τι συμβαίνει όταν $n \in \{1, 2\}$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} H_1^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}}; R) &\cong ((\mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} R) \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}; R)}_{\cong \{0\}} \\ &\underset{4.4.6}{\cong} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} R)^{g-1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} R) \\ &\underset{4.4.3}{\cong} R^{g-1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} R) \underset{4.5.11}{\cong} R^{g-1} \oplus (R/2R) \end{aligned}$$

και

$$H_2^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}}; R) \cong (\underbrace{H_2^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z})}_{\cong \{0\}} \otimes_{\mathbb{Z}} R) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\underbrace{H_1^{\text{sing.}}(X_g^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z})}_{\cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2}; R)$$

$$\cong \underbrace{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}; R)^{g-1}}_{\cong \{0\}} \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; R) \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}; R) \underset{5.3.21}{\cong} R[2] = \mathfrak{t}_2(R),$$

οπότε όλοι οι ισομορφισμοί (7.35) είναι αληθείς. □

7.7 ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ JORDAN ΚΑΙ BROUWER

Η τελευταία ενότητα τού παρόντος κεφαλαίου είναι αφιερωμένη στην απόδειξη τής γενικεύσεως 7.7.10 (*σε οιεσδήποτε διαστάσεις*) τού **κλασικού θεωρήματος καμπυλών τού Jordan** το οποίο μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: *Εάν* $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ *είναι μια τοπολογική εμφύτευση* (δηλαδή εάν η f απεικονίζει ομοιομορφικώς τον κύκλο $\mathbb{S}^1$ επί τής εικόνας $f(\mathbb{S}^1)$ αυτού μέσω τής f), *τότε το συμπλήρωμα* $\mathbb{R}^2 \smallsetminus f(\mathbb{S}^1)$ *διαθέτει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες* (το «εσωτερικό» [που είναι φραγμένο] και το «εξωτερικό» τής κλειστής καμπύλης $f(\mathbb{S}^1)$ [που είναι μη φραγμένο]) *με κοινή μεθόριό τους* (ήτοι *τοπολογικό σύνορό τους*) *την ίδια την* $f(\mathbb{S}^1)$. Εάν μια απλή κλειστή καμπύλη εντός τού $\mathbb{R}^2$ είναι αρκετά «περίπλοκη», ενδέχεται να δυσκολευόμαστε να δούμε το κατά πόσον κάποιο δοθέν σημείο ανήκει στο φραγμένο ή στο μη φραγμένο μέρος τού επιπέδου. Γι’ αυτόν και για άλλους τεχνικούς λόγους οι *αμιγώς γεωμετρικές αποδείξεις του* (καθώς και εκείνες τού ισχυρότερου θεωρήματος 7.7.11 τού Schoenflies) είναι αρκετά δύσκολες.

Το θεώρημα, παρότι περιγράφει ένα -από διαισθητική σκοπιά- αρκετά προφανές γεγονός, περιέχει μια βαθιά και ουσιαστική πληροφορία για το επίπεδο. Η πρώτη απόδειξη εδόθη από τον ίδιον τον Camille Jordan[27] το[28] 1887. Πολλοί πιστεύουν ότι εμπεριείχε σοβαρά λάθη[29]. (Μολαταύτα, ο Thomas C. Hales σε ένα άρθρο[30] τού 2007 επιχειρηματολογεί περί τού αντιθέτου.) Ακολούθησαν δημοσιεύσεις πολλών εσφαλμένων αποδείξεων γνωστών γεωμετρών. Μια (αναμφίβολα) ορθή από-

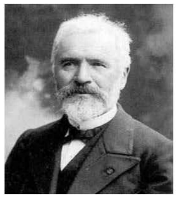
[27] Jordan, *Camille Marie Ennemond* (5/1/1838-21/1/1922). Γάλλος μαθηματικός. Καθηγητής τής École Polytechnique από το 1876 έως τη συνταξιοδότησή του το 1912. Πρόεδρος τής Γαλλικής Ακαδημίας των Επιστημών από το 1916. Διακρίθηκε για τις εργασίες του σε πάμπολλους ερευνητικούς τομείς, όπως εκείνους τής Γραμμικής Άλγεβρας (θεώρημα τής διευθετημένης μορφής Jordan), τής Θεωρίας Μετατάξεων και τής τότε αναπτυσσόμενης Θεωρίας των Ομάδων (θεώρημα Jordan-Hölder), τής Πραγματικής Αναλύσεως (διάσπαση κατά Jordan), τής Πιθανοθεωρίας κ.α. Βλ. Jour. Math. Pures Appl. **1** (1922), I-IV.

[28] C. Jordan: *Cours d’ Analyse de l’ Ecole Polytechnique*, Paris, 1887. (Δεύτερη έκδοση το 1893.)

[29] Βλ., π.χ., J.R. Kline: *What is the Jordan Curve Theorem?*, The American Math. Monthly **49**, no. 5, (1942), 281-286.

[30] T.C. Hales: *Jordan’s proof of the Jordan curve theorem*, Studies in Logic, Grammar and Rethoric, vol. **10**, no. 23, (2007), 45-60.

δειξη τού θεωρήματος εδόθη από τον Oswald Veblen[31] το έτος[32] 1905. Ακολούθησαν και άλλες, συνδυαστικής φύσεως, οι οποίες ήταν τεχνικώς απαιτητικές και μακροσκελείς. Έκτοτε έχουν προταθεί δεκάδες «απλοποιημένων» αποδείξεων. Ενδεικτικώς αναφέρονται οι *στοιχειώδεις* αποδείξεις των Filippov[33] και Tverberg[34], η απόδειξη τού Maehara[35] (που χρησιμοποιεί το θεώρημα C.5.2 σταθερού σημείου τού Brouwer), καθώς και οι αποδείξεις από τα βιβλία [41], σελ. 390-393, και [40], σελ. 129-149 (που κάνουν χρήση εργαλείων προερχομένων αποκλειστικώς από τη Γενική Τοπολογία).


C. Jordan


O. Veblen

Με τη βοήθεια τής ιδιάζουσας θεωρίας ομολογίας τόσον η κλασική μορφή τού θεωρήματος τού Jordan όσον και οι (μη τετριμμένες) γενικεύσεις αυτού εξάγονται κατά τρόπο άμεσο, *χωρίς* κανείς να είναι υποχρεωμένος να καταφύγει σε ad hoc γεωμετρικά επιχειρήματα. Ειδικότερα, το **θεώρημα διαχωρισμού** 7.7.10 **των Jordan και Brouwer**[36] βασίζεται ουσιωδώς στα «προπαρασκευαστικά» θεωρήματα 7.7.3 και 7.7.6, στις αποδείξεις των οποίων υπεισέρχονται ως κύρια τεχνικά μέσα *επαναληπτικές εφαρμογές κατάλληλων ακριβών ακολουθιών Mayer-Vietoris*.

7.7.1 Λήμμα. *Ας υποθέσουμε ότι X είναι ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος γράφεται ως ένωση $X = \mathrm{int}_X(X_1) \cup \mathrm{int}_X(X_2)$ των τοπολογικών εσωτερικών δυο υποχώρων του X_1, X_2 και ότι ως $i_\rho : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_\rho$, $\rho \in \{1,2\}$, συμβολίζονται οι φυσικές ενθέσεις. Εάν $x \in H_n^{\text{sing.}}(X_1 \cap X_2; \mathbb{Z})$ και $\widetilde{H}_{n+1}^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}_0$,*

---

[31] Veblen, *Oswald* (24/8/1880-10/8/1960). Αμερικανός μαθηματικός. Σπούδασε στα Πανεπιστήμια τής Iowa και τού Harvard. Εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή στο Πανεπιστήμιο τού Chicago υπό τον E.H. Moore (λαμβάνοντάς την το 1903). Δίδαξε στο Πανεπιστήμιο τού Princeton από το 1905 έως το 1932. Έκτοτε βοήθησε στην ουσιαστική αναβάθμιση τού «Ινστιτούτου Προκεχωρημένων Σπουδών» (I.A.S.) και υπήρξε ο πρώτος καθηγητής του (θέση που κράτησε μέχρι το 1950). Πασίγνωστος στη μαθηματική κοινότητα για τα συγγράμματά του και τις ερευνητικές εργασίες του επί τής Προβολικής Γεωμετρίας, επί τής Διαφορικής Γεωμετρίας και επί τής Τοπολογίας.

[32] O. Veblen: *Theory on Plane Curves in Non-Metrical Analysis Situs*, Transactions of the Americal Mathematical Society **6**, no. 1 (1905), 83-98.

[33] A.F. Filippov: *An elementary proof of Jordan's theorem*, Uspekhi Mat. Nauk **5**, (1950), 173-176.

[34] H. Tverberg: *A proof of the Jordan curve theorem*, Bulletin of the London Math. Society, **12**, no. **1**, (1980), 34-38.

[35] R. Maehara: *The Jordan curve theorem via the Brouwer fixed point theorem*, The American Math. Monthly **91**, no. 10, (1984), 641-643.

[36] Οι αρχικές εργασίες τού L.E.J. Brouwer επ' αυτού είναι οι: *Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum*, Mathematische Annalen **71** (1911), 314-319, και *Über Jordansche Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen **71** (1911), 320-327. Η απόδειξη που δίδεται εδώ αποτελεί μια εκσυγχρονισμένη «αμιγώς ομολογική» εκδοχή τής αποδείξεως που εδόθη από τον J.W. Alexander στο άρθρο του *A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem*, Transactions of the American Mathematical Society **23**, No. 4 (1922), 333-349, καθώς και εκείνης τού άρθρου τού J. Leray υπό τον τίτλο: *La théorie des points fixes et ses applications en Analyse*, Proc. Int. Congress Math., Cambridge 1950, Vol. **2**, pp. 202-208.

τότε

$$x = 0_{H_n^{\text{sing.}}(X_1 \cap X_2;\mathbb{Z})} \Longleftrightarrow [\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_1)(x) = 0_{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(X_1;\mathbb{Z})} \text{ και } \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_2)(x) = 0_{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(X_2;\mathbb{Z})}].$$

Αποδειξη. Η ανηγμένη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris 7.2.4 (ii) για την εκτμητική τριάδα (X, X_1, X_2) (ως προς την $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$, πρβλ. 7.2.2 (i))

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \underbrace{\widetilde{H}_{n+1}^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})}_{\cong\{0\}} \arrow[r] & \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(X_1 \cap X_2;\mathbb{Z}) \arrow[dll, "(\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_1),\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_2))"'] \\
\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(X_1;\mathbb{Z}) \oplus \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(X_2;\mathbb{Z}) \arrow[r] & \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

μας πληροφορεί ότι ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $(\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_1), \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_2))$ είναι *μονομορφισμός*. Επομένως, ισχύει $x = 0_{H_n^{\text{sing.}}(X_1\cap X_2;\mathbb{Z})}$ εάν και μόνον εάν έχουμε $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_1)(x) = 0_{H_n^{\text{sing.}}(X_1;\mathbb{Z})}$ *και ταυτοχρόνως* $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_2)(x) = 0_{H_n^{\text{sing.}}(X_2;\mathbb{Z})}$. □

Ένα δεύτερο, σημαντικό λήμμα που θα χρειασθούμε είναι το ακόλουθο:

7.7.2 Λήμμα. *Έστω ότι X είναι ένας τοπολογικός χώρος ο οποίος γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση $X = \bigcup_{k=0}^{\infty} X_k$ (μιας ακολουθίας) υποχώρων του $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ με $X_k \subseteq X_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, και ότι οι $\lambda_k : X_k \hookrightarrow X$, $\mu_k : X_k \hookrightarrow X_{k+1}$ είναι οι φυσικές ενθέσεις. Εάν κάθε συμπαγής υπόχωρος A τού X περιέχεται σε κάποιον X_k, τότε η κλάση υπολοίπων*

$$y + B_n^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) \in H_n^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) \;\; \textit{ενός} \;\; y \in Z_n^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})$$

είναι μηδενική (ήτοι $y \in B_n^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})$) εάν και μόνον εάν υπάρχουν

$$\ell \in \mathbb{N}_0 \;\; \textit{κα} \;\; y' + B_n^{\text{sing.}}(X_\ell;\mathbb{Z}) \in H_n^{\text{sing.}}(X_\ell;\mathbb{Z}), \;\; y' \in Z_n^{\text{sing.}}(X_\ell;\mathbb{Z}),$$

ούτως ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$H_n^{\text{sing.}}(\lambda_\ell)(y' + B_n^{\text{sing.}}(X_\ell;\mathbb{Z})) = S_n(\lambda_\ell)(y') + B_n^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) = y + B_n^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})$$

και

$$\begin{aligned} H_n^{\text{sing.}}(\mu_\ell)(y' + B_n^{\text{sing.}}(X_\ell;\mathbb{Z})) &= S_n(\mu_\ell)(y') + B_n^{\text{sing.}}(X_{\ell+1};\mathbb{Z}) \\ &= B_n^{\text{sing.}}(X_{\ell+1};\mathbb{Z}) = 0_{H_n^{\text{sing.}}(X_{\ell+1};\mathbb{Z})}. \end{aligned}$$

Αποδειξη. "$\Longleftarrow$" Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$ σχηματίζεται το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X_k \arrow[ur, hook, "\lambda_k"] \arrow[rr, hook, "\mu_k"'] \arrow[rr, phantom, bend left=40, "\circlearrowleft"] & & X_{k+1} \arrow[ul, hook', "\lambda_{k+1}"']
\end{tikzcd}$$

Εάν, λοιπόν, οι ανωτέρω ισότητες ισχύουν για κάποιον $\ell \in \mathbb{N}_0$, τότε

$$\begin{aligned} y + B_n^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) &= H_n^{\text{sing.}}(\lambda_\ell)(y' + B_n^{\text{sing.}}(X_\ell;\mathbb{Z})) \\ &= (H_n^{\text{sing.}}(\lambda_{\ell+1}) \circ H_n^{\text{sing.}}(\mu_\ell))(y' + B_n^{\text{sing.}}(X_\ell;\mathbb{Z})) \\ &= H_n^{\text{sing.}}(\lambda_{\ell+1})(0_{H_n^{\text{sing.}}(X_{\ell+1};\mathbb{Z})}) = 0_{H_n^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})}. \end{aligned}$$

"$\Longrightarrow$" Ας υποθέσουμε ότι $y \in B_n^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) := \operatorname{Im}(d_{X,n+1}^{\text{sing.}})$. Εάν θεωρήσουμε $S_n(X;\mathbb{Z}) \ni y = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i\sigma_i$, όπου $\nu \in \mathbb{N}$, $\xi_i \in \mathbb{Z}$ και $\sigma_i : \Delta_n \longrightarrow X$ ιδιάζοντα n-μονόπλοκα για κάθε $i \in \{1, ..., \nu\}$, τότε υπάρχει κάποια ιδιάζουσα $(n+1)$-αλυσίδα

$$\sum_{j=1}^{\nu'} \xi_j'\tau_j \in S_{n+1}(X;\mathbb{Z}), \text{ όπου } \nu' \in \mathbb{N}, \text{ με } d_{X,n+1}^{\text{sing.}}\left(\sum_{j=1}^{\nu'} \xi_j'\tau_j\right) = y.$$

Έστω[37] $A := (\bigcup_{i=1}^{\nu} \sigma_i(\Delta_n)) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\nu'} \tau_j(\Delta_{n+1})\right) = \bigcup_{j=1}^{\nu'} \tau_j(\Delta_{n+1})$. Επιλέγουμε αρκούντως μεγάλον $\ell \in \mathbb{N}_0$, τέτοιο ώστε να ισχύει ο εγκλεισμός: $A \subseteq X_\ell$. Εάν γράψουμε

$$\sigma_i = \lambda_\ell \circ \sigma_i', \text{ όπου } \sigma_i' : \Delta_n \longrightarrow X_\ell \text{ κάποιο ιδιάζον } n\text{-μονόπλοκο εντός τού } X_\ell,$$

$$\tau_j = \lambda_\ell \circ \tau_j', \text{ όπου } \tau_j' : \Delta_{n+1} \longrightarrow X_\ell \text{ κάποιο ιδιάζον } (n+1)\text{-μονόπλοκο εντός τού } X_\ell,$$

για κάθε $(i,j) \in \{1, ..., \nu\} \times \{1, ..., \nu'\}$ και θέσουμε

$$y' := \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i\sigma_i' \in S_n(X_\ell;\mathbb{Z}) \ \text{ και } \ z := \sum_{j=1}^{\nu'} \xi_j'\tau_j' \in S_{n+1}(X_\ell;\mathbb{Z}),$$

τότε $y' \in Z_n^{\text{sing.}}(X_\ell;\mathbb{Z})$, διότι

$$d_{X_\ell,n}^{\text{sing.}}(y') = d_{X_\ell,n}^{\text{sing.}}(S_n(\lambda_\ell)(y)) = S_{n-1}(\lambda_\ell)(d_{X_\ell,n}^{\text{sing.}}(y)) = S_{n-1}(\lambda_\ell)(0_{S_{n-1}(X_\ell;\mathbb{Z})}) = 0_{S_{n-1}(X;\mathbb{Z})},$$

και $H_n^{\text{sing.}}(\lambda_\ell)(y' + B_n^{\text{sing.}}(X_\ell;\mathbb{Z})) = y + B_n^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})$. Επιπροσθέτως,

$$(d_{X_{\ell+1},n+1}^{\text{sing.}} \circ S_{n+1}(\mu_\ell))(z) = (S_n(\mu_\ell) \circ d_{X_\ell,n+1}^{\text{sing.}})(z) = S_n(\mu_\ell)(y') \in B_n^{\text{sing.}}(X_{\ell+1};\mathbb{Z}),$$

όπου $B_n^{\text{sing.}}(X_{\ell+1};\mathbb{Z}) = 0_{H_n^{\text{sing.}}(X_{\ell+1};\mathbb{Z})}$. □

7.7.3 Θεώρημα. *Εάν $k, d \in \mathbb{N}_0$, $k \leqslant d$, τότε για οιαδήποτε τοπολογική εμφύτευση $f : \mathbb{B}^k \hookrightarrow \mathbb{S}^d$ έχουμε*

$$\boxed{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{B}^k);\mathbb{Z}) \cong \{0\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Επειδή $\mathbb{B}^k \approx \mathbf{I}^k$ (όπου $\mathbf{I} := [0,1]$), αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbf{I}^k);\mathbb{Z}) \cong \{0\}$ για κάθε $n \geqslant 0$. Θα χρησιμοποιηθεί μαθηματική επαγωγή επί τού k. Για $k = 0$, το $\mathbf{I}^0$ (και, κατ' επέκταση, και η εικόνα του $f(\mathbf{I}^0)$) είναι ένας μονοσημειακός χώρος, οπότε $\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbf{I}^0) \simeq \mathring{\mathbb{B}}^d$ (βλ. (B.1)) και για κάθε $n \geqslant 0$,

$$\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbf{I}^k);\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathring{\mathbb{B}}^d;\mathbb{Z}) \cong \{0\},$$

[37] Η τελευταία ισότητα ισχύει, διότι $\bigcup_{i=1}^{\nu} \sigma_i(\Delta_n) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\nu'} \tau_j(\Delta_{n+1})$.

διότι το κύτταρο $\mathring{\mathbb{B}}^d$ είναι συσταλτό. (Βλ. εδ. B.5.6 (v) και C.3.4 (ii).) Εν συνεχεία υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για $0 \leqslant k < k_0$, όπου k_0 κάποιος *παγιωμένος* φυσικός αριθμός ανήκων στο σύνολο $\{1, ..., d\}$. Έστω $f : \mathbf{I}^{k_0} \hookrightarrow \mathbb{S}^d$ μια τοπολογική εμφύτευση. Θέτοντας

$$A_0 := \mathbf{I}^{k_0},\ \ B_1 := \mathbf{I}^{k_0-1} \times [0, \tfrac{1}{2}],\ \ B_2 := \mathbf{I}^{k_0-1} \times [\tfrac{1}{2}, 1],$$

έχουμε $A_0 = B_1 \cup B_2$ και $B_1 \cap B_2 = \mathbf{I}^{k_0-1} \times \{\frac{1}{2}\} \approx \mathbf{I}^{k_0-1}$, και από την ενριπτικότητα τής f έπεται ότι

$$\mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_1 \cap B_2) = (\mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_1)) \cup (\mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_2)).$$

Η ανηγμένη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris 7.2.4 (ii) για την εκτμητική τριάδα $(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbf{I}^{k_0-1}), \mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_1), \mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_2))$ (ως προς την $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$) δίδει (ένεκα τής επαγωγικής υποθέσεώς μας)

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbf{I}^{k_0-1}); \mathbb{Z})}_{\cong \{0\}} \longrightarrow \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_0); \mathbb{Z})$$
$$\xrightarrow{(\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_1), \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_2))} \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_1); \mathbb{Z}) \oplus \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_2); \mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbf{I}^{k_0-1}); \mathbb{Z})}_{\cong \{0\}} \to \cdots$$

όπου $i_\rho : \underbrace{(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_1)) \cap (\mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_2))}_{= \mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_0)} \hookrightarrow \mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_\rho), \rho \in \{1, 2\}$, οι φυσικές ενθέσεις. Επομένως ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων $(\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_1), \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_2))$ είναι *ισομορφισμός*. Ας υποθέσουμε ότι $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_0); \mathbb{Z}) \ncong \{0\}$. Έστω x ένα μη μηδενικό στοιχείο τής αβελιανής ομάδας $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_0); \mathbb{Z})$. Τότε (σύμφωνα με το λήμμα 7.7.1) είτε $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_1)(x) \neq 0_{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_1); \mathbb{Z})}$ είτε $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_2)(x) \neq 0_{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_2); \mathbb{Z})}$. Ας υποθέσουμε (δίχως βλάβη τής γενικότητας) ότι $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(i_1)(x) \neq 0_{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_1); \mathbb{Z})}$. Θέτουμε $A_1 := B_1$, υποδιαιρούμε το A_1 γράφοντάς το ως ένωση των

$$B_{1,1} := \mathbf{I}^{k_0-1} \times [0, \tfrac{1}{4}] \ \text{ και } \ B_{1,2} := \mathbf{I}^{k_0-1} \times [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}]$$

(όπως είχαμε διχοτομήσει προηγουμένως τον δεύτερο παράγοντα τού A_0) και κατόπιν εκ νέου εφαρμογής τής ανηγμένης ακριβούς ακολουθίας των Mayer και Vietoris 7.2.4 (ii) (ως προς την $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$) διαπιστώνουμε ότι η εικόνα τού x είτε εντός τής $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_{1,1}); \mathbb{Z})$ είτε εντός τής $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(B_{1,2}); \mathbb{Z})$ είναι διάφορη τού μηδενός. Συνεχίζοντας αυτήν τη διαδικασία, κατασκευάζουμε διαδοχικώς μια ακολουθία υποχώρων

$$A_0 \supsetneqq A_1 \supsetneqq A_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq A_{k-1} \supsetneqq A_k \supsetneqq \cdots \ \text{ τού } \ \mathbf{I}^{k_0}$$

με τις εξής ιδιότητες:

(i) $A_\infty := \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} A_k = \mathbf{I}^{k_0-1} \times \{a\} \approx \mathbf{I}^{k_0-1}$, για κάποιο $a \in \mathbf{I}$.

(ii) $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(j_k)(x) \neq 0_{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_k);\mathbb{Z})}$, όπου $j_k : \mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_0) \hookrightarrow \mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_k)$ η φυσική ένθεση. Λαμβάνοντας υπ' όψιν και τις λοιπές φυσικές ενθέσεις

$$\lambda_k : \mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_k) \hookrightarrow \mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_\infty), \ \ \mu_k : \mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_k) \hookrightarrow \mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_{k+1}),$$

σχηματίζουμε για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$ το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_{k+1}) \arrow[dr, hook, "\lambda_{k+1}"] & \\
\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_0) \arrow[ur, hook, "j_{k+1}"] \arrow[rr, hook, "\lambda_0"] \arrow[dr, hook, "j_k"'] & & \mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_\infty) = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_k)) \\
& \mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_k) \arrow[uu, "\mu_k"] \arrow[ur, hook, "\lambda_k"'] &
\end{tikzcd}$$

στο οποίο $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\underbrace{\mu_k \circ j_k}_{=j_{k+1}})(x) \neq 0_{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_{k+1});\mathbb{Z})}$ (λόγω τής (ii)), $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Έστω Γ ένα συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_\infty) = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} (\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_k))$. Επειδή το $\mathfrak{U} := \left\{ (\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_k)) \cap \Gamma \,\middle|\, k \in \mathbb{N}_0 \right\}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα τού Γ, το Γ διαθέτει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα αποτελούμενο από στοιχεία τού $\mathfrak{U}$ και, ως εκ τούτου, υπάρχει $k_\bullet \in \mathbb{N}_0$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\Gamma \subseteq \mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_{k_\bullet})$, καθόσον έχουμε τον εγκλεισμό $\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_k) \subseteq \mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_{k+1})$ για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$.
(iv) $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\lambda_0)(x) = 0_{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_\infty);\mathbb{Z})}$, διότι (από την επαγωγική μας υπόθεση)

$$\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_\infty);\mathbb{Z}) \underset{\text{(i)}}{\cong} \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbf{I}^{k_0-1});\mathbb{Z}) \cong \{0\}.$$

Προφανώς,

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\lambda_k)(\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(j_k)(x)) = \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\lambda_k)(x) \text{ και} \\ \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mu_k)(\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(j_k)(x)) = \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(j_{k+1})(x) \underset{\text{(ii)}}{\neq} 0_{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_{k+1});\mathbb{Z})}. \end{array} \right\} \tag{7.36}$$

Εν συνεχεία, εφαρμόζουμε (λόγω των ιδιοτήτων (ii) και (iii)) το λήμμα 7.7.2 (θέτοντας το συμπλήρωμα $\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_\infty)$ στη θέση τού εκεί παρατεθέντος X, το Γ στη θέση τού εκεί παρατεθέντος A, το $\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_k)$ στη θέση τού εκεί παρατεθέντος X_k και την κλάση ομολογίας $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\lambda_0)(x) \in \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_\infty);\mathbb{Z})$ στη θέση τής εκεί συμβολιζόμενης ως $y + B_n^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})$). Επειδή $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(j_k)(x) \neq 0_{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_k);\mathbb{Z})}$ (δυνάμει τής (7.36)) *για κάθε* $k \in \mathbb{N}_0$, συμπεραίνουμε ότι $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\lambda_0)(x) \neq 0_{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_\infty);\mathbb{Z})}$, κάτι που *αντίκειται* στην ανωτέρω ιδιότητα (iv)! Άρα τελικώς

$$\{0\} \cong \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(A_0);\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbf{I}^{k_0});\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{B}^{k_0});\mathbb{Z})$$

για κάθε $n \geqslant 0$. □

7.7.4 Πόρισμα. *Εάν $k, d \in \mathbb{N}_0$, $k \leqslant d$, τότε για οιαδήποτε τοπολογική εμφύτευση $f : \mathbb{B}^k \hookrightarrow \mathbb{S}^d$ το συμπλήρωμα $\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{B}^k)$ είναι χώρος δρομοσυνεκτικός.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα 7.7.3,

$$\widetilde{H}_0^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{B}^k); \mathbb{Z}) \cong \{0\} \underset{\text{C.3.2 (iii)}}{\Longrightarrow} H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{B}^k); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

οπότε το $\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{B}^k)$ είναι χώρος δρομοσυνεκτικός βάσει τού πορίσματος D.2.24. □

7.7.5 Πόρισμα. *Εάν $k, d \in \mathbb{N}_0$, $k \leqslant d$ και $d \geqslant 2$, τότε για κάθε τοπολογική εμφύτευση $f : \mathbb{B}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ έχουμε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d \smallsetminus f(\mathbb{B}^k); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n \in \{0, d-1\}, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, d-1\}. \end{cases}}$$

Απόδειξη. Η στερεογραφική προβολή (βλ. εδ. B.1.3 (iv)),

$$p_{\text{st.}} : \mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_+\} \longrightarrow \mathbb{R}^d, \;\; p_{\text{st.}}(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) := \left(\frac{x_1}{1 - x_{d+1}}, \ldots, \frac{x_d}{1 - x_{d+1}} \right),$$

η οποία απεικονίζει κάθε σημείο $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_+\}$ στο σημείο τομής τής ευθείας τής διερχομένης από τον βόρειο πόλο P_+ και το $\mathbf{x}$ με το υπερεπίπεδο

$$\mathbb{R}^d \approx \{(x_1, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_{d+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{d+1},$$

είναι ομοιομορφισμός, με αντίστροφό της την $p_{\text{st.}}^{-1} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_+\}$ την οριζόμενη μέσω τού τύπου:

$$\mathbb{R}^d \ni (y_1, \ldots, y_d) = \mathbf{y} \mapsto p_{\text{st.}}^{-1}(\mathbf{y}) := \left(\frac{2y_1}{1 + ||\mathbf{y}||^2}, \ldots, \frac{2y_d}{1 + ||\mathbf{y}||^2}, \frac{||\mathbf{y}||^2 - 1}{1 + ||\mathbf{y}||^2} \right).$$

Η $p_{\text{st.}}^{-1}$ απεικονίζει την $f(\mathbb{B}^k)$ ομοιομορφικώς επί μιας μπάλας $p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)) \subsetneqq \mathbb{S}^d$ με $P_+ \notin p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k))$. Θεωρούμε την εξής ακολουθία:

$$\begin{aligned} & H_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d, \{P_-\}; \mathbb{Z}) \xrightarrow[\text{(i)}]{\cong} H_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_+\}; \mathbb{Z}) \\ & \xrightarrow[\text{(ii)}]{\cong} H_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)), \mathbb{S}^d \smallsetminus (p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)) \cup \{P_+\}); \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{n+1}^{\text{sing.}}} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus (p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)) \cup \{P_+\}); \mathbb{Z}) \\ & \xrightarrow[\text{(iii)}]{\cong} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d \smallsetminus f(\mathbb{B}^k); \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

με τον ομομορφισμό (i) ισομορφισμό διότι το $\{P_-\}$ αποτελεί παραμορφωτική σύμπτυξη τού $\mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_+\}$ (βλ. εδ. B.5.6 (v) και B.5.21), με τον (ii) ισομορφισμό λόγω τού αξιώματος $\boxed{\textbf{ES-A3}}$ τής εκτομής (που ισχύει για την $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$), με τον (iii) ισομορφισμό λόγω τού ότι η $p_{\text{st.}}$ είναι ομοιομορφισμός και με

$$H_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d, \{P_-\}; \mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n = d-1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{d-1\}. \end{cases}$$

Διαχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:
Περίπτωση πρώτη. Για $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ η μακρά ακριβής ακολουθία τού τοπολογικού ζεύγους $(\mathbb{S}^d \smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)), \mathbb{S}^d \smallsetminus (p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)) \cup \{P_+\}))$ δίδει

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{H_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)); \mathbb{Z})}_{\cong \{0\}} \longrightarrow H_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)), \mathbb{S}^d \smallsetminus (p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)) \cup \{P_+\}); \mathbb{Z})$$
$$\xrightarrow{\partial_{n+1}^{\text{sing.}} = \partial_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)), \mathbb{S}^d \smallsetminus (p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)) \cup \{P_+\}))} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus (p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)) \cup \{P_+\}); \mathbb{Z}) \longrightarrow \underbrace{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)); \mathbb{Z})}_{\cong \{0\}} \to \cdots$$

όπου τα "$\cong \{0\}$" έπονται από το θεώρημα 7.7.3 και το (ii) τής σημειώσεως C.3.2. Αυτή δηλοί ότι ο $\partial_{n+1}^{\text{sing.}}$ είναι ισομορφισμός, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής βάσει των προαναφερθέντων.

Περίπτωση δεύτερη. Εάν $n = 0$, τότε $d - 1 > 0 \Rightarrow \partial_1^{\text{sing.}} = 0$ (από την πρώτη ακολουθία, καθόσον $H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d, \{P_-\}; \mathbb{Z}) \cong \{0\}$), απ' όπου έπεται ότι ο ομομορφισμός

$$\underbrace{H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus (p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)) \cup \{P_+\}); \mathbb{Z})}_{\text{μη τετριμμένος ελεύθερος } \mathbb{Z}\text{-μόδιος}} \longrightarrow H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k); \mathbb{Z}) \underset{7.7.3}{\cong} \mathbb{Z}$$

είναι *μονομορφισμός* και

$$H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus (p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k)) \cup \{P_+\}); \mathbb{Z}) \cong H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d \smallsetminus f(\mathbb{B}^k); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

και η απόδειξη λήγει εδώ. □

7.7.6 Θεώρημα. *Εάν $k \in \mathbb{N}_0, d \in \mathbb{N}$, $k < d$, τότε για κάθε τοπολογική εμφύτευση $f : \mathbb{S}^k \hookrightarrow \mathbb{S}^d$ έχουμε*

$$\boxed{\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^k); \mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^{d-k-1}; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n = d-k-1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{d-k-1\}. \end{cases}}$$

Απόδειξη. Θα γίνει χρήση μαθηματικής επαγωγής επί τού k. Για $k = 0$ έχουμε[38] $\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^0) \approx \mathbb{R}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\} \simeq \mathbb{S}^{d-1}$, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. Υποθέτουμε εφεξής ότι $k \geqslant 1$ και ότι αυτός είναι αληθής και για $k-1$. Θέτοντας $U_+ := \mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}_+^k)$ και $U_- := \mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}_-^k)$ έχουμε

$$U_+ \cap U_- = \mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^k) \quad \text{και} \quad U_+ \cup U_- = \mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^{k-1}).$$

Η ανηγμένη ακριβής ακολουθία των Mayer και Vietoris 7.2.4 (ii) για την εκτμητική τριάδα $(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^{k-1}), U_+, U_-)$ (ως προς την $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$), όπου

$$U_+ \approx U_- \approx \mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{B}^k)$$

(βλ. εδ. B.1.3 (iv)), γράφεται ως εξής:

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{H}_{n+1}^{\text{sing.}}(U_+; \mathbb{Z}) \oplus \widetilde{H}_{n+1}^{\text{sing.}}(U_-; \mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{H}_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^{k-1}); \mathbb{Z})$$
$$\longrightarrow \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^k); \mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(U_+; \mathbb{Z}) \oplus \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(U_-; \mathbb{Z}) \to \cdots$$

[38] Βλ. εδ. B.5.18.

Επειδή $\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(U_+;\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(U_-;\mathbb{Z}) \underset{7.7.3}{\cong} \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, λαμβάνουμε

$$\widetilde{H}_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^{k-1});\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n+1 = d-k, \\ \{0\}, & \text{όταν } n+1 \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{d-k\}, \end{cases}$$

όπου ο τελευταίος ισομορφισμός προέρχεται από την επαγωγική υπόθεση. □

7.7.7 Σημείωση. Προφανώς, διατηρώντας τά δεδομένα τού θεωρήματος 7.7.6 λαμβάνουμε

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n \in \{0, d-k-1\} \text{ και } d \geqslant k+2, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{όταν } n = 0 \text{ και } d = k+1, \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

(Πρβλ. C.3.2 (i) και (ii).)

7.7.8 Θεώρημα. *Εάν $k \in \mathbb{N}_0$, $d \in \mathbb{N}$, $k \leqslant d-1$ και $d \geqslant 2$, τότε για κάθε τοπολογική εμφύτευση $f : \mathbb{S}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ έχουμε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } \begin{cases} n = k = 0, \\ n = d-k-1 \text{ και } 1 \leqslant k \leqslant d-2, \text{ ή} \\ n = d-1 \text{ και } 1 \leqslant k \leqslant d-1, \end{cases} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{όταν } \begin{cases} n = 0 \text{ και } k = d-1, \text{ ή} \\ n = d-1 \text{ και } k = 0, \end{cases} \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

Απόδειξη. Αυτή είναι παρόμοια τής αποδείξεως τού πορίσματος 7.7.5. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\begin{aligned} & H_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d, \{P_-\};\mathbb{Z}) \xrightarrow[\text{(i)}]{\cong} H_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_+\};\mathbb{Z}) \\ & \xrightarrow[\text{(ii)}]{\cong} H_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{S}^k)), \mathbb{S}^d \smallsetminus (p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{S}^k)) \cup \{P_+\});\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{n+1}^{\text{sing.}}} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \smallsetminus (p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{S}^k)) \cup \{P_+\});\mathbb{Z}) \\ & \xrightarrow[\text{(iii)}]{\cong} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

όπου οι ομομορφισμοί (i), (ii) και (iii) είναι ισομορφισμοί και

$$H_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d, \{P_-\};\mathbb{Z}) \cong \widetilde{H}_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n = d-1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{d-1\}, \end{cases}$$

καθώς και τη μακρά ακριβή ακολουθία τού $(\mathbb{S}^d\smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{S}^k)), \mathbb{S}^d\smallsetminus(p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{S}^k))\cup\{P_+\}))$,

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d\smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{S}^k));\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d\smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{S}^k)), \mathbb{S}^d\smallsetminus(p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{S}^k))\cup\{P_+\});\mathbb{Z})$$

$$\xrightarrow{\partial_{n+1}^{\text{sing.}}=\partial_{n+1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d\smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{S}^k)),\mathbb{S}^d\smallsetminus(p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{S}^k))\cup\{P_+\}))} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d\smallsetminus(p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{S}^k))\cup\{P_+\});\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d\smallsetminus p_{\text{st.}}^{-1}(f(\mathbb{S}^k));\mathbb{Z}) \to \cdots$$

και διαχωρίζουμε έξι περιπτώσεις:

Περίπτωση πρώτη. Εάν $n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{-1,0,d-k-2,d-k-1\}$ και $k\geqslant 1$, τότε ο $\partial_{n+1}^{\text{sing.}}$ είναι *ισομορφισμός*, οπότε

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d\smallsetminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z}) \cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d,\{P_-\};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n=d-1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{d-1\}. \end{cases}$$

Περίπτωση δεύτερη. Εάν $n=d-k-1$ και $1\leqslant k\leqslant d-2$, τότε ο ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\underbrace{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d\smallsetminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z})}_{\text{μη τετριμμένος ελεύθερος } \mathbb{Z}\text{-μόδιος}} \longrightarrow H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d\smallsetminus p_{\text{στ.}}^{-1}(f(\mathbb{B}^k);\mathbb{Z}) \underset{7.7.3}{\cong} \mathbb{Z}$$

είναι *μονομορφισμός*, οπότε $H_{d-k-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d\smallsetminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$.

Περίπτωση τρίτη. Εάν $n=k=0$, τότε η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία δίδει

$$\{0\}\longrightarrow H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d\smallsetminus f(\mathbb{S}^0);\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}\longrightarrow\{0\}.$$

Περίπτωση τέταρτη. Εάν $n=0$ και $k=d-1$, τότε η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία δίδει $\{0\}\longrightarrow H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d\smallsetminus f(\mathbb{S}^{d-1});\mathbb{Z})\xrightarrow{\cong}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\longrightarrow\{0\}$.

Περίπτωση πέμπτη. Εάν $n=d-1$ και $k=0$, τότε η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία καθίσταται *διασπώμενη* βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\}\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow H_{d-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d\smallsetminus f(\mathbb{S}^0);\mathbb{Z})\xrightarrow{\cong}\mathbb{Z}\longrightarrow\{0\},$$

οπότε (σύμφωνα με το θεώρημα 3.1.29) $H_{d-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d\smallsetminus f(\mathbb{S}^0);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

Περίπτωση έκτη. Είναι άμεσος ο έλεγχος για n,k,d που δεν εμπίπτουν στις περιπτώσεις 1-5 ότι $H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^d\smallsetminus f(\mathbb{S}^k);\mathbb{Z})\cong\{0\}$. □

7.7.9 Λήμμα. *Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και A ένας συνεκτικός υπόχωρός του, ο οποίος περιέχει τόσον εσωτερικά όσον και εξωτερικά σημεία ενός $B\subseteq X$, τότε $A\cap\operatorname{frnt}_X(B)\neq\varnothing$.*

Απόδειξη. Εάν υποθέσουμε ότι $A\cap\operatorname{frnt}_X(B)=\varnothing$, τότε τα (ξένα μεταξύ τους) σύνολα $\operatorname{int}_X(B)$ και $\operatorname{int}_X(X\smallsetminus B)$ καλύπτουν τον υπόχωρο A με τα $\operatorname{int}_X(B)\cap A$ και $\operatorname{int}_X(X\smallsetminus B)\cap A$ ανοικτά, μη κενά υποσύνολα τού A. Ως εκ τούτου, το

$$A=(\operatorname{int}_X(B)\cap A)\coprod(\operatorname{int}_X(X\smallsetminus B)\cap A)$$

είναι μη συνεκτικό. Άτοπο! □

7.7.10 Θεώρημα («Θεώρημα διαχωρισμού των Jordan και Brouwer»). *Εάν* $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$, *και εάν* $f : \mathbb{S}^{d-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^d$ (*και αντιστοίχως,* $f : \mathbb{S}^{d-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$) *είναι μια τοπολογική εμφύτευση, τότε ισχύουν τα εξής*:

(i) *Το συμπλήρωμα* $\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^{d-1})$ (*και αντιστοίχως, το συμπλήρωμα* $\mathbb{R}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^{d-1})$) *διαθέτει ακριβώς δύο δρομοσυνεκτικές συνιστώσες* U *και* V.

(ii) *Οι* U *και* V *είναι ανοικτές και η σφαίρα* $f(\mathbb{S}^{d-1})$ *αποτελεί την κοινή μεθόριό τους.*

Απόδειξη. (i) Τούτο έπεται άμεσα από το πόρισμα D.2.24 και από τη σημείωση 7.7.7 (και αντιστοίχως, από το θεώρημα 7.7.8).

(ii) Ως ανοικτός υπόχωρος τού X (όπου $X = \mathbb{S}^d$ και $X = \mathbb{R}^d$, αντιστοίχως) το συμπλήρωμα $X \smallsetminus f(\mathbb{S}^{d-1})$ είναι τοπικώς δρομοσυνεκτικό[39], οπότε οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες του U και V είναι ανοικτές[40].

• *Ισχυρισμός πρώτος*: $\mathrm{frnt}_X(U) \cup \mathrm{frnt}_X(V) \subseteq f(\mathbb{S}^{d-1})$. Επειδή οι U και V είναι ανοικτές, έχουμε $\mathrm{frnt}_X(U) \cap U \neq \varnothing$ και $\mathrm{frnt}_X(V) \cap V \neq \varnothing$ (διότι αλλιώς θα είχαμε $U \cap V \neq \varnothing$, καθότι η V είναι ανοικτή, πράγμα άτοπο). Επειδή

$$X = U \coprod V \coprod f(\mathbb{S}^{d-1}),$$

έχουμε $\mathrm{frnt}_X(U) \subseteq f(\mathbb{S}^{d-1})$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των U και V και χρησιμοποιώντας τήν ίδια επιχειρηματολογία δείχνουμε ότι $\mathrm{frnt}_X(V) \subseteq f(\mathbb{S}^{d-1})$. Άρα ο ισχυρισμός είναι αληθής.

• *Ισχυρισμός δεύτερος*: $f(\mathbb{S}^{d-1}) \subseteq \mathrm{frnt}_X(U) \cap \mathrm{frnt}_X(V)$. Έστω $x \in f(\mathbb{S}^{d-1})$ και έστω W μια ανοικτή περιοχή τού x εντός τού X. Η $(d-1)$-σφαίρα $f(\mathbb{S}^{d-1})$ γράφεται ως ένωση

$$f(\mathbb{S}^{d-1}) = f(\mathbb{S}_+^{d-1}) \cup f(\mathbb{S}_-^{d-1})$$

δυο $(d-1)$-μπαλών (καθότι $\mathbb{S}_+^{d-1} \approx \mathbb{S}_-^{d-1} \approx \mathbb{B}^{d-1}$, βλ. B.1.3 (iv)), οι οποίες μπορούν να επιλεγούν κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να ισχύει $x \in f(\mathbb{S}_+^{d-1}) \subseteq f(\mathbb{S}^{d-1}) \cap W$ (αφού η τομή $f(\mathbb{S}^{d-1}) \cap W$ είναι ανοικτή εντός τής εικόνας $f(\mathbb{S}^{d-1})$). Θεωρούμε έναν δρόμο $\beta : \mathbf{I} \longrightarrow X$ με σημείο αφετηρίας ανήκον στην U, σημείο απολήξεως ανήκον στην V και $\mathrm{Im}(\beta) \cap f(\mathbb{S}_-^{d-1}) = \varnothing$. (Σημειωτέον ότι το

$$X \smallsetminus f(\mathbb{S}_-^{d-1}) \approx X \smallsetminus f(\mathbb{B}^{d-1})$$

είναι χώρος δρομοσυνεκτικός επί τη βάσει των πορισμάτων 7.7.4 και 7.7.5.) Επειδή το συνεκτικό σύνολο $\mathrm{Im}(\beta) (= \beta(\mathbf{I}))$ περιέχει τόσον εσωτερικά όσον και εσωτερικά σημεία τής U, το λήμμα 7.7.9 μας πληροφορεί ότι $\beta(\mathbf{I}) \cap \mathrm{frnt}_X(U) \neq \varnothing$. Έστω τυχόν $y \in \beta(\mathbf{I}) \cap \mathrm{frnt}_X(U)$. Προφανώς,

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{frnt}_X(U) \subseteq f(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \mathrm{Im}(\beta) \cap f(\mathbb{S}_-^{d-1}) = \varnothing \end{array}\right\} \Longrightarrow y \in f(\mathbb{S}_+^{d-1}) \Longrightarrow y \in W.$$

[39]Ένας τοπολογικός χώρος καλείται **τοπικώς δρομοσυνεκτικός** (locally pathwise connected) όταν διαθέτει μια βάση αποτελούμενη από δρομοσυνεκτικά υποσύνολα.

[40]Εάν X είναι ένας τοπικώς δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος, τότε κάθε δρομοσυνεκτική του συνιστώσα είναι ανοικτή, οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες του ταυτίζονται με τις συνεκτικές συνιστώσες του, ενώ ο X είναι συνεκτικός *εάν και μόνον εάν* είναι δρομοσυνεκτικός. Βλ., π.χ., McCleary [40], σελ. 77-80, Munkres [41], Chapter 3, §25, σελ. 159-162, και Willard [43], Chapter 8, §27, σελ. 197-202.

Επομένως για κάθε ανοικτή περιοχή W οιουδήποτε θεωρούμενου $x \in f(\mathbb{S}^{d-1})$ ισχύει $\mathrm{frnt}_X(U) \cap W \neq \varnothing$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in U$, διότι το $\mathrm{frnt}_X(U)$ είναι κλειστό. Άρα $f(\mathbb{S}^{d-1}) \subseteq \mathrm{frnt}_X(U)$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των U και V και χρησιμοποιώντας τήν ίδια επιχειρηματολογία δείχνουμε ότι $f(\mathbb{S}^{d-1}) \subseteq \mathrm{frnt}_X(V)$. Κατά συνέπειαν,

$$f(\mathbb{S}^{d-1}) \subseteq \mathrm{frnt}_X(U) \cap \mathrm{frnt}_X(V).$$

Από τα ανωτέρω έπονται άμεσα οι ισότητες $f(\mathbb{S}^{d-1}) = \mathrm{frnt}_X(U) = \mathrm{frnt}_X(V)$. □

Για $d = 2$ οι πληροφορίες μας για τη φύση των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών U και V (των συμπληρωμάτων στη διατύπωση τού θεωρήματος 7.7.10) καθίστανται διεξοδικότερες μέσω τού εξής θεωρήματος[41] τού Schoenflies[42]:

7.7.11 Θεώρημα («Θεώρημα Schoenflies»). (i) *Εάν $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2$ είναι μια τοπολογική εμφύτευση, τότε υπάρχει ομοιομορφισμός $h : \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\approx} \mathbb{S}^2$, τέτοιος ώστε να ισχύει*

$$h|_{f(\mathbb{S}^1)} : f(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\approx} h(f(\mathbb{S}^1)) \approx \mathbb{S}^1$$

και

$$\left\{ \begin{array}{l} h|_U : U \xrightarrow{\approx} h(U) \approx \mathrm{int}_{\mathbb{S}^2}(\mathbb{S}^2_+) \approx \mathring{\mathbb{B}}^2, \\ h|_V : V \xrightarrow{\approx} h(V) \approx \mathrm{int}_{\mathbb{S}^2}(\mathbb{S}^2_-) \approx \mathring{\mathbb{B}}^2. \end{array} \right\}$$

(ii) *Εάν $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ είναι μια τοπολογική εμφύτευση, τότε υπάρχει ομοιομορφισμός*

$$h : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^2,$$

τέτοιος ώστε να ισχύει

$$h|_{f(\mathbb{S}^1)} : f(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\approx} h(f(\mathbb{S}^1)) \approx \mathbb{S}^1$$

και με την μία εκ των δύο δρομοσυνεκτικών συνιστωσών (U και V) τού συμπληρώματος $\mathbb{R}^2 \setminus f(\mathbb{S}^1)$ ομοιομορφική με ένα 2-κύτταρο ($\approx \mathring{\mathbb{B}}^2$) και την άλλη ομοιομορφική με το $\mathring{\mathbb{B}}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

---

[41] Βλ. A. Schoenflies: *Beiträge zur Theorie der Punktmengen* III, Mathematische Annalen **62** (1906), 286–328.
Για τοπολογικές αποδείξεις βλ.

• D.H. Hall & G.I. Spencer: *Elementary Topology*, J. Wiley & Sons, 1955.

• E.E. Moise: *Geometric Topology in Dimension* 2 *and* 3, Graduate Texts in Math., Vol. **47**, Springer-Verlag, 1977, §9.

• M.H.A. Newman: *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge Un. Press, 1939; reprinted in 1964.

Για αποδείξεις που χρησιμοποιούν το περιώνυμο «θεώρημα απεικονίσεως τού Riemann» (που συναντούμε στις παραδόσεις μαθημάτων Μιγαδικής Αναλύσεως) βλ.

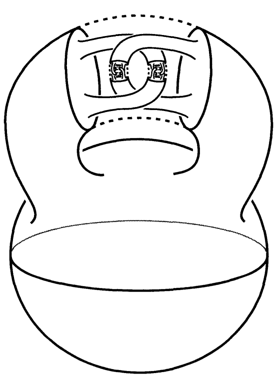
• Z. Nechari: *Conformal Mapping*, McGraw-Hill, 1952.

• Ch. Pommerenke: *Boundary Behaviour of Conformal Maps,* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **299**, Springer-Verlag, 1992.

[42] Schoenflies, *Arthur Moritz* (17/4/1853-27/5/1928). Γερμανός μαθηματικός εβραϊκής καταγωγής. Σπούδασε στο Βερολίνο (1870-1875) και εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό τον E.E. Kummer. Με πρωτοβουλία τού F. Klein έγινε ο πρώτος καθηγητής «Εφαρμοσμένων Μαθηματικών» στη Γερμανία το 1892. Από το 1899 έως το 1911 διετέλεσε καθηγητής τού Πανεπιστημίου τού Königsberg και κατόπιν (από το 1914 έως το 1922) καθηγητής τού τότε νεοϊδρυθέντος Πανεπιστημίου τής Φρανκφούρτης. Γνωστά ερευνητικά του αποτελέσματα άπτονται θεμάτων προερχομένων από την Υψηλοδιάστατη Γεωμετρία, την Κρυσταλλογραφία και τη Συνολοθεωρία.

7.7.12 Σημείωση. Το θεώρημα 7.7.11 τού Schoenflies *δεν* επιδέχεται *άμεση* γενίκευση σε διαστάσεις $d \geqslant 3$. Είναι πασίγνωστο το παράδειγμα τής **κερασφόρου σφαίρας** (horned sphere) S τού Alexander[43] (που δημοσιεύθηκε το[44] 1924) με $\mathbb{S}^2 \approx \mathsf{S} \subsetneqq \mathbb{R}^3$ και συμπλήρωμα $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \mathsf{S}$, η μη φραγμένη δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού οποίου *δεν* είναι απλά συνεκτική (και, ως εκ τούτου, μη ομοιομορφική με το $\mathring{\mathbb{B}}^3 \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$). Η κατασκευή του γίνεται ως εξής: Έστω $X_0 \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^2$ ο στερεός τόρος ο σχηματιζόμενος από μια μπάλα B_0 (εντός τού $\mathbb{R}^3$) ύστερα από προσάρτηση μιας χειρολαβής $\mathbf{I} \times \mathbb{B}^2$ κατά μήκος τού $\partial \mathbf{I} \times \mathbb{B}^2$. Στο σχήμα που ακολουθεί αυτή η χειρολαβή εικονογραφείται ως ένωση δύο «κεράτων», τα οποία έχουν προσαρτηθεί στη μπάλα, μαζί με μια κοντύτερη χειρολαβή υποδηλούμενη μέσω διακεκομμένων γραμμών. Εν συνεχεία θεωρούμε τον χώρο $X_1 \subsetneqq X_0$ που προκύπτει ύστερα από αφαίρεση ενός τμήματος τής κοντύτερης χειρολαβής, ούτως ώστε αυτό που μένει να είναι ένα ζεύγος αρθρωτών χειρολαβών που προσαρτώνται στη μπάλα $\mathsf{B}_1 := \mathsf{B}_0 \cup \{\text{τα δύο κέρατα}\}$. Κατόπιν διαδοχικής επαναλήψεως τής ανωτέρω διαδικασίας (αποσύνθεση καθεμιάς των χειρολαβών τού προηγούμενου βήματος σε δύο κέρατα και μιας κοντύτερης χειρολαβής, αφαίρεση αυτής τής χειρολαβής κ.ο.κ.) κατασκευάζουμε μια ακολουθία (συμπαγών) τοπολογικών υποχώρων

$$X_0 \supsetneqq X_1 \supsetneqq X_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq X_{k-1} \supsetneqq X_k \supsetneqq \cdots \text{ τού } \mathbb{R}^3 \text{ με } X := \bigcap_{k=0}^{\infty} X_k \approx \mathbb{B}^3.$$



Εν προκειμένω, ο X_k είναι μια μπάλα B_k με 2^k προσαρτηθείσες χειρολαβές, όπου η B_k προκύπτει από την B_{k-1} ύστερα από προσάρτηση 2^k κεράτων. Υπάρχουν ομοιομορφισμοί $h_k : \mathsf{B}_{k-1} \longrightarrow \mathsf{B}_k$, οι οποίοι μακριά από μια περιοχή τού $\mathsf{B}_k \smallsetminus \mathsf{B}_{k-1}$

[43] Alexander, *James Weddel* (19/9/1888-23/9/1971). Αμερικανός μαθηματικός. Σπούδασε στο Princeton, στο Παρίσι και στη Μπολόνια. Το 1928 αναγορεύθηκε καθηγητής τού Πανεπιστημίου τού Princeton και λίγο αργότερα και τού «Ινστιτούτου Προκεχωρημένων Σπουδών» (I.A.S.). Συνέβαλε σημαντικά (μαζί με τους Oswald Veblen και Solomon Lefschetz) στην προ τού Β′ Παγκοσμίου Πολέμου ανάπτυξη τής θεωρίας τής Αλγεβρικής Τοπολογίας. (Θεώρημα δυϊσμού κατά Alexander, ιδιότητα τού ομοτοπικώς αναλλοιώτου των μονοπλεκτικών ομάδων ομολογίας, εισαγωγή -από κοινού με τον I. Gordon το 1936- τού λεγομένου «κυαθώδους γινομένου» (cup product), πολυώνυμο Alexander στη Θεωρία Κόμπων κ.ά.) Για περισσότερες πληροφορίες βλ. I.M. James: *Portrait of Alexander* (1888-1971), Bulletin of the American Mathematical Society **38** (2001), no. 2, 123-129.

[44] J.W. Alexander: *An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. **10**, no. 1, (1924), 8-10.

είναι ταυτοτικοί. Καθώς το k τείνει στο άπειρο, η σύνθεση $h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_1$ προσεγγίζει μια απεικόνιση $f : \mathsf{B}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, η οποία είναι συνεχής (διότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη). Το σύνολο των σημείων τής B_0, στο οποίο η f δεν ισούται με την $h_k \circ h_{k-1} \circ \cdots \circ h_1$ (για αρκούντως μεγάλους k) είναι ένα *σύνολο τού Cantor,* η εικόνα τού οποίου (μέσω τής f) είναι η τομή όλων των παρεμβληθεισών χειρολαβών. Αποδεικνύεται ότι η f είναι ενριπτική, οπότε (λόγω τής συμπάγειας τού B_0) επάγει έναν ομοιομορφισμό $\mathsf{B}_0 \xrightarrow{\approx} f(\mathsf{B}_0) =: \mathsf{B} \subsetneqq \mathbb{R}^3$. Η κερασφόρος σφαίρα S ορίζεται ως το σύνορο $\mathsf{S} := \partial\mathsf{B} = f(\partial\mathsf{B}_0)$ τής μπάλας B. Για μια (αδρή) περιγραφή τού τρόπου αποδείξεως τού ότι η μη φραγμένη δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{R}^3 \smallsetminus \mathsf{S}$ δεν είναι απλά συνεκτική, βλ. Hatcher [68], σελ. 171.

(ii) Για μια κινηματογραφική αναπαράσταση τής κατασκευής τής S στον $\mathbb{R}^3$ βλ. στη διαδικτυακή διεύθυνση: https://www.youtube.com/watch?v=Pe2mnrLUYFU.

(iii) Για ανάλογα (αντι)παραδείγματα εμφυτεύσεων $(d-1)$-σφαιρών στον $\mathbb{R}^d$ ή στην $\mathbb{S}^d$, $d \geqslant 3$, βλ. T.B. Rushing: *Topological Embeddings*, Academic Press, 1973, και R.J. Daverman & G.A. Venema: *Embeddings in Manifolds*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **106**, American Mathematical Society, 2009.


A. M. Schoenflies


J. W. Alexander

Εάν στην $\mathbb{S}^{d-1}$ προσθέσουμε ένα «διπλό κολάρο» (δηλαδή, εάν θεωρήσουμε το $\mathbb{S}^{d-1} \times [-1,1]$), τότε υπάρχει μια γενίκευση τού θεωρήματος 7.7.11.

7.7.13 Θεώρημα («Γενικευμένο θεώρημα τού Schoenflies»/B. Mazur, M. Morse και M. Brown, 1959-60). *Εάν $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$, και εάν $f : \mathbb{S}^{d-1} \times [-1,1] \hookrightarrow \mathbb{S}^d$ είναι μια τοπολογική εμφύτευση, τότε η κλειστή θήκη καθεμιάς εκ των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών τού συμπληρώματος $\mathbb{S}^d \smallsetminus f(\mathbb{S}^{d-1} \times \{0\})$ είναι ομοιομορφική με την $\mathbb{B}^d$.*

Απόδειξη. Βλ. Bredon [57], Theorem V.19.11, σελ. 236-239. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Βασικές εφαρμογές τού θεωρήματος τού Künneth

Το τελευταίο κεφάλαιο τού κύριου μέρους τής εργασίας είναι δομημένο ως ακολούθως: Στην §8.1 δίδεται το *τοπολογικό θεώρημα καθολικών συντελεστών* (τόσον για μοδίους ομολογίας όσον και για μοδίους συνομολογίας) και εξηγείται το πώς αποκτώνται οι *ομομορφισμοί Bockstein* μέσω αυτού. Στην §8.2 δίδεται διεξοδική απόδειξη τού *θεωρήματος των Eilenberg και Zilber*, καθώς και κάποιες γενικεύσεις του σε επίπεδο τοπολογικών ζευγών. Στην ενότητα 8.3 παρατίθενται (υπό γενικές συνθήκες και με αποδείξεις στηριζόμενες εν μέρει και σε προεργασία που έχει λάβει χώρα στο κεφάλαιο 6) διάφορες *αμιγώς τοπολογικές* εκδοχές τού θεωρήματος τού Künneth (ως προς την *ιδιάζουσα* θεωρία ομολογίας επί τής ευρύτερης δυνατής κατηγορίας *όλων* των τοπολογικών ζευγών). Τέλος, η §8.4 περιέχει πληθώρα συγκεκριμένων παραδειγμάτων, απτών υπολογισμών και εφαρμογών που έχουν ως στόχο να αναδείξουν τη χρησιμότητα τού θεωρήματος τού Künneth στο πλέον κλασικό του περιβάλλον.

8.1 ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΘΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

8.1.1 Ορισμός. Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος και έστω M ένας R-μόδιος. Ορίζουμε (υιοθετώντας τούς συμβολισμούς τής §D.2) ως n-**οστό μόδιο ιδιάζουσας ομολογίας τού** (X, A) **με συντελεστές ειλημμένους από τον** M τον R-μόδιο

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X, A; M) := H_n(S_\bullet(X, A; R); M) \underset{(6.1.1)}{:=} H_n(S_\bullet(X, A; R) \otimes_R M)}$$

και για $A = \varnothing$ ως n-**οστό μόδιο ιδιάζουσας ομολογίας τού** X **με συντελεστές**

ειλημμένους από τον M τον R-μόδιο

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X;M) := H_n(S_\bullet(X;R);M) :\underset{(6.1.1)}{=} H_n(S_\bullet(X;R)\otimes_R M).}$$

8.1.2 Θεώρημα («Τοπολογικό θεώρημα καθολικών συντελεστών για την ιδιάζουσα ομολογία»). *Έστω (X,A) ένα τοπολογικό ζεύγος και έστω M ένας R-μόδιος.*

(i) *Εάν* $\mathrm{Tor}_1^R(B_n^{\text{sing.}}(X,A;R),M) \cong \{0\} \cong \mathrm{Tor}_1^R(Z_n^{\text{sing.}}(X,A;R),M), \forall n \in \mathbb{Z}$, *τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\{0\} \longrightarrow H_n^{\text{sing.}}(X,A;R)\otimes_R M \xrightarrow{\psi_n} H_n^{\text{sing.}}(X,A;M) \xrightarrow{\varphi_n} \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;R),M) \longrightarrow \{0\}. \tag{8.1}$$

(ii) *Εάν, συν τοις άλλοις, ο $B_n^{\text{sing.}}(X,A;R)$ είναι προβολικός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε η* (8.1) *είναι διασπώμενη, οπότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X,A;M) \cong \Big(H_n^{\text{sing.}}(X,A;R)\otimes_R M\Big) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;R),M).} \tag{8.2}$$

Ιδιαιτέρως, όταν $A = \varnothing$ αυτός ο ισομορφισμός απλουστεύεται ως ακολούθως:

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X;M) \cong \Big(H_n^{\text{sing.}}(X;R)\otimes_R M\Big) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}^{\text{sing.}}(X;R),M).} \tag{8.3}$$

Αποδειξη. Έπεται κατόπιν εφαρμογής τού αντίστοιχου αλγεβρικού θεωρήματος καθολικών συντελεστών 6.1.4 για το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet = S_\bullet(X,A;R)$. □

8.1.3 Παρατήρηση. (i) Όταν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι Π.Κ.Ι., οι υπομόδιοι $B_n^{\text{sing.}}(X,A;R)$ και $Z_n^{\text{sing.}}(X,A;R)$ τού ελεύθερου R-μοδίου $S_n(X,A;R)$ είναι *ελεύθεροι* (λόγω τού θεωρήματος 2.5.47) και, ως εκ τούτου, προβολικοί. (Βλ. πρόταση 4.2.4.) Άρα *τόσον* οι συνθήκες[1] 8.1.2 (i):

$$\mathrm{Tor}_1^R(B_n^{\text{sing.}}(X,A;R),M) \cong \{0\} \cong \mathrm{Tor}_1^R(Z_n^{\text{sing.}}(X,A;R),M),\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

όσον και οι συνθήκες 8.1.2 (ii) (ήτοι η προβολικότητα των $B_n^{\text{sing.}}(X,A;R)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$) *ικανοποιούνται αυτομάτως*, οπότε υφίσταται πάντοτε ισομορφισμός (8.2). Εν τοιαύτη περιπτώσει, το πρώτο γινόμενο στρέψεως $\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;R),M)$ είναι (μέχρις ισομορφισμού) εύκολα υπολογίσιμο, υπό την προϋπόθεση ότι αμφότεροι οι R-μόδιοι $H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;R)$ και M είναι *πεπερασμένως παραγόμενοι*. (Βλ. θεώρημα 5.3.17.)

(ii) Εάν ο R είναι Π.Κ.Ι. και είτε ο M είτε ο $H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;R)$ στερείται στρέψεως, έχουμε

$$H_n^{\text{sing.}}(X,A;M) \cong H_n^{\text{sing.}}(X,A;R)\otimes_R M. \tag{8.4}$$

(iii) Ιδιαιτέρως, όταν ο R είναι ένα *σώμα*, $\mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;R),M) \cong \{0\}$ (βλ. εδ. 4.5.32 και 5.3.11), οπότε υφίσταται ισομορφισμός (8.4).

[1] Αρκεί η εφαρμογή τού λήμματος 5.3.11.

8.1.4 Παράδειγμα. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι για τις (συνήθεις) ομάδες (ήτοι $\mathbb{Z}$-μόδιους) ιδιάζουσας ομολογίας τού d-διάστατου πραγματικού προβολικού χώρου $\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}}$ ισχύει

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν είτε } n=0 \text{ είτε } (n=d \text{ με τον } n \text{ περιττό}), \\ \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } n\in\{0,\dots,d-1\} \text{ και } n\equiv 1(\operatorname{mod} 2), \\ \{0\}, & \text{όταν είτε } n<0 \text{ είτε } n>d \text{ είτε } n\equiv 0(\operatorname{mod} 2), \end{cases} \tag{8.5}$$

διαπιστώνουμε (για $M=\mathbb{Q}$) μέσω τού (8.4) ότι

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}};\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{όταν είτε } n=0 \text{ είτε } (n=d \text{ με τον } n \text{ περιττό}), \\ \{0\}, & \text{αλλιώς}, \end{cases} \tag{8.6}$$

(λόγω των ισομορφισμών $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\cong\{0\}$) και (για $M=\mathbb{Z}_2$)

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } n\in\{0,\dots,d\}, \\ \{0\}, & \text{αλλιώς}, \end{cases} \tag{8.7}$$

(λόγω των ισομορφισμών $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_2\cong\mathbb{Z}_2$). Το ότι το "$\cong$" στην (8.6) (και αντιστοίχως, το "$\cong$" στην (8.7)) δεν δηλοί μόνον ισομορφισμούς $\mathbb{Z}$-μοδίων αλλά *και* ισομορφισμούς $\mathbb{Q}$-διανυσματικών χώρων (και αντιστοίχως, $\mathbb{Z}_2$-διανυσματικών χώρων) απορρέει από τη *φυσικότητα* των απεικονίσεων ψ_n και φ_n στην (8.1).

8.1.5 Ορισμός. Έστω (X,A) ένα τοπολογικό ζεύγος και έστω M ένας R-μόδιος. Ορίζουμε ως n-**οστό μόδιο ιδιάζουσας συνομολογίας τού** (X,A) **με συντελεστές ειλημμένους από τον** M τον R-μόδιο

$$\boxed{H^n_{\text{sing.}}(X,A;M) := H^n(S_\bullet(X,A;R);M) \underset{6.1.9}{:=} H^n(\operatorname{Hom}_R(S_\bullet(X,A;R),M))}$$

και για $A=\varnothing$ ως n-**οστό μόδιο ιδιάζουσας συνομολογίας τού** X **με συντελεστές ειλημμένους από τον** M τον R-μόδιο

$$\boxed{H^n_{\text{sing.}}(X;M) := H^n(S_\bullet(X;R);M) \underset{6.1.9}{:=} H^n(\operatorname{Hom}_R(S_\bullet(X;R),M)).}$$

8.1.6 Θεώρημα («Τοπολογικό θεώρημα καθολικών συντελεστών για την ιδιάζουσα συνομολογία I»). *Έστω (X,A) ένα τοπολογικό ζεύγος και έστω M ένας R-μόδιος.*

(i) *Εάν $\operatorname{Ext}^1_R(B_n^{\text{sing.}}(X,A;R),M)\cong\{0\}\cong\operatorname{Ext}^1_R(Z_n^{\text{sing.}}(X,A;R),M), \forall n\in\mathbb{Z}$, τότε για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\{0\}\longrightarrow \operatorname{Ext}^1_R(H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;R),M)\xrightarrow{\varphi_n} H^n_{\text{sing.}}(X,A;M)\xrightarrow{\psi_n}\operatorname{Hom}_R(H_n^{\text{sing.}}(X,A;R),M)\longrightarrow\{0\}. \tag{8.8}$$

(ii) *Εάν ο R είναι κληρονομικός, τότε η (8.8) είναι διασπώμενη, οπότε*

$$\boxed{H^n_{\text{sing.}}(X,A;M)\cong\Big(\operatorname{Hom}_R(H_n^{\text{sing.}}(X,A;R),M)\Big)\oplus\operatorname{Ext}^1_R(H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;R),M).} \tag{8.9}$$

Ιδιαιτέρως, όταν $A = \varnothing$ αυτός ο ισομορφισμός απλουστεύεται ως ακολούθως:

$$\boxed{H^n_{\text{sing.}}(X; M) \cong \Big(\text{Hom}_R(H_n^{\text{sing.}}(X; R), M)\Big) \oplus \text{Ext}^1_R(H_{n-1}^{\text{sing.}}(X; R), M).} \tag{8.10}$$

Απόδειξη. Έπεται κατόπιν εφαρμογής τού αντίστοιχου αλγεβρικού θεωρήματος καθολικών συντελεστών 6.1.10 για το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet = S_\bullet(X, A; R)$. □

8.1.7 Παρατήρηση. (i) Όταν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι Π.Κ.Ι., οι υπομόδιοι $B_n^{\text{sing.}}(X, A; R)$ και $Z_n^{\text{sing.}}(X, A; R)$ τού ελεύθερου R-μοδίου $S_n(X, A; R)$ είναι *ελεύθεροι* (λόγω τού θεωρήματος 2.5.47) και, ως εκ τούτου, προβολικοί. (Βλ. πρόταση 4.2.4.) Άρα *τόσον* οι συνθήκες[2] 8.1.6 (i):

$$\text{Ext}^1_R(B_n^{\text{sing.}}(X, A; R), M) \cong \{0\} \cong \text{Ext}^1_R(Z_n^{\text{sing.}}(X, A; R), M), \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

όσον η συνθήκη 8.1.6 (ii) (ήτοι η κληρονομικότητα τού R) *ικανοποιούνται αυτομάτως*, οπότε υφίσταται πάντοτε ισομορφισμός (8.9). Εν τοιαύτη περιπτώσει, το πρώτο γινόμενο επεκτάσεως $\text{Ext}^1_R(H_{n-1}^{\text{sing.}}(X, A; R), M)$ είναι (μέχρις ισομορφισμού) εύκολα υπολογίσιμο, υπό την προϋπόθεση ότι αμφότεροι οι R-μόδιοι $H_{n-1}^{\text{sing.}}(X, A; R)$ και M είναι *πεπερασμένως παραγόμενοι*. (Βλ. θεώρημα 5.2.16.)

(ii) Εάν ο R είναι ένα *σώμα*, τότε[3] $\text{Ext}^1_R(H_{n-1}^{\text{sing.}}(X, A; R), M) \cong \{0\}$ και

$$H^n_{\text{sing.}}(X, A; M) \cong \text{Hom}_R(H_n^{\text{sing.}}(X, A; R), M).$$

(iii) Ιδιαιτέρως, όταν $A = \varnothing$, ο $\text{Hom}_R(H_n^{\text{sing.}}(X; R), M)$ είναι πεπερασμένως παραγόμενος και για $M = R \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, λαμβάνουμε

$$\dim_{\mathbb{R}}(H^n_{\text{sing.}}(X; \mathbb{R})) = \dim_{\mathbb{Q}}(H^n_{\text{sing.}}(X; \mathbb{Q})) = \dim_{\mathbb{Q}}(H_n^{\text{sing.}}(X; \mathbb{Q})) = \dim_{\mathbb{R}}(H_n^{\text{sing.}}(X; \mathbb{R})).$$

8.1.8 Πρόταση. *Εάν (X, A) είναι ένα τοπολογικό ζεύγος και*

$$\{0\} \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία μοδίων ομολογίας

$$\boxed{\cdots \to H_n^{\text{sing.}}(X, A; L) \to H_n^{\text{sing.}}(X, A; M) \to H_n^{\text{sing.}}(X, A; N) \to H_{n-1}^{\text{sing.}}(X, A; L) \to \cdots}$$

και μια μακρά ακριβής ακολουθία μοδίων συνομολογίας

$$\boxed{\cdots \to H^n_{\text{sing.}}(X, A; L) \to H^n_{\text{sing.}}(X, A; M) \to H^n_{\text{sing.}}(X, A; N) \to H^{n+1}_{\text{sing.}}(X, A; L) \to \cdots}$$

Απόδειξη. Επειδή ο R-μόδιος $S_n(X, A; R)$ είναι ελεύθερος (και, κατ' επέκταση, προβολικός και ισόπεδος) για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η επαγόμενη βραχεία ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}_\bullet \to S_\bullet(X, A; R) \otimes_R L \to S_\bullet(X, A; R) \otimes_R M \to S_\bullet(X, A; R) \otimes_R N \to \mathbf{0}_\bullet$$

[2] Αρκεί η εφαρμογή τού θεωρήματος 5.2.11.

[3] Βλ. εδ. 4.2.24 (i) και θεώρημα 5.2.13.

και η επαγόμενη βραχεία ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}^\bullet \to \mathrm{Hom}_R(S_\bullet(X,A;R),L) \to \mathrm{Hom}_R(S_\bullet(X,A;R),M) \to \mathrm{Hom}_R(S_\bullet(X,A;R),N) \to \mathbf{0}^\bullet$$

είναι ακριβείς. (Βλ. πρόταση 4.5.17 και θεώρημα 4.2.7.) Αρκεί λοιπόν για αυτές να θεωρήσουμε τις επαγόμενες *μακρές* ακριβείς ακολουθίες ομολογίας και συνομολογίας, αντιστοίχως. (Βλ. θεωρήματα 3.2.13 και 3.2.30.) □

8.1.9 Σημείωση. Οι συνδετικοί ομομορφισμοί

$$H_n^{\text{sing.}}(X,A;N) \longrightarrow H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;L) \text{ και } H^n_{\text{sing.}}(X,A;N) \longrightarrow H^{n+1}_{\text{sing.}}(X,A;L)$$

των ανωτέρω κατασκευασθεισών μακρών ακριβών ακολουθιών καλούνται, ιδιαιτέρως, **ομομορφισμοί τού Bockstein**[4].

(i) Για $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}_k \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{k^2} \overset{g}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}$$

(βλ. 3.1.3 (iii)) δίδει ομομορφισμούς Bockstein

$$H_n^{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{Z}_k) \longrightarrow H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{Z}_k) \text{ και } H^n_{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{Z}_k) \longrightarrow H^{n+1}_{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{Z}_k),$$

οι οποίοι χρησιμοποιούνται (συνήθως για $A = \varnothing$ και για *πρώτους* αριθμούς k) για την κατασκευή[5] των *τετραγώνων τού Steenrod* και των *αλγεβρών τού Steenrod*.

(ii) Για $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{k\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\} \tag{8.11}$$

(βλ. 3.1.3 (iv)) δίδει ομομορφισμούς Bockstein

$$H_n^{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{Z}_k) \longrightarrow H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{Z}) \text{ και } H^n_{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{Z}_k) \longrightarrow H^{n+1}_{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{Z}).$$

(iii) Οι βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \{0\} \text{ και } \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C} \twoheadrightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}$$

δίδουν ομομορφισμούς Bockstein

$$H_n^{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{Z}),\ \ H^n_{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n+1}_{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{Z})$$

και

$$H_n^{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{Z}),\ \ H^n_{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{C}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{n+1}_{\text{sing.}}(X,A;\mathbb{Z}),$$

οι οποίοι χρησιμοποιούνται (συνήθως για $A = \varnothing$) τόσο για την κατασκευή των *δευτερευουσών χαρακτηριστικών κλάσεων* όσον και για τη δόμηση τής λεγομένης *Συνομολογίας τού Deligne*.

[4] Προς τιμήν τού Ρώσου τοπολόγου Mejer Felixowitsch Bockstein (4/10/1913-2/5/1990) που τους πρωτοεισήγαγε κατά τα μέσα τής δεκαετίας τού 1940. Βλ., ιδιαιτέρως, M. Bockstein: *Sur la formule des coefficients universels pour les groupes d'homologie*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique **247** (1958), 396-398.

[5] Βλ. Bredon [57], σελ. 181, prob. 7-8, σελ. 334, prob. 4-5, σελ. 338, σελ. 363, §IV15-16, σελ. 404-420, Davis & Kirk [59], §10.5, σελ. 288-295, Hatcher [68], §3.E, σελ. 303-310 και σελ. 489, Spanier [86], σελ. 280-281, Switzer [88], 10.5, σελ. 174, 18.2, σελ. 443-448 και 18.21, σελ. 455-457.

8.1.10 Παράδειγμα. Θεωρώντας τή βραχεία ακριβή ακολουθία (8.11) για $k = 2$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν τους ισομορφισμούς (8.5) για τις (συνήθεις) ομάδες (ήτοι $\mathbb{Z}$-μόδιους) ιδιάζουσας ομολογίας τού d-διάστατου πραγματικού προβολικού χώρου $\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}}$, *επανακτούμε* τους ισομορφισμούς (8.7) για την $H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_2)$, αλλ' αυτή τη φορά μέσω τής αντίστοιχης μακράς ακριβούς ακολουθίας τής κατασκευασθείσας στην πρόταση 8.1.8.

Το θεώρημα 8.1.6 διασυνδέει μοδίους ιδιάζουσας συνομολογίας με μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας. Μια διαφορετική εκδοχή του, στην οποία υπεισέρχονται *μόνον* μόδιοι ιδιάζουσας συνομολογίας, είναι η εξής:

8.1.11 Θεώρημα («Τοπολογικό θεώρημα καθολικών συντελεστών για την ιδιάζουσα συνομολογία II»). *Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος και έστω M ένας R-μόδιος. Εάν $n \in \mathbb{Z}$ και υποτεθεί ότι ο R είναι κληρονομικός και ναιτεριανός, και ότι ο $H^n_{\text{sing.}}(X, A; R)$ είναι πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος, τότε υφίσταται διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\{0\} \to H^n_{\text{sing.}}(X, A; R) \otimes_R M \longrightarrow H^n_{\text{sing.}}(X, A; M) \longrightarrow \text{Tor}_1^R(H^{n+1}_{\text{sing.}}(X, A; R), M) \to \{0\}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, οπότε

$$\boxed{H^n_{\text{sing.}}(X, A; M) \cong (H^n_{\text{sing.}}(X, A; R) \otimes_R M) \oplus \text{Tor}_1^R(H^{n+1}_{\text{sing.}}(X, A; R), M).}$$

Αποδειξη. Έπεται άμεσα από το θεώρημα 6.3.22 όταν αυτό (υπό την τετράδα συνθηκών **B**) εφαρμοσθεί στην ειδική περίπτωση κατά την οποία ο εκεί δοθείς M (και αντιστοίχως, ο εκεί δοθείς N) είναι ο R (και αντιστοίχως, ο M) το εκεί παρατεθέν $\mathbf{C}_\bullet$ είναι το $S_\bullet(X, A; R)$, οπότε

$$H^n(\mathbf{C}_\bullet; R) := H^n(\text{Hom}_R(S_\bullet(X, A; R), R)_\bullet) = H^n(S^\bullet(X, A; R)) =: H^n_{\text{sing.}}(X, A; R),$$

και το εκεί παρατεθέν $\mathbf{D}_\bullet$ έχει ως μέλη τετριμμένους R-μοδίους όταν $n \neq 0$ και[6] $D_0 := R$. □

8.2 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ EILENBERG ΚΑΙ ZILBER

Ενώ, όπως ήδη διαπιστώθηκε, τα τοπολογικά θεωρήματα καθολικών συντελεστών (για τη θεωρία ιδιάζουσας ομολογίας) έπονται *άμεσα* από τα αντίστοιχα αλγεβρικά, *δεν* συμβαίνει το ίδιο και με τις τοπολογικές εκδοχές τού θεωρήματος τού Kunneth. Απαιτείται η διαμεσολάβηση τού λεγομένου *θεωρήματος*[7] *των Eilenberg και Zilber*[8], μέσω τού οποίου, για το καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ δοθέντων τοπολογικών χώρων

[6] Εν προκειμένω, $H^0(\mathbf{D}_\bullet; M) := H^0(\text{Hom}_R(\mathbf{D}_\bullet, M)^\bullet) = \text{Hom}_R(\underbrace{D_0}_{=R}, M) \underset{4.1.2}{\cong} M$.

[7] Βλ. S. Eilenberg & J.A. Zilber: *On products of complexes*, American Journal of Mathematics **75** (1953), 200-204.

[8] Zilber, *Joseph Abraham* (27/7/1923-4/10/2009). Αμερικανός μαθηματικός. Σπούδασε στο Πανεπιστήμιο Harvard (BA, 1943, MSc, 1946). Διδακτορική διατριβή (πολύ αργότερα από τα δύο κοινά άρθρα με τον S. Eilenberg) υπό τον A. Gleason (1921-2008) με τίτλο *Categories in Homotopy Theory* (1963). Δίδαξε στα Πανεπιστήμια Columbia University (1948-1950), Johns Hopkins University (1950-1955), University of Illinois (1955-1956), καθώς και στο Ohio State University (μέχρι τη συνταξιοδότησή του το έτος 1992).

X και Y, εξασφαλίζεται για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η ύπαρξη ισομορφισμών

$$H_n(S_\bullet(X \times Y; R)) \cong H_n((S_\bullet(X; R) \otimes_R S_\bullet(Y; R))_\bullet).$$

Η απόδειξή του στηρίζεται στο θεώρημα A.5.14 των ακυκληματικών μοντέλων. Προτάσσονται τρία χρήσιμα λήμματα.

8.2.1 Λήμμα. *Έστω $\{0\} \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow \{0\}$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τέτοια ώστε ο M'' να είναι ισόπεδος. Τότε ο M' είναι ισόπεδος $\Longleftrightarrow$ ο M είναι ισόπεδος.*

Απόδειξη. Έστω N τυχών R-μόδιος. Θεωρούμε το τμήμα

$$\mathrm{Tor}_2^R(M'', N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M', N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M'', N)$$

τής δεύτερης μακράς ακριβούς Tor-ακολουθίας (τής κατασκευασθείσας μέσω τού θεωρήματος 5.3.10). Από το πόρισμα 5.3.13 έπεται ότι οι δύο ακραίοι όροι είναι τετριμμένοι. Αυτό σημαίνει ότι $\mathrm{Tor}_1^R(M', N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(M, N)$. Ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής ένεκα τού πορίσματος 5.3.14. $\square$

8.2.2 Λήμμα. *Δοθέντων τεσσάρων αλυσωτών συμπλόκων $\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{D}_\bullet, \mathbf{D}'_\bullet$:*

$$(C_n, d_n^{\mathbf{C}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}},\ (C'_n, d_n^{\mathbf{C}'_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}},\ (D_n, d_n^{\mathbf{D}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}},\ (D'_n, d_n^{\mathbf{D}'_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}},$$

και τριών αλυσωτών μετασχηματισμών $f_\bullet, f'_\bullet : \mathbf{C}_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{D}_\bullet \longrightarrow \mathbf{D}'_\bullet$, ισχύει η εξής συνεπαγωγή[9]:

$$f_\bullet \simeq f'_\bullet \Longrightarrow (f_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_\bullet \simeq (f'_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_\bullet .$$

Απόδειξη. Εξ υποθέσεως, υπάρχει κάποια ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων $(h_n : M_n \longrightarrow M'_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ με $f_n - f'_n = d_{n+1}^{\mathbf{C}'_\bullet} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n^{\mathbf{C}_\bullet},\ \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υφίσταται μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός[10]

$$\ell_n : (\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_n \longrightarrow (\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{D}'_\bullet)_{n+1}$$

ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_n \arrow[r, dashed, "\ell_n"] & (\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{D}'_\bullet)_{n+1} \\
C_p \otimes_R D_q \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"] \arrow[r, "(-1)^q h_p \overline{\otimes} g_q"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & C'_{p+1} \otimes_R D'_q \arrow[u, hook, "\mathrm{in}'_{p+1,q}"']
\end{tikzcd}$$

[9] Εδώ το "$\simeq$" δηλοί *αλυσωτή ομοτοπία* (μεταξύ αλυσωτών μετασχηματισμών) υπό την έννοια τού ορισμού 3.5.1. Επιπροσθέτως, ο αλυσωτός μετασχηματισμός $(f_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_\bullet : (\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet \longrightarrow (\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{D}'_\bullet)_\bullet$ είναι αυτός που έχει ορισθεί στο εδ. 6.2.1.

[10] Αρκεί να εφαρμοσθεί η καθολική ιδιότητα τού εδ. 2.4.7 με τους $(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_n$, $(\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{D}'_\bullet)_{n+1}$ και $C_p \otimes_R D_q$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων C, M και M_j, και τους $\mathrm{in}_{p,q}$, $(-1)^q\, \mathrm{in}'_{p+1,q} \circ (h_p \overline{\otimes} g_q)$ και ℓ_n στη θέση των εκεί παρατεθέντων f_j, g_j και h.

μεταθετικό, ήτοι ισχύει $\ell_n \circ \mathrm{in}_{p,q} = (-1)^q\, \mathrm{in}'_{p+1,q} \circ (h_p \overline{\otimes} g_q)$ για οιουσδήποτε ακεραίους p, q με $p+q=n$. Εάν $\mathfrak{d}_n = \mathfrak{d}_n^{(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{D}_\bullet)_\bullet}$ και $\mathfrak{d}'_n = \mathfrak{d}_n^{(\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{D}'_\bullet)_\bullet}$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι οι συνοριακοί τελεστές για τα αντίστοιχα τανυστικά γινόμενα συμπλόκων, τότε[11]

$$\mathfrak{d}_n \circ \mathrm{in}_{p,q} = \mathrm{in}_{p,q-1} \circ (\mathrm{id}_{C_p} \overline{\otimes}\, d_q^{\mathbf{D}_\bullet}) + (-1)^q\, \mathrm{in}_{p-1,q} \circ (d_p^{\mathbf{C}_\bullet} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_{D_q}),$$
$$\mathfrak{d}'_n \circ \mathrm{in}'_{p,q} = \mathrm{in}'_{p,q-1} \circ (\mathrm{id}_{C'_p} \overline{\otimes}\, d_q^{\mathbf{D}'_\bullet}) + (-1)^q\, \mathrm{in}'_{p-1,q} \circ (d_p^{\mathbf{C}'_\bullet} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_{D'_q}),$$

για κάθε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p+q=n$. Για κάθε τέτοιο ζεύγος θα προσδιορίσουμε τον

$$\left(\mathfrak{d}'_{n+1} \circ \ell_n + \ell_{n-1} \circ \mathfrak{d}_n\right) \circ \mathrm{in}_{p,q} : C_p \otimes_R D_q \longrightarrow (\mathbf{C}'_\bullet \otimes_R \mathbf{D}'_\bullet)_n.$$

Προφανώς,

$$\mathfrak{d}'_{n+1} \circ \ell_n \circ \mathrm{in}_{p,q} = (-1)^q (\mathfrak{d}'_{n+1} \circ \mathrm{in}'_{p+1,q} \circ (h_p \overline{\otimes} g_q))$$
$$(-1)^q (\mathrm{in}'_{p+1,q-1} \circ (\mathrm{id}_{C'_{p+1}} \overline{\otimes}\, d_q^{\mathbf{D}'_\bullet}) \circ (h_p \overline{\otimes} g_q)) + \mathrm{in}'_{p,q} \circ (d_{p+1}^{\mathbf{C}'_\bullet} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_{D'_q}) \circ (h_p \overline{\otimes} g_q)$$
$$= (-1)^q (\mathrm{in}'_{p+1,q-1} \circ (h_p \overline{\otimes}\, (d_q^{\mathbf{D}'_\bullet} \circ g_q))) + \mathrm{in}'_{p,q} \circ ((d_{p+1}^{\mathbf{C}'_\bullet} \circ h_p) \overline{\otimes} g_q)$$

και

$$\ell_{n-1} \circ \mathfrak{d}_n \circ \mathrm{in}_{p,q} = \ell_{n-1} \circ (\mathrm{in}_{p,q-1} \circ (\mathrm{id}_{C_p} \overline{\otimes}\, d_q^{\mathbf{D}_\bullet}) + (-1)^q\, \mathrm{in}_{p-1,q} \circ (d_p^{\mathbf{C}_\bullet} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_{D_q}))$$
$$= (\ell_{n-1} \circ \mathrm{in}_{p,q-1}) \circ (\mathrm{id}_{C_p} \overline{\otimes}\, d_q^{\mathbf{D}_\bullet}) + (-1)^q\, (\ell_{n-1} \circ \mathrm{in}_{p-1,q}) \circ (d_p^{\mathbf{C}_\bullet} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_{D_q})$$
$$= (-1)^{q-1} \mathrm{in}'_{p+1,q-1} \circ (h_p \overline{\otimes} g_{q-1}) \circ (\mathrm{id}_{C_p} \overline{\otimes}\, d_q^{\mathbf{D}_\bullet}) + (\mathrm{in}'_{p,q} \circ (h_{p-1} \overline{\otimes} g_q) \circ (d_p^{\mathbf{C}_\bullet} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_{D_q}))$$
$$= (-1)^{q-1} \mathrm{in}'_{p+1,q-1} \circ (h_p \overline{\otimes} (g_{q-1} \circ d_q^{\mathbf{D}_\bullet})) + (\mathrm{in}'_{p,q} \circ ((h_{p-1} \circ d_p^{\mathbf{C}_\bullet}) \overline{\otimes} g_q)).$$

Επειδή $d_q^{\mathbf{D}'_\bullet} \circ g_q = g_{q-1} \circ d_q^{\mathbf{D}_\bullet}$, λαμβάνουμε τελικώς

$$(\mathfrak{d}'_{n+1} \circ \ell_n + \ell_{n-1} \circ \mathfrak{d}_n) \circ \mathrm{in}_{p,q} = \mathrm{in}'_{p,q} \circ ((d_{p+1}^{\mathbf{C}'_\bullet} \circ h_p + h_{p-1} \circ d_p^{\mathbf{C}_\bullet}) \overline{\otimes} g_q)$$
$$= \mathrm{in}'_{p,q} \circ ((f_p - f'_p) \overline{\otimes} g_q) = \mathrm{in}'_{p,q} \circ (f_p \overline{\otimes} g_q - f'_p \overline{\otimes} g_q)$$
$$= ((f_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_n - (f'_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_n) \circ \mathrm{in}_{p,q},$$

οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\mathfrak{d}'_{n+1} \circ \ell_n + \ell_{n-1} \circ \mathfrak{d}_n = (f_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_n - \left(f'_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet\right)_n.$$

Αυτό σημαίνει ότι $(\ell_n)_{n\in\mathbb{Z}} : (f_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_\bullet \simeq (f'_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_\bullet$. □

8.2.3 Παρατήρηση. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και η συνεπαγωγή:

$$f_\bullet \simeq f'_\bullet \Longrightarrow (g_\bullet \overline{\otimes} f_\bullet)_\bullet \simeq \left(g_\bullet \overline{\otimes} f'_\bullet\right)_\bullet.$$

8.2.4 Λήμμα. *Δοθέντων τεσσάρων αλυσωτών συμπλόκων* $\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{C}'_\bullet, \mathbf{D}_\bullet, \mathbf{D}'_\bullet$ *και τεσσάρων αλυσωτών μετασχηματισμών*

$$f_\bullet, f'_\bullet : \mathbf{C}_\bullet \longrightarrow \mathbf{C}'_\bullet \;\text{ και }\; g_\bullet, g'_\bullet : \mathbf{D}_\bullet \longrightarrow \mathbf{D}'_\bullet,$$

[11] Βλ. εδ. 6.2.1 και A.2.17 (με $\mathbf{F} = - \otimes_R -$).

ισχύει η εξής συνεπαγωγή:

$$[f_\bullet \simeq f'_\bullet \text{ και } g_\bullet \simeq g'_\bullet] \Longrightarrow (f_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_\bullet \simeq \left(f'_\bullet \overline{\otimes} g'_\bullet\right)_\bullet .$$

Απόδειξη. Βάσει των προαναφερθέντων στα εδ. 8.2.2 και 8.2.3, ισχύουν οι συνεπαγωγές[12] $f_\bullet \simeq f'_\bullet \Longrightarrow (f_\bullet \overline{\otimes} \mathrm{id}_{\mathbf{D}_\bullet})_\bullet \simeq (f'_\bullet \overline{\otimes} \mathrm{id}_{\mathbf{D}_\bullet})_\bullet$ και

$$g_\bullet \simeq g'_\bullet \Longrightarrow \left(\mathrm{id}_{\mathbf{C}'_\bullet} \overline{\otimes} g_\bullet\right)_\bullet \simeq \left(\mathrm{id}_{\mathbf{C}'_\bullet} \overline{\otimes} g'_\bullet\right)_\bullet .$$

Και επειδή (λόγω τής προτάσεως 4.5.5)

$$(f_\bullet \overline{\otimes} \mathrm{id}_{\mathbf{D}_\bullet})_\bullet \circ \left(\mathrm{id}_{\mathbf{C}'_\bullet} \overline{\otimes} g_\bullet\right)_\bullet = (f_\bullet \overline{\otimes} g_\bullet)_\bullet , \ \left(f'_\bullet \overline{\otimes} \mathrm{id}_{\mathbf{D}_\bullet}\right)_\bullet \circ \left(\mathrm{id}_{\mathbf{C}'_\bullet} \overline{\otimes} g'_\bullet\right)_\bullet = \left(f'_\bullet \overline{\otimes} g'_\bullet\right)_\bullet ,$$

αρκεί η εφαρμογή τής προτάσεως 3.5.6. □

8.2.5 Θεώρημα («Θεώρημα των Eilenberg και Zilber», 1953). *Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, τότε για κάθε μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R υπάρχουν (μέχρις ομοτοπίας αλυσωτών συμπλόκων) μονοσημάντως ορισμένοι αλυσωτοί μετασχηματισμοί*

$$k_\bullet = k_\bullet^{(X,Y)} : S_\bullet(X \times Y; R) \longrightarrow (S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet$$
$$h_\bullet = h_\bullet^{(X,Y)} : (S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet \longrightarrow S_\bullet(X \times Y; R),$$

τέτοιοι ώστε ο $k_0 = k_0^{(X,Y)}$ να είναι ο ισομορφισμός R-μοδίων ο οριζόμενος ύστερα από γραμμική επέκταση τής

$$S_0(X \times Y; R) \supseteq \mathfrak{V}_0(X \times Y) \ni (x, y) \longmapsto x \otimes y \in (S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R))_0 \quad (8.12)$$

και να ισχύει

$$k_\bullet \circ h_\bullet \simeq \mathrm{id}_{(S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet} \quad \text{και} \quad h_\bullet \circ k_\bullet \simeq \mathrm{id}_{S_\bullet(X \times Y;R)} . \qquad (8.13)$$

Η (8.13) σημαίνει ότι τα αλυσωτά σύμπλοκα $k_\bullet$ και $h_\bullet$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα (και καθένα εξ αυτών αλυσωτή ισοδυναμία υπό την έννοια τού ορισμού 3.5.10). Ως εκ τούτου, η πρόταση 3.5.11 μας πληροφορεί, ιδιαιτέρως, ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{H_n((S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet) \cong H_n(S_\bullet(X \times Y;R)) =: H_n^{\text{sing.}}(X \times Y;R).}$$

Απόδειξη. Ορίζονται αρχικώς δύο συναρτητές[13]:

$$\mathbf{F} : \mathfrak{Top} \times \mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Top} \times \mathfrak{Top}) \ni (X, Y) \longmapsto \mathbf{F}(X, Y) := S_\bullet(X \times Y; R) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}\times\mathfrak{Top}}((X,Y),(X',Y')) \ni (f,g) \longmapsto \mathbf{F}(f,g) := \underbrace{S_\bullet(f \times g)}_{\in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(S_\bullet(X\times Y;R), S_\bullet(X'\times Y';R))} ,$$

[12]Για την πρώτη συνεπαγωγή εφαρμόζεται το λήμμα 8.2.2 στην ειδική περίπτωση όπου $\mathbf{D}_\bullet = \mathbf{D}'_\bullet$ και $g_\bullet = \mathrm{id}_{\mathbf{D}_\bullet}$, ενώ για τη δεύτερη συνεπαγωγή ό,τι ανεφέρεται στην παρατήρηση 8.2.3 (με τα $g_\bullet$, $g'_\bullet$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων $f_\bullet$ και $f'_\bullet$, αντιστοίχως, και με τον ταυτοτικό αλυσωτό μετασχηματισμό $\mathrm{id}_{\mathbf{C}'_\bullet}$ στη θέση τού εκεί παρατεθέντος $g_\bullet$).

[13]Προσοχή! Το πεδίο ορισμού αυτών $\mathfrak{Top} \times \mathfrak{Top}$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο τής $\mathfrak{Top}$ με τον εαυτό της *και όχι* η κατηγορία $\mathfrak{Top}^{[2]}$.

όπου $X \times Y \ni (x,y) \longmapsto (f \times g)(x,y) := (f(x), g(y)) \in X' \times Y'$ και

$$\begin{gathered}\mathbf{E} : \mathfrak{Top} \times \mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),\\ \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top} \times \mathfrak{Top}) \ni (X,Y) \longmapsto \mathbf{E}(X,Y) := (S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),\\ \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}\times\mathfrak{Top}}((X,Y),(X',Y')) \ni (f,g) \longmapsto \mathbf{E}(f,g) := \underbrace{(S_\bullet(f) \otimes_R S_\bullet(g))_\bullet}_{\in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(S_\bullet(X\times Y;R), S_\bullet(X'\times Y';R))}.\end{gathered}$$

Βήμα 1ο. *Οι* $\mathbf{F}, \mathbf{E}$ *είναι* $\mathbb{M}$-*ακυκληματικοί* (υπό την έννοια τού ορισμού A.5.12 (iii)) *ως προς τη συλλογή μοντέλων*[14] $\mathbb{M} := \{ (\Delta_p, \Delta_q) | \, p,q \in \mathbb{N}_0 \}$.

(i) Τα Δ_p, Δ_q, ως κυρτοί υπόχωροι ευκλείδειων χώρων, είναι χώροι *συσταλτοί*. (Βλ. εδ. B.5.6 (vi).) Ως εκ τούτου, *και* το καρτεσιανό γινόμενό τους $\Delta_p \times \Delta_q$ είναι χώρος συσταλτός, έχων τον ίδιον ομοτοπικό τύπο με έναν μονοσημειακό χώρο, απ' όπου έπεται[15] ότι

$$H_n^{\text{sing.}}(\Delta_p \times \Delta_q; R) \cong H_n^{\text{sing.}}(\{\text{pt}\}; R) \cong \{0\}, \ \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}.$$

Κατά συνέπειαν,

$$H_n(S_\bullet(\Delta_p \times \Delta_q; R)) = H_n(\mathbf{F}(\Delta_p, \Delta_q); R) \cong \{0\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ και ο $\mathbf{F}$ είναι όντως $\mathbb{M}$-ακυκληματικός.

(ii) Κατ' αναλογίαν, για να δειχθεί η $\mathbb{M}$-ακυκληματικότητα τού $\mathbf{E}$ αρκεί να δειχθεί ότι

$$H_n((S_\bullet(\Delta_p; R) \otimes_R S_\bullet(\Delta_q; R))_\bullet) \cong \{0\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Εξ ορισμού, $S_n(\Delta_p; R) := \mathbf{Fr}_R(\mathfrak{V}_n(\Delta_p))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. (Βλ. εδ. D.2.5.) Επειδή τα θεμελιακά μονόπλοκα Δ_p, Δ_q είναι χώροι συσταλτοί και έχουν τον ίδιον ομοτοπικό τύπο με έναν μονοσημειακό χώρο, μπορεί κανείς να τα ταυτίσει με σημεία. Το $\mathfrak{V}_n(\Delta_p)$ είναι μονοσύνολο και $\mathbf{Fr}_R(\mathfrak{V}_n(\Delta_p)) \cong R$. Ορίζοντας ένα αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet$ με μέλη του τους R-μοδίους

$$C_m := \begin{cases} R, & \text{όταν } m \geqslant 0, \\ \text{τετριμμένος}, & \text{όταν } m < 0, \end{cases} \quad \text{και συνοριακούς τελεστές } d_m^{\mathbf{C}_\bullet} := \begin{cases} \mathrm{id}_R, & \text{για άρτιους } m \geqslant 2, \\ 0, & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

παρατηρούμε ότι τα αλυσωτά σύμπλοκα $S_\bullet(\Delta_p; R)$ και $\mathbf{C}_\bullet$ είναι (εκ κατασκευής) ομοτοπικώς ισοδύναμα. Παρομοίως αποδεικνύεται ότι *και* τα $S_\bullet(\Delta_p; R)$ και $\mathbf{C}_\bullet$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα. Σύμφωνα με το λήμμα 8.2.4,

$$(S_\bullet(\Delta_p; R) \otimes_R S_\bullet(\Delta_q; R))_\bullet \simeq (\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}_\bullet)_\bullet. \tag{8.14}$$

Επειδή (κατά το λήμμα 4.5.25) ο R-μόδιος R είναι ισόπεδος, το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{C}_\bullet$ είναι (εκ κατασκευής) ισόπεδο. Αλλά και οι $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ (που -εξ ορισμού- είναι είτε τετριμμένοι είτε ίσοι με τον R) είναι ισόπεδοι. Λόγω των προαναφερθέντων στο (i) τής σημειώσεως 6.2.7, πληρούνται οι προϋποθέσεις τού (i) τού θεωρήματος 6.2.6.

[14]Το Δ_q συμβολίζει το *θεμελιακό* q-*μονόπλοκο*. (Βλ. εδ. D.2.1.)

[15]Βλ. $\boxed{\textbf{ES-A4}}$ στο εδ. C.1.6 και θεώρημα D.2.27.

Άρα προκύπτει μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}_\bullet)) \hookrightarrow H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}_\bullet)_\bullet) \twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\,(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{C}_\bullet)) \longrightarrow \{0\}$$

Από το γεγονός ότι $H_0(\mathbf{C}_\bullet) \cong R$ και $H_n(\mathbf{C}_\bullet) \cong \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, και από το λήμμα 4.5.25 και το πόρισμα 5.3.13 έπεται ότι

$$\mathrm{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{C}_\bullet)) \cong \{0\}, \ \forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Άρα η ανωτέρω βραχεία ακριβής ακολουθία δίδει ισομορφισμούς

$$\bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}_\bullet)) \xrightarrow{\cong} H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}_\bullet)_\bullet), \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

οπότε (λόγω τής (8.14)) $H_n((S_\bullet(\Delta_p; R) \otimes_R S_\bullet(\Delta_q; R))_\bullet) \cong H_n((\mathbf{C}_\bullet \otimes_R \mathbf{C}_\bullet)_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Όταν $n \neq 0$,

$$\bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}_\bullet)) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_{n-p}(\mathbf{C}_\bullet)) \cong \underbrace{H_0(\mathbf{C}_\bullet)}_{\cong R} \otimes_R \underbrace{H_n(\mathbf{C}_\bullet)}_{\cong\{0\}} \cong \{0\}.$$

Επομένως, $H_n((S_\bullet(\Delta_p; R) \otimes_R S_\bullet(\Delta_q; R))_\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $n \geqslant 1$ και ο $\mathbf{E}$ είναι $\mathbb{M}$-ακυκληματικός.

Βήμα 2ο. *Αμφότεροι οι* $\mathbf{F}, \mathbf{E}$ *είναι* $\mathbb{M}$-*ελεύθεροι* (υπό την έννοια τού ορισμού A.5.12 (iv)) *ως προς την (ίδια) συλλογή μοντέλων* $\mathbb{M}$.

(i) Εξ ορισμού, η $\mathbb{M}$-ελευθερία τού συναρτητή $\mathbf{F}$ ισοδυναμεί με την $\mathbb{M}$-ελευθερία των συναρτητών

$$\mathbf{F}_p := \mathbf{P}_p \circ \mathbf{F} : \mathfrak{Top} \times \mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R, \ p \in \mathbb{N}_0,$$

όπου $\mathbf{P}_p$ η p-οστή προβολή. (Βλ. εδ. A.5.10.) Για κάθε $(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top} \times \mathfrak{Top})$,

$$\mathbf{F}_p(X, Y) = \mathbf{P}_p(\mathbf{F}(X, Y)) = \mathbf{P}_p(S_\bullet(X \times Y; R)) = S_p(X \times Y; R).$$

Άρα ο $\mathbf{F}_p(X, Y)$ είναι ελεύθερος R-μόδιος. Θεωρούμε τη συνεχή (διαγώνιο) απεικόνιση

$$\Delta_p \ni \mathbf{x} \longmapsto \mathrm{diag}_p(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \Delta_p \times \Delta_p.$$

Προφανώς, $\mathrm{diag}_p \in S_p(\Delta_p \times \Delta_p; R) = \mathbf{F}_p(\Delta_p, \Delta_p)$ και το $((\Delta_p, \Delta_p), \mathrm{diag}_p)$ μπορεί να εκληφθεί ως μια $\mathbb{M}$-οικογένεια[16] τού $\mathbf{F}_p$. Για κάθε $(X, Y) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top} \times \mathfrak{Top})$ ορίζουμε τις προβολές

$$X \times Y \ni (x, y) \longmapsto \mathrm{pr}_1(x, y) := x \in X, \ \ X \times Y \ni (x, y) \longmapsto \mathrm{pr}_2(x, y) := y \in Y.$$

Για κάθε $\sigma \in \mathfrak{S}_p(X \times Y)$ η απεικόνιση $(\mathrm{pr}_1 \circ \sigma, \mathrm{pr}_2 \circ \sigma) : (\Delta_p, \Delta_p) \longrightarrow (X, Y)$ ανήκει στο σύνολο $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}\times\mathfrak{Top}}((\Delta_p, \Delta_p), (X, Y))$ και έχει την ιδιότητα:

$$\mathbf{F}_p(\mathrm{pr}_1 \circ \sigma, \mathrm{pr}_2 \circ \sigma)(\mathrm{diag}_p) = ((\mathrm{pr}_1 \circ \sigma) \times (\mathrm{pr}_2 \circ \sigma))(\mathrm{diag}_p) = \sigma.$$

[16] Εν προκειμένω, *μονομελή* $\mathbb{M}$-οικογένεια τού $\mathbf{F}_p$.

Επιπροσθέτως, για οιονδήποτε μορφισμό $(\sigma_1,\sigma_2) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}\times\mathfrak{Top}}((\Delta_p,\Delta_p),(X,Y))$ το

$$\mathbf{F}_p(\sigma_1,\sigma_2)(\mathrm{diag}_p) : \Delta_p \longrightarrow X \times Y$$

ανήκει στο σύνολο των ιδιαζόντων p-μονοπλόκων $\mathfrak{V}_p(X\times Y)$ εντός τού καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$, οπότε ο ελεύθερος R-μόδιος $\mathbf{F}_p(X,Y)$ έχει το

$$\underbrace{\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(\Delta_p, X\times Y)}_{=\mathfrak{V}_p(X\times Y)} = \left\{ \mathbf{F}_p(\sigma_1,\sigma_2)(\mathrm{diag}_p) \middle| (\sigma_1,\sigma_2) \in \mathfrak{V}_p(X)\times\mathfrak{V}_p(Y) \right\}$$

ως μια βάση του. Κατά συνέπειαν, ο $\mathbf{F}_p$ είναι $\mathbb{M}$-ελεύθερος (υπό την έννοια τού ορισμού A.5.12 (iv)) για κάθε $p \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Εξ ορισμού, η $\mathbb{M}$-ελευθερία τού συναρτητή $\mathbf{E}$ ισοδυναμεί με την $\mathbb{M}$-ελευθερία των συναρτητών

$$\mathbf{E}_\nu := \mathbf{P}_\nu \circ \mathbf{E} : \mathfrak{Top}\times\mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,\ \nu \in \mathbb{N}_0,$$

όπου $\mathbf{P}_\nu$ η ν-οστή προβολή. (Βλ. εδ. A.5.10.) Για κάθε $(X,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}\times\mathfrak{Top})$,

$$\mathbf{E}_\nu(X,Y) = \mathbf{P}_\nu(\mathbf{E}(X,Y)) = \mathbf{P}_\nu((S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet) = \bigoplus_{p+q=\nu}(S_p(X;R)\otimes_R S_q(Y;R)).$$

Λόγω τής ελευθερίας των R-μοδίων $S_p(X;R)$ και $S_q(Y;R)$, τού θεωρήματος 4.4.7 και τού πορίσματος 2.5.17, ο $\mathbf{E}_\nu(X,Y)$ είναι ελεύθερος R-μόδιος. Εξάλλου, η οικογένεια[17] $((\Delta_p,\Delta_q),(\mathrm{id}_{\Delta_p}\otimes\,\mathrm{id}_{\Delta_q}))_{\{(p,q)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0:p+q=\nu\}}$ μπορεί να εκληφθεί ως μια $\mathbb{M}$-οικογένεια τού $\mathbf{E}_\nu$. Επειδή

$$\begin{aligned}
&\left\{ \mathbf{E}_\nu(\sigma_1,\sigma_2)(\mathrm{id}_{\Delta_p}\otimes\mathrm{id}_{\Delta_q}) \middle| (\sigma_1,\sigma_2)\in\mathfrak{V}_p(X)\times\mathfrak{V}_q(Y) : p+q=\nu \right\}\\
&= \left\{ \mathbf{P}_\nu((S_\bullet(\sigma_1)\overline{\otimes}_R S_\bullet(\sigma_2))_\bullet)(\mathrm{id}_{\Delta_p}\otimes\mathrm{id}_{\Delta_q}) \middle| (\sigma_1,\sigma_2)\in\mathfrak{V}_p(X)\times\mathfrak{V}_q(Y) : p+q=\nu \right\}\\
&= \left\{ (S_p(\sigma_1)\overline{\otimes}_R S_q(\sigma_2))(\mathrm{id}_{\Delta_p}\otimes\mathrm{id}_{\Delta_q}) \middle| (\sigma_1,\sigma_2)\in\mathfrak{V}_p(X)\times\mathfrak{V}_q(Y) : p+q=\nu \right\}\\
&= \left\{ (S_p(\sigma_1)(\mathrm{id}_{\Delta_p})\otimes S_q(\sigma_2)(\mathrm{id}_{\Delta_q})) \middle| (\sigma_1,\sigma_2)\in\mathfrak{V}_p(X)\times\mathfrak{V}_q(Y) : p+q=\nu \right\}\\
&= \left\{ (\sigma_1\circ\mathrm{id}_{\Delta_p})\otimes_R(\sigma_2\circ\mathrm{id}_{\Delta_q}) \middle| (\sigma_1,\sigma_2)\in\mathfrak{V}_p(X)\times\mathfrak{V}_q(Y) : p+q=\nu \right\}\\
&= \left\{ \sigma_1\otimes\sigma_2 \in S_p(X;R)\otimes_R S_q(Y;R) \middle| (\sigma_1,\sigma_2)\in\mathfrak{V}_p(X)\times\mathfrak{V}_q(Y) : p+q=\nu \right\},
\end{aligned}$$

ο ελεύθερος R-μόδιος $\mathbf{E}_\nu(X,Y) = \bigoplus_{p+q=\nu}(S_p(X;R)\otimes_R S_q(Y;R))$ έχει το

$$\left\{ \mathbf{E}_\nu(\sigma_1,\sigma_2)(\mathrm{id}_{\Delta_p}\overline{\otimes}\mathrm{id}_{\Delta_q}) \middle| (\sigma_1,\sigma_2)\in\mathfrak{V}_p(X)\times\mathfrak{V}_q(Y) : p+q=\nu \right\}$$

ως μια βάση του. Κατά συνέπειαν, ο $\mathbf{E}_\nu$ είναι $\mathbb{M}$-ελεύθερος (υπό την έννοια τού ορισμού A.5.12 (iv)) για κάθε $\nu \in \mathbb{N}_0$.

Βήμα 3ο. *Κατασκευή φυσικής ισοδυναμίας* $\varphi : H_0(\mathbf{F}) \longrightarrow H_0(\mathbf{E})$. Για να κατασκευασθεί μια τέτοια φυσική ισοδυναμία από τον $H_0(\mathbf{F}) := H_0(-)\circ\mathbf{F}$ στον

[17] Προφανώς, $\mathrm{id}_{\Delta_p}\otimes\,\mathrm{id}_{\Delta_q} \in S_p(X;R)\otimes_R S_q(Y;R) \hookrightarrow \mathbf{E}_\nu(X,Y)$.

$H_0(\mathbf{E}) := H_0(-)\circ \mathbf{E}$ (ούτως ώστε να είναι εφαρμόσιμο το θεώρημα A.5.14 των ακυκληματικών μοντέλων) θα πρέπει για κάθε $(X,Y) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}\times\mathfrak{Top})$ να ορισθεί *ισομορφισμός* R-μοδίων

$$\varphi(X,Y) : H_0(\underbrace{S_\bullet(X\times Y;R)}_{=\mathbf{F}(X,Y)}) \xrightarrow{\cong} H_0(\underbrace{(S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet}_{=\mathbf{E}(X,Y)}). \tag{8.15}$$

(Βλ. εδ. A.3.1.) Εάν χρησιμοποιηθεί το $\Delta\mathrm{P}\Sigma(X)$ για να συμβολίζει το σύνολο των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών οιουδήποτε $X\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Top})$, τότε (κατά το πόρισμα D.2.24) $H_0(S_\bullet(X;R)) =: H_0^{\text{sing.}}(X;R)\cong \mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(X))$ και υφίσταται *αμφίρριψη*

$$\Delta\mathrm{P}\Sigma(X\times Y)\ni A\longmapsto(\mathrm{pr}_1(A),\mathrm{pr}_2(A))\in\Delta\mathrm{P}\Sigma(X)\times\Delta\mathrm{P}\Sigma(Y),$$

οπότε $\mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(X\times Y))\cong\mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(X)\times\Delta\mathrm{P}\Sigma(Y))$. Το τανυστικό γινόμενο των ελευθέρων R-μοδίων $\mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(X))$ και $\mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(Y))$ είναι ελεύθερος R-μόδιος (βλ. θεώρημα 4.4.7) και[18]

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}_R(\mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(X))\otimes_R\mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(Y))) &= \mathrm{rank}_R(\mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(X)))\cdot\mathrm{rank}_R(\mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(Y)))\\ &= \mathrm{rank}_R(\mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(X)\times\Delta\mathrm{P}\Sigma(Y))).\end{aligned}$$

Επειδή $\mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(X)\times\Delta\mathrm{P}\Sigma(Y))\cong\mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(X))\otimes_R\mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(Y))$ (λόγω τής προτάσεως 2.5.41), έχουμε

$$H_0(S_\bullet(X\times Y;R))\xrightarrow{\cong}H_0(S_\bullet(X;R))\otimes_R H_0(S_\bullet(Y;R)). \tag{8.16}$$

Αρκεί λοιπόν να προσδιορισθεί ισομορφισμός

$$H_0(S_\bullet(X;R))\otimes_R H_0(S_\bullet(Y;R))\xrightarrow{\cong}H_0((S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet). \tag{8.17}$$

Προς τούτο ορίζονται αλυσωτά σύμπλοκα $S'_\bullet(X;R)$ και $S'_\bullet(Y;R)$ ως ακολούθως:

$$S'_n(X;R) := \begin{cases} S_n(X;R), & \text{όταν } n\in\{0,1\},\\ \text{τετριμμένος}, & \text{όταν } n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1\},\end{cases}$$

με συνοριακούς τελεστές $d_1^{S'_n(X;R)} =: d_{X,1}^{\text{sing.}}$ και $d_n^{S'_n(X;R)} := 0$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{1\}$ και

$$S'_n(Y;R) := \begin{cases} S_n(Y;R), & \text{όταν } n\in\{0,1\},\\ \text{τετριμμένος}, & \text{όταν } n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1\},\end{cases}$$

με συνοριακούς τελεστές $d_1^{S'_n(Y;R)} =: d_{Y,1}^{\text{sing.}}$ και $d_n^{S'_n(Y;R)} := 0$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{1\}$. Σημειωτέον ότι για $j\in\{0,1\}$ ισχύει

$$(S_\bullet(X';R)\otimes_R S_\bullet(Y';R))_j\cong(S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_j,$$

[18] Εδώ *δεν* προϋποθέτουμε ότι τα $\Delta\mathrm{P}\Sigma(X)$ και $\Delta\mathrm{P}\Sigma(Y)$ είναι πεπερασμένα. (Από τον λογισμό με πληθικούς αριθμούς είναι γνωστό ότι, εάν τα A, B είναι δυο μη κενά σύνολα, τότε $\mathrm{card}(A\times B)=\mathrm{card}(A)\cdot\mathrm{card}(B)$ όταν αμφότερα είναι πεπερασμένα και

$$\mathrm{card}(A\times B)=\mathrm{card}(A)\cdot\mathrm{card}(B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)=\max\{\mathrm{card}(A),\mathrm{card}(B)\},$$

όταν τουλάχιστον ένα εξ αυτών είναι άπειρο.)

διότι για $j = 0$,

$$\begin{aligned}\bigoplus_{p+q=0}(S_p(X';R)\otimes_R S_q(Y';R)) &= \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}(S_p(X';R)\otimes_R S_{-p}(Y';R))\\ &= S_0(X';R)\otimes_R S_0(Y';R) = S_0(X;R)\otimes_R S_0(Y;R)\end{aligned}$$

(αφού για $p \neq 0$ ένας εκ των $S_p(X';R), S_{-p}(Y';R)$ είναι κατ' ανάγκην τετριμμένος) και για $j = 1$,

$$\begin{aligned}&\bigoplus_{p+q=1}(S_p(X';R)\otimes_R S_q(Y';R)) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}(S_p(X';R)\otimes_R S_{1-p}(Y';R))\\ &= (S_0(X';R)\otimes_R S_1(Y';R))\oplus(S_1(X';R)\otimes_R S_0(Y';R))\\ &= (S_0(X;R)\otimes_R S_1(Y;R))\oplus(S_1(X;R)\otimes_R S_0(Y;R))\\ &= \bigoplus_{p+q=1}(S_p(X;R)\otimes_R S_q(Y;R)).\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}H_0^{\text{sing.}}(X;R) &:= H_0(S_\bullet(X;R)) := S_0(X;R)/\operatorname{Im}(d_{X,1}^{\text{sing.}})\\ &= S_0'(X;R)/\operatorname{Im}(d_1^{S_n'(X;R)}) = H_0(S_\bullet'(X;R))\end{aligned}$$

και (παρομοίως)

$$H_0^{\text{sing.}}(Y;R) = H_0(S_\bullet'(Y;R)).$$

Το $S_\bullet'(X;R)$ είναι ελεύθερο αλυσωτό σύμπλοκο με μοναδικό μη τετριμμένο μόδιο συνόρων τον $B_0(S_\bullet'(X;R))$. Αμφότεροι οι $S_0'(X;R)$ και $H_0(S_\bullet'(X;R))$ (όντες ελεύθεροι R-μόδιοι) είναι ισόπεδοι. (Βλ. πρόταση 4.2.4 και θεώρημα 4.5.26.) Από τη φυσικώς δομούμενη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow B_0(S_\bullet'(X;R)) \hookrightarrow S_0'(X;R) \twoheadrightarrow H_0(S_\bullet'(X;R)) \cong \mathbf{Fr}_R(\Delta\mathrm{P}\Sigma(X)) \longrightarrow \{0\}$$

και το λήμμα 8.2.1 συμπεραίνουμε ότι *και* ο $B_0(S_\bullet'(X;R))$ είναι ισόπεδος. Άρα τόσον οι $S_n'(X;R)$ όσον και οι $B_n(S_\bullet'(X;R))$ είναι ισόπεδοι[19] *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$. Λόγω των προαναφερθέντων στο (i) τής σημειώσεως 6.2.7, πληρούνται οι προϋποθέσεις τού (i) τού θεωρήματος 6.2.6. Ως εκ τούτου, υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\begin{aligned}&\{0\} \to \bigoplus_{p+q=0}(H_p(S_\bullet'(X;R))\otimes_R H_q(S_\bullet'(Y;R))) \hookrightarrow H_0((S_\bullet'(X;R)\otimes_R S_\bullet'(Y;R))_\bullet)\\ &\twoheadrightarrow \bigoplus_{p+q=-1}\operatorname{Tor}_1^R(H_p(S_\bullet'(X;R)), H_q(S_\bullet'(Y;R))) \longrightarrow \{0\}\end{aligned}$$

Επειδή στο $\operatorname{Tor}_1^R(H_p(S_\bullet'(X;R)), H_q(S_\bullet'(Y;R)))$, $p+q=-1$, οι $H_p(S_\bullet'(X;R)$ είναι ισόπεδοι, αυτό το γινόμενο στρέψεως είναι (σύμφωνα με πόρισμα 5.3.13) πάντοτε *τετριμμένος* R-μόδιος, οπότε η ανωτέρω δίδει ισομορφισμό

$$\bigoplus_{p+q=0}(H_p(S_\bullet'(X;R))\otimes_R H_q(S_\bullet'(Y;R))) \xrightarrow{\cong} H_0((S_\bullet'(X;R)\otimes_R S_\bullet'(Y;R))_\bullet) \tag{8.18}$$

[19] Επαναλαμβάνοντας τα ίδια επιχειρήματα, αλλά με τον Y στη θέση τού X, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τόσον οι $S_n'(X;R)$ όσον και οι $B_n(S_\bullet'(X;R))$ είναι ωσαύτως ισόπεδοι *για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$.

μεταξύ δύο R-μοδίων. Ο μεν πρώτος εξ αυτών είναι ο

$$\begin{aligned}\bigoplus_{p+q=0}(H_p(S'_\bullet(X;R))\otimes_R H_q(S'_\bullet(Y;R))) &\cong H_0(S'_\bullet(X;R))\otimes_R H_0(S'_\bullet(Y;R))\\ &= H_0^{\text{sing.}}(X;R)\otimes_R H_0^{\text{sing.}}(Y;R), \qquad (8.19)\end{aligned}$$

ο δε δεύτερος ο

$$H_0(S'_\bullet(X;R))\otimes_R H_0(S'_\bullet(Y;R))\cong H_0(S_\bullet(X;R))\otimes_R H_0(S_\bullet(Y;R)). \qquad (8.20)$$

Μέσω των (8.18), (8.19) και (8.20) προσδιορίζεται ένας ισομορφισμός (8.17) τού ζητούμενου είδους και, κατ' επέκταση, ένας ισομορφισμός $\varphi(X,Y)$ όπως στην (8.15).

Βήμα 4ο. *Εφαρμογή τού θεωρήματος* A.5.14. Λόγω τής κατασκευής μιας *φυσικής ισοδυναμίας* $\varphi : H_0(\mathbf{F}) \longrightarrow H_0(\mathbf{E})$ (στο 3ο βήμα) μεταξύ των συνθέσεων τού $H_0(-)$ με τους $\mathbf{F}$ και $\mathbf{E}$ (οι οποίοι είναι, βάσει των όσων προαναφέρθησαν στα βήματα 1 και 2, $\mathbb{M}$-ακυκληματικοί και $\mathbb{M}$-ελεύθεροι), έχουμε τη δυνατότητα εφαρμογής τού θεωρήματος A.5.14 των ακυκληματικών μοντέλων. Από το A.5.14 (i) εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενός φυσικού μετασχηματισμού $k : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{E}$ ο οποίος «επεκτείνει την φ». Από το A.5.14 (iii) εξασφαλίζεται η ύπαρξη ενός φυσικού μετασχηματισμού $h : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ με $h\circ k \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{F}}$ και $k\circ h \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$. Άρα για κάθε $(X,Y)\in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}\times\mathfrak{Top})$ έχουμε

$$\begin{aligned}(k\circ h)(X,Y) &= k(X,Y)\circ h(X,Y) = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}(X,Y),\\ (h\circ k)(X,Y) &= h(X,Y)\circ k(X,Y) = \mathrm{id}_{\mathbf{F}}(X,Y).\end{aligned}$$

Επειδή τα $k(X,Y)$ και $h(X,Y)$ είναι *αλυσωτά σύμπλοκα*, αρκεί για (διευκολυντικούς) λόγους συμβολισμού να γράψουμε $k_\bullet = k_\bullet^{(X,Y)}$ αντί τού $k(X,Y)$ και $h_\bullet = h_\bullet^{(X,Y)}$ αντί τού $h(X,Y)$. Είναι προφανές ότι τα $k_\bullet^{(X,Y)}$ και $h_\bullet^{(X,Y)}$ είναι (αλυσωτώς) ομοτοπικώς ισοδύναμα υπό την έννοια τού ορισμού 3.5.10. Μάλιστα, εκ κατασκευής, ο

$$k_0 = k_0^{(X,Y)} : \mathbf{F}_0(X,Y) = S_0(X\times Y;R) \longrightarrow (S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_0 = \mathbf{E}_0(X,Y),$$

ο οριζόμενος ύστερα από γραμμική επέκταση τής (8.12), είναι αυτός που επάγει τον ισομορφισμό (8.15) (τον παριστάμενο ως σύνθεση των (8.16) και (8.17)). □

8.2.6 Σημείωση (Συγκεκριμένες κατασκευές κατάλληλων $k_\bullet$ και $h_\bullet$). Ας υποθέσουμε ότι $n\in\mathbb{N}_0$ και ότι $0\leqslant p,q\leqslant n$, και ας θεωρήσουμε τις συσχετικές απεικονίσεις

$$\begin{array}{ll} a_p : \Delta_p \longrightarrow \Delta_n & \qquad b_q : \Delta_q \longrightarrow \Delta_n \\ \mathbf{e}_j^p \longmapsto \mathbf{e}_j^n,\ 0\leqslant j\leqslant p, & \qquad \mathbf{e}_j^q \longmapsto \mathbf{e}_{n-q+j}^n,\ 0\leqslant j\leqslant q.\end{array}$$

(Πρβλ. πρόταση D.1.12.) Εάν W είναι ένας τοπολογικός χώρος και $\sigma\in\mathfrak{V}_n(W)$, τότε

$$\sigma' := \sigma\circ a_p \in \mathfrak{V}_p(W),\ \ \sigma'' := \sigma\circ b_q\in\mathfrak{V}_q(W).$$

(Είθισται να λέγεται ότι το σ' είναι η *p-διάστατη εμπρόσθια πλευρά* τού σ και το σ'' η *q-διάστατη οπίσθια πλευρά* τού σ.) Δοθέντων δυο τοπολογικών χώρων X και Y, ορίζεται ένας αλυσωτός μετασχηματισμός

$$\mathsf{AW}_\bullet : S_\bullet(X\times Y;R) \longrightarrow (S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet\,,$$

όπου ο AW_n, $n \in \mathbb{N}_0$, είναι ο ομομορφισμός R-μοδίων που προκύπτει ύστερα από γραμμική επέκταση τής

$$\boxed{\mathfrak{V}_n(X \times Y) \ni \sigma \longmapsto \sum_{\{(p,q)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 : p+q=n\}} (\mathrm{pr}_1 \circ \sigma \circ a_p) \otimes (\mathrm{pr}_2 \circ \sigma \circ b_q) \in (S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R))_n}$$

επί ολοκλήρου τού $S_n(X \times Y; R)$. Αυτός ο (φυσικός) αλυσωτός μετασχηματισμός καλείται **μετασχηματισμός των Alexander και Whitney**[20] και μπορεί να παίξει τον ρόλο ενός (κατάλληλου) $k_\bullet$ στο θεώρημα 8.2.5. (Εν τοιαύτη περιπτώσει, ο αντίστοιχος “$h_\bullet$” κατασκευάζεται με τη βοήθεια των λεγόμενων *(p,q)-αναμείξεων/ανακατωμάτων* (*(p,q)-shuffles*[21]).)

8.2.7 Πρόταση. *Εάν $(X, A), (Y, B)$ είναι δυο τοπολογικά ζεύγη και $k_\bullet = k_\bullet^{(X,Y)}$, $h_\bullet = h_\bullet^{(X,Y)}$ όπως στο θεώρημα 8.2.5, τότε υφίσταται μεταθετικό διάγραμμα αλυσωτών συμπλόκων και αλυσωτών μετασχηματισμών*

$$\begin{tikzcd}
(S_\bullet(A;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R)+S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(B;R))_\bullet \arrow[r, tail] \arrow[d, bend right, "h'_\bullet"'] & (S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet \arrow[r] \arrow[d, bend right, "h_\bullet"'] & (S_\bullet(X,A;R)\otimes_R S_\bullet(Y,B;R))_\bullet \arrow[d, bend right, "h''_\bullet"'] \\
S_\bullet(A\times Y;R)+S_\bullet(X\times B;R) \arrow[r] \arrow[u, bend right, "k'_\bullet"'] & S_\bullet(X\times Y;R) \arrow[r] \arrow[u, bend right, "k_\bullet"'] & \dfrac{S_\bullet(X\times Y;R)}{S_\bullet(A\times Y;R)+S_\bullet(X\times B;R)} \arrow[u, bend right, "k''_\bullet"']
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές, όπου οι $k'_\bullet, h'_\bullet, k''_\bullet, h''_\bullet$ επάγονται από τους $k_\bullet, h_\bullet$ και

$$k'_\bullet \circ h'_\bullet \simeq \mathrm{id}_{(S_\bullet(A;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R)+S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(B;R))_\bullet}, \qquad h'_\bullet \circ k'_\bullet \simeq \mathrm{id}_{S_\bullet(A\times Y;R)+S_\bullet(X\times B;R)},$$

$$k''_\bullet \circ h''_\bullet \simeq \mathrm{id}_{(S_\bullet(X,A;R)\otimes_R S_\bullet(Y,B;R))_\bullet}, \qquad h''_\bullet \circ k''_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\frac{S_\bullet(X\times Y;R)}{S_\bullet(A\times Y;R)+S_\bullet(X\times B;R)}}.$$

Αποδειξη. Εφαρμόζοντας τη φυσικότητα τού $h_\bullet$ στις ενθέσεις $A \hookrightarrow X$ και $B \hookrightarrow Y$ λαμβάνουμε ενθέσεις (σε επίπεδο αλυσωτών συμπλόκων)

$$h_\bullet((S_\bullet(A;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet) \hookrightarrow S_\bullet(A \times Y; R),$$
$$h_\bullet((S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(B;R))_\bullet) \hookrightarrow S_\bullet(X \times B; R),$$

(και παρομοίως για τον $k_\bullet$). Γι’ αυτόν τον λόγο οι $k_\bullet$ και $h_\bullet$ επάγουν τους $k'_\bullet, h'_\bullet$ (μέσω περιορισμού) και τους $k''_\bullet, h''_\bullet$ (μέσω μεταβάσεως στα αντίστοιχα πηλικοσύμπλοκα). Επειδή οι ομοτοπίες

$$k_\bullet \circ h_\bullet \simeq \mathrm{id}_{(S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet} \quad \text{και} \quad h_\bullet \circ k_\bullet \simeq \mathrm{id}_{S_\bullet(X\times Y;R)}$$

είναι φυσικές (και ο $h_\bullet \circ k_\bullet$ στέλνει το

$$S_\bullet(A \times Y; R) + S_\bullet(X, B; R)$$

να απεικονισθεί στον εαυτό του), οι συνθέσεις $k'_\bullet \circ h'_\bullet$ και $h'_\bullet \circ k'_\bullet$ (και, κατ’ επέκταση, και οι συνθέσεις $k''_\bullet \circ h''_\bullet$ και $h''_\bullet \circ k''_\bullet$) είναι ομότοπες των αντίστοιχων ταυτοτικών. □

[20] Βλ. [61], VI.12.26, Ex. 1, σελ. 184, [87], Satz 12.2.9, σελ. 312, [84], Theorem 12.25, σελ.398-400, και [91], Problem 1, σελ. 240.

[21] Βλ. [61], VI.12.26, Ex. 2, σελ. 184, και [91], Problem 1, σελ. 240. (Πρωτοεισήχθησαν στη σελ. 64 τού άρθρου των S. Eilenberg & S. Mac Lane: *On the groups* H(Π, n) I, Annals of Mathematics, second series, **58** (1953), no. 1, 55-106.)

8.2.8 Πόρισμα. *Ας υποτεθεί ότι* $(X, A), (Y, B)$ *είναι δυο τοπολογικά ζεύγη,*

$$h''_\bullet : (S_\bullet(X, A; R) \otimes_R S_\bullet(Y, B; R))_\bullet \longrightarrow \frac{S_\bullet(X\times Y;R)}{S_\bullet(A\times Y;R)+S_\bullet(X\times B;R)} \tag{8.21}$$

η αλυσωτή ισοδυναμία όπως έχει ορισθεί στην πρόταση 8.2.7 *και*

$$\frac{S_\bullet(X\times Y;R)}{S_\bullet(A\times Y;R)+S_\bullet(X\times B;R)} \longrightarrow \frac{S_\bullet(X\times Y;R)}{S_\bullet(A\times Y\cup X\times B;R)} =: S_\bullet((X, A) \times (Y, B); R) \tag{8.22}$$

ο αλυσωτός μετασχηματισμός ο επαγόμενος μέσω τής ενθέσεως

$$S_\bullet(A \times Y; R){+}S_\bullet(X \times B; R) \hookrightarrow S_\bullet(A \times Y \cup X \times B; R).$$

Εάν η

$$(X \times Y, A \times Y, X \times B)$$

είναι μια εκτμητική τριάδα για την $(H^{\text{sing.}}_\bullet, \partial^{\text{sing.}}_\bullet)$ (βλ. εδ. 7.2.1), *τότε η σύνθεση*

$$(S_\bullet(X, A; R) \otimes_R S_\bullet(Y, B; R))_\bullet \longrightarrow S_\bullet((X, A) \times (Y, B); R)$$

των (8.21) *και* (8.22) *επάγει ισομορφισμούς* R*-μοδίων*

$$H_n((S_\bullet(X, A; R) \otimes_R S_\bullet(Y, B; R))_\bullet) \cong H_n(S_\bullet((X, A) \times (Y, B); R)) \tag{8.23}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Αποδειξη. Επειδή ο αλυσωτός μετασχηματισμός (8.21) αποτελεί αλυσωτή ισοδυναμία, η πρόταση 3.5.11 μας πληροφορεί ότι υφίστανται ισομορφισμοί R-μοδίων

$$H_n((S_\bullet(X, A; R) \otimes_R S_\bullet(Y, B; R))_\bullet) \cong H_n\left(\frac{S_\bullet(X\times Y;R)}{S_\bullet(A\times Y;R)+S_\bullet(X\times B;R)}\right) \tag{8.24}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Το να είναι η

$$(X \times Y, A \times Y, X \times B)$$

μια εκτμητική τριάδα για τη θεωρία ιδιάζουσας ομολογίας ισοδυναμεί (επί τη βάσει τής συνθήκης (vi) τού λήμματος[22] 7.2.10) με το ότι μέσω τού αλυσωτού μετασχηματισμού (8.22) επάγονται ισομορφισμοί R-μοδίων

$$H_n\left(\frac{S_\bullet(X\times Y;R)}{S_\bullet(A\times Y;R)+S_\bullet(X\times B;R)}\right) \cong H_n(S_\bullet((X, A) \times (Y, B); R)) \tag{8.25}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Για τον σχηματισμό των (8.23) αρκεί να ληφθεί η σύνθεση των (8.24) και (8.25). □

8.2.9 Παρατήρηση. Όταν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι *κληρονομικός*, η ύπαρξη των ισομορφισμών (8.25) *ισοδυναμεί* (λόγω τού θεωρήματος[23] 4.2.17) με το ότι ο αλυσωτός μετασχηματισμός (8.22) αποτελεί αφ' εαυτού μια αλυσωτή ισοδυναμία.

[22] Αρκεί κανείς στη θέση των εκεί παρατεθέντων X, A, B να θεωρήσει τα $X \times Y$, $A \times Y$ και $X \times B$, αντιστοίχως.

[23] Τούτο έγκειται στο ότι τα μετέχοντα αλυσωτά σύμπλοκα είναι ελεύθερα και, κατ' επέκταση, προβολικά.

8.3 ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΚΔΟΧΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ KÜNNETH

Τώρα πλέον ο κύκλος των απαραίτητων προεργασιών για το πώς κανείς καταλήγει στις τοπολογικές εκδοχές τού θεωρήματος τού Künneth (ως προς τη θεωρία ιδιάζουσας ομολογίας) έχει κλείσει. Για το θεώρημα 8.3.1 παρατίθενται εκ των προτέρων οι εξής συνθήκες:

Συνθήκες	για τον δακτύλιο R	για τα αλυσωτά σύμπλοκα $S_\bullet(X;R)$ και $S_\bullet(Y;R)$
Α	τυχών	οι $B_n^{\text{sing.}}(X;R) := B_n(S_\bullet(X;R))$ είναι ισόπεδοι και οι $B_n^{\text{sing.}}(Y;R) := B_n(S_\bullet(Y;R))$ είναι προβολικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$
Β	Π.Κ.Ι.	———
Γ	κληρονομικός	$H_n(\mathrm{Tor}_1^R(S_\bullet(X;R), S_\bullet(Y;R))_\bullet) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z}.$

8.3.1 Θεώρημα («Τοπολογική εκδοχή θεωρήματος Künneth για μοδίους ομολογίας καρτεσιανού γινομένου δύο χώρων»). *Έστω ότι X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι και R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος. Εάν για τον R και για τα $S_\bullet(X;R)$ και $S_\bullet(Y;R)$ ικανοποιείται τουλάχιστον μία εκ των ανωτέρω συνθηκών* **Α**, **Β**, **Γ**, *τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υφίσταται διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow (H_\bullet^{\text{sing.}}(X;R) \otimes_R H_\bullet^{\text{sing.}}(Y;R))_n \hookrightarrow H_n^{\text{sing.}}(X \times Y;R) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_\bullet^{\text{sing.}}(X;R), H_\bullet^{\text{sing.}}(Y;R))_{n-1} \longrightarrow \{0\}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, οπότε

$$\boxed{\begin{aligned} H_n^{\text{sing.}}(X \times Y;R) \cong & \left(\bigoplus_{p+q=n} (H_p^{\text{sing.}}(X;R) \otimes_R H_q^{\text{sing.}}(Y;R))\right) \\ & \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p^{\text{sing.}}(X;R), H_q^{\text{sing.}}(Y;R))\right). \end{aligned}}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα 8.2.5 των Eilenberg και Zilber,

$$H_n^{\text{sing.}}(X \times Y;R) \cong H_n((S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet).$$

Αρκεί λοιπόν (ανά συνθήκη) να εφαρμοσθούν τα 6.2.6, 6.2.8 και 6.2.11 για τα αλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{C}_\bullet = S_\bullet(X;R)$ και $\mathbf{D}_\bullet = S_\bullet(Y;R)$. □

8.3.2 Πόρισμα (Χαρακτηριστική Euler και αριθμοί Betti τού $X \times Y$). *Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, τέτοιοι ώστε καθένας εκ των X, Y και $X \times Y$ να διαθέτει μόνον πεπερασμένου πλήθους μη τετριμμένες ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας και καθεμιά εξ αυτών (των μη τετριμμένων) να είναι πεπερασμένως παραγόμενη, τότε για τη χαρακτηριστική Euler και για τους αριθμούς Betti των X, Y και $X \times Y$*

υφίστανται οι σχέσεις:

$$\boxed{\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)} \tag{8.26}$$

και

$$\boxed{b_n(X \times Y) = \sum_{p+q=n} b_p(X) b_q(Y).} \tag{8.27}$$

Αποδειξη. Επειδή ο $\mathbb{Z}$ είναι Π.Κ.Ι., υφίσταται πάντοτε η βραχεία ακριβής ακολουθία τού θεωρήματος 8.3.1. Εφαρμόζοντας για αυτήν το λήμμα 3.4.4 λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\text{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(H_n^{\text{sing.}}(X \times Y; \mathbb{Z})) = & \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : p+q=n} \text{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(H_p^{\text{sing.}}(X; \mathbb{Z}) \otimes_R H_q^{\text{sing.}}(Y; \mathbb{Z})) \\ & + \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : p+q=n-1} \text{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(\text{Tor}_1^R(H_p^{\text{sing.}}(X; \mathbb{Z}), H_q^{\text{sing.}}(Y; \mathbb{Z}))).\end{aligned}$$

Επειδή (κατά το (5.23))

$$\text{Tor}_1^R(H_p^{\text{sing.}}(X; \mathbb{Z}), H_q^{\text{sing.}}(Y; \mathbb{Z})) \cong \text{Tor}_1^R(\text{tors}(H_p^{\text{sing.}}(X; \mathbb{Z})), \text{tors}(H_q^{\text{sing.}}(Y; \mathbb{Z}))) \tag{8.28}$$

και καθεμιά εκ των $\text{tors}(H_p^{\text{sing.}}(X; \mathbb{Z}))$ και $\text{tors}(H_q^{\text{sing.}}(Y; \mathbb{Z}))$ είναι είτε τετριμμένη είτε μια πεπερασμένη αβελιανή (ήτοι ισόμορφη με το ευθύ άθροισμα πεπερασμένου πλήθους πεπερασμένων κυκλικών ομάδων εχουσών τάξη κάποια δύναμη πρώτου αριθμού, βλ. θεώρημα 2.6.32), και $\text{Tor}_1^R(\mathbb{Z}_{p^{l_1}}, \mathbb{Z}_{p^{l_2}}) \cong \mathbb{Z}_{p^{\min\{l_2,l_2\}}}$ για κάθε πρώτο αριθμό p και για οιουσδήποτε $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$, η (8.28) αποτελεί κατ' ανάγκην μια *ομάδα στρέψεως*, οπότε

$$\text{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(\text{Tor}_1^R(H_p^{\text{sing.}}(X; \mathbb{Z}), H_q^{\text{sing.}}(Y; \mathbb{Z}))) = 0, \;\; \forall (p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0.$$

Από την άλλη μεριά, το θεώρημα 4.4.7 μας πληροφορεί ότι

$$\text{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(H_p^{\text{sing.}}(X; \mathbb{Z}) \otimes_R H_q^{\text{sing.}}(Y; \mathbb{Z})) = \text{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(H_p^{\text{sing.}}(X; \mathbb{Z})) \cdot \text{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(H_q^{\text{sing.}}(Y; \mathbb{Z}))$$

για κάθε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, οπότε η αρχική ισότητα γίνεται

$$\begin{aligned} & b_n(X \times Y) = \text{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(H_n^{\text{sing.}}(X \times Y; \mathbb{Z}) \\ & = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : p+q=n} \Big(\text{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(H_p^{\text{sing.}}(X; \mathbb{Z})) \cdot \text{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(H_q^{\text{sing.}}(Y; \mathbb{Z})) \Big) \\ & = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : p+q=n} b_p(X) b_q(Y) \end{aligned}$$

και η (8.27) είναι αληθής. Εξάλλου,

$$\begin{aligned} & \chi(X \times Y) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-1)^n \, b_n(X \times Y) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : p+q=n} (-1)^n \, b_p(X) b_q(Y) \\ & = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} (-1)^{p+q} b_p(X) b_q(Y) = \left(\sum_{p \in \mathbb{N}_0} (-1)^p \, b_p(X) \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}_0} (-1)^q \, b_q(Y) \right) \\ & = \chi(X)\chi(Y), \end{aligned}$$

επαληθεύοντας *και* την (8.26). □

8.3.3 Πόρισμα (Κριτήριο προσανατολισιμότητας καρτεσιανού γινομένου). *Δοθέντων δυο συνεκτικών κλειστών πολυπτυγμάτων X και Y, ισχύει η ακόλουθη αμφίπλευρη συνεπαγωγή:*

$$\boxed{\text{Το } X \times Y \text{ είναι προσανατολίσιμο} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{αμφότερα τα } X \text{ και } Y \\ \text{είναι προσανατολίσιμα} \end{array}\right].}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το X έχει διάσταση d και το Y διάσταση d'. Τότε το θεώρημα 8.3.1 δίδει

$$\begin{aligned} H^{\text{sing.}}_{d+d'}(X \times Y; \mathbb{Z}) \cong & \left(\bigoplus_{p+q=d+d'} (H^{\text{sing.}}_p(X;\mathbb{Z}) \otimes_R H^{\text{sing.}}_q(Y;\mathbb{Z})) \right) \\ & \oplus \left(\bigoplus_{p+q=d+d'-1} \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1 (H^{\text{sing.}}_p(X;\mathbb{Z}), H^{\text{sing.}}_q(Y;\mathbb{Z})) \right). \end{aligned}$$

Βάσει τού θεωρήματος E.1.16 οι j-οστές ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας τού X (και αντιστοίχως, τού Y) είναι τετριμμένες όταν $j > d$ (και αντιστοίχως, όταν $j > d'$). Επομένως, ο μόνος όρος τού πρώτου ευθέος προσθετέου που θα μπορούσε να είναι μη τετριμμένος είναι ο $H^{\text{sing.}}_d(X;\mathbb{Z}) \otimes_R H^{\text{sing.}}_{d'}(Y;\mathbb{Z})$. Από την άλλη μεριά, εκ νέου λόγω τού θεωρήματος E.1.16, τα μόνα ζεύγη ιδιάζουσας ομολογίας εντός των $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(..,..)$ (στον δεύτερο ευθύ προσθετέο), τα οποία θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε μη τετριμμένα Tor, είναι αυτά στα οποία υπεισέρχεται τουλάχιστον μία εκ των $H^{\text{sing.}}_d(X;\mathbb{Z})$ και $H^{\text{sing.}}_{d'}(Y;\mathbb{Z})$. Επειδή όμως (σύμφωνα με το θεώρημα E.2.7) αυτές είναι ομάδες χωρίς στρέψη, η (5.23) μας πληροφορεί ότι

$$H^{\text{sing.}}_{d+d'}(X \times Y; \mathbb{Z}) \cong H^{\text{sing.}}_d(X;\mathbb{Z}) \otimes_R H^{\text{sing.}}_{d'}(Y;\mathbb{Z}). \tag{8.29}$$

Υπολείπεται να εφαρμοσθεί στο (8.29) το κριτήριο τού θεωρήματος E.2.9 (b). □

8.3.4 Θεώρημα («Τοπολογική εκδοχή θεωρήματος Künneth για μοδίους ομολογίας καρτεσιανού γινομένου δύο τοπ. ζευγών»). *Έστω ότι X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, και ότι η $(X \times Y, A \times Y, X \times B)$ είναι μια εκτμητική τριάδα για την $(H^{\text{sing.}}_\bullet, \partial^{\text{sing.}}_\bullet)$. Εάν για τον R και για τα $S_\bullet(X, A; R)$ και $S_\bullet(Y, B; R)$ ικανοποιείται τουλάχιστον μία εκ των ανωτέρω συνθηκών* **Α, Β, Γ** *(δηλαδή όταν σε αυτές τα $S_\bullet(X;R)$ και $S_\bullet(Y;R)$ αντικατασταθούν με τα $S_\bullet(X, A; R)$ και $S_\bullet(Y, B; R)$, αντιστοίχως), τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υφίσταται διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow (H^{\text{sing.}}_\bullet(X, A; R) \otimes_R H^{\text{sing.}}_\bullet(Y, B; R))_n \hookrightarrow H^{\text{sing.}}_n((X, A) \times (Y, B); R) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}^R_1(H^{\text{sing.}}_\bullet(X, A; R), H^{\text{sing.}}_\bullet(Y, B; R))_{n-1} \longrightarrow \{0\}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, οπότε

$$\boxed{\begin{aligned} H_n^{\text{sing.}}((X,A)\times(Y,B);R) \cong {}& \left(\bigoplus_{p+q=n}(H_p^{\text{sing.}}(X,A;R)\otimes_R H_q^{\text{sing.}}(Y,B;R))\right) \\ &\oplus\left(\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1^R(H_p^{\text{sing.}}(X,A;R),H_q^{\text{sing.}}(Y,B;R))\right). \end{aligned}}$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το ότι (κατά το πόρισμα 8.2.8) υφίσταται ισομορφισμός μεταξύ των R-μοδίων $H_n((S_\bullet(X,A;R)\otimes_R S_\bullet(Y,B;R))_\bullet)$ και

$$H_n^{\text{sing.}}((X,A)\times(Y,B);R) := H_n(S_\bullet((X,A)\times(Y,B);R))$$

για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ και από την εφαρμογή των 6.2.6, 6.2.8 και 6.2.11 για τα αλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{C}_\bullet = S_\bullet(X,A;R)$ και $\mathbf{D}_\bullet = S_\bullet(Y,B;R)$. □

8.3.5 Θεώρημα («Τοπολογική εκδοχή θεωρήματος Künneth για μοδίους ομολογίας καρτεσιανού γινομένου με τυχόντες συντελεστές»). *Έστω ότι X,Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, $A\subseteq X$, $B\subseteq Y$, και ότι η $(X\times Y, A\times Y, X\times B)$ είναι μια εκτμητική τριάδα για την $(H_\bullet^{\text{sing.}},\partial_\bullet^{\text{sing.}})$. Εάν υποτεθεί ότι M,N είναι δυο R-μόδιοι, ο R κληρονομικός και $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)\cong\{0\}$, τότε για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ υφίσταται διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\{0\}\longrightarrow (H_\bullet^{\text{sing.}}(X,A;M)\otimes_R H_\bullet^{\text{sing.}}(Y,B;N))_n \hookrightarrow H_n^{\text{sing.}}((X,A)\times(Y,B);M\otimes_R N) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_\bullet^{\text{sing.}}(X,A;M),H_\bullet^{\text{sing.}}(Y,B;N))_{n-1}\longrightarrow\{0\}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, οπότε

$$\boxed{\begin{aligned} H_n^{\text{sing.}}((X,A)\times(Y,B);M\otimes_R N) \cong {}& \left(\bigoplus_{p+q=n}(H_p^{\text{sing.}}(X,A;M)\otimes_R H_q^{\text{sing.}}(Y,B;N))\right) \\ &\oplus\left(\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1^R(H_p^{\text{sing.}}(X,A;M),H_q^{\text{sing.}}(Y,B;N))\right). \end{aligned}}$$

Ιδιαιτέρως, για[24] $A=B=\varnothing$ αυτός ο ισομορφισμός απλουστεύεται ως ακολούθως:

$$\boxed{\begin{aligned} H_n^{\text{sing.}}(X\times Y;M\otimes_R N) \cong {}& \left(\bigoplus_{p+q=n}(H_p^{\text{sing.}}(X;M)\otimes_R H_q^{\text{sing.}}(Y;N))\right) \\ &\oplus\left(\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1^R(H_p^{\text{sing.}}(X;M),H_q^{\text{sing.}}(Y;N))\right). \end{aligned}}$$

[24] Εν τοιαύτη περιπτώσει, η τριάδα $(X\times Y,\varnothing,\varnothing)$ είναι (προδήλως) *πάντοτε* εκτμητική.

Αποδειξη. Έπεται άμεσα από το ότι (κατά το πόρισμα 8.2.8) υφίσταται ισομορφισμός μεταξύ των R-μοδίων $H_n((S_\bullet(X,A;R)\otimes_R S_\bullet(Y,B;R))_\bullet)$ και

$$H_n^{\text{sing.}}((X,A)\times(Y,B);R) := H_n(S_\bullet((X,A)\times(Y,B);R))$$

για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ και από την εφαρμογή τού θεωρήματος 6.2.13 για τα (ελεύθερα και, κατ' επέκταση, προβολικά *και* ισόπεδα) αλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{C}_\bullet = S_\bullet(X,A;R)$ και $\mathbf{D}_\bullet = S_\bullet(Y,B;R)$. □

8.3.6 Πόρισμα. *Έστω ότι X,Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, $A\subseteq X, B\subseteq Y$, και ότι η $(X\times Y, A\times Y, X\times B)$ είναι μια εκτμητική τριάδα για την $(H_\bullet^{\text{sing.}},\partial_\bullet^{\text{sing.}})$. Εάν V,W είναι δυο διανυσματικοί χώροι ορισμένοι υπεράνω ενός σώματος K, τότε για κάθε $n\in\mathbb{Z}$,*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}((X,A)\times(Y,B);V\otimes_K W)\cong\bigoplus_{p+q=n}(H_p^{\text{sing.}}(X,A;V)\otimes_K H_q^{\text{sing.}}(Y,B;W)).}$$

Ιδιαιτέρως, για $A=B=\varnothing$ αυτός ο ισομορφισμός απλουστεύεται ως ακολούθως:

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X\times Y;V\otimes_K W)\cong\bigoplus_{p+q=n}(H_p^{\text{sing.}}(X;V)\otimes_K H_q^{\text{sing.}}(Y;W)).}$$

Για την κατάλληλη διαμόρφωση τής *πλέον γενικής* τοπολογικής εκδοχής τού θεωρήματος Künneth (με τυχόντες συντελεστές) *και* για μοδίους (ιδιάζουσας) *συνομολογίας* (βλ. θεώρημα 8.3.7) προτάσσονται ορισμένες συνθήκες:

Συνθήκες	**για τον δακτύλιο R**	**για τα αλυσωτά σύμπλοκα κ.ά.**
Α	κληρονομικός	αμφότερα τα $S_\bullet(X,A;R)$ και $S_\bullet(Y,B;R)$ είναι πεπερασμένου τύπου
Β	κληρονομικός και ναιτεριανός	τα $H_\bullet^{\text{sing.}}(X,A;R)$ και $S_\bullet(Y,B;R)$ είναι πεπερασμένου τύπου
Γ	Π.Κ.Ι.	αμφότερα τα $H_\bullet^{\text{sing.}}(X,A;R)$ και $H_\bullet^{\text{sing.}}(Y,B;R)$ είναι πεπερασμένου τύπου
Δ	Π.Κ.Ι.	το $H_\bullet^{\text{sing.}}(Y,B;R)$ είναι πεπερασμένου τύπου και ο N είναι πεπερασμένως παραγόμενος

8.3.7 Θεώρημα («Τοπολογική εκδοχή θεωρήματος Künneth για μοδίους ιδιάζουσας συνομολογίας καρτεσιανού γινομένου με τυχόντες συντελεστές»). *Έστω ότι X,Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, $A\subseteq X, B\subseteq Y$, και ότι η $(X\times Y, A\times Y, X\times B)$ είναι μια εκτμητική τριάδα για την $(H_\bullet^{\text{sing.}},\partial_\bullet^{\text{sing.}})$. Εάν υποτεθεί ότι M,N είναι δυο R-μόδιοι με $\operatorname{Tor}_1^R(M,N)\cong\{0\}$ και ότι πληρούται τουλάχιστον μία εκ των ανωτέρω συνθηκών* **Α**, **Β**, **Γ**, **Δ** *(για τον R και τα μετέχοντα αλυσωτά σύμπλοκα κ.ά.), τότε για* *κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υφίσταται διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow (H^{\bullet}_{\text{sing.}}(X,A;M) \otimes_R H^{\bullet}_{\text{sing.}}(Y,B;N))^n \hookrightarrow H^n_{\text{sing.}}((X,A)\times(Y,B);M\otimes_R N) \twoheadrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H^{\bullet}_{\text{sing.}}(X,A;M), H^{\bullet}_{\text{sing.}}(Y,B;N))^{n+1} \longrightarrow \{0\}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, οπότε

$$\boxed{\begin{aligned} H^n_{\text{sing.}}((X,A)\times(Y,B);M\otimes_R N) \cong &\left(\bigoplus_{p+q=n} (H^p_{\text{sing.}}(X,A;M)\otimes_R H^q_{\text{sing.}}(Y,B;N))\right) \\ &\oplus \left(\bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{Tor}_1^R(H^p_{\text{sing.}}(X,A;M), H^q_{\text{sing.}}(Y,B;N))\right). \end{aligned}}$$

Ιδιαιτέρως, για $A = B = \varnothing$ αυτός ο ισομορφισμός απλουστεύεται ως ακολούθως:

$$\boxed{\begin{aligned} H^n_{\text{sing.}}(X\times Y;M\otimes_R N) \cong &\left(\bigoplus_{p+q=n} (H^p_{\text{sing.}}(X;M)\otimes_R H^q_{\text{sing.}}(Y;N))\right) \\ &\oplus \left(\bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{Tor}_1^R(H^p_{\text{sing.}}(X;M), H^q_{\text{sing.}}(Y;N))\right). \end{aligned}}$$

Αποδειξη. Επειδή ο δακτύλιος αναφοράς μας R είναι (και στις 4 περιπτώσεις) *κληρονομικός*, το ότι η $(X\times Y, A\times Y, X\times B)$ είναι μια εκτμητική τριάδα (για την θεωρία ιδιάζουσας ομολογίας) *ισοδυναμεί* (σύμφωνα με το πόρισμα 8.2.8 και την παρατήρηση 8.2.9) με το ότι υφίσταται αλυσωτή ισοδυναμία

$$(S_\bullet(X,A;R)\otimes_R S_\bullet(Y,B;R))_\bullet \longrightarrow S_\bullet((X,A)\times(Y,B);R).$$

Θεωρώντας τόν (επεκτεταμένο, ανταλλοίωτο) συναρτητή $\mathrm{Hom}_R(-, M\otimes_R N)$ (σε επίπεδο αλυσωτών και συναλυσωτών συμπλόκων, βλ. A.2.16), παρατηρούμε ότι υφίσταται συναλυσωτή ισοδυναμία[25]

$$\mathrm{Hom}_R((S_\bullet(X,A;R)\otimes_R S_\bullet(Y,B;R))_\bullet, M\otimes_R N)^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(S_\bullet((X,A)\times(Y,B);R), M\otimes_R N)^\bullet,$$

οπότε η πρόταση 3.5.13 μας πληροφορεί ότι

$$H^n(\mathrm{Hom}_R((S_\bullet(X,A;R)\otimes_R S_\bullet(Y,B;R))_\bullet, M\otimes_R N)^\bullet) \cong H^n_{\text{sing.}}((X,A)\times(Y,B);M\otimes_R N),$$

όπου[26]

$$H^n_{\text{sing.}}((X,A)\times(Y,B);M\otimes_R N) := H^n(\mathrm{Hom}_R(S_\bullet((X,A)\times(Y,B);R), M\otimes_R N)^\bullet)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αρκεί λοιπόν να εφαρμοσθεί το θεώρημα 6.3.22 για τα αλυσωτά σύμπλοκα[27] $\mathbf{C}_\bullet = S_\bullet(X,A;R)$ και $\mathbf{D}_\bullet = S_\bullet(Y,B;R)$. □

[25] Αρκεί να χρησιμοποιηθεί η εκδοχή τού πορίσματος A.2.15 για *ανταλλοίωτους* συναρτητές και *συναλυσωτές ισοδυναμίες* αυτού τού είδους.

[26] $S^\bullet((X,A)\times(Y,B);M\otimes_R N) := \mathrm{Hom}_R(S_\bullet((X,A)\times(Y,B);R), M\otimes_R N))$.

[27] Σημειωτέον ότι αυτά τα αλυσωτά σύμπλοκα είναι εκ κατασκευής ελεύθερα (και, ως εκ τούτου, *και* προβολικά).

8.3.8 Πόρισμα. *Έστω ότι X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, $A \subseteq X, B \subseteq Y$, και ότι η $(X \times Y, A \times Y, X \times B)$ είναι μια εκτμητική τριάδα για την $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$. Εάν V, W είναι δυο διανυσματικοί χώροι ορισμένοι υπεράνω ενός σώματος K, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\boxed{H^n_{\text{sing.}}((X,A)\times(Y,B);V\otimes_K W) \cong \bigoplus_{p+q=n} (H^p_{\text{sing.}}(X,A;V)\otimes_K H^q_{\text{sing.}}(Y,B;W)).}$$

Ιδιαιτέρως, για $A = B = \varnothing$ αυτός ο ισομορφισμός απλουστεύεται ως ακολούθως:

$$\boxed{H^n_{\text{sing.}}(X\times Y;V\otimes_K W) \cong \bigoplus_{p+q=n} (H^p_{\text{sing.}}(X;V)\otimes_K H^q_{\text{sing.}}(Y;W)).}$$

8.4 ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Στην τελευταία ενότητα παρατίθενται διάφορα παραδείγματα (καρτεσιανών γινομένων ζευγών κλειστών συνεκτικών πολυπτυγμάτων) για τα οποία εφαρμόζονται το θεώρημα 8.3.1 και το πόρισμα 8.3.2 «εν τη πράξει».

▸ **Παραδείγματα «χαμηλών» διαστάσεων.** Ξεκινούμε θεωρώντας τό καρτεσιανό γινόμενο δύο κλειστών συνεκτικών επιφανειών και δύο χώρων φακού.

8.4.1 Εφαρμογή. *Εάν $(g, g') \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, τότε για τους μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας τού τετραδιάστατου προσανατολίσιμου λείου πολυπτύγματος $X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}$ με συντελεστές ειλημμένους από μια Π.Κ.Ι. R έχουμε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}\times X_{g'}^{\text{or.}};R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0,4\}, \\ R^{2(g+g')}, & \text{όταν } n \in \{1,3\}, \\ R^{2(2gg'+1)}, & \text{όταν } n = 2, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \geqslant 5. \end{cases}}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα 8.3.1 λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}\times X_{g'}^{\text{or.}};R) &\cong \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (H_k^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};R)\otimes_R H_{n-k}^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}};R)) \\ &\oplus \left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Tor}_1^R(H_k^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}};R), H_{n-k-1}^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}};R))\right) \end{aligned}$$

και (λόγω των (7.25))

$$\begin{aligned} H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}\times X_{g'}^{\text{or.}};R) &\cong (R\otimes_R H_n^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}};R))\oplus \operatorname{Tor}_1^R(R, H_{n-1}^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}};R)) \\ &\oplus(R^{2g}\otimes_R H_{n-1}^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}};R))\oplus \operatorname{Tor}_1^R(R^{2g}, H_{n-2}^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}};R)) \\ &\oplus(R\otimes_R H_{n-2}^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}};R))\oplus \operatorname{Tor}_1^R(R, H_{n-3}^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}};R)). \end{aligned}$$

Επειδή όλοι οι μόδιοι ομολογίας (7.25) αμφοτέρων των $X_g^{\text{or.}}$ και $X_{g'}^{\text{or.}}$ είναι ελεύθεροι, οι μόδιοι ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου αυτών είναι ωσαύτως ελεύθεροι. Επομένως τα γινόμενα στρέψεως είναι τετριμμένα και έχουμε

$$H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}; R) \cong H_n^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}}; R) \oplus (H_{n-1}^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}}; R))^{2g} \oplus_R H_{n-2}^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}}; R).$$

Ειδικότερα, για $n = 0$: $H_0^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}; R) \cong H_0^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}}; R) \underset{(7.25)}{\cong} R.$

Για $n = 1$:

$$H_1^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}; R) \cong H_1^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}}; R) \oplus (H_0^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}}; R))^{2g} \underset{(7.25)}{\cong} R^{2(g+g')}.$$

Για $n = 2$:

$$\begin{aligned} H_2^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}; R) &\cong H_2^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}}; R) \oplus (H_1^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}}; R))^{2g} \oplus_R H_0^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{or.}}; R) \\ &\underset{(7.25)}{\cong} R \oplus (R^{2g'})^{2g} \oplus R \cong R^{2(2gg'+1)}. \end{aligned}$$

Για $n \in \{3, 4\}$: Προφανώς, $H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}; R) \underset{(E.3)}{\cong} H_{4-n}^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}; R).$

Για $n \geqslant 5$: Βλ. θεώρημα E.1.16. □

8.4.2 Σημείωση. Καθεμιά εκ των κλειστών συνεκτικών επιφανειών $X_g^{\text{or.}}$ και $X_{g'}^{\text{or.}}$ μπορεί να εφοδιασθεί με *μιγαδική δομή* και να εκληφθεί ως μια **επιφάνεια Riemann** ή, ισοδυνάμως, ως μια **ομαλή αλγεβρική-μιγαδική καμπύλη**. (Τέτοιες καμπύλες γένους 0 καλούνται **ρητές**, γένους 1 καλούνται **ελλειπτικές** και γένους $\geqslant 2$ καλούνται **υπερελλειπτικές**.) Το καρτεσιανό γινόμενο $X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}$, εφοδιασμένο με την επαγόμενη μιγαδική δομή, αποτελεί ένα συμπαγές διδιάστατο μιγαδικό πολύπτυγμα ή, όπως είθισται να λέγεται, μια **ομαλή συμπαγή μιγαδική επιφάνεια**. Η ταξινόμηση των ομαλών συμπαγών μιγαδικών επιφανειών (από τη σκοπιά τής Αμφίρρητης Γεωμετρίας) γίνεται με τη βοήθεια τής λεγόμενης **διαστάσεως Kodaira** (που λαμβάνει τις τιμές $-\infty, 0, 1$ και 2). Εν προκειμένω, η διάσταση Kodaira kod$(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}})$ τής μιγαδικής επιφάνειας $X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}$ εξαρτάται από τα γένη g και g' και ισούται[28] με $-\infty$ όταν τουλάχιστον μία εκ των $X_g^{\text{or.}}$ και $X_{g'}^{\text{or.}}$ είναι ρητή, 0 όταν αμφότερες οι $X_g^{\text{or.}}$ και $X_{g'}^{\text{or.}}$ είναι ελλειπτικές, 1 όταν η μία εξ αυτών είναι ελλειπτική και η άλλη υπερελλειπτική και, τέλος, 2 όταν αμφότερες είναι υπερελλειπτικές. Επιπροσθέτως, το **γεωμετρικό γένος** (geometric genus) τής $X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}$ ισούται με gg', η **ακανονιστία της**[29] (irregularity) με $g + g'$ και **ο αριθμός αυτοδιατομής** (self-intersection number) **τού κανονιστικού της διαιρέτη** (canonical divisor) με[30] $8(g-1)(g'-1)$.

[28] Βλ. A. Beauville: *Complex Algebraic Surfaces*, London Mathematical Society, Student Texts, Vol. **34**, second edition, Cambridge University Press, 1996, Proposition VII.4, σελ. 87, και

W.P. Barth, K. Hulek, C.A.M. Peters & A. van de Ven: *Compact Complex Surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, dritte Folge, Band **4**, second edition, Springer-Verlag, 2004, Chapter V, Proposition 6.1, σελ. 200.

[29] Το **γεωμετρικό γένος** $p_g(S)$ μιας ομαλής συμπαγούς μιγαδικής επιφάνειας S είναι εξ ορισμού η διάσταση τού $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου $H^0(S, \mathscr{O}_S(K_S))$, ενώ η **ακανονιστία της** $q(S)$ είναι η διάσταση $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathscr{O}_S)$, όπου το $\mathscr{O}_S$ συμβολίζει το δράγμα δομής και το K_S τον κανονιστικό της διαιρέτη με $K_S^2 = 12(1 - q(S) + p_g(S)) - \chi(S)$.

[30] Προφανώς, $K^2_{X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}} = 12(1 - (g + g') + gg') - (2 - 2g)(2 - 2g') = 8(g-1)(g'-1)$.

8.4.3 Εφαρμογή. *Εάν $(g, g') \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$, τότε για τους μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας τού τετραδιάστατου μη προσανατολίσιμου λείου πολυπτύγματος $X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}$ ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Για κάθε Π.Κ.Ι. R χαρακτηριστικής $\neq 2$ (βλ. 1.1.11) έχουμε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = 0, \\ R^{2g+g'-1} \oplus R/2R, & \text{όταν } n = 1, \\ R^{2g(g'-1)+1} \oplus (R/2R)^{2g}, & \text{όταν } n = 2, \\ R^{g'-1} \oplus R/2R, & \text{όταν } n = 3, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \geqslant 4. \end{cases}}$$

(ii) *Υπεράνω τού σώματος $\mathbb{Z}_2$ λαμβάνουμε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } n \in \{0,4\}, \\ \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{2g+g' \text{φορές}}, & \text{όταν } n \in \{1,3\}, \\ \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{2(gg'+1) \text{ φορές}}, & \text{όταν } n = 2, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \geqslant 5. \end{cases}}$$

Απόδειξη. (i) Από το θεώρημα 8.3.1 λαμβάνουμε (λόγω τής μεταθετικής ιδιότητας των “$\otimes$” και “Tor”)

$$H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}; R) \cong H_n^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{nonor.}} \times X_g^{\text{or.}}; R)$$

$$\cong \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (H_k^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{nonor.}}; R) \otimes_R H_{n-k}^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}; R)) \oplus \left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Tor}_1^R(H_k^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{nonor.}}; R), H_{n-k-1}^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}; R)) \right)$$

και (λόγω των (7.35))

$$H_n^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{nonor.}} \times X_g^{\text{or.}}; R) \cong (R \otimes_R H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}; R)) \oplus \operatorname{Tor}_1^R(R, H_{n-1}^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}; R))$$
$$\oplus((R^{g'-1} \oplus R/2R) \otimes_R H_{n-1}^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}; R)) \oplus \operatorname{Tor}_1^R((R^{g'-1} \oplus R/2R), H_{n-2}^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}; R))$$
$$\cong H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}; R) \oplus ((R^{g'-1} \oplus R/2R) \otimes_R H_{n-1}^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}; R)) \oplus \operatorname{Tor}_1^R(R/2R, H_{n-2}^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}; R)).$$

Ειδικότερα, <u>για $n = 0$:</u> $H_0^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{nonor.}} \times X_g^{\text{or.}}; R) \cong H_0^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}}; R) \underset{(7.25)}{\cong} R.$

<u>Για $n = 1$:</u>

$$H_1^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{nonor.}} \times X_g^{\text{or.}}; R) \cong R^{2g} \oplus ((R^{g'-1} \oplus R/2R) \otimes_R R) \cong R^{2g+g'-1} \oplus R/2R.$$

<u>Για $n = 2$:</u>

$$H_2^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{nonor.}} \times X_g^{\text{or.}}; R) \cong R \oplus ((R^{g'-1} \oplus R/2R) \otimes_R R^{2g})$$
$$\cong R \oplus (R^{g'-1} \otimes_R R^{2g}) \oplus ((R/2R) \otimes_R R)^{2g}$$
$$\cong R \oplus R^{2g(g'-1)} \oplus (R/2R)^{2g} \cong R^{2g(g'-1)+1} \oplus (R/2R)^{2g}.$$

Για $n = 3$: Προφανώς,

$$H_3^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{nonor.}} \times X_g^{\text{or.}}; R) \cong \{0\} \oplus (R^{g'-1} \oplus R/2R) \otimes_R R) \oplus \{0\} \cong R^{g'-1} \oplus R/2R.$$

Για $n = 4$:

$$H_4^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{nonor.}} \times X_g^{\text{or.}}; R) \cong \{0\} \oplus \{0\} \oplus \text{Tor}_1^R(R/2R, R) \cong \{0\}.$$

Για $n \geqslant 5$: Βλ. θεώρημα E.1.16.

(ii) Επειδή το $\mathbb{Z}_2$ είναι σώμα, τα γινόμενα στρέψεως στο θεώρημα 8.3.1 είναι τετριμμένα, οπότε

$$H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z}_2) \cong H_n^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z}_2) \oplus H_{n-1}^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z}_2)^{2g} \oplus H_{n-2}^{\text{sing.}}(X_{g'}^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z}_2),$$

λαμβάνοντας

n	$H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z}_2)$	n	$H_n^{\text{sing.}}(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}; \mathbb{Z}_2)$
0	$\mathbb{Z}_2$	3	$\mathbb{Z}_2^{2g} \oplus \mathbb{Z}_2^{g'} = \mathbb{Z}_2^{2g+g'}$
1	$\mathbb{Z}_2^{g'} \oplus \mathbb{Z}_2^{2g} = \mathbb{Z}_2^{2g+g'}$	4	$\mathbb{Z}_2$
2	$\mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_2^{g'})^{2g} \oplus \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^{2(gg'+1)}$	$\geqslant 5$	$\{0\}$

Σημειωτέον ότι, παρά το γεγονός ότι το $X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}$ *δεν είναι*, σύμφωνα με το πόρισμα 8.3.3, προσανατολίσιμο (ήτοι $\mathbb{Z}$-προσανατολίσιμο), εντούτοις *είναι* $\mathbb{Z}_2$-προσανατολίσιμο. (Βλ. θεώρημα E.2.4.) Επειδή όλοι οι μόδιοι ($\mathbb{Z}_2$-διανυσματικοί χώροι) ομολογίας αμφοτέρων των $X_g^{\text{or.}}$ και $X_{g'}^{\text{or.}}$ (με συντελεστές ειλημμένους από το $\mathbb{Z}_2$) είναι ελεύθεροι, οι μόδιοι ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου αυτών είναι ωσαύτως ελεύθεροι. Επομένως τα γινόμενα στρέψεως είναι τετριμμένα και έχουμε τους ισομορφισμούς (E.3) (για το εν λόγω καρτεσιανό γινόμενο). □

8.4.4 Εφαρμογή. *Εάν p, p', q, q' είναι ακέραιοι με $0 \leqslant q < p$, $0 \leqslant q' < p'$, και* μκδ$(p, q) =$ μκδ$(p', q') = 1$, *τότε οι μόδιοι ιδιάζουσας ομολογίας τού εξαδιάστατου πολυπτύγματος $\mathbb{L}(p, q) \times \mathbb{L}(p', q')$ (ήτοι τού καρτεσιανού γινομένου δύο χώρων φακού, βλ.* B.4.8) *δεν εξαρτώνται από τα q, q' και για αυτούς ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Για κάθε Π.Κ.Ι. R με $p \cdot 1_R \neq 0_R$ έχουμε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p, q) \times \mathbb{L}(p', q'); R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0, 6\}, \\ (R/pR) \oplus (R/p'R), & \text{όταν } n \in \{1, 4\}, \\ R/(pR + p'R), & \text{όταν } n = 2, \\ R \oplus R \oplus (R/(pR + p'R)), & \text{όταν } n = 3, \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

(ii) *Εάν υποτεθεί ότι ο p είναι πρώτος αριθμός, τότε υπεράνω τού σώματος $\mathbb{Z}_p$ λαμ-*

βάνουμε

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q)\times\mathbb{L}(p',q');\mathbb{Z}_p)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_{p'}, & \text{όταν } n\in\{0,6\},\\ \mathbb{Z}_{p'}\oplus\mathbb{Z}_{p'}, & \text{όταν } n\in\{1,5\},\\ \mathbb{Z}_{p'}\oplus\mathbb{Z}_{p'}\oplus\mathbb{Z}_{p'}, & \text{όταν } n\in\{2,4\},\\ \mathbb{Z}_{p'}\oplus\mathbb{Z}_{p'}\oplus\mathbb{Z}_{p'}\oplus\mathbb{Z}_{p'}, & \text{όταν } n=3,\\ \{0\}, & \text{όταν } n\geqslant 7.\end{cases}}$$

Αποδειξη. (i) Εάν ο R είναι Π.Κ.Ι. με $p\cdot 1_R=\underbrace{1_R+\cdots+1_R}_{p \text{ φορές}}\neq 0_R$, το $\mathsf{t}_p(R)$ στους τύπους (D.13) είναι τετριμμένος R-μόδιος, οπότε[31]

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q);R)\cong\begin{cases}R, & \text{όταν } n\in\{0,3\},\\ R/pR, & \text{όταν } n=1,\\ \{0\}, & \text{όταν } n\notin\{0,1,3\}.\end{cases}\tag{8.30}$$

Από το θεώρημα 8.3.1 λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q)\times\mathbb{L}(p',q');R)&\cong\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}(H_k^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q);R)\otimes_R H_{n-k}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');R))\\&\oplus\left(\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}\operatorname{Tor}_1^R(H_k^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q);R),H_{n-k-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');R))\right).\end{aligned}$$

Λόγω των (8.30) από το ανωτέρω ευθύ άθροισμα θα «επιβιώσουν» μόνον οι όροι για $k\in\{0,1,3\}$:

$$\begin{gathered}H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q)\times\mathbb{L}(p',q');R)\cong\\(H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q);R)\otimes_R H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');R))\oplus\operatorname{Tor}_1^R(H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q);R),H_{n-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');R))\\(H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q);R)\otimes_R H_{n-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');R))\oplus\operatorname{Tor}_1^R(H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q);R),H_{n-2}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');R))\\(H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q);R)\otimes_R H_{n-3}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');R))\oplus\operatorname{Tor}_1^R(H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q);R),H_{n-4}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');R))\end{gathered}$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\begin{aligned}H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q)\times\mathbb{L}(p',q');R)&\cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');R)\oplus(R/pR\otimes_R H_{n-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');R))\\&\oplus\operatorname{Tor}_1^R(R/pR,H_{n-2}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');R))\oplus H_{n-3}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');R)\end{aligned}$$

και οι (8.30) (μαζί με το θεώρημα 4.4.3, το πόρισμα 5.3.13 και το λήμμα 5.3.21) δί-

[31] Επίσης, το $\mathsf{t}_p(R)$ ισούται με το $R[p\cdot 1_R]$ τού λήμματος 5.3.21 (εφαρμοζόμενο για $M=R$ και $s=p\cdot 1_R$). Εν προκειμένω, $\mathsf{t}_p(R)\cong\operatorname{Tor}_1^R(R/pR,R)\cong\{0\}$. (Ως R-μόδιος ο R είναι ισόπεδος. Βλ. λήμμα 4.5.25 και πόρισμα 5.3.13.)

δουν

n	$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q)\times\mathbb{L}(p',q');R)$	n	$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q)\times\mathbb{L}(p',q');R)$
0	R	4	$(R/pR)\oplus(R/p'R)$
1	$(R/pR)\oplus(R/p'R)$	5	$\{0\}$
2	$R/(pR+p'R)$	6	R
3	$R\oplus R\oplus R/(pR+p'R)$	$\geqslant 7$	$\{0\}$

(ii) Εάν υποτεθεί ότι ο p είναι πρώτος αριθμός[32], τότε το $\mathbb{Z}_p$ είναι σώμα, οι (D.13) γίνονται

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q);\mathbb{Z}_p)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_p, & \text{όταν } n\in\{0,1,2,3\},\\ \{0\}, & \text{όταν } n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1,2,3\},\end{cases}\tag{8.31}$$

τα γινόμενα στρέψεως στο θεώρημα 8.3.1 είναι τετριμμένα και

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q)\times\mathbb{L}(p',q');\mathbb{Z}_p)\cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');\mathbb{Z}_p)\oplus H_{n-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');\mathbb{Z}_p)$$
$$\oplus H_{n-2}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');\mathbb{Z}_p)\oplus H_{n-3}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p',q');\mathbb{Z}_p).$$

Επιπλέον[33],

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q)\times\mathbb{L}(p',q');\mathbb{Z}_p)\cong H_{6-n}^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q)\times\mathbb{L}(p',q');\mathbb{Z}_p)$$

(λόγω των (E.3)) για $n\in\{0,1,2\}$ και αρκεί να γίνουν οι υπολογισμοί μόνον για $n\in\{0,1,2,3\}$ λαμβάνοντας

n	$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q)\times\mathbb{L}(p',q');\mathbb{Z}_p)$
0	$\mathbb{Z}_{p'}$
1	$\mathbb{Z}_{p'}\oplus\mathbb{Z}_{p'}$
2	$\mathbb{Z}_{p'}\oplus\mathbb{Z}_{p'}\oplus\mathbb{Z}_{p'}$
3	$\mathbb{Z}_{p'}\oplus\mathbb{Z}_{p'}\oplus\mathbb{Z}_{p'}\oplus\mathbb{Z}_{p'}$

μέσω απευθείας εφαρμογής των (8.31) για τον $\mathbb{L}(p',q')$. □

▸ **Παραδείγματα σε οιεσδήποτε διαστάσεις.** Καρτεσιανό γινόμενο δύο σφαιρών, δύο προβολικών χώρων, μίας σφαίρας και ενός προβολικού χώρου κ.ά.

8.4.5 Εφαρμογή. *Για τους μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{S}^d\times\mathbb{S}^{d'}$ δυο σφαιρών με $d\geqslant 1$ και $d'\geqslant 1$ και με συντελεστές ειλημμένους από μια Π.Κ.Ι. R ισχύουν τα ακόλουθα:*

[32] Προσοχή! Το p' δεν είναι κατ' ανάγκην πρώτος αριθμός.

[33] Επειδή $H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q);\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$, το (τριδιάστατο, κλειστό και λείο πολύπτυγμα) $\mathbb{L}(p,q)$ (και, κατ' αναλογίαν, *και* το $\mathbb{L}(p',q')$) είναι (σύμφωνα με το (b) τού θεωρήματος E.2.9) προσανατολίσιμο. Άρα *και* το $\mathbb{L}(p,q)\times\mathbb{L}(p',q')$ είναι (σύμφωνα με το πόρισμα 8.3.3) προσανατολίσιμο και, κατ' επέκταση, *και* $\mathbb{Z}_p$-προσανατολίσιμο (Βλ. θεώρημα E.2.5.) Επομένως είναι δυνατή η εφαρμογή τού πορίσματος E.3.2 για το $\mathbb{L}(p,q)\times\mathbb{L}(p',q')$.

(i) *Εάν* $d \neq d'$, *τότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^{d'}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0, d, d', d+d'\}, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, d, d', d+d'\}. \end{cases}}$$

(ii) *Εάν* $d = d'$, *τότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0, 2d\}, \\ R \oplus R, & \text{όταν } n = d, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0, d, 2d\}. \end{cases}}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα 8.3.1 λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^{d'}; R) \cong & \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (H_k^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d; R) \otimes_R H_{n-k}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^{d'}; R)) \\ & \oplus \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{Tor}_1^R(H_k^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d; R), H_{n-k-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^{d'}; R)) \right). \end{aligned}$$

Λόγω των (7.8), οι μόδιοι ιδιάζουσας ομολογίας καθενός εκ των $\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^{d'}$ είναι ελεύθεροι, οπότε όλα τα ανωτέρω γινόμενα στρέψεως είναι τετριμμένα, κάτι που σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^{d'}; R) &\cong \bigoplus_{k \in \{0,d\}} (H_k^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d; R) \otimes_R H_{n-k}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^{d'}; R)) \\ &\cong H_d^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^{d'}; R) \oplus H_{n-d}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^{d'}; R)). \end{aligned}$$

(i) Εάν $d \neq d'$, τότε οι (7.8) δίδουν

n	$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^{d'}; R)$	n	$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^{d'}; R)$
0	R	d'	R
d	R	$d+d'$	R

Για $n \notin \{0, d, d', d+d'\}$ έχουμε $H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d; R) \cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^{d'}; R) \cong \{0\}$, οπότε

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^{d'}; R) \cong \{0\}.$$

(ii) Εάν $d = d'$, τότε οι (7.8) δίδουν

n	$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d; R)$
0	R
d	$R \oplus R$
$2d$	R

και $H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d; R) \cong \{0\}$ όταν $n \notin \{0, d, 2d\}$. □

8.4.6 Σημείωση. Τα εξαδιάστατα προσανατολίσιμα λεία πολυπτύγματα $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4$ και $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ διαθέτουν *ισόμορφες* (συνήθεις) ομάδες ομολογίας, ήτοι

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4; \mathbb{Z}) \cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}; \mathbb{Z}), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(Βλ. 8.4.5 και 7.5.1.) Μολαταύτα, η τέταρτη *ομάδα ομοτοπίας* τους είναι διαφορετική, καθόσον η[34] $\boldsymbol{\pi}_4(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}) \cong \boldsymbol{\pi}_4(\mathbb{S}^7)$ είναι τετριμμένη[35], ενώ η

$$\boldsymbol{\pi}_4(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4) \cong \boldsymbol{\pi}_4(\mathbb{S}^2) \oplus \boldsymbol{\pi}_4(\mathbb{S}^4) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$$

δεν είναι. Κατά συνέπειαν[36], $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \not\simeq \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$.

Οι αντίστοιχοι υπολογισμοί[37] για το καρτεσιανό γινόμενο δύο μιγαδικών προβολικών χώρων δίδουν (μέσω τού θεωρήματος 8.3.1 και των (7.15)) την εξής:

8.4.7 Εφαρμογή. *Για τους μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{P}^d_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{C}}$ δυο μιγαδικών προβολικών χώρων με $d \geqslant 1$ και $d' \geqslant 1$ και με συντελεστές ειλημμένους από μια Π.Κ.Ι. R ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν $d < d'$, τότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{C}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0, 2(d+d')\}, \\ R^{\frac{n}{2}+1}, & \text{όταν } 0 < n \leqslant 2d \ \& \ n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2), \\ R^{d+1}, & \text{όταν } 2d < n \leqslant 2d' \ \& \ n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2), \\ R^{d+d'-\frac{n}{2}+1}, & \text{όταν } \begin{cases} 2d' < n \leqslant 2(d+d') \\ \text{με } \ n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \end{cases} \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

(ii) *Εάν $d = d'$, τότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^{d}_{\mathbb{C}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0, 4d\}, \\ R^{\frac{n}{2}+1}, & \text{όταν } 0 < n \leqslant 2d \ \& \ n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2), \\ R^{2d-\frac{n}{2}+1}, & \text{όταν } \begin{cases} 2d < n \leqslant 4d \\ \text{με } \ n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \end{cases} \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

Παρομοίως εκτελούνται (μέσω τού 8.3.1 και των (7.15)) και οι απαραίτητοι υπολογισμοί για το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{P}^d_{\mathbb{H}_\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{H}_\mathbb{R}}$, δίδοντάς μας την εξής:

---

[34] Βλ. Spanier [86], Chapter 7, §2, Corollary 13, σελ. 377-378.

[35] Ως γνωστόν, η $\boldsymbol{\pi}_n(\mathbb{S}^d)$ είναι τετριμμένη για κάθε $n < d$. Βλ. Hatcher [68], Corollary 4.9, σελ. 349.

[36] Ομοτοπικώς ισοδύναμοι τοπολογικοί χώροι έχουν *ισόμορφες* ομάδες ομοτοπίας $\boldsymbol{\pi}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

[37] Όσοι επιθυμούν να λάβουν (μέσω ηλεκτρονικού ταχυδρομείου) αντίγραφο των χειρόγραφων σημειώσεών μου, οι οποίες περιέχουν όλες τις απαιτούμενες, λεπτομερείς πράξεις και όλους τους απαιτούμενους ισομορφισμούς που χρησιμοποιήθηκαν για τις εφαρμογές 8.4.7, 8.4.8, 8.4.9, 8.4.10, 8.4.12, 8.4.14 και 8.4.15, μπορούν να μου γράψουν στη διεύθυνση: iord.tsele@gmail.com

8.4.8 Εφαρμογή. *Για τους μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου* $\mathbb{P}^d_{\mathbb{H}_\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{H}_\mathbb{R}}$ *προβολικών χώρων ορισμένων υπεράνω τού* $\mathbb{H}_\mathbb{R}$ *με* $d \geqslant 1$ *και* $d' \geqslant 1$ *και με συντελεστές ειλημμένους από μια Π.Κ.Ι.* R *ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν* $d < d'$, *τότε*

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{H}_\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{H}_\mathbb{R}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0, 4(d+d')\}, \\ R^{\frac{n}{4}+1}, & \text{όταν } 0 \leqslant n \leqslant 4d \ \&\ n \equiv 0 (\operatorname{mod} 4), \\ R^{d+1}, & \text{όταν } 4d < n \leqslant 4d' \ \&\ n \equiv 0 (\operatorname{mod} 4), \\ R^{d+d'-\frac{n}{4}+1}, & \text{όταν } \begin{cases} 4d' < n < 4(d+d') \\ \text{με } \ n \equiv 0 (\operatorname{mod} 4) \end{cases} \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(ii) *Εάν* $d = d'$, *τότε*

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{H}_\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^{d}_{\mathbb{H}_\mathbb{R}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0, 8d\}, \\ R^{\frac{n}{4}+1}, & \text{όταν } 0 < n \leqslant 4d \ \&\ n \equiv 0 (\operatorname{mod} 4), \\ R^{2d-\frac{n}{4}+1}, & \text{όταν } \begin{cases} 4d < n < 8d \\ \text{με } \ n \equiv 0 (\operatorname{mod} 4) \end{cases} \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Λόγω των (D.12) ο προσδιορισμός των μοδίων ιδιάζουσας ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου δύο *πραγματικών* προβολικών χώρων είναι πολύ πιο περίπλοκος, εμπεριέχει δε την εξέταση πληθώρας (υπο)περιπτώσεων.

8.4.9 Εφαρμογή. *Για τους μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου* $\mathbb{P}^d_\mathbb{R} \times \mathbb{P}^{d'}_\mathbb{R}$ *πραγματικών προβολικών χώρων με* $d \geqslant 1$ *και* $d' \geqslant 1$ *και με συντελεστές ειλημμένους από μια Π.Κ.Ι.* R *χαρακτηριστικής* $\neq 2$ *ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν* $d < d'$, $d \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$ *και* $d' \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$, *τότε*

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_\mathbb{R} \times \mathbb{P}^{d'}_\mathbb{R}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0, d+d'\}, \\ (R/2R)^{\frac{n-1}{2}+2}, & \text{όταν } 0 < n < d \ \&\ n \equiv 1 (\operatorname{mod} 2), \\ (R/2R)^{\frac{n}{2}}, & \text{όταν } 0 < n < d \ \&\ n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2), \\ (R/2R)^{\frac{n+1}{2}} \oplus R, & \text{όταν } n = d, \\ (R/2R)^{\frac{d+1}{2}}, & \text{όταν } d < n < d', \\ (R/2R)^{\frac{d+d'-n}{2}+1}, & \text{όταν } d < n < d+d' \ \&\ n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2), \\ (R/2R)^{\frac{d+d'-n-1}{2}}, & \text{όταν } d < n < d+d' \ \&\ n \equiv 1 (\operatorname{mod} 2), \\ (R/2R)^{\frac{d-1}{2}} \oplus R, & \text{όταν } n = d', \\ \{0\}, & \text{όταν } n > d+d'. \end{cases}$$

(ii) *Εάν* $d < d'$, $d \equiv 0(\operatorname{mod} 2)$ *και* $d' \equiv 0(\operatorname{mod} 2)$, *τότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = 0,\\ (R/2R)^{\frac{n-1}{2}+2}, & \text{όταν } 0 < n < d \;\&\; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2),\\ (R/2R)^{\frac{n}{2}}, & \text{όταν } 0 < n < d \;\&\; n \equiv 0(\operatorname{mod} 2),\\ (R/2R)^{\frac{d}{2}}, & \text{όταν } d \leqslant n \leqslant d' \;\&\; n \equiv 0(\operatorname{mod} 2)],\\ (R/2R)^{\frac{d}{2}+1}, & \text{όταν } d < n < d' \;\&\; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2),\\ (R/2R)^{\frac{d+d'-n}{2}}, & \text{όταν } d < n < d+d' \;\&\; n \equiv 0(\operatorname{mod} 2),\\ (R/2R)^{\frac{d+d'-n+1}{2}}, & \text{όταν } d < n < d+d' \;\&\; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2),\\ \{0\}, & \text{όταν } n \geqslant d+d'. \end{cases}}$$

(iii) *Εάν* $d < d'$, $d \equiv 0(\operatorname{mod} 2)$ *και* $d' \equiv 1(\operatorname{mod} 2)$, *τότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = 0,\\ (R/2R)^{\frac{n-1}{2}+2}, & \text{όταν } 0 < n < d \;\&\; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2),\\ (R/2R)^{\frac{n}{2}}, & \text{όταν } 0 < n < d \;\&\; n \equiv 0(\operatorname{mod} 2),\\ (R/2R)^{\frac{d}{2}}, & \text{όταν } d \leqslant n < d',\\ (R/2R)^{\frac{d}{2}} \oplus R, & \text{όταν } n = d',\\ (R/2R)^{\frac{d+d'-n+1}{2}}, & \text{όταν } d < n < d+d' \;\&\; n \equiv 0(\operatorname{mod} 2),\\ (R/2R)^{\frac{d+d'-n}{2}}, & \text{όταν } d < n < d+d' \;\&\; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2),\\ \{0\}, & \text{όταν } n \geqslant d+d'. \end{cases}}$$

(iv) *Εάν* $d = d' \equiv 0(\operatorname{mod} 2)$, *τότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^{d}_{\mathbb{R}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = 0,\\ (R/2R)^{\frac{n-1}{2}+2}, & \text{όταν } 0 < n < d \;\&\; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2),\\ (R/2R)^{\frac{n}{2}}, & \text{όταν } 0 < n < d \;\&\; n \equiv 0(\operatorname{mod} 2),\\ (R/2R)^{d-\frac{n}{2}}, & \text{όταν } d < n < 2d \;\&\; n \equiv 0(\operatorname{mod} 2),\\ (R/2R)^{d-\frac{n-1}{2}}, & \text{όταν } d < n < 2d \;\&\; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2),\\ \{0\}, & \text{όταν } n \geqslant 2d. \end{cases}}$$

(iv) *Εάν* $d = d' \equiv 1 (\bmod 2)$, *τότε*

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^d; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0, 2d\}, \\ (R/2R)^{\frac{n-1}{2}+2}, & \text{όταν } 0 < n < d \,\&\, n \equiv 1 (\bmod 2), \\ (R/2R)^{\frac{n}{2}}, & \text{όταν } 0 < n < d \,\&\, n \equiv 0 (\bmod 2), \\ (R/2R)^{\frac{d-1}{2}} \oplus R \oplus R, & \text{όταν } n = d, \\ (R/2R)^{d-\frac{n}{2}+1}, & \text{όταν } d < n < 2d \,\&\, n \equiv 0 (\bmod 2), \\ (R/2R)^{d-\frac{n+1}{2}}, & \text{όταν } d < n < 2d \,\&\, n \equiv 1 (\bmod 2), \\ \{0\}, & \text{όταν } n > 2d. \end{cases}$$

8.4.10 Εφαρμογή. *Για τους μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου* $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{d'}$ *πραγματικών προβολικών χώρων με* $d \geqslant 1$ *και* $d' \geqslant 1$ *και με συντελεστές ειλημμένους από το σώμα* $\mathbb{Z}_2$ *ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν* $d < d'$, *τότε*

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{d'}; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{n+1 \text{ φορές}}, & \text{όταν } 0 \leqslant n \leqslant d, \\ \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{d+1 \text{ φορές}}, & \text{όταν } d < n \leqslant d', \\ \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{d+d'-n+1 \text{ φορές}}, & \text{όταν } d' < n \leqslant d + d', \\ \{0\}, & \text{όταν } n > d + d'. \end{cases}$$

(ii) *Εάν* $d = d'$, *τότε*

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^d; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{n+1 \text{ φορές}}, & \text{όταν } 0 \leqslant n \leqslant d, \\ \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2}_{d+d'-n+1 \text{ φορές}}, & \text{όταν } d < n \leqslant 2d, \\ \{0\}, & \text{όταν } n > 2d. \end{cases}$$

▸ **Ένα παράδειγμα ειδικής φύσεως**. Ακολουθεί ο προσδιορισμός των μοδίων ιδιάζουσας ομολογίας ενός παραδείγματος με συντελεστές ειλημμένους από έναν δακτύλιο που δεν είναι ούτε Π.Κ.Ι., ούτε καν ακεραία περιοχή!

8.4.11 Εφαρμογή. *Για τους μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας τού εξαδιάστατου προσανατολίσιμου πολυπτύγματος* $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ *με συντελεστές ειλημμένους από τον κληρονομικό δακτύλιο* $\mathbb{Z}_6$ *(ο οποίος δεν είναι καν ακεραία περιοχή) ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_6, & \text{όταν } n \in \{0,6\}, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } n \in \{1,5\}, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } n = \{2,4\}, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3, & \text{όταν } n = 3, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \geqslant 7. \end{cases}$$

Αποδειξη. Το αλυσωτό σύμπλοκο $S_\bullet(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)$, όντας (εκ κατασκευής) ελεύθερο, είναι (λόγω τής προτάσεως 4.2.4) *και* προβολικό. Επειδή ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_6$ είναι κληρονομικός, οι υπομόδιοι συνόρων $B_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) := B_n^{\text{sing.}}(S_\bullet(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))$ τού $\mathbb{Z}_6$-μοδίου $S_n(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)$ οφείλουν να είναι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ *προβολικοί* (και, κατ' επέκταση, ένεκα τού θεωρήματος 4.5.26) *και ισόπεδοι*. Άρα είναι δυνατός ο προσδιορισμός των μοδίων ιδιάζουσας ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ κατόπιν εφαρμογής τού θεωρήματος 8.3.1 (υπό τη συνθήκη **A**):

$$\begin{aligned} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) &\cong \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (H_k^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_{n-k}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \\ &\oplus \left(\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(H_k^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6), H_{n-k-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \right). \end{aligned}$$

Επειδή

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_6, & \text{όταν } n \in \{0,3\}, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } n \in \{1,2\}, \\ \{0\}, & \text{αλλιώς}, \end{cases} \tag{8.32}$$

έχουμε

$$\begin{gathered} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \cong \\ (H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6), H_{n-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \\ \oplus (H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_{n-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6), H_{n-2}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \\ \oplus (H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_{n-2}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6), H_{n-3}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \\ \oplus (H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_{n-3}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6), H_{n-4}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \end{gathered}$$

ή

$$\begin{gathered} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \cong \\ (\mathbb{Z}_6 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_6, H_{n-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \\ \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_{n-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_{n-2}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \\ \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_{n-2}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_{n-3}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \\ \oplus (\mathbb{Z}_6 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_{n-3}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_6, H_{n-4}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \end{gathered}$$

ή (λόγω τού ότι ο $\mathbb{Z}_6$ είναι, κατά το λήμμα 4.5.25, ισόπεδος $\mathbb{Z}_6$-μόδιος)

$$\begin{aligned} H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) &\cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_{n-1}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_{n-2}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \\ &\oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_{n-2}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_{n-3}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \oplus H_{n-3}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6). \end{aligned}$$

Ειδικότερα, <u>για $n = 0$</u>:

$$H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \cong H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z}_6.$$

<u>Για $n = 1$</u>:

$$\begin{aligned} H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) &\cong H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

<u>Για $n = 2$</u>:

$$\begin{aligned} & H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \cong H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \\ & \oplus (\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \\ & \underset{(8.32)}{\cong} \mathbb{Z}_2 \oplus (\underbrace{\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} \mathbb{Z}_6}_{\cong \mathbb{Z}_2}) \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6)}_{\cong \{0\}} \oplus (\underbrace{\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} \mathbb{Z}_6}_{\cong \mathbb{Z}_2}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

<u>Για $n = 3$</u>:

$$\begin{aligned} H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) &\cong H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \\ &\oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \oplus H_0^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6). \\ &\cong \mathbb{Z}_6 \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} \mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} \mathbb{Z}_2) \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6)}_{\cong \{0\}} \oplus \mathbb{Z}_6, \end{aligned}$$

όπου $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) \cong \{0\}$ λόγω τού πορίσματος 5.3.27 και[38]

$$\begin{aligned} & \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} \mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \\ & \underset{4.5.12}{\cong} (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3.$$

<u>Για $n = 4$</u>:

$$\begin{aligned} H_4^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) &\cong H_4^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \\ &\oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \oplus H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \\ &\cong (\underbrace{\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} \mathbb{Z}_6}_{\cong \mathbb{Z}_2}) \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)}_{\cong \{0\}} \oplus (\underbrace{\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} \mathbb{Z}_2}_{\cong \mathbb{Z}_2}) \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)}_{\cong \{0\}} \oplus (\underbrace{\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} \mathbb{Z}_2}_{\cong \mathbb{Z}_2}) \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

[38] Ως γνωστόν, τα ιδεώδη τού δακτυλίου $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (όπου $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$) είναι τα $d\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ (όπου d θετικός ακέραιος διαιρέτης τού m). Εδώ (όπου $m = 6$), μπορούμε να ταυτίσουμε το $\mathbb{Z}_2$ με τον πηλικοδακτύλιο $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ και το ιδεώδες $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ τού $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_6$ με έναν $\mathbb{Z}_3$ (και να εφοδιάσουμε τον πηλικοδακτύλιο $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ με τη δομή τού $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$-μοδίου κατά τα προαναφερθέντα στο (ii) τού εδ. 2.1.5).

Για $n = 5$:

$$\begin{aligned} H_5^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) &\cong H_5^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_4^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \\ &\oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \oplus H_2^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \\ &\cong \underbrace{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_6)}_{\cong\{0\}} \oplus \underbrace{(\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} \mathbb{Z}_6)}_{\cong \mathbb{Z}_2} \oplus \underbrace{\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)}_{\cong\{0\}} \oplus \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Για $n = 6$:

$$\begin{aligned} H_6^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) &\cong H_6^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_5^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_4^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \\ &\oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_6} H_4^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6)) \oplus (\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_2, H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6))) \oplus H_3^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}_6) \cong \mathbb{Z}_6, \end{aligned}$$

ενώ για $n \geqslant 7$ οι εν λόγω ομάδες είναι τετριμμένες. □

▸ **Άλλο ένα (σημαντικό) παράδειγμα: Καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}$.**

8.4.12 Εφαρμογή. *Για τους μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}$ μιας σφαίρας και ενός πραγματικού προβολικού χώρου διαστάσεων $d \geqslant 1$ και $d' \geqslant 1$, αντιστοίχως, με συντελεστές ειλημμένους από μια Π.Κ.Ι. R χαρακτηριστικής $\neq 2$, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν $d < d'$, τότε*

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν} \begin{cases} \text{είτε } n = 0 \\ \text{είτε } [n = d \;\&\; d \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [n = d' \\ \;\& \; d \equiv 0(\operatorname{mod} 2), d' \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [n = d + d' \;\&\; d' \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \end{cases} \\ R/2R, & \text{όταν} \begin{cases} \text{είτε } [1 \leqslant n < d \\ \;\& \; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [d < n < d' \\ \;\& \; n \equiv 0(\operatorname{mod} 2), d \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [d < n < d' \\ \;\& \; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2), d \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [n = d' \\ \;\& \; d \equiv 1(\operatorname{mod} 2), d' \equiv 0(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [d' \leqslant n < d + d' \\ \;\& \; n \equiv 0(\operatorname{mod} 2), d \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [d' \leqslant n < d + d' \\ \;\& \; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2), d \equiv 0(\operatorname{mod} 2)], \end{cases} \\ (R/2R) \oplus R, & \text{όταν} \begin{cases} \text{είτε } [n = d \;\&\; d \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [n = d' \\ \;\& \; d \equiv 0(\operatorname{mod} 2), d' \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \end{cases} \\ (R/2R) \oplus (R/2R), & \begin{array}{l} \text{όταν } d \leqslant n < d' \\ \;\& \; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2), d \equiv 0(\operatorname{mod} 2), \end{array} \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(ii) *Εάν* $d = d'$, *τότε*

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}^d_{\mathbb{R}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν} \begin{cases} \text{είτε } n = 0 \\ \text{είτε } [n = d \,\&\, d \equiv 0(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [n = 2d \,\&\, d \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \end{cases} \\ R/2R, & \text{όταν} \begin{cases} \text{είτε } [1 \leqslant n < d \\ \& \; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [d \leqslant n < 2d \\ \& \; n \equiv 0(\operatorname{mod} 2), d \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [d \leqslant n < 2d \\ \& \; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2), d \equiv 0(\operatorname{mod} 2)], \end{cases} \\ R \oplus R, & \text{όταν } n = d \,\&\, d \equiv 1(\operatorname{mod} 2), \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(iii) *Εάν* $d > d'$, *τότε*

$$H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν} \begin{cases} \text{είτε } n = 0 \text{ είτε } n = d, \\ \text{είτε } [n = d' \\ \& \; d' \equiv 0(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [n = d + d' \\ \& \; d' \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \end{cases} \\ R/2R, & \text{όταν} \begin{cases} \text{είτε } [1 \leqslant n < d' \\ \& \; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [d \leqslant n < d + d' \\ \& \; n \equiv 0(\operatorname{mod} 2), d \equiv 1(\operatorname{mod} 2)], \\ \text{είτε } [d \leqslant n < d + d' \\ \& \; n \equiv 1(\operatorname{mod} 2), d \equiv 0(\operatorname{mod} 2)], \end{cases} \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

8.4.13 Σημείωση. Εάν υποτεθεί ότι $d > d' > 1$, τότε

$$H_{d+d'}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}) \cong H_d^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{d'}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{d'}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}) \cong H_{d'}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}),$$
$$H_{d+d'}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^{d'} \times \mathbb{P}^{d}_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}) \cong H_{d'}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^{d'}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H_{d}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^{d}_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} H_{d}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^{d}_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}) \cong H_{d}^{\text{sing.}}(\mathbb{P}^{d}_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}).$$

Εάν *ο ένας εκ των* d, d' *είναι άρτιος και ο άλλος περιττός*, τότε

$$H_{d+d'}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}) \ncong H_{d+d'}^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^{d'} \times \mathbb{P}^{d}_{\mathbb{R}}; \mathbb{Z}) \Longrightarrow \mathbb{S}^d \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}} \not\approx \mathbb{S}^{d'} \times \mathbb{P}^{d}_{\mathbb{R}}.$$

Όμως, εν τοιαύτη περιπτώσει,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}) &\cong \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^d) \oplus \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{P}^{d'}_{\mathbb{R}}) \cong \{0\} \oplus \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \\ &= \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^{d'}) \oplus \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{P}^{d}_{\mathbb{R}}) \cong \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^{d'} \times \mathbb{P}^{d}_{\mathbb{R}}) \end{aligned}$$

και, επειδή το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^{d'}$ αποτελεί καθολική επικάλυψη (universal covering) αμφοτέρων των $\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{d'}$ και $\mathbb{S}^{d'} \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{d}$, ένα γνωστό θεώρημα[39] από τη Θεωρία Ομοτοπίας μάς πληροφορεί ότι για κάθε $n \geqslant 2$,

$$\boldsymbol{\pi}_n(\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{d'}) \cong \boldsymbol{\pi}_n(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^{d'}) \cong \boldsymbol{\pi}_n(\mathbb{S}^{d'} \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{d}).$$

(Κατά συνέπειαν, δρομοσυνεκτικοί τοπολογικοί χώροι έχοντες ισόμορφες ομάδες ομοτοπίας *δεν είναι κατ' ανάγκην ομοτοπικώς ισοδύναμοι*! Ένα θεώρημα[40] οφειλόμενο στον J.H.C. Whitehead δίδει ικανές συνθήκες, ούτως ώστε δυο δρομοσυνεκτικοί τοπολογικοί χώροι με *ισόμορφες ομάδες ομοτοπίας* να έχουν *και ισόμορφες ομάδες ομολογίας*.)

8.4.14 Εφαρμογή. *Για τους μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{d'}$ μιας σφαίρας και ενός πραγματικού προβολικού χώρου διαστάσεων $d \geqslant 1$ και $d' \geqslant 1$, αντιστοίχως, με συντελεστές ειλημμένους από το σώμα $\mathbb{Z}_2$, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν $d < d'$, τότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{d'}; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } 0 \leqslant n < d \text{ ή } d' < n \leqslant d + d', \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } d \leqslant n \leqslant d', \\ \{0\}, & \text{όταν } n \geqslant d + d' + 1. \end{cases}}$$

(ii) *Εάν $d = d'$, τότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{d}; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } 0 \leqslant n < d \text{ ή } d < n \leqslant 2d, \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } n = d, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \geqslant 2d + 1. \end{cases}}$$

(iii) *Εάν $d > d'$, τότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{d'}; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{όταν } 0 \leqslant n \leqslant d' \text{ ή } d < n \leqslant d + d', \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

▸ **Ένα παράδειγμα καρτεσιανού γινομένου τριών χώρων**. Εάν θεωρήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο μιας σφαίρας με το (μη προσανατολίσιμο) τετραδιάστατο λείο πολύπτυγμα τού εδαφίου 8.4.3, τότε λαμβάνουμε την εξής:

8.4.15 Εφαρμογή. *Δοθείσας μιας τριάδας $(d, g, g') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$, για τους μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας τού καρτεσιανού γινομένου $\mathbb{S}^d \times X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}$, με συντελεστές ειλημμένους από μια Π.Κ.Ι. R χαρακτηριστικής $\neq 2$, ισχύουν τα ακόλουθα:*

[39] Βλ. Stöcker & Zieschang [87], Satz 16.4.11, σελ. 418.

[40] Βλ. Bredon [57], Chapter VII, §11, σελ. 480-486, Spanier [86], Chapter 7, §5, σελ. 393-400, Switzer [88], Theorem 10.28, σελ. 187, και tom Dieck [91], §20.6, σελ. 510-512.

(i) *Εάν* $d = 1$, *τότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1 \times X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = 0, \\ R^{2g+g'} \oplus (R/2R), & \text{όταν } n = 1, \\ R^{(2g+1)g'} \oplus (R/2R)^{2g+1}, & \text{όταν } n = 2, \\ R^{2g(g'-1)+g'} \oplus (R/2R)^{2g+1}, & \text{όταν } n = 3, \\ R^{g'-1} \oplus (R/2R), & \text{όταν } n = 4, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \geqslant 5. \end{cases}}$$

(ii) *Εάν* $d \geqslant 2$, *τότε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^d \times X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0, d\}, \\ R^{2g+g'-1} \oplus (R/2R), & \text{όταν } n \in \{1, d+1\}, \\ R^{2g(g'-1)+1} \oplus (R/2R)^{2g}, & \text{όταν } \begin{cases} \text{είτε } n = d+2, \\ \text{είτε } [n = 2 \,\&\, n < d], \end{cases} \\ R^{g'-1} \oplus (R/2R), & \text{όταν } \begin{cases} \text{είτε } n = d+3, \\ \text{είτε } [n = 3 \,\&\, n < d], \end{cases} \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

▸ **Υπολογισμοί χαρακτηριστικής Euler διαφόρων καρτεσιανών γινομένων**. Από τους τύπους (7.25), (7.35), (D.13), (7.8), (7.13), (D.12) και (7.15) που δίδουν τους μοδίους ιδιάζουσας ομολογίας των μέχρι τούδε θεωρηθέντων συμπαγών πολυπτυγμάτων υπολογίζουμε τη χαρακτηριστική Euler αυτών (θέτοντας $R = \mathbb{Z}$ και υπολογίζοντας τις ελεύθερες βαθμίδες και το εναλλάσσον άθροισμά τους):

X	$\chi(X)$	X	$\chi(X)$
$X_g^{\text{or.}}$, $g \in \mathbb{N}_0$	$2-2g$	$\mathbb{T}^d$	0
$X_g^{\text{nonor.}}$, $g \in \mathbb{N}$,	$2-g$	$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^d$	$\begin{cases} 1, \text{ όταν } d \equiv 0 (\text{mod } 2) \\ 0, \text{ όταν } d \equiv 1 (\text{mod } 2) \end{cases}$
$\mathbb{L}(p,q)$	0	$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^d$	$d+1$
$\mathbb{S}^d$	$\begin{cases} 2, \text{ όταν } d \equiv 0 (\text{mod } 2) \\ 0, \text{ όταν } d \equiv 1 (\text{mod } 2) \end{cases}$	$\mathbb{P}_{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}}^d$	$d+1$

8.4.16 Εφαρμογή. (i) *Για κάθε* $(g, g') \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ *η χαρακτηριστική Euler τού καρτεσιανού γινομένου* $X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}$ (τού εδ. 8.4.1) *είναι η*

$$\boxed{\chi(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{or.}}) = 4(g-1)(g'-1).}$$

(ii) *Για κάθε* $(g, g') \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ *η χαρακτηριστική Euler τού* $X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}$ (τού εδ.

8.4.3) *είναι η*

$$\boxed{\chi(X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}) = 2(g-1)(g'-2).}$$

(iii) *Εάν Y είναι οποιοσδήποτε τοπολογικός χώρος (για τον οποίο ορίζεται η χαρακτηριστική Euler), τότε*

$$\boxed{\chi(\mathbb{L}(p,q) \times Y) = 0 = \chi(\mathbb{T}^d \times Y).}$$

(iv) *Για κάθε $(d,d') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ η χαρακτηριστική Euler τού καρτεσιανού γινομένου δύο σφαιρών* (τού εδ. 8.4.5) *είναι η*

$$\boxed{\chi(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^{d'}) = \begin{cases} 4, & \text{όταν } d \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \text{ και } d' \equiv 0 (\operatorname{mod} 2), \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

(v) *Για κάθε $(d,d') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ η χαρακτηριστική Euler τού καρτεσιανού γινομένου δύο πραγματικών προβολικών χώρων* (τού εδ. 8.4.10) *είναι η*

$$\boxed{\chi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{d'}) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } d \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \text{ και } d' \equiv 0 (\operatorname{mod} 2), \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

(vi) *Για κάθε $(d,d') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ η χαρακτηριστική Euler τού καρτεσιανού γινομένου δύο μιγαδικών προβολικών χώρων ή δύο προβολικών χώρων ορισμένων υπεράνω τού $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$* (των εδ. 8.4.7 και 8.4.8) *είναι η*

$$\boxed{\chi(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{d'}) = (d+1)(d'+1) = \chi(\mathbb{P}_{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}}^{d'}).}$$

(vii) *Για κάθε $(d,d') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ η χαρακτηριστική Euler τού καρτεσιανού γινομένου μιας σφαίρας και ενός πραγματικού προβολικού χώρου* (τού εδ. 8.4.12) *είναι η*

$$\boxed{\chi(\mathbb{S}^d \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{d'}) = \begin{cases} 2, & \text{όταν } d \equiv 0 (\operatorname{mod} 2) \text{ και } d' \equiv 0 (\operatorname{mod} 2), \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

(viii) *Για κάθε $(d,g,g') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ η χαρακτηριστική Euler τού $\mathbb{S}^d \times X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}$* (τού εδ. 8.4.15) *είναι η*

$$\boxed{\chi(\mathbb{S}^d \times X_g^{\text{or.}} \times X_{g'}^{\text{nonor.}}) = \begin{cases} 8(g-1)(g'-1), & \text{όταν } d \equiv 0 (\operatorname{mod} 2), \\ 0, & \text{όταν } d \equiv 1 (\operatorname{mod} 2). \end{cases}}$$

Απόδειξη. Άμεση από τον προηγηθέντα πίνακα τιμών τής χαρακτηριστικής Euler καθενός παράγοντα και τον τύπο (8.26). □

Παραρτήματα

Παράρτημα A

Κατηγορίες και συναρτητές

Το πρώτο παράρτημα περιλαμβάνει κάποιες θεμελιώδεις έννοιες από τη *Θεωρία Κατηγοριών*[1], οι οποίες θα αποβούν ιδιαίτερα χρήσιμες για τη συστηματικότερη παρουσίαση τόσον ορισμένων εκ των προηγηθεισών εννοιών (που χαρακτηρίζουν *ειδικούς* R-μοδίους) όσον και ποικίλων συναρτητών που είναι απαραίτητοι για τις ενότητες 6.2, 6.3, 7.1-7.5 και 8.2, και τα παραρτήματα C και D.

A.1 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ

A.1.1 Ορισμός. Μια **κατηγορία** $\mathscr{C}$ συνίσταται από μια **κλάση**[2] **αντικειμένων** $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ και μια οικογένεια συνόλων $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B)$ για οιαδήποτε αντικείμενα $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ (τα στοιχεία των οποίων καλούνται **μορφισμοί** από το A στο B) με

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B) \cap \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A',B') = \varnothing \text{ όταν } A \neq A' \text{ ή } B \neq B',$$

καθώς και από μια *πράξη* (οριζόμενη για οιαδήποτε τριάδα αντικειμένων A, B, C)

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,C), \ \ (f,g) \longmapsto g \circ f,$$

(που καλείται *σύνθεση* των f και g) με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Η "$\circ$" είναι προσεταιριστική, δηλαδή $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$.

(ii) Για κάθε αντικείμενο $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ υπάρχει ένας (μονοσημάντως ορισμένος) μορφισμός $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,A)$ για τον οποίο ισχύουν οι ισότητες

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \ \ \mathrm{id}_A \circ g = g, \ \ \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B), \ \forall g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B,A).$$

Ένας $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B)$ καλείται **$\mathscr{C}$-ισομορφισμός** όταν υπάρχει $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B,A)$ για τον οποίον ισχύουν οι ισότητες $g \circ f = \mathrm{id}_A$ και $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Δοθέντος ενός $\mathscr{C}$-ισομορφισμού $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B)$, ένας τέτοιος μορφισμός g είναι κατ' ανάγκην

[1] Οι αναγνώστες που ενδιαφέρονται για λεπτομερή μελέτη τής *Θεωρίας Κατηγοριών* μπορούν να ανατρέξουν σε ειδικά συγγράμματα, όπως, π.χ., σε αυτά των Mac Lane [8], Mitchell [9] και Schubert [11].

μονοσημάντως ορισμένος (ως προς το να πληροί τις ανωτέρω ισότητες) και αφ' εαυτού $\mathscr{C}$-ισομορφισμός, συμβολίζεται συνήθως ως f^{-1} και καλείται **αντίστροφος τού** f.

A.1.2 Σημείωση. Έστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία. Ένα $O \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ καλείται **μηδενικό αντικείμενο τής** $\mathscr{C}$ όταν αμφότερα τα $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, O)$ και $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(O, B)$ είναι μονοσύνολα για οιαδήποτε $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Ένα μηδενικό αντικείμενο τής $\mathscr{C}$, όταν υπάρχει, είναι μονοσημάντως ορισμένο μέχρις $\mathscr{C}$-ισομορφισμού.

A.1.3 Ορισμός. Έστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία. Μια **υποκατηγορία** $\mathscr{C}'$ **τής** $\mathscr{C}$ είναι μια κατηγορία με τις εξής ιδιότητες:

(a) Κάθε αντικείμενο τής $\mathscr{C}'$ είναι και αντικείμενο τής $\mathscr{C}$.

(b) Για οιαδήποτε $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$ έχουμε $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}'}(A, B) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$.

(c) Για οιοδήποτε ζεύγος $(f, g) \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}'}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}'}(B, C)$ η σύνθεση $g \circ f$ εντός τής $\mathscr{C}'$ ισούται με τη σύνθεση $g \circ f$ εντός τής $\mathscr{C}$.

A.1.4 Ορισμός. Μια υποκατηγορία $\mathscr{C}'$ μιας κατηγορίας $\mathscr{C}$ καλείται **πλήρης υποκατηγορία τής** $\mathscr{C}$ όταν ισχύει η ισότητα $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}'}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$ για οιαδήποτε $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$.

A.1.5 Παραδείγματα. (i) Οι *κατηγορίες* $\mathfrak{Sets}$, $\mathfrak{Groups}$ και $\mathfrak{Mod}_R$ *των συνόλων, των ομάδων* και *των R-μοδίων*[3] (με τις συνήθεις απεικονίσεις, τους ομομορφισμούς ομάδων και τους ομομορφισμούς R-μοδίων, αντιστοίχως, ως μορφισμούς τους[4]).

(ii) Η κατηγορία $\mathfrak{FSets}$ *των συνόλων που είναι το πολύ πεπερασμένα*, η οποία αποτελεί μια πλήρη υποκατηγορία τής κατηγορίας $\mathfrak{Sets}$.

(iii) Η *κατηγορία* $\mathfrak{Abgroups}$ *των αβελιανών ομάδων*, η οποία αποτελεί μια πλήρη υποκατηγορία τής κατηγορίας $\mathfrak{Groups}$.

(iv) Η *κατηγορία* $\mathfrak{Mod}_R^{\mathbb{Z}}$ *των ακολουθιών R-μοδίων με το σύνολο $\mathbb{Z}$ ως το σύνολο των δεικτών τους* (που έχει τις ακολουθίες ομομορφισμών $(f_n : M_n \longrightarrow N_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ως μορφισμούς της). Επίσης, η *(υπο)κατηγορία* $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ *των αλυσωτών συμπλόκων* (με τους αλυσωτούς μετασχηματισμούς ως μορφισμούς της). Βλ. εδάφια[5] 3.2.1, 3.2.4. Κατ' αναλογίαν ορίζεται και η *κατηγορία* $\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ *των συναλυσωτών συμπλόκων* (με τους συναλυσωτούς μετασχηματισμούς ως μορφισμούς της).

(v) Η *κατηγορία* $\mathfrak{Top}$ *των τοπολογικών χώρων* (με τις συνεχείς απεικονίσεις ως μορφισμούς της και τους ομοιομορφισμούς ως τους $\mathfrak{Top}$-ισομορφισμούς).

(vi) Η *κατηγορία* $\mathfrak{Top}^{[2]}$ *των τοπολογικών ζευγών* (η οποία έχει ως αντικείμενά της *τα τοπολογικά ζεύγη* (X, A) και ως μορφισμούς της από ένα τοπολογικό ζεύγος

[2] «Κλάση» υπό την έννοια τής Αξιωματικής Συνολοθεωρίας των J. von Neumann (1925-27), P. Bernays (1937-54) και K. Gödel (1940). Πρβλ. [3], σελ. 237-242.

[3] *R-μοδίων* υπό την έννοια τού ορισμού 2.1.1.

[4] Η κατηγορία $\mathfrak{Sets}$ δεν διαθέτει μηδενικά αντικείμενα. Αντιθέτως, η $\mathfrak{Groups}$ έχει κάθε τετριμμένη ομάδα και η $\mathfrak{Mod}_R$ κάθε τετριμμένο R-μόδιο ως μηδενικό της αντικείμενο.

[5] Σημειωτέον ότι η κατηγορία $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ έχει το $\mathbf{0}_\bullet$ ως μηδενικό αντικείμενο.

(X, A) σε ένα τοπολογικό ζεύγος (Y, B) *τις συνεχείς απεικονίσεις τοπολογικών ζευγών* $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, ήτοι συνεχείς απεικονίσεις $f : X \longrightarrow Y$ με $f(A) \subseteq B$. Η $\mathfrak{Top}$ μπορεί να ιδωθεί ως πλήρης υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$ εάν ταυτίσουμε κάθε ζεύγος τής μορφής $(X, \varnothing)$ με τον ίδιον τον X.

(vii) Άλλη μια ενδιαφέρουσα (μη πλήρης) υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$ είναι η *κατηγορία των εστιγμένων τοπολογικών χώρων* $\mathfrak{Top}^{\,\text{εστ.}}$, ήτοι η κατηγορία που έχει τοπολογικά ζεύγη τής μορφής $(X, \{x_0\})$ ως αντικείμενά της (όπου $x_0 \in X$) και συνεχείς απεικονίσεις

$$f : (X, \{x_0\}) \longrightarrow (Y, \{y_0\})$$

με $f(x_0) = y_0$ ως μορφισμούς της.

Α.1.6 Ορισμός. Μια κατηγορία $\mathscr{C}$ καλείται **ασθενώς προσθετική** (preadditive) όταν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Η $\mathscr{C}$ διαθέτει μηδενικό αντικείμενο.

(ii) Για οιαδήποτε $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ το σύνολο $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$ αποτελεί μια προσθετική αβελιανή ομάδα.

(iii) Για οιαδήποτε $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ υπάρχει μια απεικόνιση

$$\circledast : \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, C)$$

με $h \circledast (f + g) = h \circledast f + h \circledast g$ και $(h + k) \circledast f = h \circledast f + k \circledast f$ για οιουσδήποτε $f, g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B, C)$ και $h, k \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$.

Α.1.7 Παραδείγματα. Οι κατηγορίες $\mathfrak{Abgroups}$, $\mathfrak{Mod}_R$ και $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ είναι ασθενώς προσθετικές, ενώ οι $\mathfrak{Sets}$, $\mathfrak{Groups}$ και $\mathfrak{Top}$ δεν είναι.

Α.1.8 Ορισμός. Έστω $(A_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathscr{C}$. Ένα αντικείμενο A τής $\mathscr{C}$, μαζί με μια οικογένεια $(p_j \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, A_j))_{j \in J}$ (τα μέλη τής οποίας καλούνται **προβολές**) είναι **ένα γινόμενο (των μελών) τής οικογενείας** $(A_j)_{j \in J}$ όταν για οιοδήποτε αντικείμενο B τής $\mathscr{C}$ και οιαδήποτε οικογένεια μορφισμών $(f_j \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B, A_j))_{j \in J}$ (με το ίδιο σύνολο δεικτών) υπάρχει ένας μονοσημάντως ορισμένος $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B, A)$, τέτοιος ώστε να ισχύει $p_j \circ f = f_j$, $\forall j \in J$, ήτοι τέτοιος, ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "p_j"] & \\ B \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, "f_j"'] & \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] & A_j \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

Α.1.9 Πρόταση. *Ένα γινόμενο (των μελών) μιας οικογενείας $(A_j)_{j \in J}$ αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathscr{C}$, όταν υπάρχει, είναι μονοσημάντως ορισμένο μέχρις $\mathscr{C}$-*

ισομορφισμού.

Απόδειξη. Εάν υποθέσουμε ότι τα

$$A, (p_j \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, A_j))_{j\in J} \ \text{ και } \ A', (p'_j \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A', A_j))_{j\in J}$$

είναι δυο γινόμενα (των μελών) μιας οικογενείας $(A_j)_{j\in J}$ αντικειμένων τής $\mathscr{C}$, τότε υπάρχουν μονοσημάντως ορισμένοι

$$f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A', A), g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, A') : p_j \circ f = p'_j \ \text{ και } \ p'_j \circ g = p_j, \forall j \in J.$$

Κατά συνέπειαν,

$$\left.\begin{array}{l} p_j \circ f \circ g = p_j \\ p_j \circ \mathrm{id}_A = p_j \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ g = \mathrm{id}_A \ \text{ και } \ \left.\begin{array}{l} p'_j \circ g \circ f = p'_j \\ p'_j \circ \mathrm{id}_{A'} = p'_j \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f = \mathrm{id}_{A'}.$$

Άρα ο f είναι ένας $\mathscr{C}$-ισομορφισμός. □

A.1.10 Ορισμός. Μια ασθενώς προσθετική κατηγορία $\mathscr{C}$ καλείται **προσθετική** όταν κάθε ζεύγος αντικειμένων τής $\mathscr{C}$ διαθέτει ένα γινόμενο.

A.1.11 Παραδείγματα. Οι κατηγορίες $\mathfrak{Abgroups}$, $\mathfrak{Mod}_R$ και $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ είναι προσθετικές.

A.2 ΣΥΝΑΡΤΗΤΕΣ

A.2.1 Ορισμός. Έστω ότι οι $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ είναι δυο κατηγορίες. Ένας **συναλλοίωτος συναρτητής** (covariant functor) (και αντιστοίχως, ένας **ανταλλοίωτος συναρτητής** (contravariant functor)) $\mathbf{F} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ συνίσταται από μια *απεικόνιση αντικειμένων*

$$\mathbf{F} : \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathscr{D}), \ \ A \longmapsto \mathbf{F}(A),$$

και μια *απεικόνιση μορφισμών*

$$\mathbf{F} : \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{F}(B)) \ , \quad f \longmapsto \mathbf{F}(f),$$

$$(\text{και αντιστοίχως, } \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}(B), \mathbf{F}(A)), \quad f \longmapsto \mathbf{F}(f))$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\mathbf{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(A)}, \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

(ii) Για κάθε $(f, g) \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B, C)$ ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(g) \circ \mathbf{F}(f) \quad (\text{και αντιστοίχως, } \mathbf{F}(g \circ f) = \mathbf{F}(f) \circ \mathbf{F}(g)).$$

A.2.2 Ορισμός. Έστω ότι οι $\mathbf{F} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ και $\mathbf{G} : \mathscr{D} \rightsquigarrow \mathscr{E}$ είναι δυο συναρτητές. Ως **σύνθεση** αυτών ορίζεται ο συναρτητής $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{E}$ ο συνιστώμενος από τις απεικονίσεις (μεταξύ αντικειμένων και μορφισμών, αντιστοίχως):

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \ni A \longmapsto \mathbf{G}(\mathbf{F}(A)) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E}), \ \ \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B) \ni f \longmapsto \mathbf{G}(\mathbf{F}(f)).$$

(Ο $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ είναι συναλλοίωτος όταν αμφότεροι οι $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ είναι είτε συναλλοίωτοι είτε ανταλλοίωτοι, και ανταλλοίωτος όταν ο ένας εκ των $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ είναι συναλλοίωτος και ο άλλος ανταλλοίωτος.)

A.2.3 Ορισμός. Ένας (συναλλοίωτος ή ανταλλοίωτος) συναρτητής $\mathbf{F} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ μεταξύ δυο ασθενώς προσθετικών κατηγοριών $\mathscr{C}$ και $\mathscr{D}$ καλείται **προσθετικός** όταν $\mathbf{F}(f+g) = \mathbf{F}(f) + \mathbf{F}(g)$, $\forall\,(f,g) \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B)$. (Εάν οι $\mathscr{C}$ και $\mathscr{D}$ είναι προσθετικές κατηγορίες, τότε ένας τέτοιος $\mathbf{F}$ απεικονίζει το μηδενικό αντικείμενο τής $\mathscr{C}$ στο μηδενικό αντικείμενο τής $\mathscr{D}$.)

A.2.4 Παραδείγματα. (i) Επί οιασδήποτε κατηγορίας $\mathscr{C}$ ορίζεται ο *ταυτοτικός συναρτητής* $\mathbf{id}_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}$ με $\mathbf{id}_{\mathscr{C}}(A) := A$, για κάθε $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ και $\mathbf{id}_{\mathscr{C}}(f) := f$, για κάθε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A,B)$. Γενικότερα, εάν $\mathscr{C}'$ είναι μια υποκατηγορία μιας κατηγορίας $\mathscr{C}$, τότε ορίζεται ο *ενθετικός συναρτητής* $\iota : \mathscr{C}' \rightsquigarrow \mathscr{C}$ με $\iota(A) := A$, $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}')$ και $\iota(f) := f$, για κάθε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}'}(A,B)$.

(ii) Οι *επιλήσμονες (συναλλοίωτοι) συναρτητές*

$$\mathfrak{Groups} \rightsquigarrow \mathfrak{Sets},\ \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Sets},\ \mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathfrak{Sets},$$

είναι αυτοί που «ξεχνούν» τις εκάστοτε (αλγεβρικές ή τοπολογικές) δομές.

(iii) Ο *συναρτητής αβελιανοποιήσεως* $\mathbf{F} : \mathfrak{Groups} \rightsquigarrow \mathfrak{Abgroups}$ είναι ο συναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Groups}) \ni G \longmapsto \mathbf{F}(G) := G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G] \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Abgroups}),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Groups}}(G,H) \ni f \longmapsto \mathbf{F}(f) := \overline{f} \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Abgroups}}(G^{\mathrm{ab}}, H^{\mathrm{ab}}),$$

όπου $[G,G]$ είναι η *μεταθέτρια υποομάδα* τής G η παραγόμενη από όλους τους μεταθέτες $[g,g'] := gg'g^{-1}(g')^{-1},\ g,g' \in G$, και

$$\overline{f} : G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow H^{\mathrm{ab}},\ \ g[G,G] \longmapsto f(g)[H,H].$$

(iv) Hom-*συναρτητές*. Εάν $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$, τότε ορίζεται ένας ανταλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Hom}_R(-,A) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathrm{Hom}_R(M,A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M,M') =: \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Mod}_R}(M,M') \ni f \longmapsto \mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{id}_A).$$

και ένας συναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Hom}_R(A,-) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathrm{Hom}_R(A,M) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M,M') =: \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Mod}_R}(M,M') \ni f \longmapsto \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_A, f),$$

(Βλ. λήμματα 4.1.6 και 4.1.7.) Αμφότεροι οι $\mathrm{Hom}_R(-,A)$ και $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ είναι *και* προσθετικοί συναρτητές (υπό την έννοια τού ορισμού A.2.3).

(v) *Συναρτητές δημιουργούμενοι μέσω τού τανυστικού γινομένου R-μοδίων*. Εάν υποτεθεί ότι $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$, τότε ορίζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής

$$- \otimes_R A : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto M \otimes_R A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni f \longmapsto f \overline{\otimes} \mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R A, M' \otimes_R A),$$

καθώς και ένας συναλλοίωτος συναρτητής

$$A \otimes_R - \ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto A \otimes_R M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni f \longmapsto \mathrm{id}_A \overline{\otimes} f \in \mathrm{Hom}_R(A \otimes_R M, A \otimes_R M'),$$

(Βλ. προτάσεις 4.5.4 και 4.5.5.) Αμφότεροι οι συναρτητές $- \otimes_R A$ και $A \otimes_R -$ είναι προσθετικοί (υπό την έννοια τού ορισμού A.2.3).

(vi) *R-γραμμικοί συναρτητές*. Ένας (συναλλοίωτος ή ανταλλοίωτος) προσθετικός συναρτητής $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ καλείται **R-γραμμικός** όταν για οιουσδήποτε $M, M' \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$ και για οιοδήποτε ζεύγος $(\lambda, \mu) \in R \times R$ ισχύει

$$\mathbf{F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathbf{F}(f) + \mu \mathbf{F}(g), \ \forall\, (f, g) \in \mathrm{Hom}_R(M, M') \times \mathrm{Hom}_R(M, M').$$

Οι συναρτητές στα (iv) και (v) είναι R-γραμμικοί.

(vii) *Συναρτητές ομολογίας και συνομολογίας*. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής

$$H_n(-) : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni \mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto H_n(\mathbf{M}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet) \ni f_\bullet \longmapsto H_n(f_\bullet) \in \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{M}_\bullet), H_n(\mathbf{M}'_\bullet)),$$

ο λεγόμενος **n-οστός συναρτητής ομολογίας**. (Βλ. τον ορισμό 3.2.2 και τις προτάσεις 3.2.5, 3.2.6 και 3.2.7.) Εξάλλου, ως **συναρτητής ομολογίας** (σε επίπεδο αλυσωτών συμπλόκων) ορίζεται ο

$$H_\bullet(-) : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni \mathbf{M}_\bullet \longmapsto H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet) = (H_n(\mathbf{M}_\bullet), \delta_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet) \ni f_\bullet \longmapsto H_\bullet(f_\bullet) \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet)),$$

όπου $\delta_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$, και $H_\bullet(f_\bullet) := (H_n(f_\bullet))_{n \in \mathbb{Z}}$. Κατ' αναλογίαν, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής

$$H^n(-) : \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni \mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto H^n(\mathbf{M}^\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(\mathbf{M}^\bullet, \mathbf{M}'^\bullet) \ni f^\bullet \longmapsto H^n(f^\bullet) \in \mathrm{Hom}_R(H^n(\mathbf{M}^\bullet), H^n(\mathbf{M}'^\bullet)),$$

ο λεγόμενος **n-οστός συναρτητής συνομολογίας**. (Βλ. τον ορισμό 3.2.20 και τις προτάσεις 3.2.23, 3.2.24 και 3.2.25.) Εξάλλου, ως **συναρτητής συνομολογίας** (σε επίπεδο συναλυσωτών συμπλόκων) ορίζεται ο

$$H^\bullet(-) : \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni \mathbf{M}^\bullet \longmapsto H^\bullet(\mathbf{M}^\bullet) = (H^n(\mathbf{M}^\bullet), \delta^n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(\mathbf{M}^\bullet, \mathbf{M}'^\bullet) \ni f^\bullet \longmapsto H^\bullet(f^\bullet) \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(H^\bullet(\mathbf{M}^\bullet), H^\bullet(\mathbf{M}'^\bullet))),$$

όπου $\delta^n = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$, και $H^\bullet(f^\bullet) := (H^n(f^\bullet))_{n\in\mathbb{Z}}$.

(viii) *Συναρτητές δημιουργούμενοι μέσω των γινομένων επεκτάσεως.* Για κάθε ακέραιο αριθμό n και για κάθε παγιωμένον $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$ ορίζεται ένας προσθετικός ανταλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Ext}^n_R(-, A)\ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathrm{Ext}^n_R(M, A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni f \longmapsto \mathrm{Ext}^n_R(f, \mathrm{id}_A) \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}^n_R(M', A), \mathrm{Ext}^n_R(M, A)),$$

καθώς και ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Ext}^n_R(A, -)\ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathrm{Ext}^n_R(A, M) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni f \longmapsto \mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{id}_A, f) \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}^n_R(A, M), \mathrm{Ext}^n_R(A, M')).$$

(Βλ. τους ορισμούς 5.2.4 και 5.2.6, καθώς και τις προτάσεις 5.2.7 και 5.2.8. Αντίστοιχοι συναρτητές $\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(-, A)$ και $\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(A, -)$ ορίζονται *και* με τη βοήθεια των προαναφερθέντων στα εδάφια 5.2.22 και 5.2.23.)

(ix) *Συναρτητές δημιουργούμενοι μέσω των γινομένων στρέψεως.* Εάν $n \in \mathbb{N}_0$ και $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$, τότε ορίζεται ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Tor}^R_n(A, -)\ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathrm{Tor}^R_n(A, M) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni f \longmapsto \mathrm{Tor}^R_n(\mathrm{id}_A, f) \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}^R_n(A, M), \mathrm{Tor}^R_n(A, M')),$$

καθώς και ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Tor}^R_n(-, A)\ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathrm{Tor}^R_n(M, A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni f \longmapsto \mathrm{Tor}^R_n(f, \mathrm{id}_A) \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}^R_n(M, A), \mathrm{Tor}^R_n(M', A)).$$

(Βλ. ορισμούς 5.3.4 και 5.3.6, και προτάσεις 5.3.7 και 5.3.8. Αντίστοιχοι συναρτητές $\overline{\mathrm{Tor}}^R_n(-, A)$ και $\overline{\mathrm{Tor}}^R_n(A, -)$ ορίζονται *και* με τη βοήθεια των προαναφερθέντων στο εδάφιο 5.3.28.)

Α.2.5 Ορισμός. Έστω $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ ένας προσθετικός συναλλοίωτος (και αντιστοίχως, ανταλλοίωτος) συναρτητής και έστω

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων. (Βλ. εδ. 3.1.1.) Ο $\mathbf{F}$ καλείται

(i) **εξ αριστερών ακριβής συναρτητής** όταν η $\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(A) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(C)$

$$(\text{και αντιστοίχως, η } \{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(C) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(A))$$

είναι κατ' ανάγκην ακριβής,

(ii) **εκ δεξιών ακριβής συναρτητής** όταν η $\mathbf{F}(A) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(C) \longrightarrow \{0\}$

$$(\text{και αντιστοίχως, η } \mathbf{F}(C) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(A) \longrightarrow \{0\})$$

είναι κατ' ανάγκην ακριβής και

(iii) **ακριβής συναρτητής** όταν η $\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(A) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(C) \longrightarrow \{0\}$

$$(\text{και αντιστοίχως, η } \{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(C) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(A) \longrightarrow \{0\})$$

είναι κατ' ανάγκην (βραχεία) ακριβής.

A.2.6 Πρόταση. *Έστω* $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ *ένας προσθετικός συναρτητής. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν ο* $\mathbf{F}$ *είναι συναλλοίωτος* (*και αντιστοίχως, ανταλλοίωτος*), *τότε ο* $\mathbf{F}$ *είναι εξ αριστερών ακριβής συναρτητής όταν και μόνον όταν για κάθε ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

η $\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(A) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(C)$ (*και αντ., η* $\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(C) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(A)$) *είναι ακριβής.*

(ii) *Εάν ο* $\mathbf{F}$ *είναι συναλλοίωτος* (*και αντιστοίχως, ανταλλοίωτος*), *τότε ο* $\mathbf{F}$ *είναι εκ δεξιών ακριβής συναρτητής όταν και μόνον όταν για κάθε ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

η $\mathbf{F}(A) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(C) \longrightarrow \{0\}$ (*και αντ., η* $\mathbf{F}(C) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(A) \longrightarrow \{0\}$) *είναι ακριβής.*

(iii) *Ο* $\mathbf{F}$ *είναι ακριβής συναρτητής όταν και μόνον όταν ο* $\mathbf{F}$ *είναι ταυτοχρόνως και εξ αριστερών και εκ δεξιών ακριβής.*

Αποδειξη. Πρόκειται για απλή άσκηση. (Πρβλ. [21], σελ. 107-109.) □

A.2.7 Παραδείγματα. Ας υποθέσουμε ότι M, N είναι δυο (παγιωμένοι) R-μόδιοι.

(i) Ο προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ είναι εξ αριστερών ακριβής αλλ' εν γένει μη ακριβής[6]. (Βλ. θεώρημα 4.1.18 και σημείωση 4.1.20.)

[6] Όταν ο M είναι *ελεύθερος* R-μόδιος, ο $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ *είναι* ακριβής.

(ii) Ο προσθετικός ανταλλοίωτος συναρτητής $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ είναι εξ αριστερών ακριβής αλλ' εν γένει μη ακριβής. (Βλ. θεώρημα 4.1.15 και σημείωση 4.1.17.)

(iii) Οι προσθετικοί συναλλοίωτοι συναρτητές $M \otimes_R -$ και $- \otimes_R N$ είναι εκ δεξιών ακριβείς αλλ' εν γένει μη ακριβείς. (Βλ. θεωρήματα 4.5.8 και 4.5.9, και σημείωση 4.5.10.)

(iv) Ο προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} : \mathfrak{Abgroups} \rightsquigarrow \mathfrak{Abgroups}$ είναι ακριβής.

A.2.8 Πρόταση. *Εάν M είναι ένας R-μόδιος, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Ο M είναι προβολικός $\Longleftrightarrow$ ο $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ είναι ακριβής.*

(ii) *Ο M είναι εμβολικός $\Longleftrightarrow$ ο $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ είναι ακριβής.*

(iii) *Ο M είναι ισόπεδος $\Longleftrightarrow$ ο $M \otimes_R -$ (ή, αντιστοίχως, ο $- \otimes_R M$) είναι ακριβής.*

Απόδειξη. Βλ. θεωρήματα 4.2.7 και 4.2.29, και προτάσεις 4.5.17 και 4.5.19. □

A.2.9 Ορισμός. Εάν $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{D}$ είναι τρεις κατηγορίες και

$$\mathbf{F} : \mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2 \rightsquigarrow \mathscr{D},$$

$$\mathrm{Ob}(\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2) \ni (C_1, C_2) \longmapsto \mathbf{F}(C_1, C_2) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D}),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2}((C_1, C_2), (C_1', C_2')) \ni (f, g) \longmapsto \mathbf{F}(f, g),$$

ένας συναρτητής από το καρτεσιανό γινόμενο των δύο πρώτων[7] στην τρίτη, τότε λέμε ότι ο $\mathbf{F}$ είναι ένας **διπλός συναρτητής** από το ζεύγος $(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2)$ στην $\mathscr{D}$. Είναι προφανές ότι κάθε παγιωμένο $C_1 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_1)$ καθορίζει έναν συναρτητή

$$\mathbf{F}_{C_1} = \mathbf{F}(C_1, -) : \mathscr{C}_2 \rightsquigarrow \mathscr{D},$$

και κάθε παγιωμένο $C_2 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_2)$ καθορίζει έναν συναρτητή

$$\mathbf{F}_{C_2} = \mathbf{F}(-, C_2) : \mathscr{C}_1 \rightsquigarrow \mathscr{D}.$$

(i) Ο $\mathbf{F}$ καλείται **συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές** όταν αμφότεροι οι συναρτητές $\mathbf{F}_{C_1}$ και $\mathbf{F}_{C_2}$ είναι συναλλοίωτοι και όταν -ταυτοχρόνως- για οιουσδήποτε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}_1}(C_1, C_1')$ και $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}_2}(C_2, C_2')$ το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(C_1, C_2) \arrow[rrrr, "\mathbf{F}_{C_2}(f) := \mathbf{F}(f,\, \mathrm{id}_{C_2})"] \arrow[dd, "\mathbf{F}_{C_1}(g) := \mathbf{F}(\mathrm{id}_{C_1}, g)"'] \arrow[drr, dash] & & & & \mathbf{F}(C_1', C_2) \arrow[dd, "\mathbf{F}_{C_1'}(g) := \mathbf{F}(\mathrm{id}_{C_1'}, g)"] \\
& \circlearrowleft & \mathbf{F}(f, g) \arrow[drr] & \circlearrowright & \\
\mathbf{F}(C_1, C_2') \arrow[rrrr, "\mathbf{F}_{C_2'}(f) := \mathbf{F}(f,\, \mathrm{id}_{C_2'})"'] & & & & \mathbf{F}(C_1', C_2')
\end{tikzcd}$$

(ii) Ο $\mathbf{F}$ καλείται **συναλλοίωτος ως προς την πρώτη και ανταλλοίωτος ως προς τη δεύτερη μεταβλητή** όταν ο $\mathbf{F}_{C_1}$ είναι ανταλλοίωτος, ο $\mathbf{F}_{C_2}$ συναλλοίωτος και όταν -ταυτοχρόνως- για οιουσδήποτε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}_1}(C_1, C_1')$ και $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}_2}(C_2, C_2')$ το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(C_1,C_2) \arrow[rr, "\mathbf{F}_{C_2}(f):=\mathbf{F}(f,\,\mathrm{id}_{C_2})"] & & \mathbf{F}(C_1',C_2) \\
{} \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(f,g) \arrow[ur] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} \\
\mathbf{F}(C_1,C_2') \arrow[uu, "\mathbf{F}_{C_1}(g):=\mathbf{F}(\mathrm{id}_{C_1},g)"] \arrow[ur, dash] \arrow[rr, "\mathbf{F}_{C_2'}(f):=\mathbf{F}(f,\,\mathrm{id}_{C_2'})"'] & & \mathbf{F}(C_1',C_2') \arrow[uu, "\mathbf{F}_{C_1'}(g):=\mathbf{F}(\mathrm{id}_{C_1'},g)"']
\end{tikzcd}$$

(iii) Ο $\mathbf{F}$ καλείται **ανταλλοίωτος ως προς την πρώτη και συναλλοίωτος ως προς τη δεύτερη μεταβλητή** όταν ο $\mathbf{F}_{C_1}$ είναι συναλλοίωτος, ο $\mathbf{F}_{C_2}$ ανταλλοίωτος και όταν -ταυτοχρόνως- για οιουσδήποτε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}_1}(C_1, C_1')$ και $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}_2}(C_2, C_2')$ το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(C_1,C_2) \arrow[dd, "\mathbf{F}_{C_1}(g):=\mathbf{F}(\mathrm{id}_{C_1},g)"'] & & \mathbf{F}(C_1',C_2) \arrow[ll, "\mathbf{F}_{C_2}(f):=\mathbf{F}(f,\,\mathrm{id}_{C_2})"'] \arrow[dl, dash] \arrow[dd, "\mathbf{F}_{C_1'}(g):=\mathbf{F}(\mathrm{id}_{C_1'},g)"] \\
{} \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}(f,g) \arrow[dl] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & {} \\
\mathbf{F}(C_1,C_2') & & \mathbf{F}(C_1',C_2') \arrow[ll, "\mathbf{F}_{C_2'}(f):=\mathbf{F}(f,\,\mathrm{id}_{C_2'})"]
\end{tikzcd}$$

(iv) Ο $\mathbf{F}$ καλείται **ανταλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές** όταν αμφότεροι οι συναρτητές $\mathbf{F}_{C_1}$ και $\mathbf{F}_{C_2}$ είναι ανταλλοίωτοι και όταν -ταυτοχρόνως- για οιουσδήποτε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}_1}(C_1, C_1')$ και $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}_2}(C_2, C_2')$ το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(C_1,C_2) & & \mathbf{F}(C_1',C_2) \arrow[ll, "\mathbf{F}_{C_2}(f):=\mathbf{F}(f,\,\mathrm{id}_{C_2})"'] \\
{} \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(f,g) \arrow[ul] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & {} \\
\mathbf{F}(C_1,C_2') \arrow[uu, "\mathbf{F}_{C_1}(g):=\mathbf{F}(\mathrm{id}_{C_1},g)"] & & \mathbf{F}(C_1',C_2') \arrow[ll, "\mathbf{F}_{C_2'}(f):=\mathbf{F}(f,\,\mathrm{id}_{C_2'})"] \arrow[ul, dash] \arrow[uu, "\mathbf{F}_{C_1'}(g):=\mathbf{F}(\mathrm{id}_{C_1'},g)"']
\end{tikzcd}$$

A.2.10 Σημείωση. Στην ειδική περίπτωση όπου $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2 = \mathscr{D} = \mathfrak{Mod}_R$, ένας διπλός συναρτητής $\mathbf{F}$ (υπό την έννοια τού ορισμού A.2.9) καλείται R-**διγραμμικός συναρτητής** όταν αμφότεροι οι $\mathbf{F}_{C_1}$ και $\mathbf{F}_{C_2}$ είναι R-γραμμικοί (υπό την έννοια τού ορισμού A.2.4 (vi)). (Εν τοιαύτη περιπτώσει, εάν (M, N) είναι ένα ζεύγος R-μοδίων με τουλάχιστον έναν εξ αυτών *τετριμμένο*, τότε και ο R-μόδιος $\mathbf{F}(M, N)$ είναι κατ' ανάγκην *τετριμμένος* ένεκα τής προσθετικότητας των $\mathbf{F}_{C_1}$ και $\mathbf{F}_{C_2}$.)

A.2.11 Παραδείγματα. (i) Ο συναρτητής

$$\mathrm{Hom}_R(-,-) : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

είναι R-διγραμμικός συναρτητής, ανταλλοίωτος ως προς την πρώτη και συναλλοίωτος ως προς τη δεύτερη μεταβλητή. Επιπροσθέτως, ο $\mathrm{Hom}_R(-,-)$ είναι εξ αριστερών ακριβής ως προς αμφότερες τις μεταβλητές.

(ii) Ο συναρτητής

$$-\otimes_R - : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

είναι R-διγραμμικός συναρτητής, συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές. Επιπροσθέτως, ο $-\otimes_R -$ είναι εκ δεξιών ακριβής ως προς αμφότερες τις μεταβλητές.

▸ **Μετάβαση στην κατηγορία** $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$. Έστω

$$\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathbf{F}(M) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni f \longmapsto \mathbf{F}(f) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(M), \mathbf{F}(M')),$$

ένας R-γραμμικός συναλλοίωτος συναρτητής.

A.2.12 Ορισμός. Ο εν λόγω συναρτητής μπορεί να *επεκταθεί* σε έναν προσθετικό συναλλοίωτο συναρτητή (τον οποίο θα εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα)

$$\mathbf{F} : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni \mathbf{M}_\bullet \longmapsto \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet) \ni f_\bullet \longmapsto \mathbf{F}(f_\bullet) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet)),$$

θέτοντας

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet) := \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet)$$

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet)) := \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet))$$

---

[7] Η κλάση $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2)$ των αντικειμένων τής κατηγορίας $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$ αποτελείται από διατεταγμένα ζεύγη (A_1, A_2), όπου $A_1 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_1)$ και $A_2 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_2)$. Επιπροσθέτως, για κάθε τριάδα αντικειμένων A_1, B_1, C_1 τής $\mathscr{C}_1$ και για κάθε τριάδα αντικειμένων A_2, B_2, C_2 τής $\mathscr{C}_2$ έχουμε

$$(g_1, g_2) \circ (f_1, f_2) = (g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2),$$

για οιουσδήποτε $(f_j, g_j) \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}_j}(A_j, B_j) \times \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}_j}(B_j, C_j)$ και $j \in \{1, 2\}$ (όπου $\mathrm{id}_{(A_1, A_2)} = (\mathrm{id}_{A_1}, \mathrm{id}_{A_2})$).

και (για $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ έναν αλυσωτό μετασχηματισμό $(f_n : M_n \longrightarrow M'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$)

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet) := (\mathbf{F}(M_n), \mathbf{F}(d_n))_{n\in\mathbb{Z}},\ \ \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet) := (\mathbf{F}(M'_n), \mathbf{F}(d'_n))_{n\in\mathbb{Z}},}$$

και ως

$$\boxed{\mathbf{F}(f_\bullet) : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet) \text{ το } (\mathbf{F}(f_n) : \mathbf{F}(M_n) \longrightarrow \mathbf{F}(M'_n))_{n\in\mathbb{Z}},}$$

αντιστοίχως.

Πράγματι· η απεικόνιση $\mathbf{F}(d_n) : \mathbf{F}(M_n) \longrightarrow \mathbf{F}(M_{n-1})$ αποτελεί (λόγω τού συναλλοίωτου τού αρχικού συναρτητή $\mathbf{F}$) έναν ομομορφισμό R-μοδίων με

$$\mathbf{F}(d_{n-1}) \circ \mathbf{F}(d_n) = \mathbf{F}(\underbrace{d_{n-1} \circ d_n}_{=0}) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Εξάλλου, $\mathbf{F}(d'_n) \circ \mathbf{F}(f_n) = \mathbf{F}(d'_n \circ f_n) = \mathbf{F}(f_{n-1} \circ d_n) = \mathbf{F}(f_{n-1}) \circ \mathbf{F}(d_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για $f_\bullet, g_\bullet \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet)$,

$$\mathbf{F}(f_\bullet + g_\bullet) = \mathbf{F}(f_\bullet) + \mathbf{F}(g_\bullet),$$

ενώ για $f_\bullet \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet)$ και $g_\bullet \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{M}''_\bullet)$,

$$\mathbf{F}((g \circ f)_\bullet) = \mathbf{F}(g_\bullet) \circ \mathbf{F}(f_\bullet),$$

και $\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}) = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet)}$, για οιαδήποτε $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{M}''_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R))$.

Α.2.13 Σημείωση. Για να παρουσιάσει κανείς την κατηγορία $\mathfrak{Mod}_R$ ως *υποκατηγορία* τής $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ αρκεί να «ταυτίσει» κάθε $M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$ με το αλυσωτό σύμπλοκο $\lfloor M \rfloor_\bullet = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου $C_0 := M$, $C_n \cong \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$ και $d_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, καθώς και να «ταυτίσει» κάθε $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ με τον αλυσωτό μετασχηματισμό $\lfloor f \rfloor_\bullet : \lfloor M \rfloor_\bullet \longrightarrow \lfloor N \rfloor_\bullet$, όπου $\lfloor f \rfloor_0 := f$ και $\lfloor f \rfloor_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$. (Ορισμένοι συγγραφείς καλούν το $\lfloor M \rfloor_\bullet$ **αλυσωτό σύμπλοκο με τον** M **συγκεντρωμένο στον βαθμό** 0.)

Α.2.14 Πρόταση. *Εάν δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet, g_\bullet \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet)$ είναι ομότοποι* (βλ. 3.5.1)*, τότε οι $\mathbf{F}(f_\bullet)$,$\mathbf{F}(g_\bullet)$ είναι ωσαύτως ομότοποι.*

Απόδειξη. Εάν $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$ (βλ. εδ. 3.5.1), τότε

$$\begin{aligned}
&[f_n - g_n = d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}]\\
&\Rightarrow \mathbf{F}(f_n) - \mathbf{F}(g_n) = \mathbf{F}(f_n - g_n) = \mathbf{F}(d'_{n+1} \circ h_n) + \mathbf{F}(h_{n-1} \circ d_n)\\
&= \mathbf{F}(d'_{n+1}) \circ \mathbf{F}(h_n) + \mathbf{F}(h_{n-1}) \circ \mathbf{F}(d_n),
\end{aligned}$$

οπότε[8] $(\mathbf{F}(h_n))_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{F}(f_\bullet) \simeq \mathbf{F}(g_\bullet)$. □

[8] Εν προκειμένω, $(\mathbf{F}(h_n))_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}'_{\bullet+1})$.

A.2.15 Πόρισμα. *Εάν τα* $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet$ *είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα* (βλ. 3.5.10), *τότε τα* $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet)$ *είναι ωσαύτως ομοτοπικώς ισοδύναμα.*

Απόδειξη. Εξ υποθέσεως, υπάρχουν αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$ με $(g \circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}$ και $(f \circ g)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}$. Εξ αυτού έπεται ότι

$$\mathbf{F}(g_\bullet) \circ \mathbf{F}(f_\bullet) = \mathbf{F}((g \circ f)_\bullet) \simeq \mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}) = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet)}$$

και

$$\mathbf{F}(f_\bullet) \circ \mathbf{F}(g_\bullet) = \mathbf{F}((f \circ g)_\bullet) \simeq \mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}) = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet)},$$

οπότε τα $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet)$ και $\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet)$ είναι όντως ομοτοπικώς ισοδύναμα. □

A.2.16 Παρατήρηση. Κατ' αναλογίαν, κάθε R-γραμμικός *ανταλλοίωτος* συναρτητής

$$\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathbf{F}(M) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni f \longmapsto \mathbf{F}(f) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(M'), \mathbf{F}(M)),$$

επεκτείνεται σε ανταλλοίωτο συναρτητή[9]

$$\mathbf{F} : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni \mathbf{M}_\bullet \longmapsto \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet)^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$
$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet) \ni f_\bullet \longmapsto \mathbf{F}(f_\bullet)^\bullet \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet)^\bullet, \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet)^\bullet),$$

θέτοντας (για $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R))$)

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet)^\bullet := (\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet)^n, \delta^n))_{n \in \mathbb{Z}}, \;\; \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet)^n := \mathbf{F}(M_n), \;\; \delta^n := \mathbf{F}(d_{n+1}),}$$

και (για $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ έναν αλυσωτό μετασχηματισμό $(f_n : M_n \longrightarrow M'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$) ως

$$\boxed{\mathbf{F}(f_\bullet)^\bullet : \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet)^\bullet \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet)^\bullet \;\text{ το }\; (\mathbf{F}(f_\bullet)^n : \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet)^n \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet)^n)_{n \in \mathbb{Z}},}$$

αντιστοίχως, όπου $\mathbf{F}(f_\bullet)^n := \mathbf{F}(f_n), \; \forall n \in \mathbb{Z}$.

Έστω τώρα

$$\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R) \ni (M_1, M_2) \longmapsto \mathbf{F}(M_1, M_2) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R}((M_1, M_2), (M'_1, M'_2)) \ni (f, g) \longmapsto \mathbf{F}(f, g),$$
$$\mathbf{F}(f, g) : \mathbf{F}(M_1, M_2) \longrightarrow \mathbf{F}(M'_1, M'_2),$$

ένας R-διγραμμικός συναρτητής, συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές. (Βλ. A.2.9 (i) και A.2.10.)

[9] Επεξήγηση χρησιμοποιούμενου συμβολισμού: Γράφοντας $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet)^\bullet$ ενοούμε κάποιο *συναλυσωτό* σύμπλοκο το οποίο *επάγεται* από το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{M}_\bullet$ («έσωθεν βούλα»), αλλά με τους δείκτες (τής διαβαθμίσεως) αυτού εξακολουθούντες να τοποθετούνται -ως είθισται- εν είδει εκθετών («έξωθεν βούλα»). Αντίστοιχη είναι και η νοηματοδότηση τού συμβόλου $\mathbf{F}(f_\bullet)^\bullet$.

A.2.17 Ορισμός. *Και σε αυτήν την περίπτωση* ο εν λόγω συναρτητής μπορεί να *επεκταθεί* σε έναν συναλλοίωτο συναρτητή ως προς αμφότερες τις μεταβλητές (τον οποίο θα εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα)

$$\mathbf{F} : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \longmapsto \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet) \times \mathrm{Hom}_R(\mathbf{N}_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet) \ni (f_\bullet, g_\bullet) \longmapsto \mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet, \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet),$$

θέτοντας (για $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet = (\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n, \mathfrak{d}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$)

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathbf{F}(M_p, N_{n-p}) = \bigoplus_{p+q=n} \mathbf{F}(M_p, N_q),}$$

συμβολίζοντας ως $\mathrm{in}_{p,q} : \mathbf{F}(M_p, N_q) \hookrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n$ τις φυσικές ενθέσεις (με[10] $p + q = n$, βλ. 2.4.4), υπονοώντας με το κατακόρυφο βέλος τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{F}(M_p, N_q) \arrow[dl, "\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})"'] \arrow[dr, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_q^{\mathbf{N}_\bullet})"] \arrow[dd, dotted] \arrow[ddll, bend right, hook', "\mathrm{in}_{p,q}"'] & \\
 & \mathbf{F}(M_{p-1}, N_q) \arrow[dr, hook, "\mathrm{in}_{p-1,q}"] & & \mathbf{F}(M_p, N_{q-1}) \arrow[dl, hook', "\mathrm{in}_{p,q-1}"'] \\
\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \arrow[rr, dashed, "\mathfrak{d}_n"] & & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

τον ομομορφισμό R-μοδίων

$$\mathrm{in}_{p,q-1} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_q^{\mathbf{N}_\bullet}) + (-1)^q\, \mathrm{in}_{p-1,q} \circ \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q}) \tag{A.1}$$

ορίζοντας ως $\mathfrak{d}_n = \mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n, \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_{n-1})$ τον *μονοσημάντως ορισμένο* ομομορφισμό για τον οποίο ισχύει[11]

$$\boxed{\mathfrak{d}_n \circ \mathrm{in}_{p,q} = \mathrm{in}_{p,q-1} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_q^{\mathbf{N}_\bullet}) + (-1)^q\, \mathrm{in}_{p-1,q} \circ \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q}),}$$

και θέτοντας ως $\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet$ τον

$$(\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_n : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

όπου ο $\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_n$ είναι ο *μονοσημάντως ορισμένος* ομομορφισμός ο οποίος καθιστά το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό[12].

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n \arrow[rrrr, dashed, "\mathbf{F}(f_\bullet,g_\bullet)_n"] & & & & \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_n \\
& \circlearrowright & & \circlearrowleft & \\
\mathbf{F}(M_p,N_q) \arrow[uu, "\mathrm{in}_{p,q}"] \arrow[rrrr, "\mathbf{F}(f_p,g_q)"'] \arrow[uurrrr, "\mathrm{in}'_{p,q}\circ\mathbf{F}(f_p,g_q)" description] & & & & \mathbf{F}(M'_p,N'_q) \arrow[uu, "\mathrm{in}'_{p,q}"']
\end{tikzcd}$$

Πράγματι· για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και κάθε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ με $p+q=n$ η απεικόνιση $\mathbf{F}(f_\bullet,g_\bullet)_n$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $\mathbf{F}(f_{1,\bullet}+f_{2,\bullet},g_\bullet)_n\circ\mathrm{in}_{p,q} = (\mathbf{F}(f_{1,\bullet},g_\bullet)_n+\mathbf{F}(f_{2,\bullet},g_\bullet)_n)\circ\mathrm{in}_{p,q}$,

(ii) $\mathbf{F}(f_\bullet,g_{1,\bullet}+g_{2,\bullet})_n\circ\mathrm{in}_{p,q} = (\mathbf{F}(f_\bullet,g_{1,\bullet})_n+\mathbf{F}(f_\bullet,g_{2,\bullet})_n)\circ\mathrm{in}_{p,q}$,

(iii) $\mathbf{F}((\lambda f)_\bullet,g_\bullet) = \lambda\mathbf{F}(f_\bullet,g_\bullet) = \mathbf{F}(f_\bullet,(\lambda g)_\bullet)$, $\forall\lambda\in R$,

(iv) $\mathbf{F}((f_2\circ f_1)_\bullet,(g_2\circ g_1)_\bullet)_n\circ\mathrm{in}_{p,q} = \mathbf{F}(f_{2,\bullet},g_{2,\bullet})_n\circ\mathbf{F}(f_{1,\bullet},g_{1,\bullet})_n\circ\mathrm{in}_{p,q}$,

(v) $\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n\circ\mathrm{in}_{p,q} = \mathrm{in}_{p,q}$.

Επιπροσθέτως, το $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet = (\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n,\mathfrak{d}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί αλυσωτό σύμπλοκο, διότι

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{d}_{n-1}\circ\mathfrak{d}_n\circ\mathrm{in}_{p,q} = (\mathfrak{d}_{n-1}\circ\mathrm{in}_{p,q-1})\circ\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p},d_q^{\mathbf{N}_\bullet}) + (-1)^q\,(\mathfrak{d}_{n-1}\circ\mathrm{in}_{p-1,q})\circ\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{N_q})\\
&= \big(\mathrm{in}_{p,q-2}\circ\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p},d_{q-1}^{\mathbf{N}_\bullet}) + (-1)^{q-1}\,\mathrm{in}_{p-1,q-1}\circ\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{N_{q-1}})\big)\circ\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p},d_q^{\mathbf{N}_\bullet})\\
&+(-1)^q\,\big(\mathrm{in}_{p-1,q-1}\circ\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_{p-1}},d_q^{\mathbf{N}_\bullet}) + (-1)^q\,\mathrm{in}_{p-2,q}\circ\mathbf{F}(d_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{N_q})\big)\circ\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{N_q})\\
&= \mathrm{in}_{p,q-2}\circ\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p},\underbrace{d_{q-1}^{\mathbf{N}_\bullet}\circ d_q^{\mathbf{N}_\bullet}}_{=0}) + (-1)^{q-1}\underbrace{(\mathrm{in}_{p-1,q-1}\circ\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet},d_q^{\mathbf{N}_\bullet}) - \mathrm{in}_{p-1,q-1}\circ\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet},d_q^{\mathbf{N}_\bullet}))}_{=0}\\
&+(-1)^q\,\mathrm{in}_{p-2,q}\circ\mathbf{F}(\underbrace{d_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet}\circ d_p^{\mathbf{M}_\bullet}}_{=0},\mathrm{id}_{N_q}) = 0
\end{aligned}$$

και η $\mathbf{F}(f_\bullet,g_\bullet)_\bullet : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_\bullet$ αποτελεί αλυσωτό μετασχηματισμό,

[10] Γράφοντας $\bigoplus\limits_{p+q=n}\mathbf{F}(M_p,N_q)$ θα εννοούμε το $\bigoplus\limits_{\{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid p+q=n\}}\mathbf{F}(M_p,N_q)$.

[11] Βλ. 2.4.7, 2.4.9 και 2.4.12. (Αρκεί να εφαρμοσθεί η καθολική ιδιότητα τού εδ. 2.4.7, με τους $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n$, $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_{n-1}$ και $\mathbf{F}(M_p,N_q)$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων C, M και M_j, και με τους $\mathrm{in}_{p,q}$, (A.1) και $\mathfrak{d}_n$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων f_j, g_j και h.)

[12] Αρκεί να εφαρμοσθεί εκ νέου η καθολική ιδιότητα τού εδ. 2.4.7, με τους $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n$, $\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_n$ και $\mathbf{F}(M_p,N_q)$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων C, M και M_j, και με τους $\mathrm{in}_{p,q}$, $\mathrm{in}_{p,q}\circ\mathbf{F}(f_p,g_q)$ και $\mathbf{F}(f_\bullet,g_\bullet)_n$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων f_j, g_j και h.

καθόσον για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και κάθε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p+q=n$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\partial'_n \circ \mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_n \circ \mathrm{in}_{p,q} = \partial'_n \circ \mathrm{in}'_{p,q} \circ \mathbf{F}(f_p, g_q) \\
&= \mathrm{in}'_{p,q-1} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M'_p}, d_q^{\mathbf{N}'_\bullet}) \circ \mathbf{F}(f_p, g_q) + (-1)^q\, \mathrm{in}'_{p-1,q} \circ \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}'_\bullet}, \mathrm{id}_{N'_q}) \circ \mathbf{F}(f_p, g_q) \\
&= \mathrm{in}'_{p,q-1} \circ \mathbf{F}(f_p,\ \underbrace{d_q^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ g_q}_{=g_{q-1} \circ d_q^{\mathbf{N}_\bullet}}\ ) + (-1)^q\, \mathrm{in}'_{p-1,q} \circ \mathbf{F}(\ \underbrace{d_p^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ f_p}_{=f_{p-1} \circ d_p^{\mathbf{M}_\bullet}}\ , g_q) \\
&= \mathrm{in}'_{p,q-1} \circ \mathbf{F}(f_p, g_{q-1}) \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_q^{\mathbf{N}_\bullet}) + (-1)^q\, \mathrm{in}'_{p-1,q} \circ \mathbf{F}(f_{p-1}, g_q) \circ \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q}) \\
&= \mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_{n-1} \circ \mathrm{in}_{p,q-1} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_q^{\mathbf{N}_\bullet}) + (-1)^q\, \mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_{n-1} \circ \mathrm{in}_{p-1,q} \circ \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q}) \\
&= \mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_{n-1} \left(\mathrm{in}_{p,q-1} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_q^{\mathbf{N}_\bullet}) + (-1)^q\, \mathrm{in}_{p-1,q} \circ \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q}) \right) \\
&= \mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_{n-1} \circ \partial_n \circ \mathrm{in}_{p,q},
\end{aligned}
$$

οπότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_n \arrow[r, "\partial'_n"] & \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_{n-1} \\
\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \arrow[r, "\partial_n"'] \arrow[u, "\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_n"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_{n-1} \arrow[u, "\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_{n-1}"']
\end{tikzcd}
$$

A.2.18 Σημείωση. (i) Επεξήγηση χρησιμοποιούμενων συμβολισμών: Αν και δεν είναι ιδιαίτερα κομψό να γράφουμε $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, αντί τού $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, είναι επιτακτική η ανάγκη επισημάνσεως των αλυσωτών συμπλόκων στα οποία ανήκουν οι θεωρούμενοι συνοριακοί τελεστές (τουλάχιστον σε αυτό το παράρτημα) για ευνόητους λόγους. (Πρβλ. εδ. 3.2.1.) Επίσης, γράφοντας $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ ενοούμε το οριζόμενο *αλυσωτό σύμπλοκο* το οποίο *επάγεται* μέσω των αλυσωτών συμπλόκων $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{N}_\bullet$ («έσωθεν βούλες»), αλλά με τους δείκτες (τής διαβαθμίσεως) αυτού εξακολουθούντες να τοποθετούνται -ως είθισται- εν είδει υποδεικτών («έξωθεν βούλα»). Αντίστοιχη είναι και η νοηματοδότηση τού συμβόλου $\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet$. (Ορισμένοι συγγραφείς, οι οποίοι αρέσκονται στη διεξοδικότερη μελέτη *διπλών συμπλόκων*, συμβολίζουν ενίοτε το $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ ως $\mathrm{Tot}_\bullet^{\oplus}(\mathbf{Y}_{\bullet\bullet})$, όπου $\mathbf{Y}_{p,q} := \mathbf{F}(M_p, N_q)$, καλώντας το **συνολικό αλυσωτό σύμπλοκο τού $\mathbf{Y}_{\bullet\bullet}$**.)

(ii) Στην ειδική περίπτωση όπου το δεύτερο αλυσωτό σύμπλοκο είναι τής μορφής $\lfloor N \rfloor_\bullet$ (για κάποιον παγιωμένο R-μόδιο N, βλ. εδ. A.2.13) λαμβάνουμε

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \lfloor N \rfloor_\bullet)_n = \mathbf{F}(M_n, N)_n \ \text{ και } \ \partial_n = \mathbf{F}(d_n^{\mathbf{M}_\bullet},\ \mathrm{id}_N),$$

ενώ στην ειδική περίπτωση όπου το πρώτο αλυσωτό σύμπλοκο είναι τής μορφής $\lfloor M \rfloor_\bullet$ (για κάποιον παγιωμένο R-μόδιο M) λαμβάνουμε

$$\mathbf{F}(\lfloor M \rfloor_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n = \mathbf{F}(M, N_n)_n \ \text{ και } \ \partial_n = \mathbf{F}(\mathrm{id}_M, d_n^{\mathbf{N}_\bullet}).$$

Ιδιαιτέρως, ο διπλός συναρτητής ο ορισθείς στο εδ. A.2.17 είναι όντως επέκταση τού αρχικού, καθόσον

$$\mathbf{F}(\lfloor M \rfloor_\bullet, \lfloor N \rfloor_\bullet)_n = \lfloor \mathbf{F}(M,N) \rfloor_n\,, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

και για κάθε ζεύγος $(f,g) \in \mathrm{Hom}_R(M,M') \times \mathrm{Hom}_R(N,N')$ έχουμε

$$\mathbf{F}(\lfloor f \rfloor_\bullet, \lfloor g \rfloor_\bullet)_n = \lfloor \mathbf{F}(f,g) \rfloor_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Αξίζει να επισημανθεί ότι η έκφραση (A.1) *δεν είναι συμμετρική* ως προς τις δύο μεταβλητές. Ως συνοριακός τελεστής θα μπορούσε αντί τού ∂_n να χρησιμοποιηθεί ο $\widetilde{\partial_n}$ με

$$\widetilde{\partial_n} \circ \mathrm{in}_{p,q} = (-1)^p \, \mathrm{in}_{p,q-1} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_q^{\mathbf{N}^\bullet}) + \mathrm{in}_{p-1,q} \circ \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})$$

και, ως εκ τούτου, να ορισθεί μια άλλη επέκταση $\widetilde{\mathbf{F}}$ τού αρχικού. Μολαταύτα, τούτο δεν θα επηρέαζε στο παραμικρό τα θεωρητικά αποτελέσματα, καθότι είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι οι $\mathbf{F}$ και $\widetilde{\mathbf{F}}$ θα ήσαν *φυσικώς ισοδύναμοι* (υπό την έννοια τού ορισμού A.3.1 (ii)).

Εν συνεχεία, θεωρούμε έναν R-διγραμμικό συναρτητή

$$\begin{gathered}
\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R, \\
\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R) \ni (M_1, M_2) \longmapsto \mathbf{F}(M_1, M_2) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R), \\
\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R}((M_1', M_2), (M_1, M_2')) \ni (f,g) \longmapsto \mathbf{F}(f,g), \\
\mathbf{F}(f,g) : \mathbf{F}(M_1, M_2) \longrightarrow \mathbf{F}(M_1', M_2'),
\end{gathered}$$

ανταλλοίωτο ως προς την πρώτη και συναλλοίωτο ως προς τη δεύτερη μεταβλητή. (Βλ. A.2.9 (iii) και A.2.10.)

A.2.19 Ορισμός. *Και σε αυτήν την περίπτωση* ο εν λόγω συναρτητής μπορεί να *επεκταθεί* σε έναν συναρτητή, ανταλλοίωτο ως προς την πρώτη και συναλλοίωτο ως προς τη δεύτερη μεταβλητή (τον οποίο θα εξακολουθούμε να συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα)

$$\begin{gathered}
\mathbf{F} : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R), \\
\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet) \longmapsto \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)), \\
\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet', \mathbf{M}_\bullet) \times \mathrm{Hom}_R(\mathbf{N}^\bullet, \mathbf{N}'^\bullet) \ni (f_\bullet, g^\bullet) \longmapsto \mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^\bullet \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet, \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet', \mathbf{N}'^\bullet)^\bullet),
\end{gathered}$$

θέτοντας (για $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{N}^\bullet = (N^n, d^n_{\mathbf{N}^\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet = (\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^n, \partial^n)_{n\in\mathbb{Z}}$)

$$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^n := \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathbf{F}(M_p, N^{n-p}) = \prod_{p+q=n} \mathbf{F}(M_p, N^q),}$$

συμβολίζοντας ως $\mathrm{pr}_{p,q} : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^n \twoheadrightarrow \mathbf{F}(M_p, N^q)$ τις φυσικές προβολές (με[13] $p+q=n$, βλ. 2.4.4), υπονοώντας (*στην περίπτωση όπου* $p+q=n+1$) με το κατακόρυφο βέλος τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
& & \mathbf{F}(M_p, N^q) & & \\
& \mathbf{F}(M_{p-1}, N^q) \arrow[ur, two heads, "\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^q})"'] & & \mathbf{F}(M_p, N^{q-1}) \arrow[ul, two heads, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1})"] & \\
\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^{n+1} \arrow[uurr, bend left, two heads, "\mathrm{pr}_{p,q}"] & & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^{n} \arrow[ll, dashed, "\mathfrak{d}^n"] \arrow[ul, two heads, "\mathrm{pr}_{p-1,q}"] \arrow[ur, two heads, "\mathrm{pr}_{p,q-1}"'] \arrow[uu, dotted] & &
\end{tikzcd}$$

τον ομομορφισμό R-μοδίων

$$\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^q}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q} + (-1)^p\, \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ \mathrm{pr}_{p,q-1}, \tag{A.2}$$

ορίζοντας ως $\mathfrak{d}^n = \mathfrak{d}^n_{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^n, \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^{n+1})$ τον *μονοσημάντως ορισμένο* ομομορφισμό για τον οποίο ισχύει[14]

$$\boxed{\mathrm{pr}_{p,q} \circ \mathfrak{d}^n = \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^q}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q} + (-1)^p\, \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ \mathrm{pr}_{p,q-1},}$$

και θέτοντας ως $\mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^\bullet : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'^\bullet)^\bullet$ τον

$$(\mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^n : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^n \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'^\bullet)^n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

όπου ο $\mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^n$ είναι ο *μονοσημάντως ορισμένος* ομομορφισμός ο οποίος (*στην περίπτωση όπου* $p + q = n + 1$) καθιστά το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό[15].

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^n \arrow[rr, dashed, "\mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^n"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{p,q}"'] \arrow[drr, "\mathbf{F}(f_p, g^q) \circ \mathrm{pr}_{p,q}" description] & & \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'^\bullet)^n \arrow[d, "\mathrm{pr}'_{p,q}"] \\
\mathbf{F}(M_p, N^q) \arrow[rr, "\mathbf{F}(f_p, g^q)"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathbf{F}(M'_p, N'^q) \arrow[ul, phantom, "\circlearrowright"]
\end{tikzcd}$$

Πράγματι· για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p + q = n$ η απεικόνιση $\mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^n$ έχει τις εξής ιδιότητες:

---

[13] Γράφοντας $\prod_{p+q=n} \mathbf{F}(M_p, N^q)$ θα εννοούμε το $\prod_{\{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid p+q=n\}} \mathbf{F}(M_p, N^q)$.

[14] Βλ. 2.4.1, 2.4.3 και 2.4.5. (Αρκεί να εφαρμοσθεί η καθολική ιδιότητα τού εδ. 2.4.1, με τους $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^n$, $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^{n+1}$ και $\mathbf{F}(M_p, N^q)$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων M, P και M_j, και με τους $\mathrm{pr}_{p,q}$, (A.2) και $\mathfrak{d}^n$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων f_j, g_j και h.)

[15] Αρκεί να εφαρμοσθεί εκ νέου η καθολική ιδιότητα τού εδ. 2.4.1, με τους $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)_n$, $\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'^\bullet)_n$ και $\mathbf{F}(M'_p, N'^q)$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων M, P και M_j, και με τους $\mathrm{pr}'_{p,q}$, $\mathbf{F}(f_p, g^q) \circ \mathrm{pr}_{p,q}$ και $\mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^n$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων f_j, g_j και h.

(i) $\mathrm{pr}'_{p,q} \circ \mathbf{F}(f_{1,\bullet} + f_{2,\bullet}, g^\bullet)^n = \mathrm{pr}'_{p,q} \circ (\mathbf{F}(f_{1,\bullet}, g^\bullet)^n + \mathbf{F}(f_{2,\bullet}, g^\bullet)^n)$,
(ii) $\mathrm{pr}'_{p,q} \circ \mathbf{F}(f_\bullet, g_1^\bullet + g_2^\bullet)^n = \mathrm{pr}'_{p,q} \circ (\mathbf{F}(f_\bullet, g_1^\bullet)^n + \mathbf{F}(f_\bullet, g_2^\bullet)^n)$,
(iii) $\mathbf{F}((\lambda f)_\bullet, g^\bullet) = \lambda\mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet) = \mathbf{F}(f_\bullet, (\lambda g)^\bullet)$, $\forall \lambda \in R$,
(iv) $\mathrm{pr}'_{p,q} \circ \mathbf{F}((f_2 \circ f_1)_\bullet, (g_2 \circ g_1)^\bullet)^n = \mathrm{pr}'_{p,q} \circ \mathbf{F}(f_{1,\bullet}, g_2^\bullet)^n \circ \mathbf{F}(f_{2,\bullet}, g_1^\bullet)^n$,
(v) $\mathrm{pr}'_{p,q} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}^\bullet})^n = \mathrm{pr}'_{p,q}$.

Επιπροσθέτως, το $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet = (\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^n, \partial^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί συναλυσωτό σύμπλοκο, διότι για κάθε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p+q = n+1$ λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{pr}_{p,q} \circ \partial^n \circ \partial^{n-1} = (\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^q}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q} + (-1)^p\, \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ \mathrm{pr}_{p,q-1}) \circ \partial^{n-1} \\
&= \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^q}) \circ (\mathrm{pr}_{p-1,q} \circ \partial^{n-1}) + (-1)^p\, \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ (\mathrm{pr}_{p,q-1} \circ \partial^{n-1}) \\
&= \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^q}) \circ \Big(\mathbf{F}(d_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^q}) \circ \mathrm{pr}_{p-2,q} + (-1)^{p-1}\, \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_{p-1}}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q-1}\Big) \\
&+ (-1)^p\, \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ \Big(\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^{q-1}}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q-1} + (-1)^p\, \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-2}) \circ \mathrm{pr}_{p,q-2}\Big) \\
&= \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^q}) \circ \mathbf{F}(d_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^q}) \circ \mathrm{pr}_{p-2,q} + (-1)^{p-1}\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^q}) \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_{p-1}}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q-1} \\
&+ (-1)^p\, \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^{q-1}}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q-1} + \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-2}) \circ \mathrm{pr}_{p,q-2} \\
&= \mathbf{F}(\underbrace{d_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ d_p^{\mathbf{M}_\bullet}}_{=0}, \mathrm{id}_{N^q}) \circ \mathrm{pr}_{p-2,q} + (-1)^{p-1}(\underbrace{\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q-1} - \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q-1}}_{=0}) \\
&+ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, \underbrace{d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1} \circ d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-2}}_{=0}) \circ \mathrm{pr}_{p,q-2} = 0
\end{aligned}
$$

και η $\mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^\bullet : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'^\bullet)^\bullet$ αποτελεί συναλυσωτό μετασχηματισμό, καθόσον για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p+q = n+1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{pr}'_{p,q} \circ \partial'^n \circ \mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^n = (\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}'_\bullet}, \mathrm{id}_{N'^q}) \circ \mathrm{pr}'_{p-1,q} + (-1)^p\, \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M'_p}, d_{\mathbf{N}'^\bullet}^{q-1}) \circ \mathrm{pr}'_{p,q-1}) \circ \mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^n \\
&= \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}'_\bullet}, \mathrm{id}_{N'^q}) \circ (\mathrm{pr}'_{p-1,q} \circ \mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^n) + (-1)^p\, \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M'_p}, d_{\mathbf{N}'^\bullet}^{q-1}) \circ (\mathrm{pr}'_{p,q-1} \circ \mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^n) \\
&= \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}'_\bullet}, \mathrm{id}_{N'^q}) \circ \mathbf{F}(f_{p-1}, g^q) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q} + (-1)^p\, \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M'_p}, d_{\mathbf{N}'^\bullet}^{q-1}) \circ \mathbf{F}(f_p, g^{q-1}) \circ \mathrm{pr}_{p,q-1} \\
&= \mathbf{F}(\underbrace{f_{p-1} \circ d_p^{\mathbf{M}'_\bullet}}_{=d_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ f_p}, g^q) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q} + (-1)^p\, \mathbf{F}(f_p, \underbrace{d_{\mathbf{N}'^\bullet}^{q-1} \circ g^{q-1}}_{=g^q \circ d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q} \\
&= \mathbf{F}(f_p, g^q) \circ \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^q}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q} + (-1)^p\, \mathbf{F}(f_p, g^q) \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q} \\
&= \mathbf{F}(f_p, g^q) \circ (\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N^q}) \circ \mathrm{pr}_{p-1,q} + (-1)^p\, \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_p}, d_{\mathbf{N}^\bullet}^{q-1}) \circ \mathrm{pr}_{p,q-1}) \\
&= \mathbf{F}(f_p, g^q) \circ \mathrm{pr}_{p,q} \circ \partial^n = \mathrm{pr}'_{p,q} \circ \mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^{n+1} \circ \partial^n,
\end{aligned}
$$

οπότε το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'^\bullet)^n \arrow[r, "\partial'^n"] & \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'^\bullet)^{n+1} \\
\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^n \arrow[r, "\partial^n"'] \arrow[u, "\mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^n"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^{n+1} \arrow[u, "\mathbf{F}(f_\bullet, g^\bullet)^{n+1}"']
\end{tikzcd}
$$

(Επίσης, ισχύουν *και εδώ* ανάλογα των (i), (ii) και (iii) τής σημειώσεως A.2.18.)

A.3 ΦΥΣΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

A.3.1 Ορισμός. (i) Έστω ότι οι $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ είναι δυο συναλλοίωτοι (και αντιστοίχως, δυο ανταλλοίωτοι συναρτητές). Ένας **φυσικός μετασχηματισμός** $h : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ είναι μια οικογένεια μορφισμών

$$\{h(A) \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{G}(A)) \mid A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\},$$

τέτοια ώστε για κάθε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(A) \arrow[r, "h(A)"] \arrow[d, "\mathbf{F}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{G}(A) \arrow[d, "\mathbf{G}(f)"] \\
\mathbf{F}(B) \arrow[r, "h(B)"'] & \mathbf{G}(B)
\end{tikzcd}$$

και αντιστοίχως, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(B) \arrow[r, "h(B)"] \arrow[d, "\mathbf{F}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{G}(B) \arrow[d, "\mathbf{G}(f)"] \\
\mathbf{F}(A) \arrow[r, "h(A)"'] & \mathbf{G}(A)
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

(ii) Όταν όλα τα μέλη τής οικογενείας μορφισμών

$$\{h(A) \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{G}(A)) \mid A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\}$$

είναι $\mathscr{D}$-ισομορφισμοί, τότε ο h καλείται **φυσική ισοδυναμία** μεταξύ των συναρτητών $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$, και οι $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ ονομάζονται **φυσικώς ισοδύναμοι**. (Εν τοιαύτη περιπτώσει χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\mathbf{F} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{G}$ για να υποδηλοί την ύπαρξη μιας φυσικής ισοδυναμίας μεταξύ των $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$.)

A.3.2 Παρατήρηση. (i) Η (φυσικώς) οριζόμενη *σύνθεση* $h' \circ h : \mathbf{F}_1 \longrightarrow \mathbf{F}_3$ δυο φυσικών μετασχηματισμών $h : \mathbf{F}_1 \longrightarrow \mathbf{F}_2$ και $h' : \mathbf{F}_2 \longrightarrow \mathbf{F}_3$ μεταξύ κάποιων συναλλοίωτων (και αντιστοίχως, ανταλλοίωτων) συναρτητών $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3 : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ αποτελεί αφ' εαυτής φυσικό μετασχηματισμό. (Επιπροσθέτως, όταν αμφότεροι οι h και h' είναι φυσικές ισοδυναμίες, η σύνθεση $h' \circ h$ είναι ωσαύτως φυσική ισοδυναμία.)

(ii) Λόγω των προαναφερθέντων είναι δυνατόν να δοθεί ένας προσήκων ορισμός τής *ισοδυναμίας δυο κατηγοριών*: Λέμε ότι δυο κατηγορίες $\mathscr{C}$ και $\mathscr{D}$ είναι **ισοδύναμες** όταν υφίστανται δυο συναρτητές $\mathbf{F} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{D}$ και $\mathbf{G} : \mathscr{D} \rightsquigarrow \mathscr{C}$ με $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{id}_{\mathscr{C}}$ και $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{id}_{\mathscr{D}}$.

Α.3.3 Παραδείγματα. (i) Όταν $\mathscr{C} = \mathscr{D} = \mathfrak{Sets}$, τότε υφίσταται ένας φυσικός μετασχηματισμός $h : \mathbf{id}_{\mathfrak{Sets}} \longrightarrow \mathfrak{P}$ από τον *ταυτοτικό συναρτητή* Α.2.4 (i) στον *συναρτητή τού δυναμοσυνόλου*

$$\mathfrak{P} : \mathfrak{Sets} \rightsquigarrow \mathfrak{Sets},$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Sets}) \ni A \longmapsto \mathfrak{P}(A) := \{\Gamma | \Gamma \subseteq A\} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Sets}),$$

$$(\text{απεικόνιση } f : A \longrightarrow B) \longmapsto (\mathfrak{P}(f) : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow \mathfrak{P}(B)),$$

όπου $\mathfrak{P}(f)(\Gamma) := f(\Gamma),\ \forall \Gamma \in \mathfrak{P}(A)$. Πράγματι· θέτοντας

$$h\,(A) : A \longrightarrow \mathfrak{P}(A),\ a \longmapsto h\,(A)\,(a) := \{a\},\ \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Sets}),$$

το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h(A)"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathfrak{P}(A) \arrow[d, "\mathfrak{P}(f)"] \\ B \arrow[r, "h(B)"'] & \mathfrak{P}(B) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για οιαδήποτε απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$.

(ii) Όταν $\mathscr{C} = \mathscr{D} = \mathfrak{Groups}$, τότε υφίσταται ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$h : \mathbf{id}_{\mathfrak{Groups}} \longrightarrow \iota \circ \mathbf{F}$$

από τον ταυτοτικό συναρτητή $\mathbf{id}_{\mathfrak{Groups}}$ στη σύνθεση

$$\mathfrak{Groups} \overset{\mathbf{F}}{\rightsquigarrow} \mathfrak{Abgroups} \overset{\iota}{\rightsquigarrow} \mathfrak{Groups},$$

όπου $\mathbf{F}$ είναι ο συναρτητής αβελιανοποιήσεως και ι ο ενθετικός συναρτητής. (Βλ. εδ. Α.2.4 (i) και (iii).) Πράγματι· θέτοντας

$$h(G)(g) := g[G,G],\ \forall g \in G \ \text{ και } \ \forall G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Groups}),$$

το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h(G)"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ H \arrow[r, "h(H)"'] & H^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για οιονδήποτε ομομορφισμό ομάδων $f : G \longrightarrow H$.

(iii) Όταν $\mathscr{C} = \mathscr{D} = \mathfrak{Mod}_R$, τότε υφίσταται ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$h : \mathbf{id}_{\mathfrak{Mod}_R} \longrightarrow \mathbf{F}$$

από τον ταυτοτικό συναρτητή $\mathbf{id}_{\mathfrak{Mod}_R}$ στον συναρτητή

$$\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathbf{F}(M) := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M,M') \ni f \longmapsto (\mathbf{F}(f) : \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M',R),R)),$$

$$\mathbf{F}(f)(\varphi) := \varphi \circ f^{\mathsf{T}},\ \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R),\ \text{όπου}$$
$$\mathrm{Hom}_R(M',R) \ni \psi \overset{f^{\mathsf{T}}}{\longmapsto} f^{\mathsf{T}}(\psi) := \psi \circ f \in \mathrm{Hom}_R(M,R).$$

Πράγματι· θέτοντας για κάθε $M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$,

$$h(M) : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R), \ \ x \longmapsto h(M)(x),$$

όπου $h(M)(x)(\vartheta) := \vartheta(x)$ για κάθε $x \in M$ και κάθε $\vartheta \in \mathrm{Hom}_R(M,R)$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h(M)"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R) \arrow[d, "\mathbf{F}(f)"] \\ M' \arrow[r, "h(M')"'] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M',R),R) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για οιονδήποτε ομομορφισμό R-μοδίων $f : M \longrightarrow M'$. Μάλιστα, εάν περιορισθούμε στην υποκατηγορία $\mathfrak{Mod}_R^{\text{ελ.π.π.}}$ τής $\mathfrak{Mod}_R$ με αντικείμενά της τους *ελεύθερους* και *πεπερασμένως παραγόμενους* R-μοδίους, τότε κάθε ομομορφισμός $h(M)$ είναι ισομορφισμός, οπότε ο $h : \mathbf{id}_{\mathfrak{Mod}_R^{\text{ελ.π.π.}}} \longrightarrow \mathbf{F}$ καθίσταται *φυσική ισοδυναμία*.

▸ **Φυσικές ισοδυναμίες δημιουργούμενες μέσω παράγωγων συναρτητών**. Σύμφωνα με τις προτάσεις 5.1.3 και 5.1.8, *κάθε* R-μόδιος διαθέτει τόσον προβολικούς όσον και εμβολικούς κερματισμούς. Έστω $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ ένας *συναλλοίωτος* προσθετικός συναρτητής. Εάν M είναι τυχών R-μόδιος και $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ ένας προβολικός κερματισμός τού M,

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} \{0\} \xrightarrow{d_{-1}} \cdots,$$

(βλ. εδ. 5.1.1), τότε θεωρούμε το αλυσωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet) : \cdots \longrightarrow \mathbf{F}(P_n) \xrightarrow{\mathbf{F}(d_n)} \mathbf{F}(P_{n-1}) \xrightarrow{\mathbf{F}(d_{n-1})} \cdots \xrightarrow{\mathbf{F}(d_2)} \mathbf{F}(P_1) \xrightarrow{\mathbf{F}(d_1)} \mathbf{F}(P_0) \xrightarrow{\mathbf{F}(d_0)} \{0\} \xrightarrow{\mathbf{F}(d_{-1})} \cdots,$$

και θέτουμε[16] για κάθε $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\mathscr{L}_n\mathbf{F}(M) := H_n(\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet)) := \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(d_n))/\,\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_{n+1})).} \tag{A.3}$$

Επίσης, εάν $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,M')$, όπου M' τυχών R-μόδιος και $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ ένας προβολικός κερματισμός τού M', τότε (δυνάμει τού (i) τού θεωρήματος 5.1.4) υπάρχει αλυσωτός μετασχηματισμός $f_\bullet = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ που «επεκτείνει» τον φ, ήτοι ισχύει $\varphi \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f_0$. Κατόπιν εφαρμογής τού $\mathbf{F}$ ορίζεται ένας αλυσωτός μετασχηματισμός

$$\mathbf{F}(f_\bullet) = \mathbf{F}((f_n)_{n\in\mathbb{Z}}) : \mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{P}'_\bullet)$$

μέσω τού οποίου επάγονται ομομορφισμοί R-μοδίων

$$\boxed{\begin{gathered} H_n(\mathbf{F}(f_\bullet)) : \mathscr{L}_n\mathbf{F}(M) \longrightarrow \mathscr{L}_n\mathbf{F}(M') \\ H_n(\mathbf{F}(f_\bullet))(x + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_{n+1}))) := \mathbf{F}(f_n)(x) + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d'_{n+1})) \end{gathered}} \tag{A.4}$$

[16] Οι $\mathscr{L}_n\mathbf{F}(M)$ μπορούν να εκληφθούν ως εκείνοι οι μόδιοι που εκφράζουν *το πόσο απέχει η ακολουθία* $\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet)$ *από το να είναι ακριβής*.

για κάθε $x \in \operatorname{Ker}(\mathbf{F}(d_n))$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Σημειωτέον ότι: (i) ο $\mathscr{L}_n\mathbf{F}(M)$ είναι (μέσω τής (A.3)) *μέχρις ισομορφισμού* μονοσημάντως ορισμένος, καθώς για οιονδήποτε άλλον προβολικό κερματισμό $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ τού M υπάρχει (κατά τα προαναφερθέντα) αλυσωτός μετασχηματισμός $\alpha_\bullet = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ που «επεκτείνει» τον ταυτοτικό ισομορφισμό id_M, ήτοι ισχύει $\varepsilon = \varepsilon' \circ \alpha_0$,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_3"] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "\alpha_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\alpha_0"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"] & \{0\} \\
\cdots \arrow[r, "d'_3"] & P'_2 \arrow[r, "d'_2"'] & P'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd} \tag{A.5}$$

και μέσω τού $\mathbf{F}(\alpha_\bullet)$ επάγονται ομομορφισμοί R-μοδίων

$$H_n(\mathbf{F}(\alpha_\bullet)) : H_n(\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet)) \longrightarrow H_n(\mathbf{F}(\mathbf{P}'_\bullet)),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Φέροντας στο (A.5) τα *άνω-κάτω* και χρησιμοποιώντας τό ίδιο επιχείρημα (αλλ' αυτήν τη φορά ύστερα από εναλλαγή των ρόλων των $\mathbf{P}_\bullet$ και $\mathbf{P}'_\bullet$) έχουμε τη δυνατότητα να δημιουργήσουμε έναν αλυσωτό μετασχηματισμό $\beta_\bullet = (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ «επεκτείνοντα» τον id_M. Επειδή οι

$$\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet} : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet, \quad (\beta \circ \alpha)_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$$

είναι αλυσωτώς ομότοποι και το ίδιο ισχύει και για τους

$$\mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet} : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet, \quad (\alpha \circ \beta)_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet,$$

τα $\mathbf{P}_\bullet$ και $\mathbf{P}'_\bullet$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα και τα $\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet)$ και $\mathbf{F}(\mathbf{P}'_\bullet)$ είναι ωσαύτως ομοτοπικώς ισοδύναμα (επί τη βάσει των πορισμάτων 5.1.5 και A.2.15). Επομένως, λόγω των προτάσεων 3.2.6, 3.2.7 και 3.5.7,

$$\mathrm{id}_{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{P}'_\bullet))} = H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet})) = H_n(\mathbf{F}(\alpha \circ \beta)_\bullet) = H_n(\mathbf{F}(\alpha_\bullet)) \circ H_n(\mathbf{F}(\beta_\bullet))$$

και $\mathrm{id}_{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet))} = H_n(\mathbf{F}(\beta_\bullet)) \circ H_n(\mathbf{F}(\alpha_\bullet))$, οπότε αμφότεροι οι $H_n(\mathbf{F}(\alpha_\bullet))$ και $H_n(\mathbf{F}(\beta_\bullet))$ είναι *ισομορφισμοί* R-μοδίων και ο ένας αντίστροφος τού άλλου.

(ii) Ο ορισμός τού $H_n(\mathbf{F}(f_\bullet))$ (μέσω τής (A.4)) είναι *ανεξάρτητος τής επιλογής* τού $f_\bullet$, διότι, για οιονδήποτε άλλον αλυσωτό μετασχηματισμό $g_\bullet = (g_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ «επεκτείνοντα» τον $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, M')$, έχουμε (λόγω τού (ii) τού θεωρήματος 5.1.4)

$$f_\bullet \simeq g_\bullet \underset{\text{A.2.14}}{\Longrightarrow} \mathbf{F}(f_\bullet) \simeq \mathbf{F}(g_\bullet) \underset{\text{3.5.7}}{\Longrightarrow} [H_n(\mathbf{F}(f_\bullet)) = H_n(\mathbf{F}(g_\bullet)),\ \forall n \in \mathbb{Z}].$$

Γι' αυτόν τον λόγο θέτουμε εφεξής:

$$\boxed{\mathscr{L}_n\mathbf{F}(\varphi) := H_n(\mathbf{F}(f_\bullet)),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

A.3.4 Θεώρημα. *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο*

$$\mathscr{L}_n\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathscr{L}_n\mathbf{F}(M) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni \varphi \longmapsto \mathscr{L}_n\mathbf{F}(\varphi) \in \mathrm{Hom}_R(\mathscr{L}_n\mathbf{F}(M), \mathscr{L}_n\mathbf{F}(M')),$$

είναι ένας προσθετικός, συναλλοίωτος συναρτητής. Επιπροσθέτως, υφίσταται φυσικός μετασχηματισμός

$$t : \mathscr{L}_0\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}.$$

Μάλιστα, στην περίπτωση κατά την οποία ο $\mathbf{F}$ *είναι εκ δεξιών ακριβής* (βλ. A.2.5 (ii)), *ο εν λόγω t αποτελεί φυσική ισοδυναμία και, ως εκ τούτου, οι συναρτητές* $\mathscr{L}_0\mathbf{F}$ *και* $\mathbf{F}$ *είναι φυσικώς ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. Επειδή ο συναρτητής $H_n(-)$ είναι προσθετικός και συναλλοίωτος (βλ. εδ. A.2.4 (vii)), ο $\mathscr{L}_n\mathbf{F}$ είναι ωσαύτως προσθετικός και συναλλοίωτος, και ο πρώτος ισχυρισμός είναι αληθής. Έστω M τυχών R-μόδιος. Εάν $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ είναι ένας προβολικός κερματισμός τού M,

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} \{0\} \xrightarrow{d_{-1}} \cdots , ,$$

και

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

η ακριβής ακολουθία η αντιστοιχούσα σε αυτόν, τότε υπάρχει μοναδικός *ισομορφισμός* $\varepsilon_\star$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "\pi^{P_0}_{\mathrm{Im}(d_1)}"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \mathrm{Coker}(d_1) \arrow[d, dashed, "\varepsilon_\star"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & & M \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, όπου

$$\mathrm{Coker}(d_1) := P_0/\,\mathrm{Im}(d_1) = \mathrm{Ker}(d_0)/\,\mathrm{Im}(d_1) = H_0(\mathbf{P}_\bullet).$$

(Βλ. εδ. 5.1.1). Προφανώς,

$$\mathscr{L}_0\mathbf{F}(M) := H_0(\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet)) := \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(d_0))/\,\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1)) = \mathbf{F}(P_0)/\,\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1)) = \mathrm{Coker}(\mathbf{F}(d_1)).$$

Επειδή $\mathbf{F}(\varepsilon) \circ \mathbf{F}(d_1) = \mathbf{F}(\underbrace{\varepsilon \circ d_1}_{=0}) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1)) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(\varepsilon))$, από την καθολική ιδιότητα 2.3.6 τού πηλικομοδίου $\mathscr{L}_0\mathbf{F}(M)$ συνάγεται η ύπαρξη *μονοσημάντως ορισμένου* ομομορφισμού R-μοδίων

$$t(M) \in \mathrm{Hom}_R(\mathscr{L}_0\mathbf{F}(M), \mathbf{F}(M))$$

(συγκεκριμένα, τού $x+\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1) \longmapsto \mathbf{F}(\varepsilon)(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{F}(P_0)$) ο οποίος συμπληρώνει το κάτωθι διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}(P_1) \arrow[r, "\mathbf{F}(d_1)"] & \mathbf{F}(P_0) \arrow[r, "\pi^{\mathbf{F}(P_0)}_{\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1))}"] \arrow[dr, "\mathbf{F}(\varepsilon)"'] & \mathscr{L}_0\mathbf{F}(M) \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "t(M)"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(P_0)/\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1)) \\ & & \mathbf{F}(M) & \end{tikzcd}$$

μεταθετικώς. (Σημειωτέον ότι $t(M) := \mathbf{F}(\varepsilon_\star)$.) Επειδή για κάθε R-μόδιο M', για κάθε $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ και για κάθε $x \in \mathbf{F}(P_0)$ έχουμε

$$\begin{aligned} &(\mathbf{F}(\varphi) \circ t(M))\,(x + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1)) = \mathbf{F}(\varphi)(t(M)(x + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1))) = \mathbf{F}(\varphi)(\mathbf{F}(\varepsilon)(x)) \\ &= (\mathbf{F}(\varphi) \circ \mathbf{F}(\varepsilon))(x) = \mathbf{F}(\varphi \circ \varepsilon)(x) = \mathbf{F}(\varepsilon' \circ f_0)(x) = (\mathbf{F}(\varepsilon') \circ \mathbf{F}(f_0))(x) \\ &= \mathbf{F}(\varepsilon')(\mathbf{F}(f_0)(x)) = t(M')(\mathbf{F}(f_0)(x) + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1'))) \\ &= t(M')(\mathscr{L}_0\mathbf{F}(\varphi)(x + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1))) = (t(M') \circ \mathscr{L}_0\mathbf{F}(\varphi))(x + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1)) \end{aligned}$$

(όπου $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$, f_0, d_1' όπως στον αρχικό ορισμό τού $\mathscr{L}_0\mathbf{F}(\varphi)$), ήτοι ισχύει η ισότητα $\mathbf{F}(\varphi) \circ t(M) = t(M') \circ \mathscr{L}_0\mathbf{F}(\varphi)$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} H_0(\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet)) \arrow[r, equal] & \mathscr{L}_0\mathbf{F}(M) \arrow[r, "t(M)"] \arrow[d, "\mathscr{L}_0\mathbf{F}(\varphi)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(M) \arrow[d, "\mathbf{F}(\varphi)"] \\ H_0(\mathbf{F}(\mathbf{P}'_\bullet)) \arrow[r, equal] & \mathscr{L}_0\mathbf{F}(M') \arrow[r, "t(M')"'] & \mathbf{F}(M') \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, οπότε *και* ο δεύτερος ισχυρισμός είναι αληθής. Τέλος, στην περίπτωση κατά την οποία ο $\mathbf{F}$ είναι εκ δεξιών ακριβής, επειδή η

$$P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής, αμφότερες οι γραμμές τού μεταθετικού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}(P_1) \arrow[r, "\mathbf{F}(d_1)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{F}(P_1)}"'] & \mathbf{F}(P_0) \arrow[r, two heads, "\pi^{\mathbf{F}(P_0)}_{\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1))}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{F}(P_0)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathscr{L}_0\mathbf{F}(M) \arrow[r] \arrow[d, "t(M)"] & \{0\} \\ \mathbf{F}(P_1) \arrow[r, "\mathbf{F}(d_1)"'] & \mathbf{F}(P_0) \arrow[r, two heads, "\mathbf{F}(\varepsilon)"'] & \mathbf{F}(M) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

είναι ακριβείς. (Η πρώτη προδήλως και η δεύτερη λόγω τού (ii) τής προτάσεως

A.2.6.) Κατά συνέπειαν, *και* το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{F}(P_1) \arrow[r, "\mathbf{F}(d_1)"] \arrow[d, two heads, "\mathbf{F}(d_1)\check{}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}(P_0) \arrow[r, two heads, "\pi^{\mathbf{F}(P_0)}_{\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1))}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{F}(P_0)}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{L}_0\mathbf{F}(M) \arrow[r] \arrow[d, "t(M)"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1)) \arrow[r, hook] & \mathbf{F}(P_0) \arrow[r, two heads, "\mathbf{F}(\varepsilon)"'] & \mathbf{F}(M) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

έχει αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς (όπου $\mathbf{F}(d_1)\check{} : \mathbf{F}(P_1) \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1))$ ο επιμορφισμός (2.11) ο επαγόμενος μέσω τού ομομορφισμού $\mathbf{F}(d_1)$). Αυτό σημαίνει, αφ' ενός μεν ότι ο ομομορφισμός $t(M)$ είναι *επιρριπτικός* (διότι ο $\mathbf{F}(\varepsilon)$ είναι επιμορφισμός και $\mathbf{F}(\varepsilon) = \mathbf{F}(\varepsilon)\circ \mathrm{id}_{\mathbf{F}(P_0)} = t(M)\circ\pi^{\mathbf{F}(P_0)}_{\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1))}$, όπου $\pi^{\mathbf{F}(P_0)}_{\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_1))}$ επιρριπτική, βλ. 2.2.15 (v)), αφ' ετέρου δε *ενριπτικός*, καθώς (κατόπιν εφαρμογής τού λήμματος 3.1.20 τού φιδιού στο τελευταίο μεταθετικό διάγραμμα και λαμβανομένου υπ' όψιν τού ότι ο $\mathbf{F}(d_1)\check{}$ είναι *επιρριπτικός*) αποκτούμε μια ακριβή ακολουθία τής μορφής

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{F}(d_1)\check{}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{\mathbf{F}(P_0)}) \cong \{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(t(M)) \longrightarrow \{0\},$$

απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{Ker}(t(M)) \cong \{0\}$. (Βλ. εδ. 3.1.21 (iv), 3.1.3 (i) και πρόταση 2.2.13.) Άρα ο $t(M)$ είναι όντως *ισομορφισμός*. □

A.3.5 Ορισμός. Ο ανωτέρω συναρτητής $\mathscr{L}_n\mathbf{F}$ ονομάζεται n-**οστός εξ αριστερών παράγωγος συναρτητής τού F**.

Έστω τώρα M τυχών R-μόδιος και έστω $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ ένας εμβολικός κερματισμός τού M,

$$\mathbf{Q}^\bullet : \ \cdots \to \{0\} \to \{0\} \to \ Q^0 \xrightarrow{d^0} Q^1 \xrightarrow{d^1} Q^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \longrightarrow Q^n \xrightarrow{d^n} Q^{n+1} \to \cdots,$$

(βλ. εδ. 5.1.7). Θεωρούμε το συναλυσωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}^\bullet) : \ \cdots \to \{0\} \to \ \mathbf{F}(Q^0) \xrightarrow{\mathbf{F}(d^0)} \mathbf{F}(Q^1) \xrightarrow{\mathbf{F}(d^1)} \cdots \longrightarrow \mathbf{F}(Q^n) \xrightarrow{\mathbf{F}(d^n)} \mathbf{F}(Q^{n+1}) \to \cdots$$

και θέτουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\mathscr{R}^n\mathbf{F}(M) := H^n(\mathbf{F}(\mathbf{Q}^\bullet)) := \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(d^n))/\,\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d^{n-1})).} \tag{A.6}$$

Επίσης, εάν $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, όπου M' τυχών R-μόδιος και $(\mathbf{Q}'^\bullet, i')$ ένας εμβολικός κερματισμός τού M', τότε (δυνάμει τού (i) τού θεωρήματος 5.1.9) υπάρχει συναλυσωτός μετασχηματισμός $f^\bullet = (f^n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{Q}^\bullet \longrightarrow \mathbf{Q}'^\bullet$ που «επεκτείνει» τον φ, ήτοι ισχύει $i' \circ \varphi = f^0 \circ \varepsilon'$. Κατόπιν εφαρμογής τού $\mathbf{F}$ ορίζεται ένας συναλυσωτός μετασχηματισμός

$$\mathbf{F}(f^\bullet) = \mathbf{F}((f^n)_{n\in\mathbb{Z}}) : \mathbf{F}(\mathbf{Q}^\bullet) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{Q}'^\bullet)$$

μέσω τού οποίου επάγονται ομομορφισμοί R-μοδίων

$$\boxed{\begin{gathered} H^n(\mathbf{F}(f^\bullet)) : \mathscr{R}^n\mathbf{F}(M) \longrightarrow \mathscr{R}^n\mathbf{F}(M') \\ H^n(\mathbf{F}(f^\bullet))(x + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d^{n-1}))) := \mathbf{F}(f^n)(x) + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d'^{n-1})) \end{gathered}} \tag{A.7}$$

για κάθε $x \in \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(d^n))$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κατ' αναλογίαν (προς ό,τι έχει προαναφερθεί για τους $\mathscr{L}_n\mathbf{F}(M)$ και $\mathscr{L}_n\mathbf{F}(\varphi)$) ο $\mathscr{R}^n\mathbf{F}(M)$ είναι (μέσω τής (A.6)) *μέχρις ισομορφισμού* μονοσημάντως ορισμένος και ο $H^n(\mathbf{F}(f^\bullet))$ (οριζόμενος μέσω τής (A.7)) είναι *ανεξάρτητος τής επιλογής* τού $f^\bullet$. Γι' αυτόν τον λόγο θέτουμε εφεξής:

$$\boxed{\mathscr{R}^n\mathbf{F}(\varphi) := H^n(\mathbf{F}(f^\bullet)), \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

A.3.6 Θεώρημα. *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο*

$$\mathscr{R}^n\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathscr{R}^n\mathbf{F}(M) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni \varphi \longmapsto \mathscr{R}^n\mathbf{F}(\varphi) \in \mathrm{Hom}_R(\mathscr{R}^n\mathbf{F}(M), \mathscr{R}^n\mathbf{F}(M')),$$

είναι ένας προσθετικός, συναλλοίωτος συναρτητής. Επιπροσθέτως, υφίσταται φυσικός μετασχηματισμός

$$t : \mathbf{F} \longrightarrow \mathscr{R}^0\mathbf{F}.$$

Μάλιστα, στην περίπτωση κατά την οποία ο **F** *είναι εξ αριστερών ακριβής* (βλ. A.2.5 (i)), *ο εν λόγω t αποτελεί φυσική ισοδυναμία και, ως εκ τούτου, οι συναρτητές* **F** *και* $\mathscr{R}^0\mathbf{F}$ *είναι φυσικώς ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. Δυϊκή εκείνης τού θεωρήματος A.3.4. □

A.3.7 Ορισμός. Ο ανωτέρω συναρτητής $\mathscr{R}^n\mathbf{F}$ ονομάζεται n-**οστός εκ δεξιών παράγωγος συναρτητής τού F**.

Αντίστοιχοι ορισμοί στην περίπτωση ανταλλοίωτων συναρτητών. Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ είναι ένας *ανταλλοίωτος* προσθετικός συναρτητής. Εάν M είναι τυχών R-μόδιος και $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ ένας προβολικός κερματισμός τού M,

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} \{0\} \xrightarrow{d_{-1}} \cdots ,$$

(βλ. εδ. 5.1.1), τότε θεωρούμε το συναλυσωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet) : \cdots \longleftarrow \mathbf{F}(P_n) \xleftarrow{\mathbf{F}(d_n)} \mathbf{F}(P_{n-1}) \xleftarrow{\mathbf{F}(d_{n-1})} \cdots \xleftarrow{\mathbf{F}(d_2)} \mathbf{F}(P_1) \xleftarrow{\mathbf{F}(d_1)} \mathbf{F}(P_0) \xleftarrow{\mathbf{F}(d_0)} \{0\} \xleftarrow{\mathbf{F}(d_{-1})} \cdots ,$$

και θέτουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\mathscr{R}^n\mathbf{F}(M) := H^n(\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet)) := \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(d_{n+1})) / \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_n)).} \tag{A.8}$$

Επίσης, εάν $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, όπου M' τυχών R-μόδιος, $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ ένας προβολικός κερματισμός τού M', τότε (δυνάμει τού (i) τού θεωρήματος 5.1.4) υπάρχει αλυσωτός μετασχηματισμός $f_\bullet = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ που «επεκτείνει» τον φ, ήτοι ισχύει η ισότητα $\varphi \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f_0$. Κατόπιν εφαρμογής τού $\mathbf{F}$ ορίζεται ένας συναλυσωτός μετασχηματισμός

$$\mathbf{F}(f_\bullet) = \mathbf{F}((f_n)_{n\in\mathbb{Z}}) : \mathbf{F}(\mathbf{P}'_\bullet) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet)$$

μέσω τού οποίου επάγονται ομομορφισμοί R-μοδίων

$$\boxed{\begin{gathered} H^n(\mathbf{F}(f_\bullet)) : \mathscr{R}^n\mathbf{F}(M') \longrightarrow \mathscr{R}^n\mathbf{F}(M) \\ H^n(\mathbf{F}(f_\bullet))(x + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d'_n))) := \mathbf{F}(f_n)(x) + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_{n+1})) \end{gathered}} \tag{A.9}$$

για κάθε $x \in \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(d'_{n+1}))$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κατ' αναλογίαν (προς ό,τι έχει προαναφερθεί) ο $\mathscr{R}^n\mathbf{F}(M)$ είναι (μέσω τής (A.8)) *μέχρις ισομορφισμού* μονοσημάντως ορισμένος και ο $H^n(\mathbf{F}(f_\bullet))$ (οριζόμενος μέσω τής (A.9)) είναι *ανεξάρτητος τής επιλογής* τού $f_\bullet$. Γι' αυτόν τον λόγο θέτουμε εφεξής:

$$\boxed{\mathscr{R}^n\mathbf{F}(\varphi) := H^n(\mathbf{F}(f_\bullet)),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

A.3.8 Θεώρημα. *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο*

$$\mathscr{R}^n\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathscr{R}^n\mathbf{F}(M) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni \varphi \longmapsto \mathscr{R}^n\mathbf{F}(\varphi) \in \mathrm{Hom}_R(\mathscr{R}^n\mathbf{F}(M'), \mathscr{R}^n\mathbf{F}(M)),$$

είναι ένας προσθετικός, ανταλλοίωτος συναρτητής. Επιπροσθέτως, υφίσταται φυσικός μετασχηματισμός

$$t : \mathbf{F} \longrightarrow \mathscr{R}^0\mathbf{F}.$$

Μάλιστα, στην περίπτωση κατά την οποία ο $\mathbf{F}$ *είναι εξ αριστερών ακριβής, ο εν λόγω t αποτελεί φυσική ισοδυναμία και, ως εκ τούτου, οι συναρτητές* $\mathbf{F}$ *και* $\mathscr{R}^0\mathbf{F}$ *είναι φυσικώς ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. Πανομοιότυπη εκείνης τού θεωρήματος A.3.6. □

A.3.9 Ορισμός. Ο ανωτέρω συναρτητής $\mathscr{R}^n\mathbf{F}$ ονομάζεται n-**οστός εκ δεξιών παράγωγος συναρτητής τού F**.

Έστω τώρα M τυχών R-μόδιος και έστω $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ ένας εμβολικός κερματισμός τού M,

$$\mathbf{Q}^\bullet : \ \cdots \to \{0\} \to \{0\} \to \ Q^0 \xrightarrow{d^0} Q^1 \xrightarrow{d^1} Q^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \longrightarrow Q^n \xrightarrow{d^n} Q^{n+1} \to \cdots,$$

(βλ. εδ. 5.1.7). Θεωρούμε το αλυσωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}^\bullet) : \ \cdots \leftarrow \{0\} \leftarrow \ \mathbf{F}(Q^0) \xleftarrow{\mathbf{F}(d^0)} \mathbf{F}(Q^1) \xleftarrow{\mathbf{F}(d^1)} \cdots \longleftarrow \mathbf{F}(Q^n) \xleftarrow{\mathbf{F}(d^n)} \mathbf{F}(Q^{n+1}) \leftarrow \cdots$$

και θέτουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\mathscr{L}_n\mathbf{F}(M) := H_n(\mathbf{F}(\mathbf{Q}^\bullet)) := \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(d^{n-1}))/\,\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d^n)).} \tag{A.10}$$

Επίσης, εάν $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, όπου M' τυχών R-μόδιος, $(\mathbf{Q}'^{\bullet}, i')$ ένας εμβολικός κερματισμός τού M', τότε (δυνάμει τού (i) τού θεωρήματος 5.1.9) υπάρχει συναλυσωτός μετασχηματισμός $f^{\bullet} = (f^n)_{n\in\mathbb{Z}} : \mathbf{Q}^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{Q}'^{\bullet}$ που «επεκτείνει» τον φ, ήτοι ισχύει $i' \circ \varphi = f^0 \circ \varepsilon'$. Κατόπιν εφαρμογής τού $\mathbf{F}$ ορίζεται ένας αλυσωτός μετασχηματισμός

$$\mathbf{F}(f^{\bullet}) = \mathbf{F}((f^n)_{n\in\mathbb{Z}}) : \mathbf{F}(\mathbf{Q}'^{\bullet}) \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{Q}^{\bullet})$$

μέσω τού οποίου επάγονται ομομορφισμοί R-μοδίων

$$\boxed{\begin{aligned} H_n(\mathbf{F}(f^{\bullet})) &: \mathscr{L}_n\mathbf{F}(M') \longrightarrow \mathscr{L}_n\mathbf{F}(M) \\ H_n(\mathbf{F}(f^{\bullet}))(x + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d'^{n-1}))) &:= \mathbf{F}(f^n)(x) + \mathrm{Im}(\mathbf{F}(d^{n-1})) \end{aligned}} \tag{A.11}$$

για κάθε $x \in \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(d'^n))$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κατ' αναλογίαν (προς ό,τι έχει προαναφερθεί) ο $\mathscr{L}_n\mathbf{F}(M)$ είναι (μέσω τής (A.10)) *μέχρις ισομορφισμού* μονοσημάντως ορισμένος και ο $H_n(\mathbf{F}(f^{\bullet}))$ (οριζόμενος μέσω τής (A.11)) είναι *ανεξάρτητος τής επιλογής* τού $f^{\bullet}$. Γι' αυτόν τον λόγο θέτουμε εφεξής:

$$\boxed{\mathscr{L}_n\mathbf{F}(\varphi) := H_n(\mathbf{F}(f^{\bullet})),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

A.3.10 Θεώρημα. *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο*

$$\mathscr{L}_n\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathscr{L}_n\mathbf{F}(M) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni \varphi \longmapsto \mathscr{L}_n\mathbf{F}(\varphi) \in \mathrm{Hom}_R(\mathscr{L}_n\mathbf{F}(M'), \mathscr{L}_n\mathbf{F}(M)),$$

είναι ένας προσθετικός, ανταλλοίωτος συναρτητής. Επιπροσθέτως, υφίσταται φυσικός μετασχηματισμός

$$t : \mathscr{L}_0\mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{F}.$$

Μάλιστα, στην περίπτωση κατά την οποία ο $\mathbf{F}$ είναι εκ δεξιών ακριβής, ο εν λόγω t αποτελεί φυσική ισοδυναμία και, ως εκ τούτου, οι συναρτητές $\mathscr{L}_0\mathbf{F}$ και $\mathbf{F}$ είναι φυσικώς ισοδύναμοι.

A.3.11 Ορισμός. Ο ανωτέρω συναρτητής $\mathscr{L}_n\mathbf{F}$ ονομάζεται n-**οστός εξ αριστερών παράγωγος συναρτητής τού F**.

A.3.12 Πρόταση. *Έστω $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ ένας προσθετικός (συναλλοίωτος ή ανταλλοίωτος) συναρτητής. Τότε για κάθε ακέραιο αριθμό $m < 0$ τόσον ο $\mathscr{L}_m\mathbf{F}$ όσον και ο $\mathscr{R}^m\mathbf{F}$ είναι ο μηδενικός*[17] *συναρτητής.*

Απόδειξη. Εάν ο $\mathbf{F}$ είναι *συναλλοίωτος* και M τυχών R-μόδιος, τότε θεωρούμε έναν προβολικό κερματισμό $(\mathbf{P}_{\bullet}, \varepsilon)$ τού M,

$$\mathbf{P}_{\bullet} : \cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} \{0\} \xrightarrow{d_{-1}} \cdots\ ,\ ,$$

[17] Αυτό σημαίνει ότι η εικόνα οιοδήποτε R-μοδίου μέσω αυτού είναι τετριμμένος R-μόδιος.

καθώς και το αλυσωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet) : \cdots \xrightarrow{\mathbf{F}(d_n)} \mathbf{F}(P_{n-1}) \xrightarrow{\mathbf{F}(d_{n-1})} \cdots \xrightarrow{\mathbf{F}(d_2)} \mathbf{F}(P_1) \xrightarrow{\mathbf{F}(d_1)} \mathbf{F}(P_0) \xrightarrow{\mathbf{F}(d_0)} \{0\} \xrightarrow{\mathbf{F}(d_{-1})} \cdots .$$

Επειδή $\mathscr{L}_m\mathbf{F}(M) := \operatorname{Ker}(\mathbf{F}(d_m))/\operatorname{Im}(\mathbf{F}(d_{m+1}))$, στην περίπτωση όπου $m < 0$, έχουμε

$$d_m = d_{m+1} = 0 \Longrightarrow \mathscr{L}_m\mathbf{F}(M) \cong \{0\}.$$

Εν συνεχεία, θεωρούμε έναν εμβολικό κερματισμό $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ τού M,

$$\mathbf{Q}^\bullet : \ \cdots \to \{0\} \to \{0\} \to \ Q^0 \xrightarrow{d^0} Q^1 \xrightarrow{d^1} Q^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \longrightarrow Q^n \xrightarrow{d^n} Q^{n+1} \to \cdots ,$$

καθώς και το συναλυσωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}^\bullet) : \ \cdots \to \{0\} \to \ \mathbf{F}(Q^0) \xrightarrow{\mathbf{F}(d^0)} \mathbf{F}(Q^1) \xrightarrow{\mathbf{F}(d^1)} \cdots \longrightarrow \mathbf{F}(Q^n) \xrightarrow{\mathbf{F}(d^n)} \mathbf{F}(Q^{n+1}) \to \cdots .$$

Επειδή $\mathscr{R}^m\mathbf{F}(M) := \operatorname{Ker}(\mathbf{F}(d^m))/\operatorname{Im}(\mathbf{F}(d^{m-1}))$, στην περίπτωση όπου $m < 0$, έχουμε

$$d^{m-1} = d^m = 0 \Longrightarrow \mathscr{R}^m\mathbf{F}(M) \cong \{0\}.$$

Εάν ο **F** είναι *ανταλλοίωτος*, η επαλήθευση τού ισχυρισμού γίνεται παρομοίως. □

Α.3.13 Πρόταση. *Έστω* $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ *ένας προσθετικός συναρτητής. Θεωρούμε τυχόντα προβολικό R-μόδιο P και τυχόντα εμβολικό R-μόδιο Q. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν ο* **F** *είναι συναλλοίωτος, τότε έχουμε* $\mathscr{L}_n\mathbf{F}(P) \cong \{0\}$ *και* $\mathscr{R}^n\mathbf{F}(Q) \cong \{0\}$ *για κάθε* $n \neq 0$.

(ii) *Εάν ο* **F** *είναι ανταλλοίωτος, τότε έχουμε* $\mathscr{L}_n\mathbf{F}(Q) \cong \{0\}$ *και* $\mathscr{R}^n\mathbf{F}(P) \cong \{0\}$ *για κάθε* $n \neq 0$.

Απόδειξη. Προφανώς, ο $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ με

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \xrightarrow{d_3=0} P_2 \cong \{0\} \xrightarrow{d_2=0} P_1 \cong \{0\} \xrightarrow{d_1=0} P_0 := P \xrightarrow{d_0=0} \{0\} \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \cdots$$

($P_n \cong \{0\}$, για κάθε $n \neq 0$, $d_n := 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon := \mathrm{id}_P$) είναι ένας προβολικός κερματισμός τού P και ο $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ με

$$\mathbf{Q}^\bullet : \ \cdots \to \{0\} \to \{0\} \to \ Q^0 := Q \xrightarrow{d^0=0} Q^1 \cong \{0\} \xrightarrow{d^1=0} Q^2 \cong \{0\} \xrightarrow{d^2=0} \cdots$$

($Q^n \cong \{0\}$, για κάθε $n \neq 0$, $d^n := 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $i := \mathrm{id}_Q$) είναι ένας εμβολικός κερματισμός τού Q.

(i) Εάν ο **F** είναι *συναλλοίωτος,* τότε για κάθε $n \neq 0$ έχουμε

$$\mathscr{L}_n\mathbf{F}(P) := H_n(\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet)) := \operatorname{Ker}(\mathbf{F}(d_n))/\operatorname{Im}(\mathbf{F}(d_{n+1})) \cong \{0\}$$

και

$$\mathscr{R}^n\mathbf{F}(Q) := H^n(\mathbf{F}(\mathbf{Q}^\bullet)) := \operatorname{Ker}(\mathbf{F}(d^n))/\operatorname{Im}(\mathbf{F}(d^{n-1})) \cong \{0\}.$$

(ii) Εάν ο **F** είναι *ανταλλοίωτος,* τότε για κάθε $n \neq 0$ έχουμε κατ' αναλογίαν

$$\mathscr{R}^n\mathbf{F}(P) := H^n(\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet)) := \operatorname{Ker}(\mathbf{F}(d_{n+1}))/\operatorname{Im}(\mathbf{F}(d_n)) \cong \{0\}$$

και
$$\mathscr{L}_n\mathbf{F}(Q) := H_n(\mathbf{F}(\mathbf{Q}^{\bullet})) := \operatorname{Ker}(\mathbf{F}(d^{n-1}))/\operatorname{Im}(\mathbf{F}(d^n)) \cong \{0\},$$
οπότε αμφότεροι οι ισχυρισμοί είναι αληθείς. □

▸ **Συνδεδεμένες ακολουθίες συναρτητών**. Για τη θέσπιση ενός «αξιωματικού χαρακτηρισμού» των ακολουθιών παράγωγων συναρτητών (δοθέντος συναρτητή από την $\mathfrak{Mod}_R$ στην $\mathfrak{Mod}_R$) «μέχρι φυσικής ισοδυναμίας» (βλ. θεώρημα[18] A.3.27) είναι αρκετό να παρατεθούν οι ορισμοί A.3.14, A.3.16, A.3.20 και A.3.22 στους οποίους ενσωματώνονται αξιώσεις ανάλογες των βασικών ιδιοτήτων των μοδίων (συν)ομολογίας (συν)αλυσωτών συμπλόκων που περιέχονται στα εδάφια 3.2.13, 3.2.17, 3.2.30 και 3.2.31.

A.3.14 Ορισμός. Μια οικογένεια $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ προσθετικών, *συναλλοίωτων* συναρτητών $\mathbf{F}_n : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ (έχουσα το σύνολο των ακεραίων αριθμών ως σύνολο δεικτών της) καλείται **κατιούσα συνδεδεμένη ακολουθία συναλλοίωτων συναρτητών** (εν συντομία, “**Κ.Σ.Α.Σ.Σ.**”) όταν ισχύουν τα κάτωθι:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία
$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\} \tag{A.12}$$
R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων υφίσταται ένας ομομορφισμός
$$\partial_n^{\mathfrak{F},M} : \mathbf{F}_n(M'') \longrightarrow \mathbf{F}_{n-1}(M')$$
(ο λεγόμενος *συνδετικός ομομορφισμός* για την (A.12) ως προς την $\mathfrak{F}$), μέσω τού οποίου επάγεται μια *μακρά ακριβής ακολουθία*
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}_{n+1}(M') \arrow[r, "\mathbf{F}_{n+1}(f)"] & \mathbf{F}_{n+1}(M) \arrow[r, "\mathbf{F}_{n+1}(g)"] & \mathbf{F}_{n+1}(M'') \arrow[dll, "\partial_{n+1}^{\mathfrak{F},M}" description, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- (\tikztotarget.north) }] \\
& \mathbf{F}_n(M') \arrow[r, "\mathbf{F}_n(f)"] & \mathbf{F}_n(M) \arrow[r, "\mathbf{F}_n(g)"] & \mathbf{F}_n(M'') \arrow[dll, "\partial_n^{\mathfrak{F},M}" description, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- (\tikztotarget.north) }] \\
& \mathbf{F}_{n-1}(M') \arrow[r, "\mathbf{F}_{n-1}(f)"] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

(ii) Για κάθε μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "g'"'] & L \arrow[r, "g"'] & L'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

[18] Οι εκάστοτε *ιδιότητες* (i), (ii) και (iii) (για καθεμιά εκ των περιπτώσεων (a), (b) (c) και (d) τού θεωρήματος A.3.27 είναι δυνατόν να επέχουν «μέχρι φυσικής ισοδυναμίας» θέση ενός περιεκτικού συστήματος *αξιωμάτων*.

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, το επαγόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}_n(M') \arrow[r, "\mathbf{F}_n(f')"] \arrow[d, "\mathbf{F}_n(\phi')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_n(M) \arrow[r, "\mathbf{F}_n(f)"] \arrow[d, "\mathbf{F}_n(\phi)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_n(M'') \arrow[r, "\partial_n^{\mathfrak{F},M}"] \arrow[d, "\mathbf{F}_n(\phi'')"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_{n-1}(M') \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{F}_{n-1}(\phi')"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}_n(L') \arrow[r, "\mathbf{F}_n(g')"'] & \mathbf{F}_n(L) \arrow[r, "\mathbf{F}_n(g)"'] & \mathbf{F}_n(L'') \arrow[r, "\partial_n^{\mathfrak{F},L}"'] & \mathbf{F}_{n-1}(L') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

το έχον τις μακρές ακριβείς ακολουθίες ως γραμμές (με τους $\partial_n^{\mathfrak{F},M}, \partial_n^{\mathfrak{F},L}$ ως συνδετικούς ομομορφισμούς) είναι ωσαύτως μεταθετικό.

A.3.15 Ορισμός. Έστω ότι $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο κατιούσες συνδεδεμένες ακολουθίες συναλλοίωτων συναρτητών. Μια οικογένεια $\mathfrak{h} = \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ φυσικών μετασχηματισμών

$$h_n : \mathbf{F}_n \longrightarrow \mathbf{G}_n$$

ονομάζεται **φυσικός μετασχηματισμός Κ.Σ.Α.Σ.Σ. από την $\mathfrak{F}$ στην $\mathfrak{G}$** (συμβολιζόμενος, εν συντομία, ως $\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$) όταν μέσω οιασδήποτε βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}_n(M') \arrow[r, "\mathbf{F}_n(f)"] \arrow[d, "h_n(M')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_n(M) \arrow[r, "\mathbf{F}_n(g)"] \arrow[d, "h_n(M)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_n(M'') \arrow[r, "\partial_n^{\mathfrak{F},M}"] \arrow[d, "h_n(M'')"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_{n-1}(M') \arrow[r] \arrow[d, "h_{n-1}(M')"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{G}_n(M') \arrow[r, "\mathbf{G}_n(f)"'] & \mathbf{G}_n(M) \arrow[r, "\mathbf{G}_n(g)"'] & \mathbf{G}_n(M'') \arrow[r, "\partial_n^{\mathfrak{G},M}"'] & \mathbf{G}_{n-1}(M') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Όταν όλα τα μέλη τής οικογενείας ομομορφισμών R-μοδίων

$$\{h_n(M) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}_n(M), \mathbf{G}_n(M)) \mid M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

είναι ισομορφισμοί, τότε ο

$$\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$$

καλείται **φυσική ισοδυναμία Κ.Σ.Α.Σ.Σ.** μεταξύ των $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$, και οι $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$ ονομάζονται **φυσικώς ισοδύναμες**. (Εν τοιαύτη περιπτώσει χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$\mathfrak{F} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathfrak{G}$$

για να δηλοί την ύπαρξη μιας φυσικής ισοδυναμίας μεταξύ των $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$.)

A.3.16 Ορισμός. Μια οικογένεια $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ προσθετικών, *ανταλλοίωτων* συναρτητών

$$\mathbf{F}_n : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

καλείται **κατιούσα συνδεδεμένη ακολουθία ανταλλοίωτων συναρτητών** (εν συντομία, "**Κ.Σ.Α.Α.Σ.**") όταν ισχύουν τα κάτωθι:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\} \tag{A.13}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων υφίσταται ένας ομομορφισμός

$$\partial_n^{\mathfrak{F},M} : \mathbf{F}_n(M') \longrightarrow \mathbf{F}_{n-1}(M'')$$

(ο λεγόμενος *συνδετικός ομομορφισμός* για την (A.13) ως προς την $\mathfrak{F}$), μέσω τού οποίου επάγεται μια *μακρά ακριβής ακολουθία*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}_{n+1}(M'') \arrow[r, "\mathbf{F}_{n+1}(g)"] & \mathbf{F}_{n+1}(M) \arrow[r, "\mathbf{F}_{n+1}(f)"] & \mathbf{F}_{n+1}(M') \arrow[dll, "\partial_{n+1}^{\mathfrak{F},M}"] \\
& \mathbf{F}_n(M'') \arrow[r, "\mathbf{F}_n(g)"] & \mathbf{F}_n(M) \arrow[r, "\mathbf{F}_n(f)"] & \mathbf{F}_n(M') \arrow[dll, "\partial_n^{\mathfrak{F},M}"] \\
& \mathbf{F}_{n-1}(M'') \arrow[r, "\mathbf{F}_{n-1}(g)"] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

(ii) Για κάθε μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "g'"'] & L \arrow[r, "g"'] & L'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, το επαγόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}_n(L'') \arrow[r, "\mathbf{F}_n(g)"] \arrow[d, "\mathbf{F}_n(\phi'')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_n(L) \arrow[r, "\mathbf{F}_n(g')"] \arrow[d, "\mathbf{F}_n(\phi)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_n(L') \arrow[r, "\partial_n^{\mathfrak{F},L}"] \arrow[d, "\mathbf{F}_n(\phi')"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_{n-1}(L'') \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{F}_{n-1}(\phi'')"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}_n(M'') \arrow[r, "\mathbf{F}_n(f)"'] & \mathbf{F}_n(M) \arrow[r, "\mathbf{F}_n(f')"'] & \mathbf{F}_n(M') \arrow[r, "\partial_n^{\mathfrak{F},M}"'] & \mathbf{F}_{n-1}(M'') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

το έχον τις μακρές ακριβείς ακολουθίες ως γραμμές (με τους $\partial_n^{\mathfrak{F},M}$, $\partial_n^{\mathfrak{F},L}$ ως συνδετικούς ομομορφισμούς) είναι ωσαύτως μεταθετικό.

A.3.17 Ορισμός. Έστω ότι $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο κατιούσες συνδεδεμένες ακολουθίες ανταλλοίωτων συναρτητών. Μια οικογένεια $\mathfrak{h} = \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ φυσικών μετασχηματισμών $h_n : \mathbf{F}_n \longrightarrow \mathbf{G}_n$ ονομάζεται **φυσικός μετασχηματισμός Κ.Σ.Α.Α.Σ. από την $\mathfrak{F}$ στην $\mathfrak{G}$** (συμβολιζόμενος, εν συντομία, ως $\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$) όταν μέσω οιασδήποτε βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}_n(M'') \arrow[r, "\mathbf{F}_n(g)"] \arrow[d, "h_n(M'')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_n(M) \arrow[r, "\mathbf{F}_n(f)"] \arrow[d, "h_n(M)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_n(M') \arrow[r, "\partial_n^{\mathfrak{F},M}"] \arrow[d, "h_n(M')"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_{n-1}(M'') \arrow[r] \arrow[d, "h_{n-1}(M'')"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{G}_n(M'') \arrow[r, "\mathbf{G}_n(g)"'] & \mathbf{G}_n(M) \arrow[r, "\mathbf{G}_n(f)"'] & \mathbf{G}_n(M') \arrow[r, "\partial_n^{\mathfrak{G},M}"'] & \mathbf{G}_{n-1}(M'') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Όταν όλα τα μέλη τής οικογενείας ομομορφισμών R-μοδίων

$$\{h_n(M) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}_n(M), \mathbf{G}_n(M)) \mid M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

είναι ισομορφισμοί, τότε ο $\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ καλείται **φυσική ισοδυναμία Κ.Σ.Α.Α.Σ.** μεταξύ των $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$, και οι $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$ ονομάζονται **φυσικώς ισοδύναμες**. (Εν τοιαύτη περιπτώσει χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\mathfrak{F} \underset{\varphi.\iota.}{\cong} \mathfrak{G}$ για να δηλοί την ύπαρξη μιας φυσικής ισοδυναμίας μεταξύ των $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$.)

A.3.18 Θεώρημα. *Υποθέτουμε ότι $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο* Κ.Σ.Α.Σ.Σ. (*και αντιστοίχως, δυο* Κ.Σ.Α.Α.Σ.), *οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες*:

(i) *Για όλους τους ακεραίους $n < 0$ τόσον ο $\mathbf{F}_n$ όσον και ο $\mathbf{G}_n$ είναι ο μηδενικός συναρτητής.*

(ii) *Για κάθε προβολικό R-μόδιο P* (*και αντιστοίχως, για κάθε εμβολικό R-μόδιο Q*) *και κάθε ακέραιο $n > 0$ ισχύει $\mathbf{G}_n(P) \cong \{0\}$* (*και αντιστοίχως, $\mathbf{G}_n(Q) \cong \{0\}$*).

Τότε για κάθε φυσικό μετασχηματισμό $h' : \mathbf{F}_0 \longrightarrow \mathbf{G}_0$ υφίσταται ένας και μόνον φυσικός μετασχηματισμός Κ.Σ.Α.Σ.Σ. (*και αντιστοίχως, ένας και μόνον φυσικός μετασχηματισμός* Κ.Σ.Α.Α.Σ.) *$\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ με $h_0 = h'$. Με άλλα λόγια, κάθε φυσικός μετασχηματισμός $h' : \mathbf{F}_0 \longrightarrow \mathbf{G}_0$ επιδέχεται μία και μόνον επέκταση σε έναν φυσικό μετασχηματισμό* Κ.Σ.Α.Σ.Σ. (*και αντιστοίχως, σε έναν φυσικό μετασχηματισμό* Κ.Σ.Α.Α.Σ.) *$\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να παραθέσουμε μια απόδειξη στην περίπτωση κατά την οποία οι $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο[19] Κ.Σ.Α.Σ.Σ. Έστω $h' : \mathbf{F}_0 \longrightarrow \mathbf{G}_0$ ένας φυσικός μετασχηματισμός. Όταν $n < 0$, τόσον ο $\mathbf{F}_n$ όσον και ο $\mathbf{G}_n$ είναι ο μηδενικός συναρτητής, οπότε ως h_n ορίζουμε τον (μοναδικό) «μηδενικό» φυσικό μετασχηματισμό. Όταν $n = 0$, θέτουμε $h_0 := h'$. Η απόδειξη τής υπάρξεως των

[19] Όταν αυτές είναι δυο Κ.Σ.Α.Α.Σ., η αντίστοιχη απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη.

λοιπών κατάλληλων φυσικών μετασχηματισμών θα γίνει με χρήση μαθηματικής επαγωγής. Παγιώνουμε έναν $n \in \mathbb{N}_0$ και υποθέτουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$ με $k \leqslant n$ υπάρχουν φυσικοί μετασχηματισμοί $h_k : \mathbf{F}_k \longrightarrow \mathbf{G}_k$, τέτοιοι ώστε μέσω οιασδήποτε βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow M' \overset{f}{\hookrightarrow} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} M'' \longrightarrow \{0\} \tag{A.14}$$

να επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}_{n+1}(M'') \arrow[r, "\partial_{n+1}^{\mathfrak{F},M}"] \arrow[d, dashed, ";"] & \mathbf{F}_n(M') \arrow[r, "\mathbf{F}_n(f)"] \arrow[d, "h_n(M')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_n(M) \arrow[r, "\mathbf{F}_n(g)"] \arrow[d, "h_n(M)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_n(M'') \arrow[r, "\partial_n^{\mathfrak{F},M}"] \arrow[d, "h_n(M'')"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{G}_{n+1}(M'') \arrow[r, "\partial_{n+1}^{\mathfrak{G},M}"'] & \mathbf{G}_n(M') \arrow[r, "\mathbf{G}_n(f)"'] & \mathbf{G}_n(M) \arrow[r, "\mathbf{G}_n(g)"'] & \mathbf{G}_n(M'') \arrow[r, "\partial_n^{\mathfrak{G},M}"'] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{A.15}$$

μέχρι την n-οστή θέση. Θα δείξουμε την ύπαρξη μοναδικού φυσικού μετασχηματισμού $h_{n+1} : \mathbf{F}_{n+1} \longrightarrow \mathbf{G}_{n+1}$, τέτοιου ώστε οι ομομορφισμοί R-μοδίων

$$h_{n+1}(M'') : \mathbf{F}_{n+1}(M'') \longrightarrow \mathbf{G}_{n+1}(M''), \ \ h_{n+1}(M) : \mathbf{F}_{n+1}(M) \longrightarrow \mathbf{G}_{n+1}(M)$$

και $h_{n+1}(M') : \mathbf{F}_{n+1}(M') \longrightarrow \mathbf{G}_{n+1}(M')$ να καθιστούν το ανωτέρω μεταθετικό *και* στη θέση $n + 1$.

Βήμα 1ο. *Τρόπος ορισμού τού* h_{n+1}. Θεωρούμε *τυχόντα* R-μόδιο N. Σύμφωνα με το πόρισμα 2.5.23 υπάρχει κάποιος *ελεύθερος* R-μόδιος L, καθώς και ένας υπομόδιος W τού L, ούτως ώστε να ισχύει $N \cong L/W$. Λόγω αυτού κατασκευάζεται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow W \overset{\iota}{\hookrightarrow} L \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} N \longrightarrow \{0\}\,. \tag{A.16}$$

Από την επαγωγική μας υπόθεση το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό (μέχρι τη θέση n)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}_{n+1}(N) \arrow[r, "\partial_{n+1}^{\mathfrak{F},L}"] & \mathbf{F}_n(W) \arrow[r, "\mathbf{F}_n(\iota)"] \arrow[d, "h_n(W)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_n(L) \arrow[r, "\mathbf{F}_n(\pi)"] \arrow[d, "h_n(L)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}_n(N) \arrow[r, "\partial_n^{\mathfrak{F},L}"] \arrow[d, "h_n(N)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{G}_{n+1}(N) \arrow[r, "\partial_{n+1}^{\mathfrak{G},L}"'] & \mathbf{G}_n(W) \arrow[r, "\mathbf{G}_n(\iota)"'] & \mathbf{G}_n(L) \arrow[r, "\mathbf{G}_n(\pi)"'] & \mathbf{G}_n(N) \arrow[r, "\partial_n^{\mathfrak{G},L}"'] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{A.17}$$

και έχει ακριβείς γραμμές (αφού οι $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$ είναι δυο Κ.Σ.Α.Σ.Σ.). Από την προϋπόθεση (ii) ισχύει $\mathbf{G}_{n+1}(L) \cong \{0\}$ (διότι ο L, ως ελεύθερος R-μόδιος, είναι κατά την πρόταση 4.2.4 *και* προβολικός). Τούτο σημαίνει ότι ο $\partial_{n+1}^{\mathfrak{G},L}$ είναι *μονομορφισμός* (και, μάλιστα, *ισομορφισμός* στην περίπτωση όπου $n = 0$). Σύμφωνα με την πρόταση 3.1.11 υφίσταται *μονοσημάντως ορισμένος* $h_{n+1}(N) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}_{n+1}(N), \mathbf{G}_{n+1}(N))$ ο οποίος συμπληρώνει το άνωθι μεταθετικώς. Θα πρέπει, ωστόσο, να αποδειχθεί ότι ο ορισμός αυτού τού $h_{n+1}(N)$ *είναι ανεξάρτητος* τής χρησιμοποιηθείσας βραχείας ακριβούς ακολουθίας (A.16) (εξαρτώμενος, ως εκ τούτου, *μόνον από τον* N).

Όπως θα δούμε, αυτό θα αποσαφηνισθεί κατά την πορεία που θα ακολουθηθεί για τον έλεγχο τού ότι η οικογένεια $\{h_{n+1}(N) \,|\, N \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)\}$ αποτελεί έναν φυσικό μετασχηματισμό από τον συναρτητή $\mathbf{F}_{n+1}$ στον συναρτητή $\mathbf{G}_{n+1}$. Προς τούτο θεωρούμε έναν άλλον R-μόδιο N' και την αντίστοιχη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow W' \overset{\iota'}{\hookrightarrow} L' \overset{\pi'}{\twoheadrightarrow} N' \longrightarrow \{0\}$$

(όπου L' κατάλληλος *ελεύθερος* R-μόδιος και W' κατάλληλος υπομόδιός του). Εάν $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$, τότε δημιουργείται το κάτωθι μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, dashed, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \{0\} \arrow[d, equal] \\
\{0\} \arrow[r] & W' \arrow[r, hook, "\iota'"'] & L' \arrow[r, two heads, "\pi'"'] & N' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd} \tag{A.18}$$

στο οποίο οι $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(L, L'), \beta \in \mathrm{Hom}_R(W, W')$ ορίζονται ως εξής: Επειδή ο L είναι προβολικός, για τον $\varphi \circ \pi$ υφίσταται ένας $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(L, L')$ (προβολική ανύψωση τού $\varphi \circ \pi$) με $\pi' \circ \alpha = \varphi \circ \pi$. (Βλ. ορισμό 4.2.1.) Εξάλλου, η πρόταση 3.1.11 μας πληροφορεί ότι υφίσταται μοναδικός $\beta \in \mathrm{Hom}_R(W, W')$ με $\iota' \circ \beta = \alpha \circ \iota$. Μέσω τού (A.18) επάγεται το ακόλουθο:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}_{n+1}(N) \arrow[rrr, "\mathbf{F}_{n+1}(\varphi)"] \arrow[dr, "\partial^{\mathfrak{F},L}_{n+1}"'] \arrow[ddd, "h_{n+1}(N)"'] & & & \mathbf{F}_{n+1}(N') \arrow[dl, "\partial^{\mathfrak{F},L'}_{n+1}"] \arrow[ddd, "h_{n+1}(N')"] \\
 & \mathbf{F}_n(W) \arrow[r, "\mathbf{F}_n(\beta)"] \arrow[d, "h_n(W)"'] \arrow[dr, phantom, "5"] \arrow[ur, phantom, "1"] \arrow[l, phantom, "4"] & \mathbf{F}_n(W') \arrow[d, "h_n(W')"] \arrow[r, phantom, "2"] & \\
 & \mathbf{G}_n(W) \arrow[r, "\mathbf{G}_n(\beta)"'] \arrow[dr, phantom, "3"] & \mathbf{G}_n(W') & \\
\mathbf{G}_{n+1}(N) \arrow[rrr, "\mathbf{G}_{n+1}(\varphi)"'] \arrow[ur, "\partial^{\mathfrak{G},L}_{n+1}"] & & & \mathbf{G}_{n+1}(N') \arrow[ul, "\partial^{\mathfrak{G},L'}_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

Τα υποδιαγράμματα 1 και 3 είναι μεταθετικά διότι οι $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$ είναι Κ.Σ.Α.Σ.Σ., τα 2 και 4 είναι μεταθετικά λόγω τού ορισμού των $h_{n+1}(N)$ και $h_{n+1}(N')$, ενώ το 5 είναι μεταθετικό διότι ο $h_n : \mathbf{F}_n \longrightarrow \mathbf{G}_n$ είναι φυσικός μετασχηματισμός από τον συναρτητή $\mathbf{F}_n$ στον συναρτητή $\mathbf{G}_n$. Εξ αυτής τής ιδιότητας συνάγεται *και* η μεταθετικότητα τού *εξωτερικού* ορθογωνίου παραλληλογράμμου, καθόσον έχουμε

$$\begin{aligned}
&\partial_{n+1}^{\mathfrak{G},L'} \circ (h_{n+1}(N') \circ \mathbf{F}_{n+1}(\varphi)) = (\partial_{n+1}^{\mathfrak{G},L'} \circ h_{n+1}(N')) \circ \mathbf{F}_{n+1}(\varphi) = (h_n(W') \circ \partial_{n+1}^{\mathfrak{F},L'}) \circ \mathbf{F}_{n+1}(\varphi) \\
&= h_n(W') \circ (\partial_{n+1}^{\mathfrak{F},L'} \circ \mathbf{F}_{n+1}(\varphi)) = h_n(W') \circ (\mathbf{F}_n(\beta) \circ \partial_{n+1}^{\mathfrak{F},L}) = (h_n(W') \circ \mathbf{F}_n(\beta)) \circ \partial_{n+1}^{\mathfrak{F},L} \\
&= (\mathbf{G}_n(\beta) \circ h_n(W)) \circ \partial_{n+1}^{\mathfrak{F},L} = \mathbf{G}_n(\beta) \circ (h_n(W) \circ \partial_{n+1}^{\mathfrak{F},L}) \\
&= \mathbf{G}_n(\beta) \circ (\partial_{n+1}^{\mathfrak{G},L} \circ h_{n+1}(N)) = (\mathbf{G}_n(\beta) \circ \partial_{n+1}^{\mathfrak{G},L}) \circ h_{n+1}(N) = (\partial_{n+1}^{\mathfrak{G},L'} \circ \mathbf{G}_{n+1}(\varphi)) \circ h_{n+1}(N) \\
&= \partial_{n+1}^{\mathfrak{G},L'} \circ (\mathbf{G}_{n+1}(\varphi) \circ h_{n+1}(N)),
\end{aligned}$$

ήτοι

$$\partial_{n+1}^{\mathfrak{G},L'} \circ (h_{n+1}(N') \circ \mathbf{F}_{n+1}(\varphi)) = \partial_{n+1}^{\mathfrak{G},L'} \circ (\mathbf{G}_{n+1}(\varphi) \circ h_{n+1}(N)),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$h_{n+1}(N') \circ \mathbf{F}_{n+1}(\varphi) = \mathbf{G}_{n+1}(\varphi) \circ h_{n+1}(N) \tag{A.19}$$

λόγω τής ενριπτικότητας τού ομομορφισμού $\partial_{n+1}^{\mathfrak{G},L'}$. (Βλ. την ισοδυναμία των συνθηκών (i) και (iii) στο λήμμα 2.2.23.) Επιπροσθέτως, ο ορισμός τού $h_{n+1}(N)$ *είναι ανεξάρτητος* τής συγκεκριμένης (A.16): Θέτοντας $N = N'$ και $\varphi = \mathrm{id}_N$ η (A.19) δίδει $h_{n+1}(N) = h_{n+1}(N')$ (κάτι που, λόγω τού ότι $N = N'$, εξασφαλίζει την ανεξαρτησία τού $h_{n+1}(N)$ από την επιλογή τής συγκεκριμένης (A.16)). Άρα η οικογένεια

$$\{\, h_{n+1}(N) |\, N \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)\}$$

αποτελεί *όντως* έναν (καλώς ορισμένο) φυσικό μετασχηματισμό από τον $\mathbf{F}_{n+1}$ στον $\mathbf{G}_{n+1}$.

Βήμα 2ο. *Μεταθετικότητα τού διαγράμματος* (A.15) *στη θέση* $n+1$. Επανερχόμαστε τώρα στην αρχική βραχεία ακριβή ακολουθία (A.14) και εφαρμόζουμε μια παραλλαγή των ανωτέρω χρησιμοποιηθέντων επιχειρημάτων. Σύμφωνα με το πόρισμα 2.5.23 υπάρχει κάποιος *ελεύθερος* R-μόδιος L, καθώς και ένας υπομόδιος W τού L, ούτως ώστε να ισχύει $M'' \cong L/W$ και να προκύπτει μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow W \overset{\iota}{\hookrightarrow} L \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M'' \longrightarrow \{0\}.$$

Τοποθετώντας αυτήν υπεράνω τής (A.14) κατασκευάζουμε (όπως πριν) ένα μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, dashed, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{M''}"] & \{0\} \arrow[d, equal] \\
\{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, hook, "f"'] & M \arrow[r, two heads, "g"'] & M'' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd} \tag{A.20}$$

στο οποίο ο μεν α είναι μια προβολική ανύψωση τού π, ο δε β ο μοναδικός ομομορφισμός που κλείνει μεταθετικώς αυτό (εξ αριστερών) ένεκα τής προτάσεως 3.1.11.

Μέσω τού (A.20) επάγεται το ακόλουθο:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}_{n+1}(M'') \arrow[rr, "\partial^{\mathfrak{F},M}_{n+1}"] \arrow[dr, "\partial^{\mathfrak{F},L}_{n+1}"'] \arrow[ddd, "h_{n+1}(M'')"'] & {} \arrow[d, phantom, "1"] & \mathbf{F}_n(M') \arrow[ddd, "h_n(M')"] \\
 & \mathbf{F}_n(W) \arrow[ur, "\mathbf{F}_n(\beta)"'] \arrow[d, "h_n(W)"] \arrow[dl, phantom, "4"] \arrow[dr, phantom, "2"] & \\
{} & \mathbf{G}_n(W) \arrow[dr, "\mathbf{G}_n(\beta)"] \arrow[d, phantom, "3"] & {} \\
\mathbf{G}_{n+1}(M'') \arrow[rr, "\partial^{\mathfrak{G},M}_{n+1}"'] \arrow[ur, "\partial^{\mathfrak{G},L}_{n+1}"] & {} & \mathbf{G}_n(M')
\end{tikzcd}$$

Τα υποδιαγράμματα 1 και 3 είναι μεταθετικά διότι οι $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$ είναι Κ.Σ.Α.Σ.Σ., το 2 είναι μεταθετικό διότι ο $h_n : \mathbf{F}_n \longrightarrow \mathbf{G}_n$ είναι φυσικός μετασχηματισμός από τον συναρτητή $\mathbf{F}_n$ στον συναρτητή $\mathbf{G}_n$, ενώ το 4 είναι μεταθετικό λόγω τού ορισμού τού $h_{n+1}(M'')$ (ύστερα από χρήση τής άνω γραμμής τού (A.20)). Εξ αυτής τής ιδιότητας συνάγεται *και* η μεταθετικότητα τού *εξωτερικού* ορθογωνίου παραλληλογράμμου, καθόσον έχουμε

$$\begin{aligned}
&\partial^{\mathfrak{G},M}_{n+1} \circ h_{n+1}(M'') = (\mathbf{G}_n(\beta) \circ \partial^{\mathfrak{G},L}_{n+1}) \circ h_{n+1}(M'') = \mathbf{G}_n(\beta) \circ (\partial^{\mathfrak{G},L}_{n+1} \circ h_{n+1}(M'')) \\
&= \mathbf{G}_n(\beta) \circ (h_n(W) \circ \partial^{\mathfrak{F},L}_{n+1}) = (\mathbf{G}_n(\beta) \circ h_n(W)) \circ \partial^{\mathfrak{F},L}_{n+1} \\
&= (h_n(M') \circ \mathbf{F}_n(\beta)) \circ \partial^{\mathfrak{F},L}_{n+1} = h_n(M') \circ (\mathbf{F}_n(\beta) \circ \partial^{\mathfrak{F},L}_{n+1}) = h_n(M') \circ \partial^{\mathfrak{F},M}_{n+1}.
\end{aligned}$$

Άρα το (A.15) συμπληρώνεται μεταθετικώς μέσω των $h_{n+1}(M'')$, $h_{n+1}(M)$ και $h_{n+1}(M^{'})$ στη θέση $n+1$.

Βήμα 3ο. *Μοναδικότητα τού* h_{n+1}. Ας υποθέσουμε ότι $h'_{n+1} : \mathbf{F}_{n+1} \longrightarrow \mathbf{G}_{n+1}$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός, τέτοιος ώστε μέσω οιασδήποτε βραχείας ακριβούς ακολουθίας (A.14) να επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα (A.15) (συμπληρωμένο στη θέση $n+1$ και με τον h'_{n+1} αντί τού h_{n+1}). Τότε για *οιονδήποτε* R-μόδιο N ο $h'_{n+1}(N)$ συμπληρώνει μεταθετικώς *και* το διάγραμμα (A.17). Επειδή όμως ο εκεί ορισθείς $h_{n+1}(N)$ είναι *ο μοναδικός ομομορφισμός* από τον $\mathbf{F}_{n+1}(N)$ στον $\mathbf{G}_{n+1}(N)$ που το πράττει, έχουμε κατ' ανάγκην $h'_{n+1}(N) = h_{n+1}(N)$. Τελικώς λοιπόν έχουμε $h'_{n+1} = h_{n+1}$. $\square$

A.3.19 Πόρισμα. *Υποθέτουμε ότι* $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *και* $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο* Κ.Σ.Α.Σ.Σ. (*και αντιστοίχως, δυο* Κ.Σ.Α.Α.Σ.), *οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες*:

(i) *Για όλους τους ακεραίους* $n < 0$ *τόσον ο* $\mathbf{F}_n$ *όσον και ο* $\mathbf{G}_n$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής.*

(ii) *Για κάθε προβολικό* R*-μόδιο* P (*και αντιστοίχως, για κάθε εμβολικό* R*-μόδιο* Q) *και κάθε ακέραιο* $n > 0$ *ισχύει* $\mathbf{F}_n(P) \cong \{0\} \cong \mathbf{G}_n(P)$ (*και αντιστοίχως,* $\mathbf{F}_n(Q) \cong \{0\} \cong \mathbf{G}_n(Q)$).

(iii) *Υπάρχει μια φυσική ισοδυναμία* $h_0 : \mathbf{F}_0 \longrightarrow \mathbf{G}_0$.

Τότε υφίσταται ακριβώς μία φυσική ισοδυναμία Κ.Σ.Α.Σ.Σ. (*και αντιστοίχως, ακριβώς μία φυσική ισοδυναμία* Κ.Σ.Α.Α.Σ.) $\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ *μεταξύ των* $\mathfrak{F}$ *και* $\mathfrak{G}$ *επεκτείνουσα τον συναρτητή* h_0.

Απόδειξη. Και εδώ αρκεί να παραθέσουμε μια απόδειξη στην περίπτωση κατά την οποία οι $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο Κ.Σ.Α.Σ.Σ. Από την (iii) συνάγεται η ύπαρξη ενός φυσικού μετασχηματισμού $k_0 : \mathbf{G}_0 \longrightarrow \mathbf{F}_0$, τέτοιου ώστε να ισχύει

$$k_0(M) \circ h_0(M) = \mathrm{id}_{\mathbf{F}_0(M)} \;\text{ και }\; h_0(M) \circ k_0(M) = \mathrm{id}_{\mathbf{G}_0(M)},\ \forall M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R).$$

Δυνάμει τού θεωρήματος A.3.18 υφίσταται ένας και μόνον φυσικός μετασχηματισμός Κ.Σ.Α.Σ.Σ. $\mathfrak{h} = \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ επεκτείνων τον φυσικό μετασχηματισμό h_0, και ένας και μόνον φυσικός μετασχηματισμός Κ.Σ.Α.Σ.Σ. $\mathfrak{k} = \{k_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{F}$ επεκτείνων τον k_0. Επιπλέον, ο $\mathfrak{id}_{\mathfrak{F}} := \{\mathrm{id}_{\mathbf{F}_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ο μόνος φυσικός μετασχηματισμός[20] Κ.Σ.Α.Σ.Σ. που επεκτείνει τον $\mathrm{id}_{\mathbf{F}_0}$ και ο $\mathfrak{id}_{\mathfrak{G}} := \{\mathrm{id}_{\mathbf{G}_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ο μόνος φυσικός μετασχηματισμός Κ.Σ.Α.Σ.Σ. που επεκτείνει τον $\mathrm{id}_{\mathbf{G}_0}$. Επειδή

$$k_n(M) \circ h_n(M) = \mathrm{id}_{\mathbf{F}_n(M)} \;\text{ και }\; h_n(M) \circ k_n(M) = \mathrm{id}_{\mathbf{G}_n(M)},\ \forall M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

η σύνθεση $\mathfrak{k} \circ \mathfrak{h} = \{k_n \circ h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ισούται με τον $\mathfrak{id}_{\mathfrak{F}}$ και η σύνθεση $\mathfrak{h} \circ \mathfrak{k} = \{h_n \circ k_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ισούται με τον $\mathfrak{id}_{\mathfrak{G}}$. Κατά συνέπειαν, όλα τα μέλη τής οικογενείας ομομορφισμών R-μοδίων $\{h_n(M) \mid M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ισομορφισμοί και η $\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ αποτελεί *τη μοναδική* φυσική ισοδυναμία Κ.Σ.Α.Σ.Σ. μεταξύ των $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$ την επεκτείνουσα τον h_0. □

A.3.20 Ορισμός. Μια οικογένεια $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ προσθετικών, *συναλλοίωτων* συναρτητών $\mathbf{F}^n : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ καλείται **ανιούσα συνδεδεμένη ακολουθία συναλλοίωτων συναρτητών** (εν συντομία, “**Α.Σ.Α.Σ.Σ.**”) όταν ισχύουν τα κάτωθι:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\} \tag{A.21}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων υφίσταται ένας ομομορφισμός

$$\partial^n_{\mathfrak{F},M} : \mathbf{F}^n(M'') \longrightarrow \mathbf{F}^{n+1}(M')$$

[20] Εξ ορισμού, $\mathrm{id}_{\mathbf{F}_n} : \mathbf{F}_n \longrightarrow \mathbf{F}_n$ είναι ο φυσικός μετασχηματισμός με $\mathrm{id}_{\mathbf{F}_n}(M) := \mathrm{id}_{\mathbf{F}_n(M)}$, $\forall M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$.

(ο λεγόμενος *συνδετικός ομομορφισμός* για την (A.21) ως προς την $\mathfrak{F}$), μέσω τού οποίου επάγεται μια *μακρά ακριβής ακολουθία*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}^{n-1}(M') \arrow[r, "\mathbf{F}^{n-1}(f)"] & \mathbf{F}^{n-1}(M) \arrow[r, "\mathbf{F}^{n-1}(g)"] & \mathbf{F}^{n-1}(M'') \arrow[dll, "\partial^{n-1}_{\mathfrak{F},M}" description] \\
& \mathbf{F}^{n}(M') \arrow[r, "\mathbf{F}^{n}(f)"] & \mathbf{F}^{n}(M) \arrow[r, "\mathbf{F}^{n}(g)"] & \mathbf{F}^{n}(M'') \arrow[dll, "\partial^{n}_{\mathfrak{F},M}" description] \\
& \mathbf{F}^{n+1}(M') \arrow[r, "\mathbf{F}^{n+1}(f)"] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

(ii) Για κάθε μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "g'"'] & L \arrow[r, "g"'] & L'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, το επαγόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}^{n}(M') \arrow[r, "\mathbf{F}^{n}(f')"] \arrow[d, "\mathbf{F}^{n}(\phi')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}^{n}(M) \arrow[r, "\mathbf{F}^{n}(f)"] \arrow[d, "\mathbf{F}^{n}(\phi)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}^{n}(M'') \arrow[r, "\partial^{n}_{\mathfrak{F},M}"] \arrow[d, "\mathbf{F}^{n}(\phi'')"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}^{n+1}(M') \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{F}^{n+1}(\phi')"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}^{n}(L') \arrow[r, "\mathbf{F}^{n}(g')"'] & \mathbf{F}^{n}(L) \arrow[r, "\mathbf{F}^{n}(g)"'] & \mathbf{F}^{n}(L'') \arrow[r, "\partial^{n}_{\mathfrak{F},L}"'] & \mathbf{F}^{n+1}(L') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

το έχον τις μακρές ακριβείς ακολουθίες ως γραμμές (με τους $\partial^{n}_{\mathfrak{F},M}$, $\partial^{n}_{\mathfrak{F},L}$ ως συνδετικούς ομομορφισμούς) είναι ωσαύτως μεταθετικό.

A.3.21 Ορισμός. Έστω ότι $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο ανιούσες συνδεδεμένες ακολουθίες συναλλοίωτων συναρτητών. Μια οικογένεια $\mathfrak{h} = \{h^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ φυσικών μετασχηματισμών $h^n : \mathbf{F}^n \longrightarrow \mathbf{G}^n$ ονομάζεται **φυσικός μετασχηματισμός Α.Σ.Α.Σ.Σ. από την $\mathfrak{F}$ στην** $\mathfrak{G}$ (συμβολιζόμενος, εν συντομία, ως $\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$) όταν μέσω οιασδήποτε βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathbf{F}^n(M') \arrow[r, "\mathbf{F}^n(f)"] \arrow[d, "h^n(M')"'] & \mathbf{F}^n(M) \arrow[r, "\mathbf{F}^n(g)"] \arrow[d, "\circlearrowleft h^n(M)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}^n(M'') \arrow[r, "\partial^n_{\mathfrak{F},M}"] \arrow[d, "h^n(M'')\circlearrowleft"] & \mathbf{F}^{n+1}(M') \arrow[r] \arrow[d, "h^{n+1}(M')"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathbf{G}^n(M') \arrow[r, "\mathbf{G}^n(f)"'] & \mathbf{G}^n(M) \arrow[r, "\mathbf{G}^n(g)"'] & \mathbf{G}^n(M'') \arrow[r, "\partial^n_{\mathfrak{G},M}"'] & \mathbf{G}^{n+1}(M') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

όλα τα μέλη τής οικογενείας ομομορφισμών R-μοδίων

$$\{h^n(M) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}^n(M), \mathbf{G}^n(M)) \mid M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

είναι ισομορφισμοί, τότε ο $\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ καλείται **φυσική ισοδυναμία Α.Σ.Α.Σ.Σ.** μεταξύ των $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$, και οι $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$ ονομάζονται **φυσικώς ισοδύναμες**. (Εν τοιαύτη περιπτώσει χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\mathfrak{F} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathfrak{G}$ για να δηλοί την ύπαρξη μιας φυσικής ισοδυναμίας μεταξύ των $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$.)

Α.3.22 Ορισμός. Μια οικογένεια $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ προσθετικών, *ανταλλοίωτων* συναρτητών $\mathbf{F}^n : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ καλείται **ανιούσα συνδεδεμένη ακολουθία ανταλλοίωτων συναρτητών** (εν συντομία, "**Α.Σ.Α.Α.Σ.**") όταν ισχύουν τα κάτωθι:
(i) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\} \tag{A.22}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων υφίσταται ένας ομομορφισμός

$$\partial^n_{\mathfrak{F},M} : \mathbf{F}^n(M') \longrightarrow \mathbf{F}^{n+1}(M'')$$

(ο λεγόμενος *συνδετικός ομομορφισμός* για την (A.22) ως προς την $\mathfrak{F}$), μέσω τού οποίου επάγεται μια *μακρά ακριβής ακολουθία*

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{F}^{n-1}(M'') \xrightarrow{\mathbf{F}^{n-1}(g)} \mathbf{F}^{n-1}(M) \xrightarrow{\mathbf{F}^{n-1}(f)} \mathbf{F}^{n-1}(M') \xrightarrow{\partial^{n-1}_{\mathfrak{F},M}} \mathbf{F}^n(M'') \xrightarrow{\mathbf{F}^n(g)} \mathbf{F}^n(M) \xrightarrow{\mathbf{F}^n(f)} \mathbf{F}^n(M') \xrightarrow{\partial^n_{\mathfrak{F},M}} \mathbf{F}^{n+1}(M'') \xrightarrow{\mathbf{F}^{n+1}(g)} \cdots$$

(ii) Για κάθε μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\phi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "g'"'] & L \arrow[r, "g"'] & L'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, το επαγόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}^n(L'') \arrow[r, "\mathbf{F}^n(g)"] \arrow[d, "\mathbf{F}^n(\phi'')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}^n(L) \arrow[r, "\mathbf{F}^n(g')"] \arrow[d, "\mathbf{F}^n(\phi)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}^n(L') \arrow[r, "\partial^n_{\mathfrak{F},L}"] \arrow[d, "\mathbf{F}^n(\phi')"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}^{n+1}(L'') \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{F}^{n+1}(\phi'')"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}^n(M'') \arrow[r, "\mathbf{F}^n(f)"'] & \mathbf{F}^n(M) \arrow[r, "\mathbf{F}^n(f')"'] & \mathbf{F}^n(M') \arrow[r, "\partial^n_{\mathfrak{F},M}"'] & \mathbf{F}^{n+1}(M'') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

το έχον τις μακρές ακριβείς ακολουθίες ως γραμμές (με τους $\partial^n_{\mathfrak{F},M}$, $\partial^n_{\mathfrak{F},L}$ ως συνδετικούς ομομορφισμούς) είναι ωσαύτως μεταθετικό.

Α.3.23 Ορισμός. Έστω ότι $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο ανιούσες συνδεδεμένες ακολουθίες ανταλλοίωτων συναρτητών. Μια οικογένεια $\mathfrak{h} = \{h^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ φυσικών μετασχηματισμών $h^n : \mathbf{F}^n \longrightarrow \mathbf{G}^n$ ονομάζεται **φυσικός μετασχηματισμός Α.Σ.Α.Α.Σ. από την $\mathfrak{F}$ στην** $\mathfrak{G}$ (συμβολιζόμενος, εν συντομία, ως $\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$) όταν μέσω οιασδήποτε βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται ένα μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}^n(M'') \arrow[r, "\mathbf{F}^n(g)"] \arrow[d, "h^n(M'')"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}^n(M) \arrow[r, "\mathbf{F}^n(f)"] \arrow[d, "h^n(M)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}^n(M') \arrow[r, "\partial^n_{\mathfrak{F},M}"] \arrow[d, "h^n(M')"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}^{n+1}(M'') \arrow[r] \arrow[d, "h^{n+1}(M'')"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{G}^n(M'') \arrow[r, "\mathbf{G}^n(g)"'] & \mathbf{G}^n(M) \arrow[r, "\mathbf{G}^n(f)"'] & \mathbf{G}^n(M') \arrow[r, "\partial^n_{\mathfrak{G},M}"'] & \mathbf{G}^{n+1}(M'') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

όλα τα μέλη τής οικογενείας ομομορφισμών R-μοδίων

$$\{h^n(M) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}^n(M), \mathbf{G}^n(M)) \mid M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

είναι ισομορφισμοί, τότε ο $\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ καλείται **φυσική ισοδυναμία Α.Σ.Α.Α.Σ.** μεταξύ των $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$, και οι $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$ ονομάζονται **φυσικώς ισοδύναμες**. (Εν τοιαύτη περιπτώσει χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\mathfrak{F} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathfrak{G}$ για να δηλοί την ύπαρξη μιας φυσικής ισοδυναμίας μεταξύ των $\mathfrak{F}$ και $\mathfrak{G}$.)

A.3.24 Θεώρημα. *Υποθέτουμε ότι* $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *και* $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο* Α.Σ.Α.Σ.Σ. (*και αντιστοίχως, δυο* Α.Σ.Α.Α.Σ.), *οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες*:

(i) *Για όλους τους ακεραίους* $n < 0$ *τόσον ο* $\mathbf{F}^n$ *όσον και ο* $\mathbf{G}^n$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής.*

(ii) *Για κάθε εμβολικό* R*-μόδιο* Q (*και αντιστοίχως, για κάθε προβολικό* R*-μόδιο* P) *και κάθε ακέραιο* $n > 0$ *ισχύει* $\mathbf{G}^n(Q) \cong \{0\}$ (*και αντιστοίχως,* $\mathbf{G}^n(P) \cong \{0\}$).

Τότε για κάθε φυσικό μετασχηματισμό $h' : \mathbf{F}^0 \longrightarrow \mathbf{G}^0$ *υφίσταται ένας και μόνον φυσικός μετασχηματισμός* Α.Σ.Α.Σ.Σ. (*και αντιστοίχως, ένας και μόνον φυσικός μετασχηματισμός* Α.Σ.Α.Α.Σ.) $\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ *με* $h^0 = h'$. *Με άλλα λόγια, κάθε φυσικός μετασχηματισμός* $h' : \mathbf{F}^0 \longrightarrow \mathbf{G}^0$ *επιδέχεται μία και μόνον επέκταση σε έναν φυσικό μετασχηματισμό* Α.Σ.Α.Σ.Σ. (*και αντιστοίχως, σε έναν φυσικό μετασχηματισμό* Α.Σ.Α.Α.Σ.) $\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$.

Απόδειξη. Παρόμοια εκείνης τού θεωρήματος A.3.18. □

A.3.25 Πόρισμα. *Υποθέτουμε ότι* $\mathfrak{F} = \{\mathbf{F}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *και* $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο* Α.Σ.Α.Σ.Σ. (*και αντιστοίχως, δυο* Α.Σ.Α.Α.Σ.), *οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες*:

(i) *Για όλους τους ακεραίους* $n < 0$ *τόσον ο* $\mathbf{F}^n$ *όσον και ο* $\mathbf{G}^n$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής.*

(ii) *Για κάθε εμβολικό* R*-μόδιο* Q (*και αντιστοίχως, για κάθε προβολικό* R*-μόδιο* P) *και κάθε ακέραιο* $n > 0$ *ισχύει* $\mathbf{F}^n(Q) \cong \{0\} \cong \mathbf{G}^n(Q)$ (*και αντιστοίχως,* $\mathbf{F}^n(P) \cong \{0\} \cong \mathbf{G}^n(P)$).

(iii) *Υπάρχει μια φυσική ισοδυναμία* $h^0 : \mathbf{F}^0 \longrightarrow \mathbf{G}^0$.

Τότε υφίσταται ακριβώς μία φυσική ισοδυναμία Α.Σ.Α.Σ.Σ. (*και αντιστοίχως, ακριβώς μία φυσική ισοδυναμία* Α.Σ.Α.Α.Σ.) $\mathfrak{h} : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{G}$ *μεταξύ των* $\mathfrak{F}$ *και* $\mathfrak{G}$ *επεκτείνουσα τον συναρτητή* h^0.

Απόδειξη. Παρόμοια εκείνης τού πορίσματος A.3.19. □

A.3.26 Θεώρημα. *Για οιονδήποτε προσθετικό συναρτητή* $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ *ισχύουν τα ακόλουθα*:

(i) *Εάν ο* $\mathbf{F}$ *είναι συναλλοίωτος, τότε η οικογένεια* $\{\mathscr{L}_n\mathbf{F}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι μια* Κ.Σ.Α.Σ.Σ. *και η οικογένεια* $\{\mathscr{R}^n\mathbf{F}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι μια* Α.Σ.Α.Σ.Σ.

(ii) *Εάν ο* $\mathbf{F}$ *είναι ανταλλοίωτος, τότε η οικογένεια* $\{\mathscr{L}_n\mathbf{F}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι μια* Κ.Σ.Α.Α.Σ. *και η οικογένεια* $\{\mathscr{R}^n\mathbf{F}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι μια* Α.Σ.Α.Α.Σ.

Απόδειξη. Βλ. Vermani [27], Theorems 5.3.13 & 5.3.15 (για το (i)) και Theorems 5.3.16 & 5.3.14 (για το (ii)), αντιστοίχως, σελ. 137-142, για την απόδειξη τής υπάρξεως των μακρών ακριβών ακολουθιών[21], και Osborne [34], §6.4, σελ. 140-147, για τη «φυσικότητα» των συνδετικών ομομορφισμών αυτών. □

[21] Έχουμε ήδη δώσει την απόδειξη υπάρξεως μακρών ακριβών ακολουθιών στις *ειδικές περιπτώσεις* των Ext- και Tor-συναρτητών. (Βλ. θεωρήματα 5.2.9, 5.2.10, 5.3.9 και 5.3.10.) Η απόδειξη στις γενικές περιπτώσεις είναι *παρόμοια*.

A.3.27 Θεώρημα («Αξιωματικός χαρακτηρισμός» των παράγωγων συναρτητών). *Έστω* $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ *ένας προσθετικός συναρτητής.*

(a) *Έστω ότι ο* $\mathbf{F}$ *είναι συναλλοίωτος και εκ δεξιών ακριβής, και ότι* $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι μια* Κ.Σ.Α.Σ.Σ. *έχουσα τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Για όλους τους ακεραίους* $n < 0$ *ο* $\mathbf{G}_n$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής.*

(ii) *Για οιονδήποτε προβολικό* R*-μόδιο* P *ισχύει* $\mathbf{G}_n(P) \cong \{0\}$ *για κάθε* $n \neq 0$.

(iii) $\mathbf{G}_0 \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{F}$.

Τότε $\mathfrak{G} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \{\mathscr{L}_n\mathbf{F}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

(b) *Έστω ότι ο* $\mathbf{F}$ *είναι συναλλοίωτος και εξ αριστερών ακριβής, και ότι* $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι μια* Α.Σ.Α.Σ.Σ. *έχουσα τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Για όλους τους ακεραίους* $n < 0$ *ο* $\mathbf{G}^n$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής.*

(ii) *Για οιονδήποτε εμβολικό* R*-μόδιο* Q *ισχύει* $\mathbf{G}^n(Q) \cong \{0\}$ *για κάθε* $n \neq 0$.

(iii) $\mathbf{G}^0 \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{F}$.

Τότε $\mathfrak{G} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \{\mathscr{R}^n\mathbf{F}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

(c) *Έστω ότι ο* $\mathbf{F}$ *είναι ανταλλοίωτος και εκ δεξιών ακριβής, και ότι* $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι μια* Κ.Σ.Α.Α.Σ. *έχουσα τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Για όλους τους ακεραίους* $n < 0$ *ο* $\mathbf{G}_n$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής.*

(ii) *Για οιονδήποτε εμβολικό* R*-μόδιο* Q *ισχύει* $\mathbf{G}_n(Q) \cong \{0\}$ *για κάθε* $n \neq 0$.

(iii) $\mathbf{G}_0 \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{F}$.

Τότε $\mathfrak{G} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \{\mathscr{L}_n\mathbf{F}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

(d) *Έστω ότι ο* $\mathbf{F}$ *είναι ανταλλοίωτος και εξ αριστερών ακριβής, και ότι* $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι μια* Α.Σ.Α.Α.Σ. *έχουσα τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Για όλους τους ακεραίους* $n < 0$ *ο* $\mathbf{G}^n$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής.*

(ii) *Για οιονδήποτε προβολικό* R*-μόδιο* P *ισχύει* $\mathbf{G}^n(P) \cong \{0\}$ *για κάθε* $n \neq 0$.

(iii) $\mathbf{G}^0 \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{F}$.

Τότε $\mathfrak{G} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \{\mathscr{R}^n\mathbf{F}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Απόδειξη. (a) Το ότι η οικογένεια $\{\mathscr{L}_n\mathbf{F}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μια Κ.Σ.Α.Σ.Σ. το γνωρίζουμε από το (i) τού θεωρήματος A.3.26. Το ότι η οικογένεια $\{\mathscr{L}_n\mathbf{F}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ έχει τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) (εάν στη θέση τής $\mathfrak{G}$ τοποθετήσουμε αυτήν) το γνωρίζουμε από τις προτάσεις A.3.12 και A.3.13 και από το θεώρημα A.3.4. Οι φυσικές ισοδυναμίες $\mathbf{G}_0 \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{F}$ και $\mathbf{F} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathscr{L}_0\mathbf{F}$ δίδουν συντιθέμενες μια φυσική ισοδυναμία $\mathbf{G}_0 \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathscr{L}_0\mathbf{F}$. Σύμφωνα με το πόρισμα A.3.19 υφίσταται ακριβώς μία φυσική ισοδυναμία Κ.Σ.Α.Σ.Σ. μεταξύ των $\mathfrak{G}$ και $\{\mathscr{L}_n\mathbf{F}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ επεκτείνουσα την τελευταία. (Οι αποδείξεις των (b), (c) και (d) είναι παρόμοιες.) □

A.3.28 Λήμμα. *Έστω* $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ *ένας προσθετικός συναρτητής. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν ο* $\mathbf{F}$ *είναι συναλλοίωτος και ο* $\mathscr{L}_n\mathbf{F}$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής για κάποιον θετικό ακέραιο* n*, τότε και ο* $\mathscr{L}_m\mathbf{F}$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής για κάθε ακέραιο* $m \geqslant n$.

(ii) *Εάν ο* $\mathbf{F}$ *είναι ανταλλοίωτος και ο* $\mathscr{R}^n\mathbf{F}$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής για κάποιον θετικό ακέραιο* n*, τότε και ο* $\mathscr{R}^m\mathbf{F}$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής για κάθε ακέραιο* $m \geqslant n$.

Απόδειξη. (i) Αρκεί να αποδειχθεί ότι ο $\mathscr{L}_{n+1}\mathbf{F}$ είναι ο μηδενικός συναρτητής. Εάν M είναι τυχών R-μόδιος, τότε υπάρχει (κατά το πόρισμα 2.5.23) κάποιος *ελεύθερος* R-μόδιος L, καθώς και ένας υπομόδιος W τού L, ούτως ώστε να ισχύει $M \cong L/W$. Λόγω αυτού δημιουργείται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow W \overset{\iota}{\hookrightarrow} L \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}. \tag{A.23}$$

Επειδή η οικογένεια $\mathfrak{F} = \{\mathscr{L}_n\mathbf{F}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μια Κ.Σ.Α.Σ.Σ., υφίσταται ένας ομομορφισμός

$$\partial_n^{\mathfrak{F}} : \mathscr{L}_n\mathbf{F}(M) \longrightarrow \mathscr{L}_{n-1}\mathbf{F}(W),$$

μέσω τού οποίου επάγεται η *μακρά ακριβής ακολουθία*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathscr{L}_{n+1}\mathbf{F}(W) \arrow[r, "\mathscr{L}_{n+1}\mathbf{F}(\iota)"] & \mathscr{L}_{n+1}\mathbf{F}(L) \arrow[r, "\mathscr{L}_{n+1}\mathbf{F}(\pi)"] & \mathbf{F}_{n+1}(M) \arrow[dll, "\partial_{n+1}^{\mathfrak{F}}" description, rounded corners] \\
& \mathscr{L}_n\mathbf{F}(W) \arrow[r, "\mathscr{L}_n\mathbf{F}(\iota)"] & \mathscr{L}_n\mathbf{F}(L) \arrow[r, "\mathscr{L}_n\mathbf{F}(\pi)"] & \mathscr{L}_n\mathbf{F}(M) \arrow[dll, "\partial_n^{\mathfrak{F}}" description, rounded corners] \\
& \mathscr{L}_{n-1}\mathbf{F}(W) \arrow[r, "\mathscr{L}_{n-1}\mathbf{F}(\iota)"] & \cdots &
\end{tikzcd}$$

Εξ υποθέσεως, $\mathscr{L}_n\mathbf{F}(W) \cong \{0\}$. Επιπροσθέτως, $\mathscr{L}_{n+1}\mathbf{F}(L) \cong \{0\}$, διότι ο L (ως ελεύθερος R-μόδιος) είναι προβολικός. (Βλ. προτάσεις 4.2.4 και A.3.13.) Επομένως, η ακρίβεια τής ανωτέρω δίδει

$$\mathscr{L}_{n+1}\mathbf{F}(M) = \mathrm{Ker}(\partial_{n+1}^{\mathfrak{F}}) = \mathrm{Im}(\mathscr{L}_{n+1}\mathbf{F}(\pi)) \cong \{0\}.$$

(ii) Η απόδειξή του είναι παρόμοια. □

A.3.29 Πρόταση. *Έστω* $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ *ένας προσθετικός συναρτητής, όπου* R *μια Π.Κ.Ι. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν ο* $\mathbf{F}$ *είναι συναλλοίωτος, τότε ο* $\mathscr{L}_n\mathbf{F}$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής για κάθε* $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1\}$.

(ii) *Εάν ο* $\mathbf{F}$ *είναι ανταλλοίωτος, τότε ο* $\mathscr{R}^n\mathbf{F}$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής για κάθε* $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1\}$.

Αποδειξη. (i) Δυνάμει τής προτάσεως A.3.12 ο $\mathscr{L}_n\mathbf{F}$ είναι ο μηδενικός συναρτητής για κάθε ακέραιο αριθμό $n<0$. Άρα *αρκεί* (ένεκα τού λήμματος A.3.28) να δειχθεί ότι *και* ο $\mathscr{L}_2\mathbf{F}$ είναι ο μηδενικός συναρτητής. Εάν M είναι τυχών R-μόδιος, τότε διευρύνοντας την (A.23) σε μια (εκ δεξιών και εξ αριστερών επάπειρον εκτεινόμενη) ακολουθία υπό τη μορφή

$$\cdots \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} W \overset{\iota}{\hookrightarrow} L \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} \cdots \tag{A.24}$$

παρατηρούμε ότι η (A.24) είναι η ακριβής ακολουθία η αντιστοιχούσα στον ελεύθερο[22] (και, κατ' επέκταση, λόγω τής προτάσεως 4.2.4, προβολικό) κερματισμό $(\mathbf{P}_\bullet,\pi)$ τού M, όπου

$$\mathbf{P}_\bullet : \cdots \overset{d_3=0}{\longrightarrow} P_2=\{0\} \overset{d_2=0}{\longrightarrow} P_1=W \hookrightarrow P_0=L \overset{d_0=0}{\longrightarrow} P_{-1}=\{0\} \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} \cdots$$

και

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet) : \cdots \overset{\mathbf{F}(d_3)=0}{\longrightarrow} \mathbf{F}(P_2)=\{0\} \overset{\mathbf{F}(d_2)=0}{\longrightarrow} \mathbf{F}(W) \overset{\mathbf{F}(d_1)}{\longrightarrow} \mathbf{F}(L) \overset{\mathbf{F}(d_0)=0}{\longrightarrow} \{0\} \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} \cdots$$

Επειδή $d_2=d_3=0$, έχουμε προδήλως $\mathbf{F}(d_2)=\mathbf{F}(d_3)=0$ και

$$\mathscr{L}_2\mathbf{F}(M) := H_2(\mathbf{F}(\mathbf{P}_\bullet)) := \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(d_2))/\,\mathrm{Im}(\mathbf{F}(d_3)) \cong \{0\}.$$

(ii) Η απόδειξή του είναι παρόμοια. □

▸ **Ext και Tor ως διπλοί συναρτητές**. Για οιονδήποτε παγιωμένο R-μόδιο N θεωρούμε εν πρώτοις τον προσθετικό, ανταλλοίωτο, εξ αριστερών ακριβή συναρτητή

$$\mathrm{Hom}_R(-,N)\ :\mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

(βλ. A.2.4 (iv) και A.2.7 (ii)), καθώς και την Α.Σ.Α.Α.Σ. $\{\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,N))\}_{n\in\mathbb{Z}}$ των εκ δεξιών παράγωγων συναρτητών αυτού. (Βλ. A.3.26 (ii).)

A.3.30 Ορισμός. Για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ ορίζουμε τον διπλό συναρτητή

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{Ext}^n_R(-,-)\ :\mathfrak{Mod}_R\times\mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,\\ \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R\times\mathfrak{Mod}_R)\ni(M,N)\longmapsto \mathrm{Ext}^n_R(M,N)\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),\\ \mathrm{Hom}_R(M',M)\times\mathrm{Hom}_R(N,N')\ni(\varphi,\psi)\longmapsto \mathrm{Ext}^n_R(\varphi,\psi)\in\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}^n_R(M,N),\mathrm{Ext}^n_R(M',N')),\end{gathered}}$$

θέτοντας αφ' ενός μεν[23]

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n_R(M,N) := \mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,N))(M),} \tag{A.25}$$

αφ' ετέρου δε

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n_R(\varphi,\psi) := h^n(M')\circ(\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,N))(\varphi)),} \tag{A.26}$$

[22] Επειδή ο R είναι εξ υποθέσεως Π.Κ.Ι., ο W, όντας υπομόδιος τού ελευθέρου R-μοδίου L, είναι ελεύθερος. (Βλ. θεώρημα 2.5.47.)

όπου

$$h^0 := t_{N'} \circ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_-, \psi) \circ t_N^{-1} : \mathscr{R}^0(\mathrm{Hom}_R(-,N)) \longrightarrow \mathscr{R}^0(\mathrm{Hom}_R(-,N')),$$

με

$$t_N : \mathrm{Hom}_R(-,N) \longrightarrow \mathscr{R}^0(\mathrm{Hom}_R(-,N)),$$

και

$$t_{N'} : \mathrm{Hom}_R(-,N') \longrightarrow \mathscr{R}^0(\mathrm{Hom}_R(-,N'))$$

τις φυσικές ισοδυναμίες τις κατασκευαζόμενες μέσω τού θεωρήματος Α.3.8 και

$$\mathfrak{h} = \{h^n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \{\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,N))\}_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,N'))\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

τη μοναδική (σύμφωνα με το θεώρημα[24] Α.3.24) επέκταση τού φυσικού μετασχηματισμού h^0 σε έναν φυσικό μετασχηματισμό Α.Σ.Α.Α.Σ., ο οποίος καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^n_R(M,N) \arrow[d, equal] & & \mathrm{Ext}^n_R(M,N') \arrow[d, equal] \\
\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,N))(M) \arrow[rr, "h^n(M)\,=\,\mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{id}_M,\psi)"] \arrow[d, "\mathrm{Ext}^n_R(\varphi,\mathrm{id}_N)"'] \arrow[drr, "\mathrm{Ext}^n_R(\varphi,\psi)" description] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft" near start] & & \mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,N'))(M) \arrow[d, "\mathrm{Ext}^n_R(\varphi,\mathrm{id}_{N'})"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright" near start] \\
\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,N))(M') \arrow[rr, "h^n(M')\,=\,\mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{id}_{M'},\psi)"'] \arrow[d, equal] & & \mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,N'))(M') \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Ext}^n_R(M',N) & & \mathrm{Ext}^n_R(M',N')
\end{tikzcd}$$

Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι ο $\mathrm{Ext}^n_R(-,-)$ είναι *όντως* διπλός συναρτητής, αναλλοίωτος ως προς την πρώτη και συναλλοίωτος ως προς τη δεύτερη μεταβλητή (πρβλ. εδ. Α.2.4 (viii)), και ότι τα n-οστά γινόμενα επεκτάσεως (Α.25), (Α.26) των M και N, και των φ και ψ, αντιστοίχως, μπορούν να ταυτισθούν με εκείνα που έχουν εισαχθεί στους ορισμούς 5.2.4 και 5.2.6 τού κυρίως κειμένου. (Βλ. προτάσεις 5.2.7 και 5.2.8.)

Α.3.31 Πόρισμα («Αξιωματικός χαρακτηρισμός» τού $\mathbf{Ext}^n_R(-,N)$).
Έστω $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ μια Α.Σ.Α.Α.Σ. έχουσα τις εξής ιδιότητες:

(i) *Για όλους τους ακεραίους $n < 0$ ο $\mathbf{G}^n$ είναι ο μηδενικός συναρτητής.*

(ii) *Για οιονδήποτε προβολικό R-μόδιο P ισχύει $\mathbf{G}^n(P) \cong \{0\}$ για κάθε $n \neq 0$.*

[23] Από τον ορισμό (Α.25) έπεται ότι $\mathrm{Ext}^n_R(-,N) = \mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,N))$.

[24] Για το ότι οι ιδιότητες (i) και (ii) (οι περιλαμβανόμενες στη διατύπωση τού θεωρήματος Α.3.24) ικανοποιούνται από τις Α.Σ.Α.Α.Σ. $\{\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,N))\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\{\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(-,N'))\}_{n\in\mathbb{Z}}$ βλ. προτάσεις Α.3.12 και Α.3.13.

(iii) $\mathbf{G}^0 \underset{\varphi.\iota.}{\cong} \mathscr{R}^0(\mathrm{Hom}_R(-,N))$.

Τότε $\mathfrak{G} \underset{\varphi.\iota.}{\cong} \{\mathrm{Ext}^n_R(-,N)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Απόδειξη. Αρκεί να γίνει κατάλληλη εφαρμογή τού πορίσματος[25] A.3.25. □

Εν συνεχεία, για οιονδήποτε παγιωμένο R-μόδιο M θεωρούμε τον προσθετικό, συναλλοίωτο, εξ αριστερών ακριβή συναρτητή $\mathrm{Hom}_R(M,-) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ (βλ. A.2.4 (iv) και A.2.7 (i)), καθώς και την Α.Σ.Α.Σ.Σ. $\{\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M,-))\}_{n\in\mathbb{Z}}$ των εκ δεξιών παράγωγων συναρτητών αυτού. (Βλ. A.3.26 (i).)

A.3.32 Ορισμός. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον διπλό συναρτητή

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(-,-) : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,\\ \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R) \ni (M,N) \longmapsto \overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),\\ \mathrm{Hom}_R(M',M)\times \mathrm{Hom}_R(N,N') \ni (\varphi,\psi) \longmapsto \overline{\mathrm{Ext}}^n_R(\varphi,\psi) \in \mathrm{Hom}_R(\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N),\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M',N')),\end{gathered}}$$

θέτοντας αφ' ενός μεν[26]

$$\boxed{\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N) := \mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M,-))(N),} \tag{A.27}$$

αφ' ετέρου δε

$$\boxed{\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(\varphi,\psi) := h^n(N') \circ (\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M,-))(\psi)),} \tag{A.28}$$

όπου

$$h^0 := t_{M'} \circ \mathrm{Hom}_R(\varphi, \mathrm{id}_-) \circ t_M^{-1} : \mathscr{R}^0(\mathrm{Hom}_R(M,-)) \longrightarrow \mathscr{R}^0(\mathrm{Hom}_R(M',-)),$$

με

$$t_M : \mathrm{Hom}_R(M,-) \longrightarrow \mathscr{R}^0(\mathrm{Hom}_R(M,-))$$

και

$$t_{M'} : \mathrm{Hom}_R(M',-) \longrightarrow \mathscr{R}^0(\mathrm{Hom}_R(M',-))$$

τις φυσικές ισοδυναμίες τις κατασκευαζόμενες μέσω τού θεωρήματος A.3.6 και

$$\mathfrak{h} = \{h^n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \{\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M,-))\}_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M',-))\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

τη μοναδική (σύμφωνα με το θεώρημα[27] A.3.24) επέκταση τού φυσικού μετασχηματισμού h^0 σε έναν φυσικό μετασχηματισμό Α.Σ.Α.Σ.Σ., ο οποίος καθιστά το

[25] Το (i) τού πορίσματος A.3.25 για τις οικογένειες $\mathfrak{F} = \{\mathrm{Ext}^n_R(-,N)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ισχύει ένεκα των προϋποθέσεών μας και των προαναφερθέντων στα εδάφια 5.2.4 και A.3.12, το (ii) (για την $\mathfrak{F}$) ένεκα τού θεωρήματος 5.2.11, και το (iii) ένεκα τής εξ αριστερών ακριβείας τού συναρτητή $\mathrm{Hom}_R(-,N)$, τού θεωρήματος A.3.8 και τού ορισμού (A.25).

ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N) \arrow[d, equal] & & \overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M',N) \arrow[d, equal] \\
\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M,-))(N) \arrow[rr, "h^n(N)\,=\,\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(\varphi,\mathrm{id}_N)"] \arrow[d, "\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(\mathrm{id}_M,\psi)"'] \arrow[drr, "\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(\varphi,\psi)" description] & & \mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M',-))(N) \arrow[d, "\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(\mathrm{id}_{M'},\psi)"] \\
\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M,-))(N') \arrow[rr, "h^n(N')\,=\,\overline{\mathrm{Ext}}_R(\varphi,\mathrm{id}_{N'})"'] \arrow[d, equal] & & \mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M',-))(N') \arrow[d, equal] \\
\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,N') & & \overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M',N')
\end{tikzcd}$$

Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι ο $\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(-,-)$ είναι *όντως* διπλός συναρτητής, αναλλοίωτος ως προς την πρώτη και συναλλοίωτος ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, και ότι τα n-οστά γινόμενα επεκτάσεως (A.27), (A.28) των M και N, και των φ και ψ, αντιστοίχως, μπορούν να ταυτισθούν με εκείνα τού ορισμού τού εδ. 5.2.22 και τής σημειώσεως 5.2.23 τού κυρίως κειμένου.

A.3.33 Πόρισμα («Αξιωματικός χαρακτηρισμός» τού $\overline{\mathbf{Ext}}^n_R(M,-)$).
Έστω $\mathfrak{G}=\{\mathbf{G}^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *μια* Α.Σ.Α.Σ.Σ. *έχουσα τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Για όλους τους ακεραίους* $n<0$ *ο* $\mathbf{G}^n$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής.*

(ii) *Για οιονδήποτε εμβολικό* R*-μόδιο* Q *ισχύει* $\mathbf{G}^n(Q)\cong\{0\}$ *για κάθε* $n\neq 0$.

(iii) $\mathbf{G}^0\underset{\text{φ.ι.}}{\cong}\mathscr{R}^0(\mathrm{Hom}_R(M,-))$.

Τότε $\mathfrak{G}\underset{\text{φ.ι.}}{\cong}\{\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M,-)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Αποδειξη. Ανάλογη εκείνης τού πορίσματος A.3.31. □

Λόγω των θεωρημάτων 5.2.24 και A.3.34 μπορεί κανείς να χρησιμοποιεί (χωρίς βλάβη τής γενικότητας, για τον *διπλό* Ext-συναρτητή) τον ορισμό A.3.30 αντί τού ορισμού A.3.32.

A.3.34 Θεώρημα. $\mathrm{Ext}^n_R(-,-)\underset{\text{φ.ι.}}{\cong}\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(-,-),\ \forall n\in\mathbb{N}_0.$

Αποδειξη. Βλ. Hilton & Stammbach [32], Proposition IV.8.1, σελ. 144-145. □

Τώρα για οιονδήποτε παγιωμένο R-μόδιο N θεωρούμε τον προσθετικό, συναλλοίωτο, εκ δεξιών ακριβή συναρτητή $-\otimes_R N\ :\mathfrak{Mod}_R\rightsquigarrow\mathfrak{Mod}_R$ (βλ. A.2.4 (v) και A.2.7 (iii)), καθώς και την Κ.Σ.Α.Σ.Σ. $\{\mathscr{L}_n(-\otimes_R N)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ των εξ αριστερών παράγωγων

[26] Από τον ορισμό (A.27) έπεται ότι $\mathrm{Ext}^n_R(M,-)=\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M,-))$.

[27] Για το ότι οι ιδιότητες (i) και (ii) (οι περιλαμβανόμενες στη διατύπωση τού θεωρήματος A.3.24) ικανοποιούνται από τις Α.Σ.Α.Α.Σ. $\{\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M,-))\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\{\mathscr{R}^n(\mathrm{Hom}_R(M',-))\}_{n\in\mathbb{Z}}$ βλ. προτάσεις A.3.12 και A.3.13.

συναρτητών αυτού. (Βλ. A.3.26 (i).)

A.3.35 Ορισμός. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον διπλό συναρτητή

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{Tor}_n^R(-,-) \ : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,\\ \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R) \ni (M,N) \longmapsto \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),\\ \mathrm{Hom}_R(M,M') \times \mathrm{Hom}_R(N,N') \ni (\varphi,\psi) \longmapsto \mathrm{Tor}_n^R(\varphi,\psi) \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_n^R(M,N),\mathrm{Tor}_n^R(M',N')),\end{gathered}}$$

θέτοντας αφ' ενός μεν[28]

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(M,N) := \mathscr{L}_n(- \otimes_R N)(M),} \tag{A.29}$$

αφ' ετέρου δε

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(\varphi,\psi) := h_n(M') \circ (\mathscr{L}_n(- \otimes_R N)(\varphi)),} \tag{A.30}$$

όπου

$$h_0 := t_{N'}^{-1} \circ (\mathrm{id}\_\overline{\otimes}\psi) \circ t_N : \mathscr{L}_0(- \otimes_R N) \longrightarrow \mathscr{L}_0(- \otimes_R N'),$$

με

$$t_N : \mathscr{L}_0(- \otimes_R N) \longrightarrow - \otimes_R N,\ t_{N'} : \mathscr{L}_0(- \otimes_R N') \longrightarrow - \otimes_R N'$$

τις φυσικές ισοδυναμίες τις κατασκευαζόμενες μέσω τού θεωρήματος A.3.4 και

$$\mathfrak{h} = \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \{\mathscr{L}_n(- \otimes_R N)\}_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{\mathscr{L}_n(- \otimes_R N')\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

τη μοναδική (σύμφωνα με το θεώρημα[29] A.3.18) επέκταση τού φυσικού μετασχηματισμού h_0 σε έναν φυσικό μετασχηματισμό Κ.Σ.Α.Σ.Σ., ο οποίος καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \arrow[d, equal] & \mathrm{Tor}_n^R(M,N') \arrow[d, equal] \\
\mathscr{L}_n(- \otimes_R N)(M) \arrow[r, "h_n(M) = \mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{id}_M,\psi)"] \arrow[d, "\mathrm{Tor}_n^R(\varphi,\mathrm{id}_N)"'] \arrow[dr, "\mathrm{Tor}_n^R(\varphi,\psi)" description] & \mathscr{L}_n(- \otimes_R N')(M) \arrow[d, "\mathrm{Tor}_n^R(\varphi,\mathrm{id}_{N'})"] \\
\mathscr{L}_n(- \otimes_R N)(M') \arrow[r, "h_n(M') = \mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{id}_{M'},\psi)"'] \arrow[d, equal] & \mathscr{L}_n(- \otimes_R N')(M') \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Tor}_n^R(M',N) & \mathrm{Tor}_n^R(M',N')
\end{tikzcd}$$

---

[28] Από τον ορισμό (A.29) έπεται ότι $\mathrm{Tor}_n^R(-,N) = \mathscr{L}_n(- \otimes_R N)$.

[29] Για το ότι οι ιδιότητες (i) και (ii) (οι περιλαμβανόμενες στη διατύπωση τού θεωρήματος A.3.18) ικανοποιούνται

Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι ο $\mathrm{Tor}_n^R(-,-)$ είναι *όντως* διπλός συναρτητής, συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές (πρβλ. εδ. A.2.4 (ix)), και ότι τα n-οστά γινόμενα στρέψεως (A.29), (A.30) των M και N, και των φ και ψ, αντιστοίχως, μπορούν να ταυτισθούν με εκείνα που έχουν εισαχθεί στους ορισμούς 5.3.4 και 5.3.6 τού κυρίως κειμένου. (Βλ. προτάσεις 5.3.7 και 5.3.8.)

A.3.36 Πόρισμα («Αξιωματικός χαρακτηρισμός» τού $\mathrm{Tor}_n^R(-,N)$).
Έστω $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *μια* Κ.Σ.Α.Σ.Σ. *έχουσα τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Για όλους τους ακεραίους* $n < 0$ *ο* $\mathbf{G}_n$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής.*

(ii) *Για οιονδήποτε προβολικό* R*-μόδιο* P *ισχύει* $\mathbf{G}_n(P) \cong \{0\}$ *για κάθε* $n \neq 0$.

(iii) $\mathbf{G}_0 \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} -\otimes_R N$.

Τότε $\mathfrak{G} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \{\mathrm{Tor}_n^R(-,N)\}_{n\in\mathbb{Z}}$

Απόδειξη. Αρκεί να γίνει κατάλληλη εφαρμογή τού πορίσματος[30] A.3.19. □

Εν συνεχεία, για οιονδήποτε παγιωμένο R-μόδιο M θεωρούμε τον προσθετικό, συναλλοίωτο, εκ δεξιών ακριβή συναρτητή $M\otimes_R - \ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ (βλ. A.2.4 (v) και A.2.7 (iii)), καθώς και την Κ.Σ.Α.Σ.Σ. $\{\mathscr{L}_n(M\otimes_R -)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ των εξ αριστερών παράγωγων συναρτητών αυτού. (Βλ. A.3.26 (i).)

A.3.37 Ορισμός. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον διπλό συναρτητή

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(-,-)\ :\mathfrak{Mod}_R\times\mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,\\ \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R\times\mathfrak{Mod}_R) \ni (M,N) \longmapsto \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,N) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),\\ \mathrm{Hom}_R(M,M')\times\mathrm{Hom}_R(N,N') \ni (\varphi,\psi) \longmapsto \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(\varphi,\psi) \in \mathrm{Hom}_R(\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,N),\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M',N')),\end{gathered}}$$

θέτοντας αφ' ενός μεν[31]

$$\boxed{\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,N) := \mathscr{L}_n(M\otimes_R -)(N),} \tag{A.31}$$

αφ' ετέρου δε

$$\boxed{\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(\varphi,\psi) := h_n(N')\circ(\mathscr{L}_n(M\otimes_R -)(\psi)),} \tag{A.32}$$

όπου $h_0 := t_{M'}^{-1}\circ(\varphi\overline{\otimes}\mathrm{id}_-)\circ t_M : \mathscr{L}_0(M\otimes_R -) \longrightarrow \mathscr{L}_0(M'\otimes_R -)$, με

$$t_M : \mathscr{L}_0(M\otimes_R -) \longrightarrow M\otimes_R -,\ t_{M'} : \mathscr{L}_0(M'\otimes_R -) \longrightarrow M'\otimes_R -$$

από τις Κ.Σ.Α.Σ.Σ. $\{\mathscr{L}_n(-\otimes_R N)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\{\mathscr{L}_n(-\otimes_R N')\}_{n\in\mathbb{Z}}$ βλ. προτάσεις A.3.12 και A.3.13.

[30] Το (i) τού πορίσματος A.3.19 για τις οικογένειες $\mathfrak{F} = \{\mathrm{Tor}_n^R(-,N)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ισχύει ένεκα των προϋποθέσεών μας και των προαναφερθέντων στα εδάφια 5.3.4 και A.3.12, το (ii) (για την $\mathfrak{F}$) ένεκα τού λήμματος 5.3.11, και το (iii) ένεκα τής εκ δεξιών ακριβείας τού συναρτητή $-\otimes_R N$, τού θεωρήματος A.3.4 και τού ορισμού (A.29).

τις φυσικές ισοδυναμίες τις κατασκευαζόμενες μέσω τού θεωρήματος A.3.4 και

$$\mathfrak{h} = \{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \{\mathscr{L}_n(M \otimes_R -)\}_{n\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{\mathscr{L}_n(M' \otimes_R -)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

τη μοναδική (σύμφωνα με το θεώρημα A.3.18) επέκταση τού φυσικού μετασχηματισμού h_0 σε έναν φυσικό μετασχηματισμό Κ.Σ.Α.Σ.Σ., ο οποίος καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,N) \arrow[d, equal] & & \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M',N) \arrow[d, equal] \\
\mathscr{L}_n(M \otimes_R -)(N) \arrow[rr, "h_n(N) = \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(\varphi, \mathrm{id}_N)"] \arrow[d, "\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(\mathrm{id}_M, \psi)"'] \arrow[dr, no head] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathscr{L}_n(M' \otimes_R -)(N) \arrow[d, "\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(\mathrm{id}_{M'}, \psi)"] \\
& \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(\varphi,\psi) \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dr] & \\
\mathscr{L}_n(M \otimes_R -)(N') \arrow[rr, "h_n(N') = \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(\varphi, \mathrm{id}_{N'})"'] \arrow[d, equal] & & \mathscr{L}_n(M' \otimes_R -)(N') \arrow[d, equal] \\
\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,N') & & \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M',N')
\end{tikzcd}$$

Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι ο $\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(-,-)$ είναι *όντως* διπλός συναρτητής, συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές, και ότι τα n-οστά γινόμενα στρέψεως (A.31), (A.32) των M και N, και των φ και ψ, αντιστοίχως, μπορούν να ταυτισθούν με εκείνα τού ορισμού τού εδ. 5.3.28 τού κυρίως κειμένου.

A.3.38 Πόρισμα («Αξιωματικός χαρακτηρισμός» τού $\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,-)$). *Έστω* $\mathfrak{G} = \{\mathbf{G}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *μια Κ.Σ.Α.Σ. έχουσα τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Για όλους τους ακεραίους* $n < 0$ *ο* $\mathbf{G}_n$ *είναι ο μηδενικός συναρτητής.*

(ii) *Για οιονδήποτε προβολικό* R*-μόδιο* P *ισχύει* $\mathbf{G}_n(P) \cong \{0\}$ *για κάθε* $n \neq 0$.

(iii) $\mathbf{G}_0 \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} M \otimes_R -$. *Τότε* $\mathfrak{G} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \{\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,-)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Απόδειξη. Ανάλογη εκείνης τού πορίσματος A.3.36. □

Λόγω των θεωρημάτων 5.3.29 και A.3.39 μπορεί κανείς να χρησιμοποιεί (χωρίς βλάβη τής γενικότητας, για τον *διπλό* Tor-συναρτητή) τον ορισμό A.3.35 αντί τού ορισμού A.3.37.

A.3.39 Θεώρημα. $\mathrm{Tor}_n^R(-,-) \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(-,-),\ \forall n \in \mathbb{N}_0.$

Απόδειξη. Πρβλ. Hilton & Stammbach [32], Ch. IV, §11, σελ. 160-162. □

[31] Από τον ορισμό (A.31) έπεται ότι $\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,-) = \mathscr{L}_n(M \otimes_R -)$.

A.4 ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΕΣ ΕΚΔΟΧΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ KÜNNETH

▸ **Το πρώτο πρόβλημα.** Δοθέντος ενός R-διγραμμικού συναρτητή

$$\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R, \tag{A.33}$$

συναλλοίωτου ως προς αμφότερες τις μεταβλητές, θεωρούμε την επέκτασή του

$$\mathbf{F} : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \tag{A.34}$$

(αποτελούσα έναν διπλό συναρτητή, συναλλοίωτο και προσθετικό ως προς αμφότερες τις μεταβλητές) και ορίζουμε για κάθε ζεύγος αλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}, \ \ \mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}},$$

το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet = (\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n, \mathfrak{d}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ όπως στο εδ. A.2.17. Επιπροσθέτως, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ συμβολίζουμε ως

$$Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \xhookrightarrow{j_n^{\mathbf{M}_\bullet}} M_n, \qquad Z_n(\mathbf{N}_\bullet) \xhookrightarrow{j_n^{\mathbf{N}_\bullet}} N_n,$$

$$B_n(\mathbf{M}_\bullet) \xhookrightarrow{\iota_n^{\mathbf{M}_\bullet}} Z_n(\mathbf{M}_\bullet), \qquad B_n(\mathbf{N}_\bullet) \xhookrightarrow{\iota_n^{\mathbf{N}_\bullet}} Z_n(\mathbf{N}_\bullet),$$

τις συνήθεις ενθέσεις, ως

$$Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{\pi_n^{\mathbf{M}_\bullet}} H_n(\mathbf{M}_\bullet), \qquad Z_n(\mathbf{N}_\bullet) \xrightarrow{\pi_n^{\mathbf{N}_\bullet}} H_n(\mathbf{N}_\bullet),$$

τους φυσικούς επιμορφισμούς και ως

$$M_n \xrightarrow{\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}} B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet), \qquad N_n \xrightarrow{\check{d}_n^{\mathbf{N}_\bullet}} B_{n-1}(\mathbf{N}_\bullet).$$

τους επιμορφισμούς τους δημιουργούμενους από τους συνοριακούς τελεστές των ανωτέρω αλυσωτών συμπλόκων ύστερα από περιορισμό τού πεδίου τιμών αυτών επί τής εικόνας τους. Ας σημειωθεί ότι σχηματίζονται δύο μεταθετικά διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} & M_{n-1} & \\ M_n \arrow[ur, "d_n^{\mathbf{M}_\bullet}"] \arrow[dr, two heads, "\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}"'] & & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[ul, hook', "j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}"'] \\ & B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[uu, hook, "j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}\circ\iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}"'] \arrow[ur, hook, "\iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & N_{n-1} & \\ N_n \arrow[ur, "d_n^{\mathbf{N}_\bullet}"] \arrow[dr, two heads, "\check{d}_n^{\mathbf{N}_\bullet}"'] & & Z_{n-1}(\mathbf{N}_\bullet) \arrow[ul, hook', "j_{n-1}^{\mathbf{N}_\bullet}"'] \\ & B_{n-1}(\mathbf{N}_\bullet) \arrow[uu, hook, "j_{n-1}^{\mathbf{N}_\bullet}\circ\iota_{n-1}^{\mathbf{N}_\bullet}"'] \arrow[ur, hook, "\iota_{n-1}^{\mathbf{N}_\bullet}"'] & \end{tikzcd}$$

Θέτουμε $j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} := (j_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} := (j_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} := (\iota_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\iota_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} := (\iota_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ κ.ο.κ., και θεωρούμε τα αλυσωτά σύμπλοκα $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$, $H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$ (όπως στο εδ. A.2.4 (vii)), τα υποσύμπλοκα $Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$, $B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ τού $\mathbf{M}_\bullet$ και $Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$, $B_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$ τού $\mathbf{N}_\bullet$ (τα καθοριζόμενα μέσω των κυκλημάτων και των συνόρων), καθώς και τα αλυσωτά σύμπλοκα

$$\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \ \text{ και } \ H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \tag{A.35}$$

(και τα αντίστοιχα υποσύμπλοκά τους) τα επαγόμενα μέσω τού συναρτητή $\mathbf{F}$.

• **Ερώτημα Α**. *Υφίσταται κάποια κομψή σχέση* (ήτοι, κάποιος κομψός αλυσωτός μετασχηματισμός) *μεταξύ των δύο συναρτητών* (A.35); Η απάντηση δεν είναι καταφατική παρά μόνον στην περίπτωση όπου ο (A.34) είναι *εκ δεξιών ακριβής*[32].

A.4.1 Ορισμός. Ο συναρτητής (A.34) καλείται **εκ δεξιών ακριβής**[33] όταν για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{M}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

(βλ. εδ. 3.2.11) και, αντιστοίχως, για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{N}'_\bullet \xrightarrow{h_\bullet} \mathbf{N}_\bullet \xrightarrow{k_\bullet} \mathbf{N}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet,$$

αμφότερες οι

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \xrightarrow{\mathbf{F}(f_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet} \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \xrightarrow{\mathbf{F}(g_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet} \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

(όπου $\mathbf{N}_\bullet$ κάποιο παγιωμένο αλυσωτό σύμπλοκο) και

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N'}_\bullet)_\bullet \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, h_\bullet)_\bullet} \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, k_\bullet)_\bullet} \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}''_\bullet)_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

(όπου $\mathbf{M}_\bullet$ κάποιο παγιωμένο αλυσωτό σύμπλοκο) είναι ακριβείς, ήτοι αμφότερες οι

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \xrightarrow{\mathbf{F}(f_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n} \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \xrightarrow{\mathbf{F}(g_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n} \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \longrightarrow \{0\}$$

και

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N'}_\bullet)_n \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, h_\bullet)_n} \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, k_\bullet)_n} \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}''_\bullet)_n \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβείς ακολουθίες R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων *για οιονδήποτε $n \in \mathbb{Z}$.*

A.4.2 Σημείωση. (i) Όπως συνέβη και στο (ii) τής προτάσεως A.2.6 (σε επίπεδο *σκέτων* R-μοδίων), έτσι και εδώ (σε επίπεδο αλυσωτών συμπλόκων) το κομμάτι «$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow$» (στις αρχικές βραχείες ακριβείς ακολουθίες) τού ορισμού A.4.1 θα μπορούσε να παραλειφθεί.

(ii) Σε ό,τι ακολουθεί, το σύμβολο $\mathbf{F}(..,..)$ θα δηλοί, στην μεν περίπτωση που οι τελείες θα καλύπτονται με *σκέτα κεφαλαία*, τον (A.33), στη δε περίπτωση που οι τελείες θα καλύπτονται με κεφαλαία σε έντονη γραφή (ή οτιδήποτε άλλο) και θα επισυνάπτεται μια *έξωθεν βούλα* (υπονοούσα αλυσωτό σύμπλοκο), τον (A.34).

[32] Ο ορισμός A.4.1 γενικεύει τον ορισμό A.2.5 (ii) για ζεύγη αλυσωτών συμπλόκων επί των οποίων αποτιμάται ο (A.34).

[33] Πρβλ. [29], Proposition 4.3, σελ. 24-25.

A.4.3 Λήμμα. *Εάν ο συναρτητής* (A.34) *είναι εκ δεξιών ακριβής* (*υπό την έννοια τού εδ.* A.4.1), *τότε υφίσταται ακριβώς ένας αλυσωτός μετασχηματισμός*

$$\boxed{\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}$$

που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα αλυσωτών μετασχηματισμών μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
Z_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[rr, two heads, "\pi_\bullet^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"] & & H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \\
& & \\
\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \arrow[uu, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet"] \arrow[uurr, "\pi_\bullet^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet"] \arrow[rr, "\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet"'] & & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \arrow[uu, dashed, "\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"']
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[rr, two heads, "\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"] & & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \\
& & \\
\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[uu, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"] \arrow[uurr, "\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"] \arrow[rr, "\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"'] & & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[uu, dashed, "\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"']
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Προς τούτο θεωρούμε το εξής διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\iota_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"] & Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, two heads, "\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) & \\
\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"] \arrow[r, "\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n"'] & \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"] \arrow[r, "\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n"'] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Η άνω του γραμμή είναι εκ κατασκευής ακριβής. Η κάτω του γραμμή είναι ακριβής λόγω τής εκ δεξιών ακριβείας τού συναρτητή $\mathbf{F}$. Τα $Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$ είναι αλυσωτά σύμπλοκα *με μηδενικούς συνοριακούς τελεστές*, οπότε το ίδιο ισχύει και για το $\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet$, και, ως εκ τούτου,

$$Z_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) = \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Γι' αυτόν τον λόγο, για τον αλυσωτό μετασχηματισμό

$$\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n : \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \longrightarrow Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$$

έχουμε $\mathrm{Im}(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n) \subseteq Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$. Θα αποδείξουμε τη μεταθετικότητα τού πρώτου ορθογωνίου παραλληλογράμμου, ήτοι ότι

$$\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \circ \mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n = \iota_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n. \tag{A.36}$$

Για κάθε $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p+q=n$ λαμβάνουμε

$$(-1)^q \,\mathrm{in}_{p,q} \circ \mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_p^{\mathbf{M}_\bullet}, j_q^{\mathbf{N}_\bullet}) \circ \mathbf{F}(\check{d}_{p+1}^{\mathbf{M}_\bullet},\ \mathrm{id}_{Z_q(\mathbf{N}_\bullet)}) = (-1)^q \,\mathrm{in}_{p,q} \circ \mathbf{F}(\underbrace{j_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_{p+1}^{\mathbf{M}_\bullet}}_{=d_{p+1}^{\mathbf{M}_\bullet}}, j_q^{\mathbf{N}_\bullet})$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^q \,\mathrm{in}_{p,q} \circ \mathbf{F}(d_{p+1}^{\mathbf{M}_\bullet}, j_q^{\mathbf{N}_\bullet}) = (-1)^q \,\mathrm{in}_{p,q} \circ \mathbf{F}(d_{p+1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q}) \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_{p+1}}, j_q^{\mathbf{N}_\bullet}) \\
&= (\mathfrak{d}_{n+1} \circ \mathrm{in}_{p+1,q} - \mathrm{in}_{p+1,q-1}\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_{p+1}}, d_q^{\mathbf{N}_\bullet})) \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_{p+1}}, j_q^{\mathbf{N}_\bullet}) \\
&= \mathfrak{d}_{n+1} \circ \mathrm{in}_{p+1,q} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_{p+1}}, j_q^{\mathbf{N}_\bullet}) - \mathrm{in}_{p+1,q-1}\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_{p+1}}, \underbrace{d_q^{\mathbf{N}_\bullet} \circ j_q^{\mathbf{N}_\bullet}}_{=0}) \\
&= \mathfrak{d}_{n+1} \circ \mathrm{in}_{p+1,q} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_{p+1}}, j_q^{\mathbf{N}_\bullet})
\end{aligned}$$

λόγω τής μεταθετικότητας τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
N_q \arrow[r, "d_q^{\mathbf{N}_\bullet}"] & N_{q-1} \\
Z_q(\mathbf{N}_\bullet) \arrow[u, "j_q^{\mathbf{N}_\bullet}"] \arrow[r, "0"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{q-1}(\mathbf{N}_\bullet) \arrow[u, "j_{q-1}^{\mathbf{N}_\bullet}"']
\end{tikzcd}$$

Επομένως,

$$\mathrm{Im}(\mathrm{in}_{p,q} \circ \mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_p^{\mathbf{M}_\bullet}, j_q^{\mathbf{N}_\bullet}) \circ \mathbf{F}(\check{d}_{p+1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_q(\mathbf{N}_\bullet)})) \subseteq \mathrm{Im}(\mathfrak{d}_{n+1}) =: B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet).$$

Εξαιτίας τής εκ δεξιών ακριβείας τού συναρτητή $\mathbf{F}$ η $\mathbf{F}(\check{d}_{p+1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_q(\mathbf{N}_\bullet)})$ είναι επιρριπτική, οπότε

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(\mathrm{in}_{p,q} \circ \mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_p^{\mathbf{M}_\bullet}, j_q^{\mathbf{N}_\bullet}) \circ \mathbf{F}(\check{d}_{p+1}^{\mathbf{M}_\bullet},\ \mathrm{id}_{Z_q(\mathbf{N}_\bullet)})) \\
= \ &\mathrm{Im}(\mathrm{in}_{p,q} \circ \mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_p^{\mathbf{M}_\bullet}, j_q^{\mathbf{N}_\bullet})) \subseteq B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet).
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"] & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \\
\mathbf{F}(B_p(\mathbf{M}_\bullet), Z_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"] \arrow[r, "\mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_p^{\mathbf{M}_\bullet}, j_q^{\mathbf{N}_\bullet})"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}(\mathbf{M}_p, \mathbf{N}_q) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"']
\end{tikzcd}$$

και την (A.37) προκύπτει η

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \circ \mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n) \\
= \ &\mathrm{Im}(\iota_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n) \subseteq B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)
\end{aligned} \tag{A.38}$$

και από την (A.38) η ισότητα (A.36). Σύμφωνα με την πρόταση 3.1.13 υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός $\varrho_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ που συμπληρώνει το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\iota_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"] & Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, two heads, "\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) & \\
\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}\circ\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"'] \arrow[r, "\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\,\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n"'] & \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"'] \arrow[r, "\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\,\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n"'] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, dashed, "\varrho_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"'] \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}
$$

μεταθετικώς. Από την άλλη μεριά, το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\mathrm{id}_{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}"] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) & \\
\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),B_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)},\,\iota_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"'] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, "\varrho_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"'] \arrow[r, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)},\,\pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"'] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}
$$

έχει αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς (την άνω γραμμή εκ κατασκευής και την κάτω λόγω τής εκ δεξιών ακριβείας τού συναρτητή $\mathbf{F}$). Θα αποδείξουμε (και για αυτό) τη μεταθετικότητα τού πρώτου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, ήτοι ότι

$$\varrho_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, \iota_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.39}$$

Συμμετρικώς προς την (A.37) λαμβάνουμε

$$\mathrm{Im}(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n) \subseteq B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet),$$

οπότε

$$\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n = 0. \tag{A.40}$$

Είναι πρόδηλο ότι

$$
\begin{aligned}
&\varrho_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, \iota_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \circ \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{B_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n \\
&= \varrho_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \circ \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, \iota_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \\
&= \pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, \iota_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n = \pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \underset{(\mathrm{A.40})}{=} 0
\end{aligned}
$$

και επειδή η $\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{B_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n$ είναι επιρριπτική, η (A.39) είναι αληθής. Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 3.1.13, υπάρχει ακριβώς ένας ομομορφισμός R-μοδίων $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ που συμπληρώνει το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\mathrm{id}_{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}"] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) & \\
\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),B_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)},\,\iota_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"'] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, "\varrho_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"'] \arrow[r, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)},\,\pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"'] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, dashed, "\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"'] \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}
$$

μεταθετικώς. Επειδή δε,

$$\begin{aligned}&\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}\circ \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n=\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}\circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)},\pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n\circ \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n\\&=\varrho_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}\circ \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n=\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}\circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n,\end{aligned}$$

ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής. □

A.4.4 Παρατήρηση. (i) Επειδή η

$$\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n=\mathbf{F}(\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)},\pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n\circ \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n$$

είναι επιρριπτική (ως σύνθεση επιρριπτικών), ο ομομορφισμός $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ (ο οποίος, ενίοτε, καλείται από κάποιους συγγραφείς και **ομομορφισμός Künneth**) *καθορίζεται πλήρως* μέσω τής ισότητας:

$$\boxed{\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}\circ \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n=\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}\circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n.}\tag{A.41}$$

(ii) Στην ειδική περίπτωση όπου $\mathbf{F}=-\otimes_R-$ (βλ. A.2.11 (ii)), εάν υποτεθεί ότι $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ με $p+q=n$, τότε λαμβάνοντας υπ' όψιν το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & H_n((\mathbf{M}_\bullet\otimes_R\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \\
\bigoplus\limits_{p+q=n}(Z_p(\mathbf{M}_\bullet)\otimes_R Z_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r, "\bigoplus\limits_{p+q=n}(\pi_p^{\mathbf{M}_\bullet}\overline{\otimes}\pi_q^{\mathbf{N}_\bullet})"] & \bigoplus\limits_{p+q=n}(H_p(\mathbf{M}_\bullet)\otimes_R H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[u, "\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"'] \\
Z_p(\mathbf{M}_\bullet)\otimes_R Z_q(\mathbf{N}_\bullet) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"'] \arrow[r, "\pi_p^{\mathbf{M}_\bullet}\overline{\otimes}\pi_q^{\mathbf{N}_\bullet}"] & H_p(\mathbf{M}_\bullet)\otimes_R H_q(\mathbf{N}_\bullet) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"']
\end{tikzcd}$$

θέτουμε (λόγω τής (A.41)) για οιοδήποτε ζεύγος $(x,y)\in H_p(\mathbf{M}_\bullet)\times H_q(\mathbf{N}_\bullet)$ και για οιοδήποτε ζεύγος $(z,w)\in Z_p(\mathbf{M}_\bullet)\times Z_q(\mathbf{N}_\bullet)$ με $\pi_p^{\mathbf{M}_\bullet}(z)=x$ και $\pi_q^{\mathbf{N}_\bullet}(w)=y$:

$$\boxed{\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}(x\otimes y):=\pi_n^{(\mathbf{M}_\bullet\otimes_R\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet}(z)\otimes j_q^{\mathbf{N}_\bullet}(w))}$$

και παρατηρούμε ότι η έκφραση τού δεξιού μέλους *δεν εξαρτάται από την επιλογή τού ζεύγους* (z,w) (οπότε είναι πλήρως καθορισμένη από το ζεύγος (x,y)). Πράγματι· εάν θεωρήσουμε ένα άλλο ζεύγος $(z',w')\in Z_p(\mathbf{M}_\bullet)\times Z_q(\mathbf{N}_\bullet)$ με $\pi_p^{\mathbf{M}_\bullet}(z')=x$ και $\pi_q^{\mathbf{N}_\bullet}(w')=y$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}&z-z'\in\mathrm{Ker}(\pi_p^{\mathbf{M}_\bullet})=B_p(\mathbf{M}_\bullet)=\mathrm{Im}(d_{p+1}^{\mathbf{M}_\bullet})\text{ και } w-w'\in B_q(\mathbf{N}_\bullet)\\&\Rightarrow[\exists(u,v)\in M_{p+1}\times N_{q+1}: z-z'=d_{p+1}^{\mathbf{M}_\bullet}(u)\text{ και } w-w'=d_{q+1}^{\mathbf{N}_\bullet}(v)]\\&\Rightarrow j_p^{\mathbf{M}_\bullet}(z)\otimes j_q^{\mathbf{N}_\bullet}(w)-j_p^{\mathbf{M}_\bullet}(z')\otimes j_q^{\mathbf{N}_\bullet}(w')\\&=d_{p+1}^{\mathbf{M}_\bullet}(u)\otimes j_q^{\mathbf{N}_\bullet}(w)+j_p^{\mathbf{M}_\bullet}(z')\otimes d_{q+1}^{\mathbf{N}_\bullet}(v)\in B_n((\mathbf{M}_\bullet\otimes_R\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)\\&\Rightarrow\pi_n^{(\mathbf{M}_\bullet\otimes_R\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet}(z)\otimes j_q^{\mathbf{N}_\bullet}(w))=\pi_n^{(\mathbf{M}_\bullet\otimes_R\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet}(z')\otimes j_q^{\mathbf{N}_\bullet}(w')).\end{aligned}$$

Α.4.5 Θεώρημα. *Διατηρώντας τά δεδομένα και τον συμβολισμό τού Α.4.3, οι*

$$\left\{ \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \,\middle|\, (\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \right\}$$

αποτελούν έναν φυσικό μετασχηματισμό από τη σύνθεση $\mathbf{F} \circ (H_\bullet(-) \times H_\bullet(-))$ *των συναρτητών*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[r, rightsquigarrow, "H_\bullet(-)\times H_\bullet(-)"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "\mathbf{F}\circ(H_\bullet(-)\times H_\bullet(-))"'] & \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[d, rightsquigarrow, "\mathbf{F}"] \\
 & \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)
\end{tikzcd}$$

στη σύνθεση $H_\bullet(-) \circ \mathbf{F}$ *των συναρτητών*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[r, rightsquigarrow, "\mathbf{F}"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "H_\bullet(-)\circ\mathbf{F}"'] & \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[d, rightsquigarrow, "H_\bullet(-)"] \\
 & \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Εάν $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{N}_\bullet \longrightarrow \mathbf{N}'_\bullet$ είναι δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί, αρκεί να δειχθεί ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \arrow[r, "\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"] \arrow[d, "\mathbf{F}(H_\bullet(f_\bullet),H_\bullet(g_\bullet))_\bullet"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[d, "H_\bullet(\mathbf{F}(f_\bullet,g_\bullet)_\bullet)"] \\
\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_\bullet \arrow[r, "\psi_\bullet^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}"] & H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_\bullet)
\end{tikzcd}$$

Προς τούτο θεωρούμε (για οιονδήποτε $n \in \mathbb{Z}$) το (τριδιάστατο) διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \arrow[rr, "\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_\bullet}"] & & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \\
Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[ur, "\mathbf{F}(f_\bullet,g_\bullet)_n|_{Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}"] \arrow[rr, "\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"] & & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[ur, "H_n(\mathbf{F}(f_\bullet,g_\bullet)_\bullet)"'] & \\
 & \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_n \arrow[uu, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}'_\bullet},j_\bullet^{\mathbf{N}'_\bullet})_n"' near end] \arrow[rr, "\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}'_\bullet},\pi_\bullet^{\mathbf{N}'_\bullet})_n"' near start] & & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_n \arrow[uu, "\psi_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}"'] \\
\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[uu, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"] \arrow[ur, "\mathbf{F}(f_\bullet|_{Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)},g_\bullet|_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n"'] \arrow[rr, "\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"'] & & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[uu, "\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}" near start] \arrow[ur, "\mathbf{F}(H_\bullet(f_\bullet),H_\bullet(g_\bullet))_n"'] &
\end{tikzcd}$$

το οποίο έχει το σχήμα ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Σύμφωνα με το λήμμα A.4.3 (και, ιδιαιτέρως, σύμφωνα με την (A.41) εφαρμοζόμενη για τα ζεύγη αλυσωτών συμπλόκων $(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)$ και $(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)$) οι πλευρές αυτού οι ευρισκόμενες στο *εμπρόσθιο* και στο *οπίσθιο μέρος του* είναι μεταθετικές (ως υποδιαγράμματά του). Το ίδιο ισχύει και για *το δάπεδό του* (λόγω τού τρόπου ορισμού των $H_\bullet(f_\bullet)$ και $H_\bullet(g_\bullet)$ και τού συναλλοίωτου τού $\mathbf{F}$), *την αριστερή πλευρά του* (λόγω τού τρόπου ορισμού των $f_\bullet|_{Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}$ και $g_\bullet|_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}$) και *την οροφή του* (λόγω τού τρόπου ορισμού τού $H_n(\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet)$). Κατά συνέπειαν, *και* η δεξιά πλευρά του είναι μεταθετική λόγω τής επιρριπτικότητας των $\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n$ και $\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}'_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}'_\bullet})_n$. □

A.4.6 Παρατήρηση. Εάν τα $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι αλυσωτά σύμπλοκα *με μηδενικούς συνοριακούς τελεστές* (ήτοι $d_n^{\mathbf{M}_\bullet} = 0$ και $d_n^{\mathbf{N}_\bullet} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$), τότε $M_n = Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \cong H_n(\mathbf{M}_\bullet)$, $N_n = Z_n(\mathbf{N}_\bullet) \cong H_n(\mathbf{N}_\bullet)$, οπότε έχουμε $j_n^{\mathbf{M}_\bullet} = \mathrm{id}_{M_n}$, $j_n^{\mathbf{N}_\bullet} = \mathrm{id}_{N_n}$, και *ταυτίζοντας* (κατά τα ειωθότα) τους $H_n(\mathbf{M}_\bullet)$ και M_n (και αντιστοίχως, τους $H_n(\mathbf{N}_\bullet)$ και N_n) μπορούμε να γράφουμε (εν είδει συμβάσεως) $\pi_n^{\mathbf{M}_\bullet} = \mathrm{id}_{M_n}$ (και αντιστοίχως, $\pi_n^{\mathbf{N}_\bullet} = \mathrm{id}_{N_n}$) για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Εν τοιαύτη περιπτώσει, *και* το $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet = (\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n, \mathfrak{d}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι αλυσωτό σύμπλοκο *με μηδενικούς συνοριακούς τελεστές* (ήτοι $\mathfrak{d}_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$), οπότε κατ' αναλογίαν

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n = Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$$

με $\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Εν προκειμένω, δεν επέρχεται μόνον ταύτιση των $\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet$ και $H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$ αλλά ισχύει και κάτι ισχυρότερο: ο (συγκεκριμένος) αλυσωτός μετασχηματισμός τού λήμματος A.4.3 μεταξύ αυτών οφείλει να είναι ο *ταυτοτικός*.

A.4.7 Λήμμα. *Εάν τα* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι αλυσωτά σύμπλοκα με μηδενικούς συνοριακούς τελεστές, τότε*

$$\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} = \mathrm{id}_{F(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}.$$

Αποδειξη. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} &= \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \circ \mathrm{id}_{F(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n} = \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n \\
&= \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \circ \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \underset{\text{A.4.3}}{=} \pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \\
&= \mathrm{id}_{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n} \circ \underbrace{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n}_{=\mathrm{id}_{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n}} = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n}
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

A.4.8 Σημείωση. (i) Εάν $h : \mathbf{F}\circ(H_\bullet(-)\times H_\bullet(-) \longrightarrow H_\bullet(-)\circ\mathbf{F}$ είναι *οιοσδήποτε* φυσικός μετασχηματισμός, για τον οποίο ισχύει $h_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} = \mathrm{id}_{F(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}$ για οιαδήποτε αλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet$ *με μηδενικούς συνοριακούς τελεστές*, τότε είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι $h_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} = \psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ για κάθε ζεύγος $(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)$ *τυχόντων* αλυσωτών συμπλόκων.

(ii) Η υπόθεση περί τής εκ δεξιών ακριβείας[34] τού (A.34) θα εξακολουθήσει να ισχύει μέχρι το εδάφιο A.4.21 (παρά το ότι δεν θα επαναλαμβάνεται στις εκάστοτε διατυπώσεις).

A.4.9 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, *είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και εάν για κάθε* $m \in \mathbb{Z}$ *και για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$

$$\exists r_m^{\mathbf{M}_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(M_m, Z_m(\mathbf{M}_\bullet)) : r_m^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_m^{\mathbf{M}_\bullet} = \mathrm{id}_{Z_m(\mathbf{M}_\bullet)}$$

και

$$\exists r_n^{\mathbf{N}_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(N_n, Z_n(\mathbf{N}_\bullet)) : r_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ j_n^{\mathbf{N}_\bullet} = \mathrm{id}_{Z_n(\mathbf{N}_\bullet)},$$

τότε υπάρχουν αλυσωτοί μετασχηματισμοί

$$s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \quad s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} : \mathbf{N}_\bullet \longrightarrow H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet),$$

τέτοιοι ώστε για τον

$$H_n(\mathbf{F}(s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \in \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet), \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n)$$

να ισχύει η ισότητα

$$H_n(\mathbf{F}(s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n}, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.42}$$

Απόδειξη. Θέτοντας $s_n^{\mathbf{M}_\bullet} := \pi_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ r_n^{\mathbf{M}_\bullet}$ λαμβάνουμε $s_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_n^{\mathbf{M}_\bullet} = \pi_n^{\mathbf{M}_\bullet}$ και από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[rrr, "d_n^{H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}=0"] & & & H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \\
Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[u, two heads, "\pi_n^{\mathbf{M}_\bullet}"] & B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[urr, "0"] \arrow[rr, hook, "\iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}"] \arrow[dr, hook, "\iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}"'] & & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[u, two heads, "\pi_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}"'] \\
 & & Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[ur, "\mathrm{id}_{Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}"] \arrow[dr, hook, "j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}"'] & \\
M_n \arrow[u, "r_n^{\mathbf{M}_\bullet}", shift left=0, to path={(\tikztostart) -- (\tikztotarget)}] \arrow[uu, "r_n^{\mathbf{M}_\bullet}"] \arrow[uuu, bend left, "s_n^{\mathbf{M}_\bullet}"] \arrow[uur, two heads, "\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}"] \arrow[rrr, "d_n^{\mathbf{M}_\bullet}"'] & & & M_{n-1} \arrow[uu, "r_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}"'] \arrow[uuu, bend right, "s_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}"']
\end{tikzcd}$$

έπεται ότι

$$s_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ d_n^{\mathbf{M}_\bullet} = (\pi_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ r_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}) \circ d_n^{\mathbf{M}_\bullet} = \pi_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \underbrace{r_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}}_{=\mathrm{id}_{Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}} \circ \iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}$$

$$= \underbrace{\pi_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}}_{=0} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet} = 0 = \underbrace{d_n^{H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}}_{=0} \circ (\pi_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ r_n^{\mathbf{M}_\bullet}) = d_n^{H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)} \circ s_n^{\mathbf{M}_\bullet}$$

[34] Από την εκ δεξιών ακρίβεια τού (A.34) (υπό την έννοια τού ορισμού A.4.1) έπεται ότι, για οιουσδήποτε παγιωμένους R-μοδίους A και B, οι συναρτητές $\mathbf{F}(A, -)$ και $\mathbf{F}(-, B)$ οι καθοριζόμενοι μέσω τού (A.33) είναι εκ δεξιών ακριβείς υπό την έννοια τού ορισμού A.2.5 (ii). (Βλ. σημείωση A.2.13.)

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επομένως η οικογένεια ομομορφισμών $s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} = \{s_n^{\mathbf{M}_\bullet}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί αλυσωτό μετασχηματισμό. Το ίδιο ισχύει και για την $s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} = \{s_n^{\mathbf{N}_\bullet}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (θέτοντας, κατ' αναλογίαν, $s_n^{\mathbf{N}_\bullet} := \pi_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ r_n^{\mathbf{N}_\bullet}$). Σημειωτέον ότι η $\{r_n^{\mathbf{M}_\bullet}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (και αντιστοίχως, η $\{r_n^{\mathbf{N}_\bullet}\}_{n\in\mathbb{Z}}$) *δεν είναι κατ' ανάγκην* αλυσωτός μετασχηματισμός[35]. Μέσω των ομομορφισμών

$$\mathbf{F}(s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \longrightarrow \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n$$

επάγονται οι ομομορφισμοί[36]

$$H_n(\mathbf{F}(s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) : H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \cong \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n.$$

Επειδή (κατά το θεώρημα A.4.5) ο $\psi_\bullet^{(-,-)}$ είναι φυσικός μετασχηματισμός, θεωρώντας τούς αλυσωτούς μετασχηματισμούς

$$j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} : Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet) \hookrightarrow \mathbf{M}_\bullet \ \text{ και } \ j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} : Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet) \hookrightarrow \mathbf{N}_\bullet \tag{A.43}$$

καταλήγουμε στο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(H_\bullet(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)), H_\bullet(Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)))_n \arrow[r, "\psi_n^{(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}"] \arrow[d, "\mathbf{F}(H_\bullet(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}), H_\bullet(j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet}))_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \arrow[d, "H_n(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)"] \\
\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \arrow[r, "\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}"'] & H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)
\end{tikzcd}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)} \circ \mathbf{F}(H_\bullet(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}), H_\bullet(j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet}))_n = H_n(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}. \tag{A.44}$$

Τα $Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$, $Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$, ως υποσύμπλοκα των $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ και $H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$, αντιστοίχως, έχουν μηδενικούς συνοριακούς τελεστές. Κατόπιν εφαρμογής τού λήμματος A.4.7 για αυτά (στη θέση των εκεί παρατεθέντων αλυσωτών συμπλόκων) λαμβάνουμε

$$\psi_n^{(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))} = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n}. \tag{A.45}$$

---

[35] Εάν η $\{r_n^{\mathbf{M}_\bullet}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ήταν αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε θα ίσχυε

$$0 = d_n^{Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)} \circ r_n^{\mathbf{M}_\bullet} = r_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ d_n^{\mathbf{M}_\bullet} = (\underbrace{r_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}}_{=\mathrm{id}_{Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}}) \circ \iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet} = \iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}$$

και, ως εκ τούτου, $d_n^{\mathbf{M}_\bullet} = j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \underbrace{\iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}}_{=0} = 0$, οπότε το $\mathbf{M}_\bullet$ θα είχε μηδενικούς συνοριακούς τελεστές, κάτι το οποίο *δεν προϋποτίθεται* στην παρούσα πρόταση. (Ομοίως για το $\mathbf{N}_\bullet$.)

[36] Επειδή αμφότερα τα αλυσωτά σύμπλοκα $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$, $H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$ έχουν μηδενικούς συνοριακούς τελεστές (βλ. A.2.4 (vii)), το $\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet$ έχει ωσαύτως μηδενικούς συνοριακούς τελεστές, οπότε

$$\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n = Z_n(\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \cong H_n(\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet).$$

Επιπροσθέτως, οι ομομορφισμοί οι επαγόμενοι (σε επίπεδο R-μοδίων ομολογίας) μέσω των (A.43),

$$H_n(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}) : \underbrace{H_n(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet))}_{\cong Z_n(\mathbf{M}_\bullet)} \longrightarrow H_n(\mathbf{M}_\bullet),\ \ H_n(j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet}) : \underbrace{H_n(Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}_{\cong Z_n(\mathbf{N}_\bullet)} \longrightarrow H_n(\mathbf{N}_\bullet),$$

μπορούν να ταυτίζονται με τους αντίστοιχους φυσικούς επιμορφισμούς, ήτοι

$$H_n(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}) = \pi_n^{\mathbf{M}_\bullet} \text{ και } H_n(j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet}) = \pi_n^{\mathbf{N}_\bullet},\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.46}$$

Είναι πλέον πρόδηλο ότι, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
&H_n(\mathbf{F}(s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \circ \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \underset{(\text{A.46})}{=} H_n(\mathbf{F}(s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \circ \mathbf{F}(H_\bullet(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}), H_\bullet(j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet}))_n \\
&\underset{(\text{A.44})}{=} H_n(\mathbf{F}(s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ H_n(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))} \\
&= H_n(\mathbf{F}(s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} \circ j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))} \\
&= H_n(\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))} \underset{(\text{A.45})}{=} H_n(\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \mathrm{id}_{\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n} \\
&= H_n(\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) = \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n,
\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα η ισότητα (A.42) ένεκα τής επιρριπτικότητας τού ομομορφισμού $\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n$. (Βλ. λήμμα 2.2.22.) □

• **Ερώτημα B**. Σύμφωνα με την πρόταση A.4.9, εάν κανείς προϋποθέσει την ύπαρξη εξ αριστερών αντιστρόφων ομομορφισμών των $j_m^{\mathbf{M}_\bullet}$ και $j_n^{\mathbf{N}_\bullet}$, τότε καταλήγει στην (A.42). Η εν λόγω ισότητα δείχνει (δυνάμει τής αμφίπλευρης συνεπαγωγής (i)⇔(ii) στο λήμμα 2.2.23) ότι η απεικόνιση $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ είναι *ενριπτική*. Μάλιστα, επειδή *και* η $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ *και* η $H_n(\mathbf{F}(s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)$ είναι ομομορφισμοί R-μοδίων, ισχύει κάτι πιο ισχυρό: Αποκτάται μια ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \xhookrightarrow{\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$$

και, στην περίπτωση ευρέσεως ενός *επιμορφισμού* από τον $H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$ επί κάποιου (προσδιοριστέου) R-μοδίου (συμβολιζόμενου προς στιγμήν ως) "$??_n$" (n-οστού μέλους κάποιας προσδιοριστέας οικογενείας R-μοδίων), αυτή καθίσταται (επί τη βάσει τής συνεπαγωγής (ii)⇒(iii) στο θεώρημα 3.1.29) βραχεία, ακριβής και *διασπώμενη*:

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \xhookrightarrow{\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \twoheadrightarrow ??_n \longrightarrow \{0\}$$

οπότε ο "$??_n$" αποτελεί συμπλήρωμα τού $\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n$ εντός τού R-μοδίου $H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$. *Ποιος, λοιπόν, θα μπορούσε να είναι αυτός ο* "$??_n$";΄Οπως θα δούμε στη συνέχεια, για την εύρεσή του θα υποχρεωθούμε να ορίσουμε εξ *αριστερών παράγωγους συναρτητές τού* (A.33) *ως προς την πρώτη μεταβλητή*, καθώς και τις *επεκτάσεις* αυτών σε επίπεδο αλυσωτών συμπλόκων. Τούτο θα γίνει στα εδάφια A.4.14 και A.4.16. Θα προταχθούν οι (χρησιμότατες) προτάσεις A.4.12 και A.4.13 που περιγράφουν ικανές συνθήκες, υπό τις οποίες η $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ είναι *ισομορφισμός*.

Α.4.10 Λήμμα. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, *είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και εάν το* $\mathbf{N}_\bullet$ *έχει μηδενικούς συνοριακούς τελεστές, τότε οι ομομορφισμοί*

$$\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n : \mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_n \longrightarrow B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$$

είναι επιμορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Αποδειξη. Από τον ορισμό των συνοριακών τελεστών τού $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ (βλ. (A.1)) γνωρίζουμε ότι $\mathfrak{d}_n \circ \mathrm{in}_{p,q} = \mathrm{in}_{p-1,q} \circ ((-1)^q\, \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q}))$ (όταν $p+q=n$) με το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \arrow[r, "\mathfrak{d}_n"] & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_{n-1} \\ \mathbf{F}(M_p, N_q) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"] \arrow[r, "(-1)^q\, \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(M_{p-1}, N_q) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p-1,q}"'] \end{tikzcd} \tag{A.47}$$

Επειδή $d_n^{\mathbf{M}_\bullet} = j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}$, έχουμε

$$(-1)^q\, \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q}) = \mathbf{F}(j_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q}) \circ ((-1)^q\, \mathbf{F}(\check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})).$$

Θεωρώντας τόν επιμορφισμό $\check{\mathfrak{d}}_n : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(\mathfrak{d}_n) := B_{n-1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$ τον επαγόμενο από τον $\mathfrak{d}_n$ και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\check{\mathfrak{d}}_n \circ \mathrm{in}_{p,q} = \mathrm{in}_{p-1,q} \circ \mathbf{F}(j_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q}) \circ ((-1)^q\, \mathbf{F}(\check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})),$$

η σύνθεση $\mathbf{F}(j_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q}) \circ ((-1)^q\, \mathbf{F}(\check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q}))$ οφείλει να είναι επιρριπτική. Άρα *και* η $\mathbf{F}(j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})$ (και, κατ' επέκταση, η $\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n$) είναι επιρριπτική για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. το (v) τής προτάσεως 2.2.15.) □

Α.4.11 Παρατήρηση. Κατ' αναλογίαν, εάν $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και εάν το $\mathbf{M}_\bullet$ έχει μηδενικούς συνοριακούς τελεστές, τότε οι ομομορφισμοί

$$\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, B_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \longrightarrow B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$$

είναι επιμορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Α.4.12 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, *είναι αλυσωτά σύμπλοκα, το* $\mathbf{N}_\bullet$ *έχει μηδενικούς συνοριακούς τελεστές και οι συναρτητές* $\mathbf{F}(-, N_n)$ *είναι ακριβείς για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$, *τότε οι ακόλουθοι ομομορφισμοί είναι ισομορφισμοί:*
(i) $\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n : \mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_n \longrightarrow B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$.
(ii) $\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n : \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_n \longrightarrow Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$.
(iii) $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)} : \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_n \longrightarrow H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$.

Αποδειξη. (i) Ο ομομορφισμός $\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n$ είναι επιμορφισμός (δυνάμει τού λήμματος A.4.10) και μονομορφισμός εξαιτίας[37] τής ακριβείας τού $\mathbf{F}(-, N_n)$.

(ii) Λόγω τής ενριπτικότητας τών $j_n^{\mathbf{M}_\bullet}$ και τής ακριβείας των $\mathbf{F}(-, N_n)$ οι $\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n$ είναι ενριπτικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ και έστω τυχόν ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p + q = n$. Από το μεταθετικό διάγραμμα (με ακριβή γραμμή)

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & Z_p(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, hook, "j_p"] & M_p \arrow[rr, two heads, "\check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet}"] \arrow[dr, "d_p^{\mathbf{M}_\bullet}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright", shift left=4ex] & & B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r] \arrow[dl, "j_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet}"] & \{0\} \\
& & & M_{p-1} & &
\end{tikzcd}$$

έπεται (εξαιτίας τής ακριβείας τού $\mathbf{F}(-, N_q)$) ότι

$$\mathrm{Im}(\mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_q})) = \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(\check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})) = \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})).$$

Από το (A.47) συνάγεται ότι

$$Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) := \mathrm{Ker}(\eth_n) = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Ker}((-1)^q\, \mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})) = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Im}(\mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_q}))$$

και από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_n \arrow[r, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \\
\mathbf{F}(Z_p(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_q) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"] \arrow[r, "\mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_q})"'] & \mathbf{F}(M_p, \mathbf{N}_q) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"']
\end{tikzcd}$$

ότι $\mathrm{Im}(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n) = Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$, οπότε οι $\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n$ είναι *και* επιρριπτικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Επειδή το $\mathbf{N}_\bullet$ έχει μηδενικούς συνοριακούς τελεστές, έχουμε

$$N_n = Z_n(\mathbf{N}_\bullet) \cong H_n(\mathbf{N}_\bullet), \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

οπότε το (εξ αριστερών προς τα δεξιά) τρίτο κατακόρυφο βέλος τού ακόλουθου μεταθετικού διαγράμματος μπορεί να ταυτισθεί με τον ομομορφισμό $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_n \arrow[r, hook, "\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n"] \arrow[d, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_n \arrow[r, two heads, "\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n"] \arrow[d, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_n \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}"] & \{0\} \arrow[d, equal] \\
B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, hook, "\iota_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"'] & Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, two heads, "\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"'] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

[37] Για $p + q = n$, από την ακρίβεια τού $\mathbf{F}(-, N_q)$ έπεται η ενριπτικότητα των $\mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_p^{\mathbf{M}_\bullet}, N_q)$ και, κατ' επέκταση, η ενριπτικότητα τού $\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n$.

Το πρώτο και το δεύτερο κατακόρυφο βέλος είναι ισομορφισμοί (επί τη βάσει των (i) και (ii)). Η κάτω γραμμή είναι εκ κατασκευής ακριβής. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ και έστω τυχόν ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p + q = n$. Λόγω τής ακριβείας τού $\mathbf{F}(-, N_q)$ σχηματίζεται η ακριβής ακολουθία

$$\mathbf{F}(B_p(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_q) \xhookrightarrow{\mathbf{F}(\iota_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_q})} \mathbf{F}(Z_p(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_q) \xrightarrow{\mathbf{F}(\pi_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_q})} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_q) \longrightarrow \{0\}$$

Μεταβαίνοντας στο ευθύ άθροισμα “ $\bigoplus\limits_{p+q=n}$ …” διαπιστώνουμε ότι *και* η άνω γραμμή τού προηγηθέντος διαγράμματος είναι ακριβής. Κατόπιν εφαρμογής σε αυτό τού (ii) τού λήμματος 3.1.7 «των τεσσάρων» συνάγεται ότι ο $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}$ είναι *μονομορφισμός*. Επειδή

$$\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)} \circ \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n = \pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n$$

με το δεξιό μέλος επιμορφισμό (ως σύνθεση ενός ισομορφισμού και ενός επιμορφισμού), ο $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}$ είναι κατ' ανάγκην *και επιμορφισμός*. (Βλ. το (v) τής προτάσεως 2.2.15.) □

A.4.13 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n \in \mathbb{Z}}$, $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n \in \mathbb{Z}}$, *είναι αλυσωτά σύμπλοκα, το* $\mathbf{M}_\bullet$ *έχει μηδενικούς συνοριακούς τελεστές και οι συναρτητές* $\mathbf{F}(M_n, -)$ *είναι ακριβείς για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$, *τότε οι ακόλουθοι ομομορφισμοί είναι ισομορφισμοί*:
(i) $\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, B_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \longrightarrow B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$.
(ii) $\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \longrightarrow Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$.
(iii) $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)} : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \longrightarrow H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$.

Απόδειξη. Παρόμοια εκείνης τής προτάσεως A.4.12. □

Για να ορίσουμε *εξ αριστερών παράγωγους συναρτητές τού* (A.33) *ως προς την πρώτη μεταβλητή* αρκεί να μιμηθούμε τον τρόπο δομήσεως τού ορισμού A.3.35.

A.4.14 Ορισμός. Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε μέσω τού δοθέντος αρχικού (A.33) τον διπλό συναρτητή

$$(\mathscr{L}_m^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(-,-) : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R) \ni (M, N) \longmapsto (\mathscr{L}_m^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M, N) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \times \mathrm{Hom}_R(N, N') \ni (\varphi, \psi) \mapsto (\mathscr{L}_m^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\varphi, \psi) \in \mathrm{Hom}_R((\mathscr{L}_m^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M, N), (\mathscr{L}_m^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M', N')),$$

(που καλείται, ιδιαιτέρως, m-**οστός εξ αριστερών παράγωγος συναρτητής τού F ως προς την πρώτη μεταβλητή**) θέτοντας αφ' ενός μεν[38]

$$\boxed{(\mathscr{L}_m^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M, N) := \mathscr{L}_m(\mathbf{F}(-, N))(M),} \tag{A.48}$$

αφ' ετέρου δε

$$\boxed{(\mathscr{L}_m^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\varphi, \psi) := h_m(M') \circ (\mathscr{L}_m(\mathbf{F}(-, N))(\varphi)),}$$

όπου

$$h_0 := t_{N'}^{-1} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{-}, \psi) \circ t_N : \mathscr{L}_0(\mathbf{F}(-,N)) \longrightarrow \mathscr{L}_0(\mathbf{F}(-,N')),$$

με $t_N : \mathscr{L}_0(\mathbf{F}(-,N)) \longrightarrow \mathbf{F}(-,N)$, $t_{N'} : \mathscr{L}_0(\mathbf{F}(-,N')) \longrightarrow \mathbf{F}(-,N')$ τις φυσικές ισοδυναμίες τις κατασκευαζόμενες μέσω τού θεωρήματος A.3.4 (με τους $\mathbf{F}(-,N)$ και $\mathbf{F}(-,N')$ στη θέση τού εκεί παρατεθέντος $\mathbf{F}$) και

$$\mathfrak{h} = \{h_m\}_{m\in\mathbb{Z}} : \{\mathscr{L}_m(\mathbf{F}(-,N))\}_{m\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{\mathscr{L}_m(\mathbf{F}(-,N'))\}_{m\in\mathbb{Z}}$$

τη μοναδική (σύμφωνα με το θεώρημα A.3.18) επέκταση τού φυσικού μετασχηματισμού h_0 σε έναν φυσικό μετασχηματισμό Κ.Σ.Α.Σ.Σ., ο οποίος καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M,N) \arrow[d, equal] & & (\mathscr{L}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M,N') \arrow[d, equal] \\
\mathscr{L}_m(\mathbf{F}(-,N))(M) \arrow[rr, "h_m(M) = (\mathscr{L}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathrm{id}_M,\psi)"] \arrow[dd, "(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\varphi,\mathrm{id}_N)"'] \arrow[dr, no head] & & \mathscr{L}_m(\mathbf{F}(-,N'))(M) \arrow[dd, "(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\varphi,\mathrm{id}_{N'})"] \\
 & (\mathscr{L}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\varphi,\psi) \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dr] & \\
\mathscr{L}_m(\mathbf{F}(-,N))(M') \arrow[rr, "h_m(M') = (\mathscr{L}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathrm{id}_{M'},\psi)"'] \arrow[d, equal] & & \mathscr{L}_m(\mathbf{F}(-,N'))(M') \arrow[d, equal] \\
(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M',N) & & (\mathscr{L}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M',N')
\end{tikzcd}$$

A.4.15 Σημείωση. (i) *Εναλλακτικός χαρακτηρισμός τού* $(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(-,N)$. Εάν M είναι τυχών R-μόδιος, τότε υπάρχει (κατά το πόρισμα 2.5.23) κάποιος *ελεύθερος* (και, κατ' επέκταση, βάσει τής προτάσεως 4.2.4, *προβολικός*) R-μόδιος L, καθώς και ένας υπομόδιος W τού L, ούτως ώστε να ισχύει $M \cong L/W$. Λόγω αυτού δημιουργείται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow W \overset{\iota}{\hookrightarrow} L \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}\ . \tag{A.49}$$

Επειδή ο (A.33) είναι συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές, ο $\mathbf{F}(-,N)$ είναι συναλλοίωτος. Θέτουμε

$$\boxed{(\mathrm{Sat}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M,N) := \mathrm{Ker}(\ \mathbf{F}(W,N) \xrightarrow{\mathbf{F}(\iota,\mathrm{id}_N)} \mathbf{F}(L,N)\ ).} \tag{A.50}$$

Εάν M' είναι ένας R-μόδιος,

$$\{0\} \longrightarrow W' \overset{\iota'}{\hookrightarrow} L' \overset{\pi'}{\twoheadrightarrow} M' \longrightarrow \{0\}$$

[38] Από τον ορισμό (A.48) έπεται ότι $(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(-,N) = \mathscr{L}_m(\mathbf{F}(-,N))$.

μια βραχεία ακριβής ακολουθία αυτού τού είδους και $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, τότε από την προβολικότητα τού L έπεται η ύπαρξη ενός $h \in \mathrm{Hom}_R(L, L')$ με την ιδιότητα $\pi' \circ h = \varphi \circ \pi$ (βλ. εδ. 4.2.1) και από την πρόταση 3.1.11 η ύπαρξη μονοσημάντως ορισμένου ομομορφισμού $g \in \mathrm{Hom}_R(W, W')$ με $\iota' \circ g = h \circ \iota$.

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & W \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & L \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & W' \arrow[r, hook, "\iota'"] & L' \arrow[r, two heads, "\pi'"] & M' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Κατόπιν εφαρμογής τού $\mathbf{F}(-, N)$ λαμβάνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(\iota, \mathrm{id}_N)) \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "\overline{\mathbf{F}(g,\mathrm{id}_N)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(W, N) \arrow[r, "\mathbf{F}(\iota,\mathrm{id}_N)"] \arrow[d, "\mathbf{F}(g,\mathrm{id}_N)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(L, N) \arrow[d, "\mathbf{F}(h,\mathrm{id}_N)"] \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(\iota', \mathrm{id}_N)) \arrow[r, hook] & \mathbf{F}(W', N) \arrow[r, "\mathbf{F}(\iota',\mathrm{id}_N)"'] & \mathbf{F}(L', N)
\end{tikzcd}$$

όπου $\overline{\mathbf{F}(g, \mathrm{id}_N)}$ είναι ο μοναδικός ομομορφισμός που το συμπληρώνει βάσει τού πορίσματος 3.1.12. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι ο $\overline{\mathbf{F}(g, \mathrm{id}_N)}$ *δεν εξαρτάται*[39] από τη συγκεκριμένη επιλογή τού h (με $\pi' \circ h = \pi$) και τού ότι επιδεικνύει συναλλοίωτη συμπεριφορά ως προς τη σύνθεση τού g με έναν άλλον ομοειδή g'. Μάλιστα, στην περίπτωση όπου $M = M'$ και $\varphi = \mathrm{id}_M$, αυτός καθίσταται *ισομορφισμός*[40], πράγμα που σημαίνει ότι ο R-μόδιος (A.50) είναι (μέχρις ισομορφισμού) ανεξάρτητος τής συγκεκριμένης επιλογής τής (A.49). Θέτοντας $(\mathrm{Sat}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\varphi) := \overline{\mathbf{F}(g, \mathrm{id}_N)}$, παρατηρούμε ότι τα δεδομένα

$$\begin{gathered}
(\mathrm{Sat}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(-, N) \ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R, \\
\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto (\mathrm{Sat}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M, N) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R), \\
\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni \varphi \longmapsto (\mathrm{Sat}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\varphi) \in \mathrm{Hom}_R((\mathrm{Sat}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M, N), (\mathrm{Sat}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M', N)),
\end{gathered}$$

καθορίζουν έναν συναλλοίωτο, προσθετικό συναρτητή (ο οποίος μπορεί να επεκταθεί κατά τα ειωθότα σε διπλό συναρτητή), τον λεγόμενο και **πρώτο αριστερό δορυφόρο** (left satellite) **τού F ως προς την πρώτη μεταβλητή**. Ο ορισμός αυτός γενικεύεται και για *τυχόντες* ακεραίους m. Για $m \geqslant 2$, ορίζεται ο m-**οστός αριστερός δορυφόρος τού F ως προς την πρώτη μεταβλητή** (μέσω επαναληπτικής διαδικασίας) θέτοντας

$$\boxed{(\mathrm{Sat}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M, N) := (\mathrm{Sat}_1^{\pi\varrho.}(\mathrm{Sat}_{m-1}^{\pi\varrho.}\mathbf{F}))(M, N).}$$

Για $m = 0$ αρκεί να ορισθεί ως $\mathrm{Sat}_0^{\pi\varrho.}\mathbf{F}$ ο ίδιος ο $\mathbf{F}$ και για $m < 0$ να θεωρήσουμε τον $\mathrm{Sat}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F}$ ως τον μηδενικό συναρτητή. Η οικογένεια $\{(\mathrm{Sat}_m^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(-, N)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ αυτών των αριστερών δορυφόρων ως προς την πρώτη μεταβλητή αποτελεί μια

[39] Βλ. Hu [21], Lemma 6.1, σελ. 113.

[40] Βλ. Cartan & Eilenberg [29], § III.1, σελ. 33-36, και § III.7, σελ. 49.

Κ.Σ.Α.Σ.Σ.[41] Επιπλέον, όταν $m > 0$, ισχύει[42] $(\mathrm{Sat}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(P, N) \cong \{0\}$ για κάθε προβολικό R-μόδιο P. Επομένως, η (προϋποτεθείσα) εκ δεξιών ακρίβεια τού $\mathbf{F}(-, N)$ δίδει $(\mathscr{L}_0^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(-, N) \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{F}(-, N)$ (πρβλ. A.3.4) και το πόρισμα A.3.19 μας πληροφορεί ότι υφίσταται ακριβώς μία φυσική ισοδυναμία:

$$\boxed{\left\{(\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(-, N)\right\}_{m\in\mathbb{Z}} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \left\{(\mathrm{Sat}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(-, N)\right\}_{m\in\mathbb{Z}}\,.}$$

(ii) Επειδή η οικογένεια $\{(\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(-, N)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ είναι μια (ειδικής φύσεως) Κ.Σ.Α.Σ.Σ. (βλ. A.3.14, A.3.26 (i) και A.3.12), μέσω οιασδήποτε βραχείας ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{\ f\ } M \xrightarrow{\ g\ } M'' \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται μια *μακρά ακριβής ακολουθία*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots \arrow[r, "\partial_{m+1}^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πϱ.}}\mathbf{F}]}"] & (\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(M', N) \arrow[r, "(\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(f, \mathrm{id}_N)"] & (\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(M, N) \arrow[r, "(\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(g, \mathrm{id}_N)"] & (\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(M'', N) \arrow[r, "\partial_m^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πϱ.}}\mathbf{F}]}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_2^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πϱ.}}\mathbf{F}]}"] & (\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(M', N) \arrow[r, "(\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(f, \mathrm{id}_N)"] & (\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(M, N) \arrow[r, "(\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(g, \mathrm{id}_N)"] & (\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(M'', N) \arrow[dll, "\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πϱ.}}\mathbf{F}]}"] & \\
& \mathbf{F}(M', N) \arrow[r, "\mathbf{F}(f, \mathrm{id}_N)"] & \mathbf{F}(M, N) \arrow[r, "\mathbf{F}(g, \mathrm{id}_N)"] & \mathbf{F}(M'', N) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

έχουσα τον $\partial_m^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πϱ.}}\mathbf{F}]} : (\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(M'', N) \longrightarrow (\mathscr{L}_{m-1}^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(M', N)$ ως *συνδετικό ομομορφισμό* της. Μάλιστα, στην περίπτωση όπου ο δακτύλιος αναφοράς R είναι Π.Κ.Ι., αυτή έχει *το πολύ* 6 μη τετριμμένους όρους:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{0\} \arrow[r] & (\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(M', N) \arrow[r, "(\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(f, \mathrm{id}_N)"] & (\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(M, N) \arrow[r, "(\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(g, \mathrm{id}_N)"] & (\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(M'', N) \arrow[dll, "\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πϱ.}}\mathbf{F}]}"] & \\
& \mathbf{F}(M', N) \arrow[r, "\mathbf{F}(f, \mathrm{id}_N)"] & \mathbf{F}(M, N) \arrow[r, "\mathbf{F}(g, \mathrm{id}_N)"] & \mathbf{F}(M'', N) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

(λόγω τού (i) τής προτάσεως A.3.29 και τού ότι ο $(\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(-, N)$ είναι προσθετικός).

A.4.16 Ορισμός. *Και ο ανωτέρω* συναρτητής $(\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(-, -)$ τού εδαφίου A.4.14 μπορεί να *επεκταθεί* σε έναν συναλλοίωτο συναρτητή ως προς αμφότερες τις μεταβλητές (για τον οποίο θα εξακολουθούμε να χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό)

$$(\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(-, -) : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \longmapsto (\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet) \times \mathrm{Hom}_R(\mathbf{N}_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet) \ni (f_\bullet, g_\bullet) \mapsto (\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet \in \mathrm{Hom}_R((\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet, (\mathscr{L}_m^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet),$$

[41]Βλ. Cartan & Eilenberg [29], Chapter III, Proposition 2.1 and Theorem 3.1, σελ. 38-42.

[42]Βλ. Cartan & Eilenberg [29], Proposition III.1.3, σελ. 37.

θέτοντας

$$\boxed{(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(M_p,N_{n-p}) = \bigoplus_{p+q=n}(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(M_p,N_q),}$$

και ορίζοντας τον συνοριακό τελεστή

$$\mathfrak{d}_n^{(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R((\mathscr{L}_m^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n,(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_{n-1})$$

όπως στο εδ. A.2.17 (ύστερα από αντικατάσταση τού εκεί παρατεθέντος **F** με τον συναρτητή $\mathscr{L}_m^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}$).

A.4.17 Παράδειγμα. Όταν $\mathbf{F} = -\otimes_R -$, ο μεν $(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(-,-)$ ο ορισθείς στο εδ. A.4.14 είναι ο $\mathrm{Tor}_m^R(-,-)$, το δε αλυσωτό σύμπλοκο $(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ το ορισθέν στο εδ. A.4.16 είναι το

$$\mathrm{Tor}_m^R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet = (\mathrm{Tor}_m^R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n,\mathfrak{d}_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

όπου

$$\boxed{\mathrm{Tor}_m^R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}\mathrm{Tor}_m^R(M_p,N_{n-p}) = \bigoplus_{p+q=n}\mathrm{Tor}_m^R(M_p,N_q)}$$

και ο περιορισμός τού συνοριακού τελεστή

$$\mathfrak{d}_n = \mathfrak{d}_n^{\mathrm{Tor}_m^R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_m^R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n,\mathrm{Tor}_m^R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_{n-1})$$

επί τού (εκάστοτε γινομένου στρέψεως) $\mathrm{Tor}_m^R(M_p,N_q)$ δίδεται από τον τύπο

$$\boxed{\mathfrak{d}_n|_{\mathrm{Tor}_m^R(M_p,N_q)} = \mathrm{Tor}_m^R(\mathrm{id}_{M_p},d_q^{\mathbf{N}_\bullet}) + (-1)^q\,\mathrm{Tor}_m^R(d_p^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{N_q}).}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $m=0$, το 0-στό Tor των $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{N}_\bullet$ ταυτίζεται με το **τανυστικό γινόμενο** αυτών $(\mathbf{M}_\bullet\otimes_R\mathbf{N}_\bullet)_\bullet = ((\mathbf{M}_\bullet\otimes_R\mathbf{N}_\bullet)_n,\mathfrak{d}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου

$$\boxed{(\mathbf{M}_\bullet\otimes_R\mathbf{N}_\bullet)_n := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}}(M_p\otimes_R N_{n-p}) = \bigoplus_{p+q=n}(M_p\otimes_R N_q),}$$

με τον συνοριακό τελεστή του

$$\mathfrak{d}_n = \mathfrak{d}_n^{(\mathbf{M}_\bullet\otimes_R\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R((\mathbf{M}_\bullet\otimes_R\mathbf{N}_\bullet)_n,(\mathbf{M}_\bullet\otimes_R\mathbf{N}_\bullet)_{n-1})$$

οριζόμενον σε επίπεδο αποσυντιθέμενων τανυστών $x\otimes y\in M_p\otimes_R N_q$ ως εξής:

$$\boxed{\mathfrak{d}_n(x\otimes y) = x\otimes d_q^{\mathbf{N}_\bullet}(y) + (-1)^q\,d_p^{\mathbf{M}_\bullet}(x)\otimes y.}$$

Αναλόγως, είναι δυνατόν να ορισθούν *εξ αριστερών παράγωγοι συναρτητές* τού (A.33) *ως προς τη δεύτερη μεταβλητή* (εάν κανείς μιμηθεί τον τρόπο δομήσεως τού ορισμού A.3.37).

A.4.18 Ορισμός. Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε μέσω τού δοθέντος αρχικού (A.33) τον διπλό συναρτητή

$$
\begin{gathered}
(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(-,-) \;:\; \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,\\
\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R) \ni (M,N) \longmapsto (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),\\
\mathrm{Hom}_R(M,M') \times \mathrm{Hom}_R(N,N') \ni (\varphi,\psi) \longmapsto (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\varphi,\psi) \in \mathrm{Hom}_R((\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N), (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M',N')),
\end{gathered}
$$

(που καλείται, ιδιαιτέρως, m-**οστός εξ αριστερών παράγωγος συναρτητής τού F ως προς τη δεύτερη μεταβλητή**) θέτοντας αφ' ενός μεν[43]

$$\boxed{(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N) := \mathscr{L}_m(\mathbf{F}(M,-))(N),} \tag{A.51}$$

αφ' ετέρου δε

$$\boxed{(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\varphi,\psi) := h_m(N') \circ (\mathscr{L}_m(\mathbf{F}(M,-))(\psi)),}$$

όπου

$$h_0 := t_{M'}^{-1} \circ \mathbf{F}(\varphi, \mathrm{id}_{-}) \circ t_M : \mathscr{L}_0(\mathbf{F}(M,-)) \longrightarrow \mathscr{L}_0(\mathbf{F}(M',-)),$$

με $t_M : \mathscr{L}_0(\mathbf{F}(M,-)) \longrightarrow \mathbf{F}(M,-)$, $t_{M'} : \mathscr{L}_0(\mathbf{F}(M',-)) \longrightarrow \mathbf{F}(M',-)$ τις φυσικές ισοδυναμίες τις κατασκευαζόμενες μέσω τού θεωρήματος A.3.4 (με τους $\mathbf{F}(M,-)$ και $\mathbf{F}(M',-)$ στη θέση τού εκεί παρατεθέντος $\mathbf{F}$) και

$$\mathfrak{h} = \{h_m\}_{m\in\mathbb{Z}} : \{\mathscr{L}_m(\mathbf{F}(M,-))\}_{m\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{\mathscr{L}_m(\mathbf{F}(M',-))\}_{m\in\mathbb{Z}}$$

τη μοναδική (σύμφωνα με το θεώρημα A.3.18) επέκταση τού φυσικού μετασχηματισμού h_0 σε έναν φυσικό μετασχηματισμό Κ.Σ.Α.Σ.Σ., ο οποίος καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$
\begin{tikzcd}
(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N) \arrow[d, equal] & & (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M',N) \arrow[d, equal] \\
\mathscr{L}_m(\mathbf{F}(M,-))(N) \arrow[rr, "h_m(N) = (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\varphi{,}\mathrm{id}_N)"] \arrow[d, "(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathrm{id}_M{,}\psi)"'] \arrow[drr, "(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\varphi{,}\psi)" description] & & \mathscr{L}_m(\mathbf{F}(M',-))(N) \arrow[d, "(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathrm{id}_{M'}{,}\psi)"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
\mathscr{L}_m(\mathbf{F}(M,-))(N') \arrow[rr, "h_m(N') = (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\varphi{,}\mathrm{id}_{N'})"'] \arrow[d, equal] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathscr{L}_m(\mathbf{F}(M',-))(N') \arrow[d, equal] \\
(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N') & & (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M',N')
\end{tikzcd}
$$

A.4.19 Παράδειγμα. Όταν $\mathbf{F} = -\otimes_R -$, ο $(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(-,-)$ ο ορισθείς στο εδ. A.4.18

[43] Από τον ορισμό (A.51) έπεται ότι $(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,-) = \mathscr{L}_m(\mathbf{F}(M,-))$.

είναι ο $\overline{\mathrm{Tor}}_m^R(-,-)$. (Βλ. εδάφιο A.3.37.) Σημειωτέον ότι, κατ' αναλογίαν προς το θεώρημα A.3.39, μπορεί να δειχθεί ότι

$$(\mathscr{L}_m^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(-,-) \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(-,-),\ \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

A.4.20 Σημείωση. (i) *Εναλλακτικός χαρακτηρισμός τού* $(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,-)$. Εάν N είναι τυχών R-μόδιος, τότε υπάρχει (κατά το πόρισμα 2.5.23) κάποιος *ελεύθερος* (και, κατ' επέκταση, βάσει τής προτάσεως 4.2.4, *προβολικός*) R-μόδιος L, καθώς και ένας υπομόδιος W τού L, ούτως ώστε να ισχύει $N \cong L/W$. Λόγω αυτού δημιουργείται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow W \overset{\iota}{\hookrightarrow} L \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} N \longrightarrow \{0\}\ . \tag{A.52}$$

Επειδή ο (A.33) είναι συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές, ο $\mathbf{F}(M,-)$ είναι συναλλοίωτος. Θέτουμε

$$\boxed{(\mathrm{Sat}_1^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N) := \mathrm{Ker}\big(\ \mathbf{F}(M,W) \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,\iota)} \mathbf{F}(M,L)\ \big).} \tag{A.53}$$

Εάν N' είναι ένας R-μόδιος,

$$\{0\} \longrightarrow W' \overset{\iota'}{\hookrightarrow} L' \overset{\pi'}{\twoheadrightarrow} N' \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία αυτού τού είδους και $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(N,N')$, τότε από την προβολικότητα τού L έπεται η ύπαρξη ενός $h \in \mathrm{Hom}_R(L,L')$ με

$$\pi' \circ h = \varphi \circ \pi$$

(βλ. εδ. 4.2.1) και από την πρόταση 3.1.11 η ύπαρξη μοναδικού $g \in \mathrm{Hom}_R(W,W')$ με $\iota' \circ g = h \circ \iota$.

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & W \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & L \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & W' \arrow[r, hook, "\iota'"] & L' \arrow[r, two heads, "\pi'"] & N' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Κατόπιν εφαρμογής τού $\mathbf{F}(M,-)$ λαμβάνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,\iota))) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\overline{\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,g)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(M,W) \arrow[r, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,\iota)"] \arrow[d, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,g)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(M,L,) \arrow[d, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,h)"] \\
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,\iota')) \arrow[r, hook] & \mathbf{F}(M,W') \arrow[r, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_N,\iota')"'] & \mathbf{F}(M,L')
\end{tikzcd}$$

όπου $\overline{\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,g)}$ είναι ο μοναδικός ομομορφισμός που το συμπληρώνει βάσει τού πορίσματος 3.1.12. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι ο $\overline{\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,g)}$ *δεν εξαρτάται*[44] από

[44] Βλ. Hu [21], Lemma 6.1, σελ. 113.

τη συγκεκριμένη επιλογή τού h (με $\pi' \circ h = \pi$) και τού ότι επιδεικνύει συναλλοίωτη συμπεριφορά ως προς τη σύνθεση τού g με έναν άλλον ομοειδή g'. Μάλιστα, στην περίπτωση όπου $N = N'$ και $\varphi = \mathrm{id}_N$, αυτός καθίσταται *ισομορφισμός*[45], πράγμα που σημαίνει ότι ο R-μόδιος (A.53) είναι (μέχρις ισομορφισμού) ανεξάρτητος τής συγκεκριμένης επιλογής τής (A.52). Θέτοντας

$$(\mathrm{Sat}_1^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(\varphi) := \overline{\mathbf{F}(\mathrm{id}_M, g)},$$

παρατηρούμε ότι τα δεδομένα

$$\begin{gathered}(\mathrm{Sat}_1^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M,-)\ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,\\ \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni N \longmapsto (\mathrm{Sat}_1^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M,N) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),\\ \mathrm{Hom}_R(N,N') \ni \varphi \longmapsto (\mathrm{Sat}_1^{\delta\epsilon\upsilon\tau.}\mathbf{F})(\varphi) \in \mathrm{Hom}_R((\mathrm{Sat}_1^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M,N), (\mathrm{Sat}_1^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.})(M,N')),\end{gathered}$$

καθορίζουν έναν συναλλοίωτο, προσθετικό συναρτητή (ο οποίος μπορεί να επεκταθεί κατά τα ειωθότα σε διπλό συναρτητή), τον λεγόμενο και **πρώτο αριστερό δορυφόρο** (left satellite) **τού F ως προς τη δεύτερη μεταβλητή**. Ο ορισμός αυτός γενικεύεται και για *τυχόντες* ακεραίους m. Για $m \geqslant 2$, ορίζεται ο m-**οστός αριστερός δορυφόρος τού F ως προς τη δεύτερη μεταβλητή** (μέσω επαναληπτικής διαδικασίας) θέτοντας

$$\boxed{(\mathrm{Sat}_m^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M,N) := (\mathrm{Sat}_1^{\delta\epsilon\upsilon\tau.}(\mathrm{Sat}_{m-1}^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F}))(M,N).}$$

Για $m = 0$ αρκεί να ορισθεί ως $\mathrm{Sat}_0^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F}$ ο ίδιος ο $\mathbf{F}$ και για $m < 0$ να θεωρήσουμε τον $\mathrm{Sat}_m^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F}$ ως τον μηδενικό συναρτητή. Η οικογένεια $\left\{(\mathrm{Sat}_m^{\delta\epsilon\upsilon\tau.}\mathbf{F})(M,-)\right\}_{m\in\mathbb{Z}}$ αυτών των αριστερών δορυφόρων ως προς τη δεύτερη μεταβλητή αποτελούν μια Κ.Σ.Α.Σ.Σ.[46] Επιπλέον, όταν $m > 0$, ισχύει[47] $(\mathrm{Sat}_m^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M,P) \cong \{0\}$ για κάθε προβολικό R-μόδιο P. Επομένως, η (προϋποτεθείσα) εκ δεξιών ακρίβεια τού $\mathbf{F}(M,-)$ δίδει $(\mathscr{L}_0^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M,-) \underset{\varphi.\iota.}{\cong} \mathbf{F}(M,-)$ (πρβλ. A.3.4) και το πόρισμα A.3.19 μας πληροφορεί ότι υφίσταται ακριβώς μία φυσική ισοδυναμία:

$$\boxed{\left\{(\mathscr{L}_m^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M,-)\right\}_{m\in\mathbb{Z}} \underset{\varphi.\iota.}{\cong} \left\{(\mathrm{Sat}_m^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M,-)\right\}_{m\in\mathbb{Z}}.}$$

(ii) Επειδή η οικογένεια $\{(\mathscr{L}_m^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M,-)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ είναι μια (ειδικής φύσεως) Κ.Σ.Α.Σ.Σ. (βλ. A.3.14, A.3.26 (i) και A.3.12), μέσω οιασδήποτε βραχείας ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται μια *μακρά ακριβής ακολουθία*

[45] Βλ. Cartan & Eilenberg [29], § III.1, σελ. 33-36, και § III.7, σελ. 49.

[46] Βλ. Cartan & Eilenberg [29], Chapter III, Proposition 2.1 and Theorem 3.1, σελ. 38-42.

[47] Βλ. Cartan & Eilenberg [29], Proposition III.1.3, σελ. 37.

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{m+1}^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F}]}} (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N') \xrightarrow{(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathrm{id}_M,f)} (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N) \xrightarrow{(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathrm{id}_M,g)} (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N'') \xrightarrow{\partial_m^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F}]}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_2^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F}]}} (\mathscr{L}_1^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N') \xrightarrow{(\mathscr{L}_1^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathrm{id}_M,f)} (\mathscr{L}_1^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N) \xrightarrow{(\mathscr{L}_1^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathrm{id}_M,g)} (\mathscr{L}_1^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N'') \xrightarrow{\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F}]}} \mathbf{F}(M,N') \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,f)} \mathbf{F}(M,N) \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,g)} \mathbf{F}(M,N'') \longrightarrow \{0\}$$

έχουσα τον $\partial_m^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F}]} : (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N'') \longrightarrow (\mathscr{L}_{m-1}^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N')$ ως *συνδετικό ομομορφισμό* της. Μάλιστα, στην περίπτωση όπου ο δακτύλιος αναφοράς είναι Π.Κ.Ι., αυτή έχει *το πολύ* 6 μη τετριμμένους όρους:

$$\{0\} \longrightarrow (\mathscr{L}_1^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N') \xrightarrow{(\mathscr{L}_1^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathrm{id}_M,f)} (\mathscr{L}_1^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N) \xrightarrow{(\mathscr{L}_1^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathrm{id}_M,g)} (\mathscr{L}_1^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M,N'') \xrightarrow{\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F}]}} \mathbf{F}(M,N') \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,f)} \mathbf{F}(M,N) \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_M,g)} \mathbf{F}(M,N'') \longrightarrow \{0\}$$

(λόγω τού (i) τής προτάσεως A.3.29 και τού ότι ο $\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F}$ είναι προσθετικός).

A.4.21 Ορισμός. *Και ο ανωτέρω* συναρτητής $(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(-,-)$ τού εδαφίου A.4.18 μπορεί να *επεκταθεί* σε έναν συναλλοίωτο συναρτητή ως προς αμφότερες τις μεταβλητές (για τον οποίο θα εξακολουθούμε να χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό)

$$(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(-,-) : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \longmapsto (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet) \times \mathrm{Hom}_R(\mathbf{N}_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet) \ni (f_\bullet, g_\bullet) \longmapsto (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet \in \mathrm{Hom}_R((\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet, (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet),$$

θέτοντας (για $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, και

$$(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet = ((\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n, \mathfrak{d}_n^{(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}})$$

$$\boxed{(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} (\mathscr{L}_m^{\text{δευτ.}}\mathbf{F})(M_p, N_{n-p}) = \bigoplus_{p+q=n} (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(M_p, N_q),}$$

και ορίζοντας τον $\mathfrak{d}_n^{(\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R((\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n, (\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_{n-1})$ όπως στο εδ. A.2.17 (ύστερα από αντικατάσταση τού εκεί παρατεθέντος $\mathbf{F}$ με τον $\mathscr{L}_m^{\text{δεύτ.}}\mathbf{F}$).

A.4.22 Θεώρημα («Κατηγορική εκδοχή τού θεωρήματος τού Künneth για μοδίους ομολογίας ως προς τον συναρτητή F»). *Έστω* $\mathbf{F}$ *ένας εκ δεξιών ακριβής διπλός συναρτητής* (A.34), *συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές. Δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ *και* $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ *, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν οι συναρτητές*

$$\mathbf{F}(B_n(\mathbf{M}_\bullet), -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R, \quad \mathbf{F}(Z_n(\mathbf{M}_\bullet), -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R \tag{A.54}$$

είναι ακριβείς για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και εάν, ταυτοχρόνως, οι συναρτητές

$$(\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(B_n(\mathbf{M}_\bullet), -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R, \ \ (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(Z_n(\mathbf{M}_\bullet), -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

είναι μηδενικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \xhookrightarrow{\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\varphi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

ή, ισοδυνάμως, υφίστανται βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \xhookrightarrow{\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} \bigoplus_{p+q=n-1} (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \longrightarrow \{0\} \tag{A.55}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου $\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ ο αλυσωτός μετασχηματισμός τού λήμματος A.4.3 και

$$\varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} := ((\psi_n^{(B_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}),\mathbf{N}_\bullet)})^{-1} \circ H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet))\check{} \ , \ n \in \mathbb{Z}, \tag{A.56}$$

επιμορφισμός έχων εικόνα του τον

$$((\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)))_n \hookrightarrow \mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n.$$

Επιπροσθέτως, αμφότεροι οι $\left\{ \psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \middle| (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \right\}$ *και*

$$\left\{ \varphi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \middle| \begin{array}{l} \text{ζεύγη } (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \\ \text{έχοντα τις προαναφερθείσες ιδιότητες} \end{array} \right\}$$

είναι φυσικοί μετασχηματισμοί.

(ii) *Εάν, πέραν τής ισχύος των προϋποθέσεων τού* (i), *υποτεθεί ότι οι R-μόδιοι $B_m(\mathbf{M}_\bullet)$ και $B_n(\mathbf{N}_\bullet)$ είναι προβολικοί για κάθε $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, τότε οι* (A.55) *είναι διασπώμενες, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\boxed{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \oplus (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1}} \tag{A.57}$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\boxed{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong \left(\bigoplus_{p+q=n} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \right) \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n-1} (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \right).}$$

Μολαταύτα, οι διασπάσεις (A.57) *δεν είναι κατ' ανάγκην φυσικές.*

Αποδειξη. (i) **Βήμα 1ο**. *Πρώτη θεμελιώδης βραχεία ακριβής ακολουθία*. Για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ σχηματίζεται η βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\{0\} \longrightarrow Z_p(\mathbf{M}_\bullet) \xhookrightarrow{j_p^{\mathbf{M}_\bullet}} M_p \xrightarrow{\check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet}} \!\!\!\!\twoheadrightarrow B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\}. \tag{A.58}$$

Επειδή ο συναρτητής $(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet), -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ είναι εξ υποθέσεως μηδενικός, από τη *μακρά* ακριβή ακολουθία τού εδ. A.4.15 (ii) λαμβάνουμε τη *βραχεία* ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(Z_p(\mathbf{M}_\bullet), N_q) \xhookrightarrow{\mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})} \mathbf{F}(M_p, N_q) \xrightarrow{\mathbf{F}(\check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})} \mathbf{F}(B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet), N_q) \longrightarrow \{0\}$$

για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Μεταβαίνοντας στα ευθέα αθροίσματα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_n \arrow[r, hook, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \arrow[r, two heads, "\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_n \arrow[r] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathbf{F}(Z_p(\mathbf{M}_\bullet), N_q) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"'] \arrow[r, hook, "\mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})"'] & \mathbf{F}(M_p, N_q) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"'] \arrow[r, two heads, "\mathbf{F}(\check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})"'] & \mathbf{F}(B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet), N_q) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{p,q}"'] \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

(για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p + q = n$) η άνω γραμμή είναι ωσαύτως βραχεία ακριβής για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. (Πρβλ. πρόταση 3.1.6.) Κατ' αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε μια βραχεία ακριβή ακολουθία *αλυσωτών συμπλόκων*:

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \xhookrightarrow{\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet} \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \xrightarrow{\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet} \mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{A.59}$$

Υποθέτουμε ότι η

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)} H_n(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \longrightarrow \cdots \tag{A.60}$$

είναι η *μακρά* ακριβής ακολουθία ομολογίας για την (A.59), έχουσα τον δ_n ως συνδετικό ομομορφισμό της. (Βλ. θεώρημα 3.2.13.)

Βήμα 2ο. *Περί τού συνδετικού ομομορφισμού τής* (A.60). Θεωρούμε το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[dll, two heads, "(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)},j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n)\check{}"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & \mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[dll, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)},j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"'] \arrow[rr, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}\circ\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\,\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n"] \arrow[drr, phantom, "\textcircled{2}"] & & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \\
Z_n(\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[rr, hook, "j_n^{\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"'] \arrow[d, two heads, "\pi_n^{\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"'] & & \mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_n & & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n+1} \arrow[u, two heads, "\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\,\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n+1}"] \arrow[rr, "\partial_{n+1}^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}"'] \arrow[dll, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet},j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_{n+1}"'] \arrow[d, phantom, "\textcircled{1}"] & & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[dll, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet},j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"'] \\
H_n(\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) & & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_{n+1} \arrow[u, two heads, "\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_{n+1}"] \arrow[rr, "\partial_{n+1}^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"'] & & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n & & \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\,\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n"'] \arrow[dll, "\mathbf{F}(\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)},j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n"'] \\
 & & & & \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_n \arrow[u, "\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n"] & & \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[dll, two heads, "(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)},j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n)\check{}"'] \\
 & & & & Z_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[u, hook, "j_n^{\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"] \arrow[rr, two heads, "\pi_n^{\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"'] & & H_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)
\end{tikzcd}
$$

Όλα τα παραλληλόγραμμα αυτού είναι μεταθετικά. Ιδιαιτέρως, το ① είναι μεταθετικό διότι η $\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ είναι αλυσωτός μετασχηματισμός. Το ② είναι μεταθετικό διότι το αλυσωτό σύμπλοκο $Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$ έχει μηδενικούς συνοριακούς τελεστές, ενώ οι συνοριακοί τελεστές τού $\mathbf{M}_\bullet$ είναι οι $d_n^{\mathbf{M}_\bullet} = j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}$. Έστω τυχόν στοιχείο $y \in Z_n(\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$. Λόγω τής επιρριπτικότητας τής $\big(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n\big)\check{}$,

$$\exists y' \in \mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n : y = \mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y'). \tag{A.61}$$

Επίσης, λόγω τής επιρριπτικότητας τής $\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n+1}$,

$$\exists w' \in \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n+1} : y' = \mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n+1}(w').$$

Θέτοντας

$$w := \mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_{n+1}(w'),\ \ z' := \mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n(y'),\ \ z := \mathbf{F}(\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(z'),$$

λαμβάνουμε

$$z = \mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y') \in Z_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet), \tag{A.62}$$

διότι το $Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ έχει μηδενικούς συνοριακούς τελεστές και το (ii) τού λήμματος A.4.13 (εφαρμοζόμενο για τα αλυσωτά σύμπλοκα $Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ και $\mathbf{N}_\bullet$) δίδει $\mathrm{Im}(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n) = Z_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$. Είναι πρόδηλο αφ' ενός μεν ότι

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n+1}(w) = \mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n+1}(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_{n+1}(w'))\\
&= (\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n+1} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_{n+1})(w')\\
&= ((\mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \circ (\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n+1}))(w')\\
&= (\mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(\underbrace{\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n+1})(w'))}_{=y'}\\
&= (\mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y') \underset{(\mathrm{A.61})}{=} y,
\end{aligned}
\tag{A.63}
$$

αφ’ ετέρου δε ότι[48]

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{d}_{n+1}^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}(w) = (\mathfrak{d}_{n+1}^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_{n+1})(w') \\
&= (\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \circ \mathfrak{d}_{n+1}^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet})(w') = (\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \circ (\pm)\mathbf{F}(d_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n+1})(w') \\
&= (\pm)(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n)(\underbrace{\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n+1})(w')}_{=y'}) \\
&= (\pm)\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n(\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y')) \underset{(\text{A.62})}{=} (\pm)\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n(z).
\end{aligned}
\tag{A.64}
$$

Επιπροσθέτως,

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n(y) \underset{(\text{A.61})}{=} \mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y')) \\
&(\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n)(y') = \mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y') \underset{(\text{A.62})}{=} z.
\end{aligned}
\tag{A.65}
$$

Εν συνεχεία θεωρούμε το εξής διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
 & y \in Z_n(\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) = Z_{n+1}(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, two heads, "\pi_{n+1}^{\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"] & Z_{n+1}(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)/B_{n+1}(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[d, equal] \\
 & H_n(\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, equal] & H_{n+1}(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[d, hook] \\
\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_{n+1} \ni w \arrow[r, mapsto] & \pi_{B_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_{n+1}}(w) \in \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_{n+1}/B_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r] \arrow[dd, "\mathfrak{d}_{n+1}^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}}"] & \mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_{n+1}/B_{n+1}(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[d, equal] \\
 & & \mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_n/B_n(\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \\
Z_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \ni z \arrow[r, mapsto] \arrow[d, two heads, "\pi_n^{\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"] & \mathfrak{d}_{n+1}^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}}(\pi_{B_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_{n+1}}(w)) \in Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) & \\
H_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) & &
\end{tikzcd}
$$

στο οποίο το δεύτερο οριζόντιο βέλος τής τρίτης γραμμής δηλοί την απεικόνιση

$$
\pi_{B_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_{n+1}}(w) \mapsto \pi_{B_{n+1}(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}^{\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_{n+1}}(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n+1}(w)) = \pi_{B_{n+1}(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}^{\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_{n+1}}(y)
$$

(βλ. (A.63)), η $\mathfrak{d}_{n+1}^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}}$ τον μοναδικό ομομορφισμό που καθιστά το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_{n+1} \arrow[dl, "\pi_{B_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_{n+1}}"'] \arrow[dr, "\mathfrak{d}_{n+1}^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_{n+1}/B_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[rr, dashed, "\mathfrak{d}_{n+1}^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}}"'] & {} & Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \subseteq \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_n
\end{tikzcd}
$$

μεταθετικό και η απεικόνιση τής τέταρτης γραμμής την απεικόνιση $\overline{\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n}$ την προκύπτουσα από την $\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n$. (Βλ. πόρισμα 3.1.12.) Λαμβάνοντας υπ’ όψιν τον (πλέον φυσικό) τρόπο ορισμού τού συνδετικού ομομορφισμού δ_{n+1} (βλ. εδ. 3.2.14) διαπιστώνουμε από τις ανωτέρω ισότητες (A.63), (A.64) και τα προαναφερθέντα ότι

$$
\delta_{n+1}(\pi_n^{\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}(y)) = \delta_{n+1}(\pi_{B_{n+1}(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}^{\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_{n+1}}(y)) := \pi_n^{\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}(z)
$$

[48]Το “ $\pm$ ” τίθεται εδώ λόγω τού συντελεστή $(-1)^q$ στην έκφραση (A.1). Εντούτοις, το ποιο είναι το ακριβές πρόσημο δεν επηρεάζει τα περαιτέρω επιχειρήματα, καθώς αμφότεροι οι $\pm\, \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n$ έχουν τον ίδιον πυρήνα.

και μέσω τής (A.65) ότι

$$\delta_{n+1}(\pi_n^{\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}(y)) = \pi_n^{\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}(\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n(y)),$$

απ' όπου συνάγεται η μεταθετικότητα τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
Z_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\pi_n^{\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"] & H_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \\
Z_n(\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[u, "\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n"] \arrow[r, "\pi_n^{\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}"'] \arrow[d, equal] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[u, "\delta_{n+1}"'] \arrow[d, equal] \\
Z_{n+1}(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) & H_{n+1}(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)
\end{tikzcd}$$

και η ισότητα $\delta_{n+1} = H_n(\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)$ ή, ισοδυνάμως, η

$$\boxed{\delta_n = H_{n-1}(\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) = H_n(\mathbf{F}(\iota_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet), \ \forall n \in \mathbb{Z}.} \tag{A.66}$$

Βήμα 3ο. *Δεύτερη θεμελιώδης βραχεία ακριβής ακολουθία*. Εν συνεχεία, θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet) \xhookrightarrow{\iota_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet}} Z_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{\pi_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet}} H_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\} \tag{A.67}$$

για κάθε $p \in \mathbb{Z}$. Επειδή ο συναρτητής $(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(Z_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet), -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ είναι εξ υποθέσεως μηδενικός, από τη μακρά ακριβή ακολουθία τού εδ. A.4.15 (ii) λαμβάνουμε για κάθε $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ την ακριβή ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r, hook, "\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho.}\mathbf{F}]}"] & \mathbf{F}(B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[dl, "\mathbf{F}(\iota_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)})"'] & \\
& \mathbf{F}(Z_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r, two heads, "\mathbf{F}(\pi_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)})"'] & \mathbf{F}(H_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

οπότε μεταβαίνοντας στα ευθέα αθροίσματα για τα ζεύγη (p,q) με $p+q = n-1$ κατασκευάζουμε την ακριβή ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r, hook, "\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho.}\mathbf{F}]}"] & \mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[dl, "\mathbf{F}(\iota_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)})_n"'] & \\
& \mathbf{F}(Z_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r, two heads, "\mathbf{F}(\pi_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n"'] & \mathbf{F}(H_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd} \tag{A.68}$$

Βήμα 4ο. *Το μεγάλο διάγραμμα*. Εκκινώντας από τις δύο θεμελιώδεις βραχείες ακριβείς ακολουθίες (A.58) και (A.67) καταλήξαμε στις (A.60) και (A.68), αντιστοίχως, καθώς και στη σχέση (A.66) για τον δ_n.

$$\begin{tikzcd}
 & & \vdots \arrow[d] & & \\
 & \mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r, "\psi_n^{(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)}", "\cong"'] \arrow[d, "\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & H_n(\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, equal] \arrow[d, "H_n(\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) = \delta_{n+1}"] & H_{n+1}(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) & \\
 & \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r, "\cong", "\psi_n^{(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)}"'] \arrow[d, "\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & H_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[d, "H_n(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)"] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r, "\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"'] \arrow[d] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, dashed, "\varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"] \arrow[dd, "H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)"'] \arrow[ddr, phantom, "3"] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r] \arrow[dd, hook, "\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho.}\mathbf{F}]}"] & \{0\} \\
 & \{0\} & & & \\
 & H_{n-1}(\mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, equal] & H_n(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\cong", "(\psi_n^{(B_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}),\mathbf{N}_\bullet)})^{-1}"'] \arrow[d, "\delta_n = H_{n-1}(\mathbf{F}(\iota_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) = H_n(\mathbf{F}(\iota_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "4"] & \mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[d, "\mathbf{F}(\iota_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n"] & \\
 & H_{n-1}(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, equal] & H_n(\mathbf{F}(Z_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\cong", "(\psi_n^{(Z_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}),\mathbf{N}_\bullet)})^{-1}"'] \arrow[d] & \mathbf{F}(Z_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[d, two heads, "\mathbf{F}(\pi_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n"] & \\
 & & \vdots & \mathbf{F}(H_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[d] & \\
 & & & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

Στην τρίτη στήλη τού ανωτέρω *μεγάλου διαγράμματος* έχει τοποθετηθεί η (A.68). Η ίδια έχει τοποθετηθεί (αλλά ύστερα από αναβίβαση εσωτερικού δείκτη κατά 1 στο εκάστοτε αριστερό αλυσωτό σύμπλοκο) *και* στην πρώτη στήλη, ενώ στη δεύτερη στήλη έχει ενσωματωθεί η (A.60). Τα αλυσωτά σύμπλοκα $B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ και $Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ έχουν μηδενικούς συνοριακούς τελεστές και οι συναρτητές (A.54) είναι ακριβείς, οπότε εφαρμόζοντας το A.4.13 (iii) για τα ζεύγη αλυσωτών συμπλόκων

$$(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet),\ (Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet),\ (B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet),\ (Z_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)$$

συμπεραίνουμε ότι οι

$$\psi_n^{(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)},\ \psi_n^{(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)},\ \psi_n^{(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)}\ \text{ και }\ \psi_n^{(Z_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)}$$

είναι *ισομορφισμοί*. Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ μπορούμε (ένεκα των προφανών ταυτίσεων) να γράψουμε

$$H_n(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \underset{(\text{A.46})}{=} \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_n,\ \delta_n = H_n(\mathbf{F}(\iota_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet = \mathbf{F}(\iota_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n.$$

Έτσι, από το θεώρημα A.4.5 έπεται ότι τα 1, 2 και 4 είναι μεταθετικά. Κατά το «λήμμα των τεσσάρων» 3.1.7 (ii) ο $\psi^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ είναι *μονομορφισμός*. Εξάλλου, σύμφωνα με την πρόταση 3.1.11 (με τους $\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho}\mathbf{F}]}$ και $\mathbf{F}(\iota_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων g' και g, αντιστοίχως) υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός (συμβολιζόμενος με διακεκομμένες γραμμές) που συμπληρώνει το 3 μεταθετικώς. Αυτός είναι ο *επιμορφισμός* $\varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ ο ορισθείς μέσω τής (A.56) (διότι ο $\varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ πληροί την εν λόγω συνθήκη), έχων ως εικόνα τον

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}) &= (\psi_n^{(B_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}),\mathbf{N}_\bullet)})^{-1}(\mathrm{Im}(H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)))\\
&= (\psi_n^{(B_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}),\mathbf{N}_\bullet)})^{-1}(\mathrm{Ker}(H_n(\mathbf{F}(\iota_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)))\\
&= \mathrm{Ker}(H_n(\mathbf{F}(\iota_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) = \mathrm{Ker}(\mathbf{F}(\iota_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n)\\
&= (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho}\mathbf{F})(H_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n = (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1},
\end{aligned}$$

όπου $\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho}\mathbf{F}]}$ η συνήθης ένθεση. Η προκύπτουσα βραχεία ακολουθία (A.55) τής τρίτης γραμμής είναι ακριβής *και* στον μεσαίο όρο, καθόσον

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}) &= \mathrm{Ker}((\psi_n^{(B_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}),\mathbf{N}_\bullet)})^{-1} \circ H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet))\\
&= \mathrm{Ker}(H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)) = \mathrm{Im}(\psi^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}).
\end{aligned}$$

Το θεώρημα A.4.5 μας πληροφορεί ότι η οικογένεια

$$\left\{ \psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \,\middle|\, (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \right\}$$

αποτελεί φυσικό μετασχηματισμό. Υπολείπεται να αποδειχθεί ότι η οικογένεια

$$\left\{ \varphi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{ζεύγη } (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \\ \text{έχοντα τις προαναφερθείσες ιδιότητες} \end{array} \right\}$$

είναι ωσαύτως φυσικός μετασχηματισμός[49]. Εάν $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{N}_\bullet \longrightarrow \mathbf{N}'_\bullet$ είναι (κατάλληλοι) αλυσωτοί μετασχηματισμοί, αρκεί να δειχθεί ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\varphi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"] \arrow[d, "H_\bullet(\mathbf{F}(f_\bullet,g_\bullet)_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & ((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)))_\bullet \arrow[d, "((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho}\mathbf{F})(H_\bullet(f_{\bullet-1}),H_\bullet(g_\bullet)))_\bullet"] \\
H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\varphi_\bullet^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}"'] & ((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}'_{\bullet-1}), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet)))_\bullet
\end{tikzcd}$$

[49]Εδώ υπονοείται φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των προφανών συναρτητών κατόπιν περιορισμού τού πεδίου ορισμού αυτών στην *υποκατηγορία* τής $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2$, τα αντικείμενα τής οποίας είναι όλα τα ζεύγη $(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)$ που έχουν τις ιδιότητες που αναφέρονται στη διατύπωση τού θεωρήματος.

Προς τούτο θεωρούμε (για οιονδήποτε $n \in \mathbb{Z}$) το (τριδιάστατο) διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
& ((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}'_{\bullet-1}), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet)))_n \arrow[rr, hook] & & \mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_n \\
((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)))_n \arrow[ur, "((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(f_{\bullet-1}), H_\bullet(g_\bullet)))_n"] \arrow[rr, hook] & & \mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[ur, "\mathbf{F}(f_\bullet|_{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)}, H_\bullet(g_\bullet))_n"] & \\
& H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \arrow[uu, "\varphi_\bullet^{(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)}"'] \arrow[rr, "H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}'_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}'_\bullet})_\bullet)"' near start] & & H_n(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}'_\bullet), \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \arrow[uu, "(\psi^{(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}'_\bullet), \mathbf{N}'_\bullet)})^{-1}"'] \\
H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[uu, "\varphi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}"] \arrow[ur, "H_n(\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet)"'] \arrow[rr, "H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)"'] & & H_n(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[uu, "(\psi^{(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)})^{-1}" near end] \arrow[ur, "H_n(\mathbf{F}(f_\bullet|_{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)}, g_\bullet)_\bullet)"'] &
\end{tikzcd}
$$

το οποίο έχει το σχήμα ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Σύμφωνα με το θεώρημα A.4.5, οι πλευρές αυτού οι ευρισκόμενες στο *εμπρόσθιο* και στο *οπίσθιο μέρος του* είναι μεταθετικές (ως υποδιαγράμματά του). Το ίδιο ισχύει και για *τη δεξιά πλευρά του* (λόγω τού ορισμού τού $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}$), καθώς και για *το δάπεδό του*, εάν κανείς λάβει υπ' όψιν το τι συμβαίνει ύστερα από εφαρμογή τής συνθέσεως $H_n(-) \circ \mathbf{F}$ των συναρτητών

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[r, rightsquigarrow, "\mathbf{F}"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "H_n(-)\circ\mathbf{F}"'] & \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[d, rightsquigarrow, "H_n(-)"] \\
& \mathfrak{Mod}_R
\end{tikzcd}
$$

στα ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet) \arrow[r, "(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}'_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}'_\bullet})"] & (B_{\bullet-1}(\mathbf{M}'_\bullet), \mathbf{N}'_\bullet) \\
(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \arrow[u, "(f_\bullet, g_\bullet)"] \arrow[r, "(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & (B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet) \arrow[u, "(f_\bullet|_{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)}, g_\bullet)"']
\end{tikzcd}
$$

Τέλος, η μεταθετικότητα *τής οροφής του* έπεται από τον ορισμό τού αλυσωτού συμπλόκου $((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(f_{\bullet-1}), H_\bullet(g_\bullet)))_\bullet$. Κατά συνέπειαν, *και* η *αριστερή του πλευρά* είναι μεταθετική.

(ii) Εάν, πέραν τής ισχύος των προϋποθέσεων τού (i), υποτεθεί ότι οι $B_m(\mathbf{M}_\bullet)$ και $B_n(\mathbf{N}_\bullet)$ είναι προβολικοί R-μόδιοι για κάθε $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, τότε οι (πρώτες) θεμελιώδεις βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$
\{0\} \longrightarrow Z_m(\mathbf{M}_\bullet) \xhookrightarrow{\ j_m^{\mathbf{M}_\bullet}\ } M_m \xrightarrow{\ \check{d}_m^{\mathbf{M}_\bullet}\ } B_{m-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\}
$$

και

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(\mathbf{N}_\bullet) \xhookrightarrow{j_n^{\mathbf{N}_\bullet}} N_n \xrightarrow{\check{d}_n^{\mathbf{N}_\bullet}} B_{n-1}(\mathbf{N}_\bullet) \longrightarrow \{0\}$$

είναι διασπώμενες. (Βλ. τη συνεπαγωγή (i)⇒(ii) στο θεώρημα 4.2.7.) Τούτο σημαίνει (βάσει τής συνεπαγωγής (iii)⇒(ii) στο θεώρημα 3.1.29) ότι

$$\exists r_m^{\mathbf{M}_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(M_m, Z_m(\mathbf{M}_\bullet)) : r_m^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_m^{\mathbf{M}_\bullet} = \mathrm{id}_{Z_m(\mathbf{M}_\bullet)}$$

και

$$\exists r_n^{\mathbf{N}_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(N_n, Z_n(\mathbf{N}_\bullet)) : r_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ j_n^{\mathbf{N}_\bullet} = \mathrm{id}_{Z_n(\mathbf{N}_\bullet)}.$$

Από την πρόταση A.4.9 έπεται ότι υπάρχουν αλυσωτοί μετασχηματισμοί

$$s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \quad s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} : \mathbf{N}_\bullet \longrightarrow H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet),$$

τέτοιοι ώστε για τον $H_n(\mathbf{F}(s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)$ να ισχύει η ισότητα

$$H_n(\mathbf{F}(s_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, s_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Άρα *και* η βραχεία ακριβής ακολουθία (A.55) είναι διασπώμενη για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. τη συνεπαγωγή (ii)⇒(iii) στο θεώρημα 3.1.29.) Για το ότι, εν τοιαύτη περιπτώσει, οι διασπάσεις (A.57) δεν είναι κατ' ανάγκην φυσικές, βλ. σημείωση A.4.24, καθώς και το (αντι)παράδειγμα 6.1.7. □

A.4.23 Πόρισμα («Κατηγορική εκδοχή τού θεωρήματος καθολικών συντελεστών για μοδίους ομολογίας ως προς τον συναρτητή F»). *Έστω* **F** *ένας εκ δεξιών ακριβής διπλός συναρτητής* (A.34), *συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές. Δοθέντος ενός αλυσωτού συμπλόκου R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ και ενός R-μοδίου N, ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν*

$$(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(B_n(\mathbf{M}_\bullet), N) \cong \{0\} \cong (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(Z_n(\mathbf{M}_\bullet), N)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε, μέσω τού θεωρήματος A.4.22 (*εφαρμοζόμενου με το*[50] $\lfloor N \rfloor_\bullet$ *ως δεύτερο αλυσωτό σύμπλοκο*), *υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\{0\} \to \mathbf{F}(H_n(\mathbf{M}_\bullet), N) \xhookrightarrow{\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,N)}} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, N)_\bullet) \xrightarrow{\varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,N)}} (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet), N) \to \{0\} \quad \text{(A.69)}$$

όπου $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, N)_\bullet := \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \lfloor N \rfloor_\bullet)_\bullet$, $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,N)} := \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\lfloor N \rfloor_\bullet)}$ *και* $\varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,N)} := \varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\lfloor N \rfloor_\bullet)}$.

(ii) *Εάν, συν τοις άλλοις, ο $B_n(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι προβολικός R-μόδιος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε η* (A.69) *είναι διασπώμενη, οπότε*

$$\boxed{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, N)_\bullet) \cong \mathbf{F}(H_n(\mathbf{M}_\bullet), N) \oplus (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet), N), \ \forall n \in \mathbb{Z}.} \quad \text{(A.70)}$$

Ωστόσο, αυτή η διάσπαση (A.70) *δεν είναι κατ' ανάγκην φυσική.*

[50] Βλ. εδάφιο A.2.13.

Απόδειξη. (i) Προφανώς, $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, N)_n = \mathbf{F}(M_n, N)$, $d_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, N)_\bullet} = \mathbf{F}(d_n^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_N)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και

$$H_0(\lfloor N \rfloor_\bullet) = N, \;\; H_q(\lfloor N \rfloor_\bullet) \cong \{0\}, \; \forall q \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}.$$

Οι ανωτέρω προϋποτεθείσες συνθήκες εγγυώνται (μέσω των δύο θεμελιωδών βραχέων ακριβών ακολουθιών) την κατασκευή των ακριβών ακολουθιών

$$\begin{array}{l} \cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), N)_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_N)_\bullet)} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, N)_\bullet) \\ \xrightarrow{H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_N)_\bullet)} H_n(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), N)_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(\mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), N)_\bullet) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

και

$$\begin{array}{l} \{0\} \to (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), N)_n \overset{\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho.}\mathbf{F}]}}{\hookrightarrow} \mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), N)_n \\ \xrightarrow{\mathbf{F}(\iota_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_N)_n} \mathbf{F}(Z_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), N)_n \underset{\mathbf{F}(\pi_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_N)_n}{\twoheadrightarrow} \mathbf{F}(H_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), N)_n \to \{0\}. \end{array}$$

(Πρβλ. (A.60) και (A.68).) Κατόπιν τούτου ακολουθείται *κατά γράμμα* η υπόλοιπη απόδειξη τού (i) τού θεωρήματος A.4.22 με *μοναδική εξαίρεση* στο ότι για τα τέσσερα ζεύγη αλυσωτών συμπλόκων

$$(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \lfloor N \rfloor_\bullet), \; (Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \lfloor N \rfloor_\bullet), \; (B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \lfloor N \rfloor_\bullet), \; (Z_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \lfloor N \rfloor_\bullet)$$

(με αμφότερα τα μέλη καθενός εξ αυτών έχοντα μηδενικούς συνοριακούς τελεστές) εφαρμόζουμε το λήμμα A.4.7 και συμπεραίνουμε ότι καθένας εκ των ομομορφισμών

$$\psi_n^{(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), N)}, \; \psi_n^{(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), N)}, \; \psi_n^{(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), N)} \;\; \text{και} \;\; \psi_n^{(Z_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), N)}$$

είναι *ο ταυτοτικός*.

(ii) Τούτο έπεται άμεσα από το (ii) τού θεωρήματος A.4.22. □

A.4.24 Σημείωση. Μια απευθείας απόδειξη τού πορίσματος A.4.23 στην ειδική περίπτωση όπου ο $\mathbf{F}$ είναι ο συναρτητής «τανυστικό γινόμενο» (επί τού επιπέδου των αλυσωτών συμπλόκων) δίδεται στο θεώρημα 6.1.4. Οι αναγνώστες παροτρύνονται να συγκρίνουν τα *μεγάλα διαγράμματα* των σελίδων 316 και 548 (όπου το πρώτο είναι *εμφανώς* εφαρμογή τού δεύτερου στην εν λόγω ειδική περίπτωση). Το ότι η διάσπαση (A.70) *δεν είναι κατ' ανάγκην φυσική* έχει δειχθεί μέσω τού παραδείγματος 6.1.7.

A.4.25 Πόρισμα («Κατηγορική εκδοχή τού κλασικού θεωρήματος τού Künneth για μοδίους ομολογίας ως προς τον συναρτητή F»). *Έστω* $\mathbf{F}$ *ένας εκ δεξιών ακριβής διπλός συναρτητής* (A.34), *συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς* R *είναι Π.Κ.Ι., τότε, δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων* R*-μοδίων* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n \in \mathbb{Z}}$ *και* $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n \in \mathbb{Z}}$ *, εκ των οποίων το* $\mathbf{M}_\bullet$ *είναι ελεύθερο* (βλ. εδ. 3.5.19), *ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν για οιονδήποτε παγιωμένον ελεύθερο R-μόδιο A ο συναρτητής*

$$\mathbf{F}(A,-) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

(σε επίπεδο R-μοδίων) είναι ακριβής, τότε υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \xhookrightarrow{\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} \bigoplus_{p+q=n-1} (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \longrightarrow \{0\} \tag{A.71}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου $\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ ο αλυσωτός μετασχηματισμός τού λήμματος A.4.3 και

$$\varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} := \left((\psi_n^{(B_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}),\mathbf{N}_\bullet)})^{-1} \circ H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)\right)\check{}\ , \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Επιπροσθέτως, αμφότεροι οι $\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ και $\varphi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ (διατρέχοντες τέτοια ζεύγη $(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)$) είναι φυσικοί μετασχηματισμοί.

(ii) *Εάν, πέραν τής ισχύος των προϋποθέσεων τού* (i), *υποτεθεί ότι το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{N}_\bullet$ είναι ωσαύτως ελεύθερο, τότε η* (A.71) *είναι διασπώμενη, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\boxed{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \oplus (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1}}$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\boxed{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong \left(\bigoplus_{p+q=n} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet))\right) \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n-1} (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet))\right).}$$

Απόδειξη. (i) Αρκεί να επαναληφθεί *κατά γράμμα* η απόδειξη (των τεσσάρων βημάτων στο (i)) τού θεωρήματος A.4.22 *με μόνον δύο διαφοροποιήσεις*:

(α) Λόγω τής προϋποτεθείσας εκ δεξιών ακριβείας τού $\mathbf{F}$ επάγεται για κάθε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ μέσω τής (A.58) η ακριβής ακολουθία

$$\mathbf{F}(Z_p(\mathbf{M}_\bullet), N_q) \xrightarrow{\mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})} \mathbf{F}(M_p, N_q) \xrightarrow{\mathbf{F}(\check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})} \mathbf{F}(B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet), N_q) \longrightarrow \{0\}$$

Επειδή ο $B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι υπομόδιος τού M_{p-1} (με τον τελευταίο εξ υποθέσεως *ελεύθερο*) και ο R Π.Κ.Ι., ο ίδιος ο $B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet)$ οφείλει να είναι *ελεύθερος*. (Βλ. θεώρημα 2.5.47.) Από αυτό έπεται ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία (A.58) είναι *διασπώμενη*. (Βλ. πόρισμα 3.1.31.) Επομένως (σύμφωνα με τη συνεπαγωγή (iii)⇒(ii) στο θεώρημα 3.1.29),

$$\exists r_p^{\mathbf{M}_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(M_p, Z_p(\mathbf{M}_\bullet)) : r_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_p^{\mathbf{M}_\bullet} = \mathrm{id}_{Z_p(\mathbf{M}_\bullet)}$$

και

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathbf{F}(Z_p(\mathbf{M}_\bullet),N_q)} &= \mathbf{F}(\mathrm{id}_{Z_p(\mathbf{M}_\bullet)},\mathrm{id}_{N_q}) = \mathbf{F}(r_p^{\mathbf{M}_\bullet}\circ j_p^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{N_q}) \\ &= \mathbf{F}(r_p^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{N_q})\circ\mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{N_q}). \end{aligned}$$

Άρα ο ομομορφισμός $\mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{N_q})$ διαθέτει εξ αριστερών αντίστροφο, απ' όπου συμπεραίνουμε (μέσω τού λήμματος 2.2.23) ότι είναι *μονομορφισμός* και ότι η ανωτέρω συμπληρώνεται καθιστάμενη βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \mathbf{F}(Z_p(\mathbf{M}_\bullet),N_q) \arrow[r, hook, "\mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{N_q})"] & \mathbf{F}(M_p,N_q) \arrow[dll, "\mathbf{F}(\check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{N_q})", rounded corners, two heads] \\ & \mathbf{F}(B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet),N_q) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

δίδοντάς μας τελικώς την (A.59).

(β) Θεωρούμε εκ νέου τη *μακρά* ακριβή ακολουθία τού εδαφίου A.4.15 (ii) την επαγόμενη μέσω τής (A.67) (με τον $H_q(\mathbf{N}_\bullet)$ στη δεύτερη θέση) και παρατηρούμε ότι ο $Z_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet)$ (ως υπομόδιος τού ελευθέρου M_{p-1}) είναι ελεύθερος και, κατ' επέκταση, *προβολικός*. (Βλ. θεώρημα 2.5.47 και πρόταση 4.2.4.) Ο συναρτητής

$$(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(-,H_q(\mathbf{N}_\bullet)) = \mathscr{L}_1(\mathbf{F}(-,H_q(\mathbf{N}_\bullet))),$$

αποτιμώμενος στον $Z_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet)$, είναι τετριμμένος R-μόδιος (βλ. A.3.13 (i)), οπότε καταλήγουμε στην ακριβή ακολουθία

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet),H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r, hook, "\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]}"] & \mathbf{F}(B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet),H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[dl, "\mathbf{F}(\iota_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)})", rounded corners] \\ & \mathbf{F}(Z_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet),H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r, two heads, "\mathbf{F}(\pi_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)})"'] & \mathbf{F}(H_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet),H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

και από αυτήν στην (A.68).

Σημειωτέον ότι, επειδή προϋποτίθεται η ακρίβεια τού

$$\mathbf{F}(A,-) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

για κάθε *ελεύθερο* R-μόδιο A, οι συνθήκες περί τής ακριβείας των $\mathbf{F}(B_n(\mathbf{M}_\bullet),-)$ και $\mathbf{F}(Z_n(\mathbf{M}_\bullet),-)$ (που απαιτούνται για την απόδειξη τού ότι οι

$$\psi_n^{(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)},\ \psi_n^{(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)},\ \psi_n^{(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)} \ \text{ και } \ \psi_n^{(Z_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)}$$

είναι ισομορφισμοί) για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ικανοποιούνται *αυτομάτως*.

(ii) Υπό την προϋπόθεση ότι *αμφότερα* τα $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{N}_\bullet$ είναι ελεύθερα αλυσωτά σύμπλοκα, *αμφότεροι* οι $B_m(\mathbf{M}_\bullet)$ και $B_n(\mathbf{N}_\bullet)$ είναι ελεύθεροι (και, κατ' επέκταση, προβολικοί) R-μόδιοι (ένεκα τής προτάσεως 4.2.4) για κάθε $(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, οπότε το (ii) τού θεωρήματος A.4.22 είναι άμεσα εφαρμόσιμο. $\square$

Είναι, όπως θα δούμε στο θεώρημα A.4.33, δυνατόν να απαλλαγούμε από την προϋποτεθείσα *ελευθερία* τού ενός (στο (i) τού πορίσματος A.4.25) ή και των δύο εκ των $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{N}_\bullet$ (στο (ii) τού πορίσματος A.4.25) υπό την *πολύ ασθενή συνθήκη* (A.75) (περί τής ακυκληματικότητας τού $(\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$). Τούτο καθίσταται εφικτό κάνοντας χρήση των λεγομένων *ελεύθερων προσεγγίσεων*.

A.4.26 Ορισμός. Έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων (όπου R τυχών μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος). Μια **ελεύθερη προσέγγιση τού** $\mathbf{M}_\bullet$ είναι ένα ζεύγος $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ αποτελούμενο από ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων (και ομομορφισμών R-μοδίων) $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και έναν αλυσωτό μετασχηματισμό $f_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$, ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

(I) Το $\mathbf{M}'_\bullet$ είναι *ελεύθερο*,

(II) ο $f_n : M'_n \longrightarrow M_n$ είναι *επιμορφισμός* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και

(III) ο $H_n(f_\bullet) : H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι *ισομορφισμός* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

A.4.27 Σημείωση. Θα παραθέσουμε μια απόδειξη για την *ύπαρξη* ελεύθερης προσεγγίσεως υπό την προϋπόθεση ότι ο R είναι Π.Κ.Ι. (Βλ. λήμμα[51] A.4.28.) Ωστόσο, αξίζει, εκ παραλλήλου, να επισημανθεί ότι η *ύπαρξη* ελεύθερης προσεγγίσεως μπορεί να αποδειχθεί ακόμη και *χωρίς κανέναν περιορισμό*[52] (είτε για τον R είτε για το εκάστοτε θεωρούμενο αλυσωτό σύμπλοκο).

A.4.28 Λήμμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., τότε κάθε αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ διαθέτει (τουλάχιστον) μία ελεύθερη προσέγγιση $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$.*

Απόδειξη. Έστω τυχών $n \in \mathbb{Z}$. Κατά το πόρισμα 2.5.23 υπάρχει κάποιος *ελεύθερος* R-μόδιος L_n, καθώς και ένας υπομόδιος W_n τού L_n, ούτως ώστε να ισχύει $Z_n(\mathbf{M}_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n) \cong L_n/W_n$. Λόγω αυτού δημιουργείται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow W_n \hookrightarrow L_n \overset{\varpi_n}{\twoheadrightarrow} Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\}\,.$$

Θέτουμε $U_n := \varpi_n^{-1}(B_n(\mathbf{M}_\bullet))$. Ο U_n, όντας υπομόδιος τού ελευθέρου R-μοδίου L_n, είναι *ελεύθερος*, καθότι ο R είναι Π.Κ.Ι. (Βλ. θεώρημα 2.5.47.) Εν συνεχεία θέτουμε

$$\boxed{M'_n := L_n \oplus U_{n-1}} \tag{A.72}$$

και ορίζουμε (για $x \in L_n$ και $y \in U_{n-1}$) τον ομομορφισμό

$$\boxed{d'_n : M'_n \longrightarrow M'_{n-1},\ (x,y) \longmapsto d'_n(x,y) := (y, 0_{U_{n-2}}).}$$

Προφανώς, για κάθε $x \in L_{n+1}$ και κάθε $y \in U_n$ έχουμε

$$(d'_n \circ d'_{n+1})(x,y) = d'_n(d'_{n+1}(x,y)) = d'_n(y, 0_{U_{n-1}}) = (0_{L_{n-1}}, 0_{U_{n-2}}) = 0_{M'_{n-1}},$$

[51] Προσοχή! Ο Spanier στο [86], Chapter 5, §2, σελ. 225, δίδει την απόδειξη τού λήμματος A.4.28 *χωρίς να αναφέρει ρητώς* ότι αυτή ισχύει (ως έχει) *μόνον υπό την προϋπόθεση* ότι ο R είναι Π.Κ.Ι.

[52] Βλ. K. Varadarajan: *Free approximations*, Quaestiones Mathematicae **8**, no. 4, (1985), 315-319.

οπότε $d'_n \circ d'_{n+1} = 0$ και το $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί *αλυσωτό σύμπλοκο*. Επειδή ο U_n (όντας ελεύθερος) είναι (βάσει τής προτάσεως 4.2.4) και *προβολικός*, για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & U_n \arrow[d, "\varpi_n|_{U_n}"] & \\ M_{n+1} \arrow[r, two heads, "\check{d}_{n+1}"'] & B_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

(έχον τη γραμμή του ακριβή λόγω τής επιρριπτικότητας τού $\check{d}_{n+1}$, βλ. (2.11)) υπάρχει $\kappa_n \in \mathrm{Hom}_R(U_n, M_{n+1})$ που το συμπληρώνει μεταθετικώς:

$$\begin{tikzcd} & U_n \arrow[d, "\varpi_n|_{U_n}"] \arrow[dl, dashed, "\kappa_n"'] & \\ M_{n+1} \arrow[r, two heads, "\check{d}_{n+1}"'] & B_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

ήτοι ισχύει $\varpi_n|_{U_n} = \check{d}_{n+1} \circ \kappa_n$. (Βλ. εδ. 4.2.1.) Θέτουμε (για $x \in L_n$ και $y \in U_{n-1}$)

$$\boxed{f_n : M'_n \longrightarrow M_n,\ (x,y) \longmapsto f_n(x,y) := \varpi_n(x) + \kappa_{n-1}(y).}$$

Η ακολουθία $f_\bullet = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί *αλυσωτό μετασχηματισμό* $f_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$. Πράγματι· το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ M_n \arrow[r, "d_n"'] & M_{n-1} \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, διότι για οιαδήποτε $x \in L_n$ και $y \in U_{n-1}$ έχουμε αφ' ενός μεν

$$\begin{aligned} d_n(f_n(x,y)) &= d_n(\varpi_n(x) + \kappa_{n-1}(y)) = d_n(\underbrace{\varpi_n(x)}_{\in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}) + d_n(\kappa_{n-1}(y)) \\ &= \check{d}_n(\kappa_{n-1}(y)) = (\check{d}_n \circ \kappa_{n-1})(y) = \varpi_{n-1}|_{U_{n-1}}(y) = \varpi_{n-1}(y), \end{aligned}$$

αφού $d_n(\varpi_n(x)) = 0_{M_{n-1}}$, αφ' ετέρου δε

$$f_{n-1}(d'_n(x,y)) = f_{n-1}(y, 0_{U_{n-2}}) = \varpi_{n-1}(y).$$

‣ *Το* $\mathbf{M}'_\bullet$ *έχει την ιδιότητα* A.4.26 (I). Κάθε M'_n είναι ελεύθερος R-μόδιος ως *ευθύ άθροισμα* (A.72) δύο ελευθέρων R-μοδίων. (Βλ. πόρισμα 2.5.17.)

‣ *Ο* f_n *έχει την ιδιότητα* A.4.26 (II). Έστω *τυχόν* στοιχείο $u \in M_n$. Προφανώς, $d_n(u) \in B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)$. Λόγω τής επιρριπτικότητας τού ϖ_{n-1} υπάρχει στοιχείο $y \in L_{n-1}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\varpi_{n-1}(y) = d_n(u)$. Σημειωτέον ότι $y \in \varpi_{n-1}^{-1}(B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)) =: U_{n-1}$. Θέτοντας

$$v := u - \kappa_{n-1}(y)$$

παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} d_n(v) &= d_n(u) - d_n(\kappa_{n-1}(y)) = d_n(u) - \check{d}_n(\kappa_{n-1}(y)) \\ &= d_n(u) - \varpi_{n-1}|_{U_{n-1}}(y) = d_n(u) - \varpi_{n-1}(y) = 0_{M_{n-1}}, \end{aligned}$$

οπότε $v \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$. Λόγω τής επιρριπτικότητας τού ϖ_n υπάρχει στοιχείο $x \in L_n$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\varpi_n(x) = v = u - \kappa_{n-1}(y) \Rightarrow f_n(x,y) = \varpi_n(x) + \kappa_{n-1}(y) = u,$$

οπότε ο f_n είναι όντως *επιμορφισμός*.

▸ *Ο $H_n(f_\bullet)$ έχει την ιδιότητα* A.4.26 (III). Προφανώς,

$$Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) := \operatorname{Ker}(d'_n) = \big\{ (x,y) \in L_n \oplus U_{n-1} \big| \, y = 0_{U_{n-1}} \big\} = L_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\}$$

και

$$B_n(\mathbf{M}'_\bullet) := \operatorname{Im}(d'_{n+1}) = \big\{ d'_{n+1}(x,y) \big| \, x \in L_{n+1}, y \in U_n \big\} = U_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\}.$$

Εάν τα $(x_1, 0_{U_{n-1}}), (x_2, 0_{U_{n-1}}) \in L_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\}$ είναι τέτοια, ώστε να ισχύει

$$H_n(f_\bullet)((x_1, 0_{U_{n-1}}) + (U_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\})) = H_n(f_\bullet)((x_2, 0_{U_{n-1}}) + (U_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\})),$$

τότε λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & f_n(x_1, 0_{U_{n-1}}) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = f_n(x_2, 0_{U_{n-1}}) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \\ & \Rightarrow \varpi_n(x_1) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = \varpi_n(x_2) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \Rightarrow \varpi_n(x_1 - x_2) \in B_n(\mathbf{M}_\bullet) \\ & \Rightarrow x_1 - x_2 \in U_n \Rightarrow (x_1, 0_{U_{n-1}}) - (x_2, 0_{U_{n-1}}) \in (U_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\}) = B_n(\mathbf{M}'_\bullet) \\ & \Rightarrow (x_1, 0_{U_{n-1}}) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet) = (x_2, 0_{U_{n-1}}) + B_n(\mathbf{M}'_\bullet), \end{aligned}$$

οπότε ο ομομορφισμός $H_n(f_\bullet)$ είναι *μονομορφισμός*. Έστω τώρα τυχόν στοιχείο $t + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \in H_n(\mathbf{M}_\bullet)$ (όπου $t \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$). Λόγω τής επιρριπτικότητας τού ϖ_n υπάρχει στοιχείο $s \in L_n$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\varpi_n(s) = t$. Κατά συνέπειαν,

$$\begin{aligned} t + B_n(\mathbf{M}_\bullet) &= \varpi_n(s) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = f_n(s, 0_{U_{n-1}}) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \\ &= H_n(f_\bullet)((s, 0_{U_{n-1}}) + (U_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\})), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι ο ομομορφισμός $H_n(f_\bullet)$ είναι *και επιμορφισμός*. □

A.4.29 Σημείωση. Εάν ο δακτύλιος R είναι μια Π.Κ.Ι., $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων και $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ μια ελεύθερη προσέγγιση τού $\mathbf{M}_\bullet$, όπου $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, τότε θέτοντας

$$M''_n := \operatorname{Ker}(f_n) \subseteq M'_n, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

έχουμε $d'_n(M''_n) \subseteq M''_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Πράγματι· για οιοδήποτε $x \in M''_n$, κάνοντας χρήση τού μεταθετικού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, two heads, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_{n-1} \arrow[d, two heads, "f_{n-1}"] \\ M_n \arrow[r, "d_n"'] & M_{n-1} \end{tikzcd}$$

λαμβάνουμε $f_n(x) = 0_{M_n} \Rightarrow d_n(f_n(x)) = f_{n-1}(d'_n(x)) = 0_{M_{n-1}} \Rightarrow d'_n(x) \in M''_{n-1}$. Κατά συνέπειαν, το $\mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου $d''_n := d'_n|_{M''_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, αποτελεί ένα *υποσύμπλοκο* τού $\mathbf{M}'_\bullet$. (Βλ. εδ. 3.2.15.)

A.4.30 Ορισμός. Το υποσύμπλοκο $\mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ το καθορισθέν στο εδάφιο A.4.29 καλείται **πυρήνας** τής ελεύθερης προσεγγίσεως $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ τού $\mathbf{M}_\bullet$. Είναι πρόδηλος ο σχηματισμός μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\{0\} \longrightarrow M''_n \xhookrightarrow{e_n} M'_n \xrightarrow{f_n} M_n \longrightarrow \{0\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου e_n η συνήθης ένθεση και, κατ' επέκταση, μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας αλυσωτών συμπλόκων και αλυσωτών μετασχηματισμών

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''_\bullet \xhookrightarrow{e_\bullet} \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{A.73}$$

που ονομάζεται, ιδιαιτέρως, **βραχεία ακριβής ακολουθία τής ελεύθερης προσεγγίσεως** $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ **τού** $\mathbf{M}_\bullet$.

A.4.31 Λήμμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων και $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ μια ελεύθερη προσέγγισή του, τότε ο πυρήνας $\mathbf{M}''_\bullet$ αυτής είναι ένα ακυκληματικό αλυσωτό σύμπλοκο.* (Βλ. εδ. 3.2.3.)

Αποδειξη. Έστω ότι η

$$\begin{array}{l}
\cdots \longrightarrow H_{n+1}(\mathbf{M}''_\bullet) \xrightarrow{H_{n+1}(e_\bullet)} H_{n+1}(\mathbf{M}'_\bullet) \xrightarrow{H_{n+1}(f_\bullet)} H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \\
\quad H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \xrightarrow{H_n(e_\bullet)} H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} \\
\quad H_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet) \xrightarrow{H_{n-1}(e_\bullet)} \cdots
\end{array}$$

είναι η *μακρά* ακριβής ακολουθία ομολογίας για την (A.73), όπου

$$\partial_n : H_n(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbf{M}''_\bullet)$$

ο συνδετικός ομομορφισμός αυτής. (Βλ. θεώρημα 3.2.13.) Από το 1ο θεώρημα ισομορφισμών 2.3.7 (για τον ∂_{n+1}) λαμβάνουμε $H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet)/\mathrm{Ker}(\partial_{n+1}) \cong \mathrm{Im}(\partial_{n+1})$. Εκ παραλλήλου, η ακρίβεια και η ιδιότητα A.4.26 **(III)** δίδουν:

$$\mathrm{Ker}(\partial_{n+1}) = \mathrm{Im}(H_{n+1}(f_\bullet)) = H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet) \Rightarrow \mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \cong \{0\}.$$

Επειδή $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) = \mathrm{Ker}(H_n(e_\bullet))$, το 1ο θεώρημα ισομορφισμών 2.3.7 (για τον $H_n(e_\bullet)$) μας πληροφορεί ότι $H_n(\mathbf{M}''_\bullet)/\mathrm{Ker}(H_n(e_\bullet)) \cong \mathrm{Im}(H_n(e_\bullet))$, απ' όπου έπεται (εκ νέου λόγω τής ακριβείας και τής A.4.26 **(III)**) ότι

$$H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \cong \mathrm{Im}(H_n(e_\bullet)) = \mathrm{Ker}(H_n(f_\bullet)) = \{0_{H_n(\mathbf{M}'_\bullet)}\},$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οπότε το $\mathbf{M}''_\bullet$ είναι όντως ακυκληματικό. □

A.4.32 Λήμμα. *Έστω* $\mathbf{F}$ *ένας εκ δεξιών ακριβής διπλός συναρτητής* (A.34), *συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι Π.Κ.Ι., για οιονδήποτε παγιωμένον ελεύθερο R-μόδιο A ο συναρτητής*

$$\mathbf{F}(A,-) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

(σε επίπεδο R-μοδίων) είναι ακριβής και εάν, δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet$, $\mathbf{N}_\bullet$, υποτεθεί ότι

(i) *το $\mathbf{M}_\bullet$ είναι ελεύθερο και*

(ii) *τουλάχιστον ένα εκ των $\mathbf{M}_\bullet$, $\mathbf{N}_\bullet$ είναι ακυκληματικό,*

τότε το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ είναι ακυκληματικό.

Απόδειξη. Λόγω των προϋποθέσεών μας είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε το (i) τού πορίσματος A.4.25 καταλήγοντας στη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r, hook, "\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[dll, two heads, rounded corners, "\varphi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"'] \\
(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1} \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd} \tag{A.74}$$

Επειδή τουλάχιστον ένα εκ των $\mathbf{M}_\bullet$, $\mathbf{N}_\bullet$ είναι ακυκληματικό, είτε $H_n(\mathbf{M}_\bullet) \cong \{0\}$ είτε $H_n(\mathbf{N}_\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, πράγμα που σημαίνει ότι

$$\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \cong \{0\} \;\text{ και }\; (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1} \cong \{0\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οπότε από την ακρίβεια τής (A.74) λαμβάνουμε άμεσα την ακυκληματικότητα τού $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$. □

A.4.33 Θεώρημα («Κατηγορική εκδοχή τού θεωρήματος τού Künneth για μοδίους ομολογίας υπεράνω Π.Κ.Ι. ως προς τον συναρτητή F»). *Έστω* $\mathbf{F}$ *ένας εκ δεξιών ακριβής διπλός συναρτητής* (A.34), *συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι Π.Κ.Ι., τότε, δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν για οιονδήποτε παγιωμένον ελεύθερο R-μόδιο A ο συναρτητής*

$$\mathbf{F}(A,-) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

(σε επίπεδο R-μοδίων) είναι ακριβής και εάν, ταυτοχρόνως, το αλυσωτό σύμπλοκο $(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ είναι ακυκληματικό, ήτοι ισχύει

$$\boxed{H_n((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z},} \tag{A.75}$$

(πρβλ. εδ. 3.2.3), *τότε υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{0\} \arrow[r] & \bigoplus\limits_{p+q=n} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r, hook, "\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[dll, two heads, "\chi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"'] & \\
\bigoplus\limits_{p+q=n-1} (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r] & \{0\} & &
\end{tikzcd} \tag{A.76}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου ο αλυσωτός μετασχηματισμός $\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ είναι αυτός τού λήμματος A.4.3 *και όπου αμφότεροι οι*

$$\left\{ \psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \,\middle|\, (\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \right\}, \quad \left\{ \chi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{ζεύγη } (\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \\ \text{έχοντα τις προαναφερθείσες ιδιότητες} \end{array} \right\}$$

είναι φυσικοί μετασχηματισμοί.

(ii) *Η* (A.76) *είναι* (*άνευ άλλων επιπροσθέτων προϋποθέσεων*) *διασπώμενη, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\boxed{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \oplus (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1}}$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\boxed{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong \left(\bigoplus_{p+q=n} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \right) \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n-1} (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \right).}$$

Απόδειξη. **Βήμα 1ο.** Θεωρούμε εν πρώτοις δυο ελεύθερες προσεγγίσεις $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ και $(\mathbf{N}'_\bullet, g_\bullet)$ των $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{N}_\bullet$, αντιστοίχως (η ύπαρξη των οποίων είναι διασφαλισμένη από το λήμμα A.4.28), καθώς και τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''_\bullet \xhookrightarrow{\;e_\bullet\;} \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{\;f_\bullet\;} \mathrel{\mkern-14mu}\rightarrow \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{A.77}$$

και

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{N}''_\bullet \xhookrightarrow{\;k_\bullet\;} \mathbf{N}'_\bullet \xrightarrow{\;g_\bullet\;} \mathrel{\mkern-14mu}\rightarrow \mathbf{N}_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{A.78}$$

αυτών. Επειδή για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ η οικογένεια $\left\{(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(-, N_q)\right\}_{m\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί μια Κ.Σ.Α.Σ.Σ. και για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ ο M'_p (ως ελεύθερος R-μόδιος) είναι (σύμφωνα με την πρόταση 4.2.4) προβολικός, έχουμε $(\mathscr{L}_m^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(M'_p, N_q) \cong \{0\}$ όταν $m \neq 0$. (Βλ. εδ. A.4.14 και A.3.13 (i).) Αυτό σημαίνει, ιδιαιτέρως, ότι

$$(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(M'_p, N_q) \cong \{0\}, \;\; \forall (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}. \tag{A.79}$$

Βάσει των προαναφερθέντων στο εδάφιο A.4.15 (ii), υφίσταται ακριβής ακολουθία:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\{0\} \arrow[r] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(M''_p, N_q) \arrow[r, "(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(e_p,\mathrm{id}_{N_q})"] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(M'_p, N_q) \arrow[r, "(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(f_p,\mathrm{id}_{N_q})"] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(M_p, N_q) \arrow[dlll, "\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]}"'] & \\
\mathbf{F}(M''_p, N_q) \arrow[r, "\mathbf{F}(e_p,\mathrm{id}_{N_q})"'] & \mathbf{F}(M'_p, N_q) \arrow[r, "\mathbf{F}(f_p,\mathrm{id}_{N_q})"'] & \mathbf{F}(M_p, N_q) \arrow[r] & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

η οποία (λόγω των (A.79)) γίνεται

$$\begin{tikzcd} & & \{0\} \arrow[r] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M_p,N_q) \arrow[dlll, "\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho.}\mathbf{F}]}"'] \\ \mathbf{F}(M_p'',N_q) \arrow[r, "\mathbf{F}(e_p,\mathrm{id}_{N_q})"'] & \mathbf{F}(M_p',N_q) \arrow[r, "\mathbf{F}(f_p,\mathrm{id}_{N_q})"'] & \mathbf{F}(M_p,N_q) \arrow[r] & \{0\}. \end{tikzcd}$$

Αυτή διαμελίζεται σε δύο βραχείες ακριβείς ακολουθίες:

$$\{0\} \longrightarrow (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M_p,N_q) \xhookrightarrow{\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho.}\mathbf{F}]}} \mathbf{F}(M_p'',N_q) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_p,\mathrm{id}_{N_q})) \longrightarrow \{0\} \tag{A.80}$$

και

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_p,\mathrm{id}_{N_q})) \hookrightarrow \mathbf{F}(M_p',N_q) \xrightarrow{\mathbf{F}(f_p,\mathrm{id}_{N_q})} \mathbf{F}(M_p,N_q) \longrightarrow \{0\}. \tag{A.81}$$

Μεταβαίνοντας στα ευθέα αθροίσματα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και κάθε ζεύγος δεικτών $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p+q=n$ λαμβάνουμε (μέσω των (A.80) και (A.81)) βραχείες ακριβείς ακολουθίες *αλυσωτών συμπλόκων*

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet \hookrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet'',\mathbf{N}_\bullet)_\bullet \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{A.82}$$

και

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet \hookrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet',\mathbf{N}_\bullet)_\bullet \xrightarrow{\mathbf{F}(f_\bullet,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet} \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet, \tag{A.83}$$

αντιστοίχως. Το $(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ είναι εξ υποθέσεως ακυκληματικό. (Βλ. (A.75).) Κατά το λήμμα A.4.31 ο πυρήνας $\mathbf{M}_\bullet''$ τής (A.77) είναι ακυκληματικό αλυσωτό σύμπλοκο. Κι επειδή οι M_p'' (ως υπομόδιοι των ελευθέρων R-μοδίων M_p') είναι ελεύθεροι (βλ. θεώρημα 2.5.47), το λήμμα A.4.32 (εφαρμοζόμενο για τα αλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{M}_\bullet''$ και $\mathbf{N}_\bullet$) μας πληροφορεί ότι το $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet'',\mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ είναι ωσαύτως ακυκληματικό. Η (μέσω τού θεωρήματος 3.2.13 κατασκευαζόμενη) *μακρά* ακριβής ακολουθία ομολογίας για την (A.82):

$$\begin{tikzcd} & \underbrace{H_n((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}_{\cong\{0\}} \arrow[r] & \underbrace{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet'',\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}_{\cong\{0\}} \arrow[dll] \\ H_n(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet) \arrow[r] & \underbrace{H_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}_{\cong\{0\}} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

δίδει $H_n(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ήτοι την ακυκλικότητα *και* τού αλυσωτού συμπλόκου $\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet$. Γι' αυτό, στη (μέσω τού θεωρήματος 3.2.13 κατασκευαζόμενη) *μακρά* ακριβή ακολουθία ομολογίας για την (A.83):

$$\begin{tikzcd} & \underbrace{H_n(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet)}_{\cong\{0\}} \arrow[r] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet',\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[dll, "H_n(\mathbf{F}(f_\bullet,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)"'] \\ H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r] & \underbrace{H_{n-1}(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet)}_{\cong\{0\}} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

εμφανίζεται για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ο *ισομορφισμός*:

$$\boxed{\alpha_n := H_n(\mathbf{F}(f_\bullet,\ \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) : H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet).} \tag{A.84}$$

Βήμα 2ο. Για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ επάγεται μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow N''_q \overset{k_q}{\hookrightarrow} N'_q \overset{g_q}{\twoheadrightarrow} N_q \longrightarrow \{0\}$$

η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(M'_p, N''_q) \overset{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M'_p}, k_q)}{\hookrightarrow} \mathbf{F}(M'_p, N'_q) \overset{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M'_p}, g_q)}{\twoheadrightarrow} \mathbf{F}(M'_p, N_q) \longrightarrow \{0\}$$

διότι ο M'_p είναι εκ κατασκευής ελεύθερος και ο $\mathbf{F}(M'_p, -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ εξ υποθέσεως ακριβής. Ύστερα από εκ νέου μετάβαση στα ευθέα αθροίσματα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p + q = n$ λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \to \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}''_\bullet)_n \overset{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, k_\bullet)_n}{\hookrightarrow} \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_n \overset{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, g_\bullet)_n}{\twoheadrightarrow} \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_n \to \{0\}$$

καταλήγοντας στη βραχεία ακριβή ακολουθία *αλυσωτών συμπλόκων*:

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}''_\bullet)_\bullet \overset{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, k_\bullet)_\bullet}{\hookrightarrow} \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet \overset{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, g_\bullet)_\bullet}{\twoheadrightarrow} \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{A.85}$$

Κατά το λήμμα A.4.31 ο πυρήνας $\mathbf{N}''_\bullet$ τής (A.78) είναι ακυκληματικό αλυσωτό σύμπλοκο. Κι επειδή οι N''_q (ως υπομόδιοι των ελευθέρων R-μοδίων N'_q) είναι ελεύθεροι (βλ. θεώρημα 2.5.47), το λήμμα A.4.32 (εφαρμοζόμενο για τα αλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{M}'_\bullet$ και $\mathbf{N}''_\bullet$) μας πληροφορεί ότι το $\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}''_\bullet)_\bullet$ είναι ωσαύτως ακυκληματικό. Ως εκ τούτου, στη (μέσω τού θεωρήματος 3.2.13 κατασκευαζόμενη) βραχεία ακριβή ακολουθία ομολογίας για την (A.85):

$$\underbrace{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}''_\bullet)_\bullet)}_{\cong\{0\}} \longrightarrow H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, g_\bullet)_\bullet)} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \longrightarrow \underbrace{H_{n-1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}''_\bullet)_\bullet)}_{\cong\{0\}} \longrightarrow \cdots$$

εμφανίζεται για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ένας *ισομορφισμός*:

$$\boxed{\beta_n := H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, g_\bullet)_\bullet) : H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet).} \tag{A.86}$$

Βήμα 3ο. Από την ιδιότητα A.4.26 (III) των θεωρηθεισών ελευθέρων προσεγγίσεων $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ και $(\mathbf{N}'_\bullet, g_\bullet)$ των $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{N}_\bullet$, αντιστοίχως, γνωρίζουμε ότι αμφότεροι οι

$$H_n(f_\bullet) : H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{M}_\bullet), \quad H_n(g_\bullet) : H_n(\mathbf{N}'_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{N}_\bullet)$$

είναι *ισομορφισμοί* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κατ' επέκταση και οι[53]

$$\mathbf{F}(H_p(f_\bullet), H_q(g_\bullet)) : \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}'_\bullet), H_q(\mathbf{N}'_\bullet)) \longrightarrow \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet))$$

είναι *ισομορφισμοί* για κάθε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (και ύστερα από μετάβαση στα ευθέα αθροίσματα) *και οι*

$$\boxed{\gamma_n := \mathbf{F}(H_\bullet(f_\bullet), H_\bullet(g_\bullet))_n : \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_n \xrightarrow{\cong} \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n.}$$

είναι *ισομορφισμοί* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κατ' αναλογίαν ορίζονται οι *ισομορφισμοί*

$$\boxed{\theta_n : (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_n \xrightarrow{\cong} (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n.} \tag{A.87}$$

όπου $\theta_n := (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(f_\bullet), H_\bullet(g_\bullet))_n$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Βήμα 4ο. Επειδή τα $\mathbf{M}'_\bullet$ και $\mathbf{N}'_\bullet$ είναι *ελεύθερα* αλυσωτά σύμπλοκα, εφαρμόζοντας το πόρισμα A.4.25 για αυτά λαμβάνουμε *διασπώμενες* βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_n \xhookrightarrow{\psi_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\varphi_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}} (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_{n-1} \longrightarrow \{0\}$$

όπου αμφότεροι οι $\psi_\bullet^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}$ και $\varphi_\bullet^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}$ (διατρέχοντες τέτοιου είδους ζεύγη αλυσωτών συμπλόκων $(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)$) είναι φυσικοί μετασχηματισμοί. Εν συνεχεία, θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τον ομομορφισμό

$$\chi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} : H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \longrightarrow (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_{n-1}$$

τον οριζόμενον (μέσω των (A.84), (A.86) και (A.87)) ως εξής:

$$\boxed{\chi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} := \theta_{n-1} \circ \varphi_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)} \circ \beta_n^{-1} \circ \alpha_n^{-1},}$$

καθώς και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_n \arrow[r, "\psi_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}"] \arrow[d, "\gamma_n"', "\cong"] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\varphi_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}"] \arrow[d, "\cong"', "\alpha_n\circ\beta_n"] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\theta_{n-1}"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r, "\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"'] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\chi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"'] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1} \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

[53]Θεωρώντας τούς αντιστρόφους $H_p(f_\bullet)^{-1}$ και $H_q(g_\bullet)^{-1}$ των ισομορφισμών $H_p(f_\bullet)$ και $H_q(g_\bullet)$, αντιστοίχως, λαμβάνουμε

$$\mathbf{F}(H_p(f_\bullet) \circ H_p(f_\bullet)^{-1}, H_q(g_\bullet) \circ H_q(g_\bullet)^{-1}) = \mathbf{F}(\mathrm{id}_{H_p(\mathbf{M}_\bullet)}, \mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)}) = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet))}$$

και $\mathbf{F}(H_p(f_\bullet)^{-1} \circ H_p(f_\bullet), H_q(g_\bullet)^{-1} \circ H_q(g_\bullet)) = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}'_\bullet), H_q(\mathbf{N}'_\bullet))}$. Κατά συνέπειαν, ο $\mathbf{F}(H_p(f_\bullet), H_q(g_\bullet))$ είναι όντως *ισομορφισμός*, έχων ως αντίστροφό του τον $\mathbf{F}(H_p(f_\bullet)^{-1}, H_q(g_\bullet)^{-1})$.

Το δεξιό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι μεταθετικό, διότι

$$\chi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \circ (\alpha_n \circ \beta_n) = (\theta_{n-1} \circ \varphi_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)} \circ \beta_n^{-1} \circ \alpha_n^{-1}) \circ (\alpha_n \circ \beta_n) = \theta_{n-1} \circ \varphi_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}.$$

Επειδή η οικογένεια $\left\{ \psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \,\middle|\, (\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \right\}$ αποτελεί φυσικό μετασχηματισμό και $\alpha_n \circ \beta_n = H_n(\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet)$, το αριστερό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι ωσαύτως μεταθετικό. (Πρβλ. με απόδειξη τού θεωρήματος A.4.5.) Αυτό σημαίνει ότι το ανωτέρω διάγραμμα είναι (καθ' ολοκληρίαν) μεταθετικό. Κι επειδή η άνω του γραμμή είναι μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία και τα τρία κατακόρυφα βέλη δηλούν *ισομορφισμούς*, η κάτω του γραμμή οφείλει να είναι ωσαύτως μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία και η οικογένεια $\chi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$, για τα ζεύγη $(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)$ που πληρούν τις προαναφερθείσες συνθήκες (στην αρχική διατύπωση τού θεωρήματος), φυσικός μετασχηματισμός. Άρα αμφότεροι οι ισχυρισμοί (i) και (ii) αληθεύουν. □

• **Ερώτημα Γ**. Το θεώρημα A.4.33 ισχύει *υπό την πολύ ασθενή συνθήκη* (A.75). Ωστόσο, σε αυτό οι δακτύλιοι αναφοράς είναι Π.Κ.Ι. Μπορεί να επιτευχθεί *κάποια γενίκευσή του* (διατηρώντας την ίδια συνθήκη) *για μια ευρύτερη κλάση δακτυλίων αναφοράς*; Το εν λόγω ερώτημα έχει απαντηθεί καταφατικώς από τους Cartan και Eilenberg στο σύγγραμμά τους [29] (βλ. §XVII.5, σελ. 372-374) για *κληρονομικούς δακτυλίους αναφοράς* (χωρίς, όμως, να γίνεται μνεία περί τού εάν και κατά πόσον εξακολουθεί να υφίσταται διάσπαση τού $H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$). Το αποτέλεσμά τους προέκυψε από τη *φασματική ακολουθία*[54] (τού πρώτου τεταρτημορίου)

$$\boxed{E^2_{p,q} = \bigoplus_{s+t=q} \mathbf{F}(H_s(\mathbf{M}_\bullet), H_t(\mathbf{N}_\bullet))_p \underset{p}{\Longrightarrow} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet).}$$

Εδώ, αντί μιας (έστω και συνοπτικής) παρουσιάσεως των θεωρητικών προαπαιτούμενων γνώσεων περί φασματικών ακολουθιών προτιμήθηκε η παράθεση μιας λεπτομερούς *στοιχειώδους* αποδείξεως[55], οφειλόμενης στον Kelly[56] (αλλά προσαρμοσθείσας στην κατηγορική γλώσσα des grands maîtres) η οποία έχει τα εξής πλεονεκτήματα: α) Διατηρεί τις «οικείες μας» τεχνικές (σε ό,τι αφορά στον χειρισμό βραχέων και μακρών ακριβών ακολουθιών) και χρησιμοποιεί (αντί ελευθέρων) *προβολικές προσεγγίσεις*[57]. β) Ενσωματώνει *και* τη *διάσπαση* τού $H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$ χωρίς την προσθήκη νέων προϋποθέσεων. γ) Επιτρέπει ποικίλες *γενικεύσεις*.

[54] Πρβλ. Mac Lane [33], §XII.12, σελ. 400-403, Rotman [35], Theorem 10.90, σελ. 686-687, και Weibel [36], Theorem 5.6.4, σελ. 143-144.

[55] Βλ. G.M. Kelly: *Observations on the Künneth theorem*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **59** (1963), 575-587.

[56] Kelly, *Gregory Maxwell* (5/6/1930-26/1/2007). Αυστραλός μαθηματικός. Διδακτορική διατριβή επί θεμάτων τής Ομολογικής Άλγεβρας το 1957 στο Πανεπιστήμιο τού Cambridge (υπό την επίβλεψη των S. Wylie και M.G. Barratt). Από το 1957 έως το 1966 δίδαξε στο Πανεπιστήμιο τού Sydney. Επισκέπτης ερευνητής κατά τη διετία 1963-1965 στα Πανεπιστήμια Tulane και Illinois, όπου από κοινού με τον S. Eilenberg ανέπτυξε και μετεξέλιξε την έννοια τής *εμπλουτισμένης κατηγορίας* («enriched category»). Το 1973 εξελέγη τακτικός καθηγητής τού Πανεπιστημίου τού Sydney, στο οποίο και παρέμεινε μέχρι τη συνταξιοδότησή του το 1994. Ο Kelly συνέγραψε άνω των 90 ερευνητικών άρθρων επί τής Θεωρίας Κατηγοριών και των εφαρμογών αυτής στη Συνδυαστική και στην Αλγεβρική Τοπολογία. Ετιμήθη με το Centenary Medal τής αυστραλιανής κυβερνήσεως. (Δεν θα πρέπει να συγχέεται με τον αμερικανό τοπολόγο, καθηγητή τού Berkeley και συγγραφέα τού γνωστού βιβλίου με τίτλο *General Topology,* John L. Kelley (1916-1999).)

[57] Ο όρος *free approximation* (ελεύθερη προσέγγιση) πρωτοεμφανίζεται στα βιβλία των Spanier [86] (σελ. 225-226) και Hu [21] (σελ. 167) και έχει πλέον καθιερωθεί και στη σχετική αρθρογραφία (π.χ., τού K. Varadarajan και άλλων), όπως και ο αντίστοιχος όρος *projective approximation* (προβολική προσέγγιση). Στο συγκεκριμένο άρθρο του ο Kelly χρησιμοποιεί (μάλλον ατυχώς) αντί τού τελευταίου τον όρο *projective development* (προβολικό ανάπτυγμα).

G.M. Kelly

A.4.34 Ορισμός. Έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων (όπου R τυχών μη τετρ. μεταθετικός δακτύλιος). Μια **προβολική προσέγγιση τού** $\mathbf{M}_\bullet$ είναι ένα ζεύγος $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ αποτελούμενο από ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων (και ομομορφισμών R-μοδίων) $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και έναν αλυσωτό μετασχηματισμό $f_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$, ούτως ώστε να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

(I) Το $\mathbf{M}'_\bullet$ είναι **προβολικό** (ήτοι ο M_n είναι προβολικός, $\forall n \in \mathbb{Z}$, βλ. εδ. 4.2.14),

(II) ο $f_n : M'_n \longrightarrow M_n$ είναι *επιμορφισμός* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και

(III) ο $H_n(f_\bullet) : H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι *ισομορφισμός* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

A.4.35 Λήμμα. *Εάν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι κληρονομικός* (βλ. εδ. 4.2.12), *τότε κάθε αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ διαθέτει (τουλάχιστον) μία προβολική προσέγγιση $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$.*

Απόδειξη. Έστω τυχών $n \in \mathbb{Z}$. Κατά το πόρισμα 2.5.23 υπάρχει κάποιος *ελεύθερος* R-μόδιος L_n, καθώς και ένας υπομόδιος W_n τού L_n, ούτως ώστε να ισχύει $Z_n(\mathbf{M}_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n) \cong L_n/W_n$. Λόγω αυτού δημιουργείται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow W_n \hookrightarrow L_n \overset{\varpi_n}{\twoheadrightarrow} Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\}\,.$$

Θέτουμε

$$U_n := \mathrm{Ker}(\pi_n \circ \varpi_n) = \varpi_n^{-1}(B_n(\mathbf{M}_\bullet)) \subseteq L_n,$$

όπου $\pi_n := \pi_n^{\mathbf{M}_\bullet} : Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \twoheadrightarrow H_n(\mathbf{M}_\bullet)$ ο φυσικός επιμορφισμός. Ο L_n (ως ελεύθερος R-μόδιος) είναι προβολικός (Βλ. πρόταση 4.2.4.) Ο U_n, όντας υπομόδιος τού προβολικού R-μοδίου L_n, είναι *προβολικός*, καθότι ο R είναι κληρονομικός. Εν συνεχεία θέτουμε

$$\boxed{M'_n := L_n \oplus U_{n-1}} \tag{A.88}$$

και ορίζουμε (για $x \in L_n$ και $y \in U_{n-1}$) τον ομομορφισμό

$$\boxed{d'_n : M'_n \longrightarrow M'_{n-1},\ (x,y) \longmapsto d'_n(x,y) := (y, 0_{U_{n-2}}).}$$

Προφανώς, για κάθε $x \in L_{n+1}$ και κάθε $y \in U_n$ έχουμε

$$(d'_n \circ d'_{n+1})(x,y) = d'_n(d'_{n+1}(x,y)) = d'_n(y, 0_{U_{n-1}}) = (0_{L_{n-1}}, 0_{U_{n-2}}) = 0_{M'_{n-1}},$$

οπότε $d'_n \circ d'_{n+1} = 0$ και το $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί *αλυσωτό σύμπλοκο*. Επειδή ο U_n είναι προβολικός, για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & U_n \arrow[d, "\varpi_n|_{U_n}"] & \\ M_{n+1} \arrow[r, two heads, "\check{d}_{n+1}"'] & B_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

(έχον τη γραμμή του ακριβή λόγω τής επιρριπτικότητας τού $\check{d}_{n+1}$) υπάρχει ομομορφισμός $\kappa_n \in \mathrm{Hom}_R(U_n, M_{n+1})$ που το συμπληρώνει μεταθετικώς:

$$\begin{tikzcd} & U_n \arrow[d, "\varpi_n|_{U_n}"] & \\ M_{n+1} \arrow[r, two heads, "\check{d}_{n+1}"'] & B_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

ήτοι ισχύει $\pi_n|_{U_n} = \check{d}_{n+1} \circ \kappa_n$. (Βλ. εδ. 4.2.1.) Θέτουμε (για $x \in L_n$ και $y \in U_{n-1}$)

$$\boxed{f_n : M'_n \longrightarrow M_n,\ (x, y) \longmapsto f_n(x, y) := \pi_n(x) + \kappa_{n-1}(y).}$$

Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι η ακολουθία $f_\bullet = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί *αλυσωτό μετασχηματισμό* $f_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$. Σημειωτέον ότι το $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι προβολικό, καθώς κάθε M'_n είναι προβολικός R-μόδιος ως *ευθύ άθροισμα* (A.88) δύο προβολικών R-μοδίων. (Βλ. πρόταση 4.2.13.) Άρα το $\mathbf{M}'_\bullet$ έχει την ιδιότητα A.4.34 **(I)**. Οι αποδείξεις για το ότι ο $f_\bullet$ έχει την ιδιότητα A.4.34 **(II)** και για το ότι ο $H_n(f_\bullet)$ έχει την ιδιότητα A.4.34 **(III)** ταυτίζονται με τις αντίστοιχες στο λήμμα A.4.28. □

A.4.36 Σημείωση. Εάν ο δακτύλιος R είναι κληρονομικός, $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων και $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ μια προβολική προσέγγιση τού $\mathbf{M}_\bullet$, όπου $\mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, τότε θέτοντας $M''_n := \mathrm{Ker}(f_n) \subseteq M'_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, λαμβάνουμε $d'_n(M''_n) \subseteq M''_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Πράγματι· για οιοδήποτε $x \in M''_n$, κάνοντας χρήση τού μεταθετικού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, two heads, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M'_{n-1} \arrow[d, two heads, "f_{n-1}"] \\ M_n \arrow[r, "d_n"'] & M_{n-1} \end{tikzcd}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$f_n(x) = 0_{M_n} \Rightarrow d_n(f_n(x)) = f_{n-1}(d'_n(x)) = 0_{M_{n-1}} \Rightarrow d'_n(x) \in M''_{n-1}.$$

Κατά συνέπειαν, το $\mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου $d''_n := d'_n|_{M''_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, αποτελεί ένα *υποσύμπλοκο* τού $\mathbf{M}'_\bullet$. (Βλ. εδ. 3.2.15.)

A.4.37 Ορισμός. Το υποσύμπλοκο $\mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ το καθορισθέν στο εδ. A.4.36 καλείται **πυρήνας** τής προβολικής προσεγγίσεως $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ τού $\mathbf{M}_\bullet$. Είναι πρόδηλος ο σχηματισμός μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\{0\} \longrightarrow M''_n \xhookrightarrow{\;e_n\;} M'_n \xrightarrow{\;f_n\;}\!\!\!\!\rightarrow M_n \longrightarrow \{0\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου e_n η συνήθης ένθεση και, κατ' επέκταση, μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας αλυσωτών συμπλόκων και αλυσωτών μετασχηματισμών

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''_\bullet \xhookrightarrow{\;e_\bullet\;} \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{\;f_\bullet\;}\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{A.89}$$

που ονομάζεται, ιδιαιτέρως, **βραχεία ακριβής ακολουθία τής προβολικής προσεγγίσεως $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ τού $\mathbf{M}_\bullet$**.

A.4.38 Λήμμα. *Εάν ο R είναι κληρονομικός, $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων και $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ μια προβολική προσέγγισή του, τότε ο πυρήνας $\mathbf{M}''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ αυτής είναι ένα ακυκληματικό αλυσωτό σύμπλοκο.*

Αποδειξη. Πανομοιότυπη εκείνης τού λήμματος A.4.31. □

A.4.39 Λήμμα. *Έστω $\mathbf{F}$ ένας εκ δεξιών ακριβής διπλός συναρτητής (A.34), συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές. Εάν ο R είναι κληρονομικός και εάν, δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{N}_\bullet$, υποτεθεί ότι*

(i) *το $\mathbf{M}_\bullet$ (και αντιστοίχως, το $\mathbf{N}_\bullet$) είναι προβολικό και*

(ii) *το $\mathbf{M}_\bullet$ (και αντιστοίχως, το $\mathbf{N}_\bullet$) είναι ακυκληματικό,*

τότε το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ είναι ακυκληματικό.

Αποδειξη. Αρκεί να παρατεθεί η απόδειξη στην περίπτωση κατά την οποία το $\mathbf{M}_\bullet$ είναι ακυκληματικό[58]. Θεωρούμε τις *θεμελιώδεις* βραχείες ακριβείς ακολουθίες[59]

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \overset{j_n}{\hookrightarrow} M_n \overset{\check{d}_n}{\twoheadrightarrow} B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\} \tag{A.90}$$

και

$$\{0\} \longrightarrow B_n(\mathbf{M}_\bullet) \overset{\iota_n}{\hookrightarrow} Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \overset{\pi_n}{\twoheadrightarrow} H_n(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\}. \tag{A.91}$$

Ο $B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)$, όντας υπομόδιος τού προβολικού R-μοδίου M_{n-1}, οφείλει να είναι *προβολικός*, καθόσον ο R είναι εξ υποθέσεως κληρονομικός. Από τη συνεπαγωγή (i)⇒(ii) στο θεώρημα 4.2.7 γνωρίζουμε ότι η (A.90) είναι *διασπώμενη* και, ως εκ τούτου, ότι

$$[\exists \alpha_n \in \mathrm{Hom}_R(M_n, Z_n(\mathbf{M}_\bullet)) : \alpha_n \circ j_n = \mathrm{id}_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}]$$

και

$$[\exists \beta_{n-1} \in \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet), M_n) : \check{d}_n \circ \beta_{n-1} = \mathrm{id}_{B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}]$$

[58] Υποτιθεμένης τής ακυκληματικότητας τού $\mathbf{N}_\bullet$, η απόδειξη είναι παρόμοια.

[59] Εδώ, αντί των $\pi_n^{\mathbf{M}_\bullet}$, $\iota_n^{\mathbf{M}_\bullet}$, $j_n^{\mathbf{M}_\bullet}$, $\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}$ (όπως στη σελίδα 521) γράφουμε απλώς π_n, ι_n, j_n και $\check{d}_n$, αντιστοίχως.

με $\alpha_n \circ \beta_{n-1} = 0$ και

$$j_n \circ \alpha_n + \beta_{n-1} \circ \check{d}_n = \mathrm{id}_{M_n}. \tag{A.92}$$

(Βλ. θεώρημα 3.1.29.) Από το ότι $H_n(\mathbf{M}_\bullet) \cong \{0\}$ προκύπτει (μέσω τής (A.91)) *ισομορφισμός*

$$\iota_n := \iota_n^{\mathbf{M}_\bullet} : B_n(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{\cong} Z_n(\mathbf{M}_\bullet), \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε ως h_n τη σύνθεση

$$\begin{tikzcd}
M_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[rrr, bend right, "h_n := \beta_n \circ \iota_n^{-1} \circ \alpha_n"'] & Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\iota_n^{-1}"] & B_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\beta_n"] & M_{n+1}
\end{tikzcd}$$

Η $(h_n : M_n \longrightarrow M_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ αποτελεί μια *συστέλλουσα ομοτοπία* για το $\mathbf{M}_\bullet$. (Βλ. εδ. 3.5.2.) Πράγματι· χρησιμοποιώντας τό κάτωθι διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[dl, "h_{n+1}"'] \arrow[d, shift right, "0"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}_{M_{n+1}}"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "0"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}_{M_n}"] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "0"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}_{M_{n-1}}"] & \cdots \arrow[dl, "h_{n-2}"'] \\
\cdots \arrow[r, "d_{n+2}"] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & M_n \arrow[r, "d_n"] & M_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathrm{id}_{M_n} = \mathrm{id}_{M_n} - 0 = d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n, \ \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.93}$$

Έστω τυχόν $x \in M_n$. Θα προβούμε σε υπολογισμούς:

$$\begin{aligned} d_{n+1} \circ h_n &= (j_n \circ \iota_n \circ \check{d}_{n+1}) \circ (\beta_n \circ \iota_n^{-1} \circ \alpha_n) \\ &= j_n \circ \iota_n \circ (\underbrace{\check{d}_{n+1} \circ \beta_n}_{=\mathrm{id}_{B_n(\mathbf{M}_\bullet)}}) \circ \iota_n^{-1} \circ \alpha_n = j_n \circ (\underbrace{\iota_n \circ \iota_n^{-1}}_{=\mathrm{id}_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}}) \circ \alpha_n = j_n \circ \alpha_n \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} h_{n-1} \circ d_n &= (\beta_{n-1} \circ \iota_{n-1}^{-1} \circ \alpha_{n-1}) \circ (j_{n-1} \circ \iota_{n-1} \circ \check{d}_n) \\ &= \beta_{n-1} \circ \iota_{n-1}^{-1} \circ (\underbrace{\alpha_{n-1} \circ j_{n-1}}_{=\mathrm{id}_{Z_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}}) \circ \iota_{n-1} \circ \check{d}_n = \beta_{n-1} \circ (\underbrace{\iota_{n-1}^{-1} \circ \iota_{n-1}}_{=\mathrm{id}_{B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}}) \circ \check{d}_n = \beta_{n-1} \circ \check{d}_n. \end{aligned}$$

Βάσει αυτών, $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = j_n \circ \alpha_n + \beta_{n-1} \circ \check{d}_n \underset{(A.92)}{=} \mathrm{id}_{M_n}$ και η (A.93) είναι όντως αληθής. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathbf{M}_\bullet$ είναι ένα συσταλτό αλυσωτό σύμπλοκο με

$$(h_p)_{p \in \mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet} \simeq \mathbf{0}_\bullet \underset{\text{A.2.14}}{\Longrightarrow} [(\mathbf{F}(h_p, \mathrm{id}_{N_q}))_{p \in \mathbb{Z}} : \mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{N_q})_\bullet \simeq \mathbf{F}(\mathbf{0}_\bullet, \mathrm{id}_{N_q})_\bullet = \mathbf{0}_\bullet, \forall q \in \mathbb{Z}]$$

$$\Longrightarrow [(\mathbf{F}(h_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_{n \in \mathbb{Z}} : \mathrm{id}_{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet} = \mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet \simeq \mathbf{F}(\mathbf{0}_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet = \mathbf{0}_\bullet]$$

(ύστερα από μετάβαση στα ευθέα αθροίσματα)

$$\Longrightarrow [\mathrm{id}_{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)} \underset{3.2.7}{=} H_n(\mathrm{id}_{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet}) \underset{3.5.7}{=} H_n(\mathbf{0}_\bullet) = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}]$$

$$\Longrightarrow [H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong \{0\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}],$$

οπότε το $\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ είναι ακυκληματικό. □

A.4.40 Λήμμα. *Έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων. Εάν αυτό είναι προβολικό, τότε υπάρχει αλυσωτός μετασχηματισμός*

$$\rho_\bullet = \rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),$$

τέτοιος ώστε το ζεύγος $(\mathbf{M}_\bullet, \rho_\bullet)$ να αποτελεί μια προβολική προσέγγιση τού αλυσωτού συμπλόκου $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet) = (H_n(\mathbf{M}_\bullet), \vartheta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (όπου $\vartheta_n = 0$, βλ. A.2.4 (vii)). *Επιπλέον, εν τοιαύτη περιπτώσει ισχύει $H_n(\rho_\bullet) = \mathrm{id}_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τήν (A.91) και τη διάσπαση τής (A.90) (όπως στην απόδειξη τού λήμματος A.4.39) ορίζουμε ως ρ_n τη σύνθεση

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & B_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\iota_n"] & Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[rr, "\pi_n"] & & H_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r] & \{0\} \\
& & & M_n \arrow[ul, "\alpha_n"] \arrow[ur, "\rho_n := \pi_n\circ\alpha_n"'] & &
\end{tikzcd}$$

Αρχικώς θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\rho_\bullet = \{\rho_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί *αλυσωτό μετασχηματισμό* $\rho_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$. Προς τούτο θεωρούμε το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "\rho_{n+1}"'] & M_n \arrow[d, "\rho_n"] \\
H_{n+1}(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, "\vartheta_{n+1}"] & H_n(\mathbf{M}_\bullet)
\end{tikzcd}$$

Από τη μια μεριά έχουμε προδήλως

$$\vartheta_{n+1} \circ \rho_{n+1} = 0$$

και από την άλλη

$$\rho_n \circ d_{n+1} = (\pi_n \circ \alpha_n) \circ (j_n \circ \iota_n \circ \check{d}_{n+1}) = \pi_n \circ (\underbrace{\alpha_n \circ j_n}_{=\mathrm{id}_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}}) \circ \iota_n \circ \check{d}_{n+1} = (\underbrace{\pi_n \circ \iota_n}_{=0}) \circ \check{d}_{n+1} = 0.$$

• *Το $\mathbf{M}_\bullet$ έχει την ιδιότητα* A.4.34 **(I)**. Τούτο συμπεριλαμβάνεται στις υποθέσεις.

• *Ο ρ_n έχει την ιδιότητα* A.4.34 **(II)**. Έστω *τυχόν* στοιχείο $x + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \in H_n(\mathbf{M}_\bullet)$, όπου $x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$. Επειδή

$$x + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = \alpha_n(j_n(x)) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = \alpha_n(x) + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = \pi_n(\alpha_n(x)) = \rho_n(x), \quad \text{(A.94)}$$

ο ομομορφισμός ρ_n είναι όντως *επιμορφισμός*.

• *Ο $H_n(\rho_\bullet)$ έχει την ιδιότητα* A.4.34 **(III)**. Επειδή το $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ έχει μηδενικούς συνοριακούς τελεστές, έχουμε

$$H_n(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)) = H_n(\mathbf{M}_\bullet)$$

και για τον

$$H_n(\rho_\bullet) : H_n(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow H_n(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)) = H_n(\mathbf{M}_\bullet)$$

$$x + B_n(\mathbf{M}_\bullet) \longmapsto H_n(\rho_\bullet)(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) := \rho_n(x) + \underbrace{B_n(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet))}_{\cong\{0\}},$$

λαμβάνουμε

$$H_n(\rho_\bullet)(x + B_n(\mathbf{M}_\bullet)) = \rho_n(x) \underset{(\text{A.94})}{=} x + B_n(\mathbf{M}_\bullet).$$

Επομένως ισχύει $H_n(\rho_\bullet) = \mathrm{id}_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)}$ και ο ομομορφισμός $H_n(\rho_\bullet)$ είναι ο ταυτοτικός *ισομορφισμός* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

A.4.41 Θεώρημα. *Έστω* $\mathbf{F}$ *ένας εκ δεξιών ακριβής διπλός συναρτητής (A.34), συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές. Δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων* R*-μοδίων* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ *και* $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ *, όπου ο* R *είναι κληρονομικός, θεωρούμε προβολικές προσεγγίσεις αυτών* $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ *και* $(\mathbf{N}'_\bullet, g_\bullet)$ *(η ύπαρξη των οποίων είναι εξασφαλισμένη από το λήμμα A.4.35). Τότε υφίσταται μακρά ακριβής ακολουθία τής μορφής:*

$$\begin{array}{l} \cdots \to H_n((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \longrightarrow H_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \longrightarrow H_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \\ \longrightarrow H_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \to \cdots \end{array} \qquad \text{(A.95)}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες (αλυσωτών συμπλόκων)

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''_\bullet \xhookrightarrow{e_\bullet} \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \qquad \text{(A.96)}$$

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{N}''_\bullet \xhookrightarrow{k_\bullet} \mathbf{N}'_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{N}_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \qquad \text{(A.97)}$$

των προβολικών προσεγγίσεων $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ και $(\mathbf{N}'_\bullet, g_\bullet)$, αντιστοίχως. (Βλ. εδ. A.4.37.) Από την (A.97) δημιουργούνται για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ βραχείες ακριβείς ακολουθίες R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων $\{0\} \to N''_q \overset{k_q}{\hookrightarrow} N'_q \overset{g_q}{\twoheadrightarrow} N_q \to \{0\}$, μέσω δε αυτών μια μακρά ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{array}{l} \cdots \xrightarrow{\partial_2^{[\mathscr{L}_\bullet^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F}]}} (\mathscr{L}_1^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M'_p, N''_q) \xrightarrow{(\mathscr{L}_1^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(\mathrm{id}_{M'_q}, k_q)} (\mathscr{L}_1^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M'_p, N'_q) \xrightarrow{(\mathscr{L}_1^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(\mathrm{id}_{M'_p}, g_q)} (\mathscr{L}_1^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M'_p, N_q) \\ \xrightarrow{\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F}]}} \mathbf{F}(M'_p, N''_q) \xrightarrow[\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M'_p}, k_q)]{} \mathbf{F}(M'_p, N'_q) \xrightarrow[\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M'_p}, g_q)]{} \mathbf{F}(M'_p, N_q) \to \{0\} \end{array}$$

(Βλ. A.4.20 (ii).) Επειδή ο M'_p είναι εξ υποθέσεως προβολικός R-μόδιος για κάθε $p \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$(\mathscr{L}_1^{\delta\epsilon\acute{\upsilon}\tau.}\mathbf{F})(M'_p, N_q) := \mathscr{L}_1\mathbf{F}(M'_p, -)(N_q) \cong \mathscr{L}_1\mathbf{F}(-, N_q)(M'_p) \cong \{0\}.$$

(Βλ. (A.51) και A.3.13 (i).) Έτσι, προκύπτει η *βραχεία* ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \to \mathbf{F}(M'_p, N''_q) \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M'_p}, k_q)} \mathbf{F}(M'_p, N'_q) \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M'_p}, g_q)} \mathbf{F}(M'_p, N_q) \to \{0\}$$

και (ύστερα από μετάβασή μας σε ευθέα αθροίσματα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p + q = n$) η βραχεία ακριβής ακολουθία *αλυσωτών συμπλόκων*

$$\mathbf{0}_\bullet \to \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}''_\bullet)_\bullet \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, k_\bullet)_\bullet} \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, g_\bullet)_\bullet} \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \to \mathbf{0}_\bullet \qquad \text{(A.98)}$$

Το $\mathbf{N}''_\bullet$ (όντας υποσύμπλοκο τού $\mathbf{N}'_\bullet$) είναι προβολικό (καθώς ο R είναι κληρονομικός). Εξάλλου, εύκολα δείχνει κανείς (χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ανάλογα εκείνων που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη τού λήμματος A.4.38) ότι το $\mathbf{N}''_\bullet$ είναι ακυκληματικό (ήτοι $H_n(\mathbf{N}''_\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$). Εφαρμόζοντας το λήμμα A.4.39 για τα $\mathbf{M}'_\bullet$ και $\mathbf{N}''_\bullet$ διαπιστώνουμε ότι το $\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}''_\bullet)_\bullet$ είναι ωσαύτως ακυκληματικό:

$$H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}''_\bullet)_\bullet) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.99}$$

Η μακρά ακριβής ακολουθία ομολογίας 3.2.13 για την (A.98)

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}''_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, k_\bullet)_\bullet)"] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, g_\bullet)_\bullet)"] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[dll, out=-10, in=170] \\
& H_{n-1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}''_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, k_\bullet)_\bullet)"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

δίδει (λόγω των (A.99)) *ισομορφισμούς*:

$$H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, g_\bullet)_\bullet) : H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet),\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.100}$$

Κατ' αναλογίαν, από την (A.96) δημιουργούνται για κάθε $p \in \mathbb{Z}$ βραχείες ακριβείς ακολουθίες $\{0\} \to M''_p \overset{e_p}{\hookrightarrow} M'_p \overset{f_p}{\twoheadrightarrow} M_p \to \{0\}$, μέσω δε αυτών μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_2^{[\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_\bullet \mathbf{F}]}"] & (\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_1 \mathbf{F})(M''_p, N_q) \arrow[r, "(\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_1 \mathbf{F})(e_p, \mathrm{id}_{N_q})"] & (\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_1 \mathbf{F})(M'_p, N_q) \arrow[r, "(\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_1 \mathbf{F})(f_p, \mathrm{id}_{N_q})"] & (\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_1 \mathbf{F})(M_p, N_q) \arrow[dlll, out=-10, in=170, "\partial_1^{[\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_\bullet \mathbf{F}]}" description] \\
\mathbf{F}(M''_p, N_q) \arrow[r, "\mathbf{F}(e_p, \mathrm{id}_{N_q})"'] & \mathbf{F}(M'_p, N_q) \arrow[r, "\mathbf{F}(f_p, \mathrm{id}_{N_q})"'] & \mathbf{F}(M_p, N_q) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

(Βλ. A.4.15 (ii).) Επειδή ο M'_p είναι εξ υποθέσεως προβολικός R-μόδιος για κάθε $p \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$(\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_1 \mathbf{F})(M'_p, N_q) := \mathscr{L}_1 \mathbf{F}(-, N_q)(M'_p) \cong \{0\}.$$

(Βλ. (A.48) και A.3.13 (i).) Έτσι, προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
& & \{0\} \arrow[r] & (\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_1 \mathbf{F})(M_p, N_q) \arrow[dlll, out=-10, in=170, "\partial_1^{[\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_\bullet \mathbf{F}]}" description] \\
\mathbf{F}(M''_p, N_q) \arrow[r, "\mathbf{F}(e_p, \mathrm{id}_{N_q})"'] & \mathbf{F}(M'_p, N_q) \arrow[r, "\mathbf{F}(f_p, \mathrm{id}_{N_q})"'] & \mathbf{F}(M_p, N_q) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

και (ύστερα από μετάβασή μας σε ευθέα αθροίσματα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p + q = n$) η ακριβής ακολουθία *αλυσωτών συμπλόκων*

$$\begin{tikzcd}
& & \mathbf{0}_\bullet \arrow[r] & (\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_1 \mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \arrow[dlll, out=-10, in=170, "(\partial_1^{[\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_\bullet \mathbf{F}]})_\bullet" description] \\
\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \arrow[r, "\mathbf{F}(e_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet"'] & \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \arrow[r, "\mathbf{F}(f_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet"'] & \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \arrow[r] & \mathbf{0}_\bullet
\end{tikzcd} \tag{A.101}$$

Το $\mathbf{M}''_\bullet$ (όντας υποσύμπλοκο τού $\mathbf{M}'_\bullet$) είναι προβολικό (καθώς ο R είναι κληρονομικός). Εξάλλου, εύκολα δείχνει κανείς (χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ανάλογα εκείνων που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη τού λήμματος A.4.38) ότι το $\mathbf{M}''_\bullet$ είναι ακυκληματικό (ήτοι $H_n(\mathbf{M}''_\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$). Εφαρμόζοντας το λήμμα A.4.39 για τα $\mathbf{M}''_\bullet$ και $\mathbf{N}_\bullet$ διαπιστώνουμε ότι το $\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ είναι ωσαύτως ακυκληματικό: $H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Γι' αυτόν τον λόγο έχουμε το δικαίωμα να εφαρμόσουμε την πρόταση 3.2.18 για την (A.101) λαμβάνοντας μια μακρά ακριβή ακολουθία

$$\begin{aligned}\cdots &\longrightarrow H_n((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\delta_{n+1}^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} H_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \\ &\xrightarrow{H_{n+1}(\mathbf{F}(f_\bullet,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)} H_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\xi_{n+1}} H_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \\ &\xrightarrow{\delta_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{F}(f_\bullet,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \to \cdots\end{aligned}$$

την οποία μετατρέπουμε (ύστερα από διαμεσολάβηση των (A.100)) στην

$$\begin{aligned}\cdots \to H_n((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) &\xrightarrow{(H_{n+1}(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet},g_\bullet)_\bullet))^{-1}\circ\delta_{n+1}^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}} H_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \\ &\xrightarrow{H_{n+1}(\mathbf{F}(f_\bullet,g_\bullet))} H_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\xi_{n+1}} H_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \to \cdots\end{aligned}$$

φέροντάς τη στην επιθυμητή μορφή. □

A.4.42 Θεώρημα. *Έστω* $\mathbf{F}$ *ένας εκ δεξιών ακριβής διπλός συναρτητής* (A.34), *συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές. Δοθέντων δυο προβολικών αλυσωτών συμπλόκων* R*-μοδίων* $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ *και* $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, *όπου ο* R *είναι κληρονομικός, υπάρχουν (κατά το λήμμα* A.4.40*) αλυσωτοί μετασχηματισμοί*

$$\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),\quad \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} : \mathbf{N}_\bullet \longrightarrow H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet),$$

τέτοιοι ώστε το ζεύγος $(\mathbf{M}_\bullet, \rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet})$ *να αποτελεί προβολική προσέγγιση τού* $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ *και το ζεύγος* $(\mathbf{N}_\bullet, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})$ *να αποτελεί προβολική προσέγγιση τού* $H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$*. Μέσω αυτών κατασκευάζεται μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής*

$$\begin{aligned}\{0\} \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) &\xhookrightarrow{\omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \\ &\xrightarrow{H_n(\mathbf{F}(\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)} \bigoplus_{p+q=n} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \longrightarrow \{0\}\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου $\omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}$ κατάλληλος μονομορφισμός, οπότε

$$\boxed{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \oplus (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1}.}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το θεώρημα A.4.41 (με τα $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ και $H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{N}_\bullet$, αντιστοίχως) λαμβάνουμε μακρά ακριβή ακολουθία τής μορφής

$$\cdots \to H_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)^{-1}\circ\,\delta_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{F}(\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)} H_n(\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \xrightarrow{\xi_n} H_{n-2}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \to \cdots$$

όπου

$$\delta_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))} : H_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)$$

ο ομομορφισμός ο θεσπισθείς μέσω τής προτάσεως 3.2.18. Θέτουμε

$$\boxed{\omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))} := H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)^{-1}\circ\delta_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))},\ \forall n\in\mathbb{Z}.} \tag{A.102}$$

Επειδή τα $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$ έχουν μηδενικούς συνοριακούς τελεστές, η ανωτέρω γράφεται ως εξής:

$$\cdots \to \bigoplus_{p+q=n-1}(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet),H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \xrightarrow{\omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{F}(\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)} \bigoplus_{p+q=n}\mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet),H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \xrightarrow{\xi_n} \bigoplus_{p+q=n-2}(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet),H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \to \cdots \tag{A.103}$$

Εν συνεχεία, θεωρώντας τήν

$$\{0\} \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1}(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet),H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \xhookrightarrow{\omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{F}(\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)} \bigoplus_{p+q=n}\mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet),H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \longrightarrow \{0\} \tag{A.104}$$

παρατηρούμε ότι από την ακρίβεια τής (A.103) έπεται η ακρίβεια *στον μεσαίο όρο* τής (A.104). Ανατρέχοντας, μάλιστα, στην απόδειξη τής προτάσεως 3.2.18, διαπιστώνουμε ότι ο $\delta_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}$ είναι μονομορφισμός (ως σύνθεση μονομορφισμών). Άρα *και* ο $\omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}$ είναι *μονομορφισμός* (ως σύνθεση μονομορφισμών). Εξάλλου, επειδή οι $\rho_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_q^{\mathbf{N}_\bullet}$ είναι επιμορφισμοί (βλ. A.4.34 **(II)**), από την εκ δεξιών ακρίβεια τού $\mathbf{F}$ έπεται ότι ο

$$\mathbf{F}(\rho_p^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_q^{\mathbf{N}_\bullet}) = \mathbf{F}(\rho_p^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})\circ\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet},\rho_q^{\mathbf{N}_\bullet})$$

είναι επιμορφισμός (ως σύνθεση επιμορφισμών) για κάθε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Κατ' επέκταση, *και* ο $H_n(\mathbf{F}(\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)$ είναι *επιμορφισμός*. Άρα η (A.104) πρόκειται για μια *βραχεία ακριβή* ακολουθία. Απομένει να δειχθεί ότι είναι *και* διασπώμενη. Προς τούτο θεωρούμε τον *ομομορφισμό Künneth* $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ (βλ. εδ. A.4.3 και A.4.4 (i)) και *τυχόν* στοιχείο $x \in \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n$. Επειδή (κατά το (i) τής παρατηρήσεως A.4.4) ο $\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n$ είναι επιμορφισμός,

$$\exists y \in \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n : \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y) = x.$$

Κατά συνέπειαν,

$$\begin{aligned}
&\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}(x) = (\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \circ \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n)(y) \\
&= (\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n)(y) = \pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y)) \\
&= \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y) + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet),
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}
&(H_n(\mathbf{F}(\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)})(x) = H_n(\mathbf{F}(\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y) + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)) \\
&= (\mathbf{F}(\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n)(y) + B_n(\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \\
&= (\mathbf{F}(\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} \circ j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y)) + B_n(\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet).
\end{aligned}$$

Σημειωτέον ότι οι $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$ έχουν μηδενικούς συνοριακούς τελεστές, οπότε το $\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet$ έχει ωσαύτως μηδενικούς συνοριακούς τελεστές (πρβλ. παρατήρηση A.4.6) και, ως εκ τούτου, ο R-μόδιος $B_n(\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)$ είναι τετριμμένος. Επιπροσθέτως, από την απόδειξη τού λήμματος A.4.40 είναι πρόδηλο ότι

$$\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} = \pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \quad \text{και} \quad \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} \circ j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} = \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet}.$$

Επομένως,

$$(H_n(\mathbf{F}(\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)})(x) = \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y) = x,$$

απ' όπου συνάγεται ότι

$$H_n(\mathbf{F}(\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n}. \tag{A.105}$$

Λόγω τής (A.105) η συνεπαγωγή (i)⇒(iii) στο θεώρημα 3.1.29 μας πληροφορεί ότι η (A.104) είναι όντως *διασπώμενη*. □

A.4.43 Πόρισμα. *Έστω* $\mathbf{F}$ *ένας εκ δεξιών ακριβής διπλός συναρτητής* (A.34), *συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές. Δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων* R*-μοδίων* $\mathbf{M}_\bullet$ *και* $\mathbf{N}_\bullet$*, όπου ο* R *είναι κληρονομικός, θεωρούμε προβολικές προσεγγίσεις αυτών* $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ *και* $(\mathbf{N}'_\bullet, g_\bullet)$*. Τότε υφίσταται μακρά ακριβής ακολουθία τής* *μορφής*:

$$\cdots \longrightarrow H_n((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \longrightarrow \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_{n+1}\oplus(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_n \longrightarrow H_{n+1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \longrightarrow H_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Αποδειξη. Από το θεώρημα A.4.41 αποκτούμε μια μακρά ακριβή ακολουθία τής μορφής (A.95). Κατόπιν εφαρμογής τού θεωρήματος A.4.42 (με τα $\mathbf{M}'_\bullet$ και $\mathbf{N}'_\bullet$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{N}_\bullet$, αντιστοίχως) λαμβάνουμε ισομορφισμούς:

$$H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_\bullet)\cong \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_n\oplus(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_{n-1}$$

για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, οπότε αρκεί η αντικατάσταση των εικόνων τους στην (A.95). □

A.4.44 Σημείωση. Ο μονομορφισμός $\delta_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}$, μέσω τού οποίου ορίσθηκε ο μονομορφισμός $\omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}$ στην απόδειξη τού θεωρήματος A.4.42, είναι ο

$$\delta_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))} := H_n(\iota_\bullet)\circ(\partial_n^{(1)})^{-1}, \tag{A.106}$$

όπου

$$\partial_n^{(1)}: H_n(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_\bullet) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)$$

είναι ο συνδετικός *ισομορφισμός* τής μακράς ακριβούς ακολουθίας ομολογίας για την

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)) \xhookrightarrow{(\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho.}\mathbf{F}]})_\bullet} \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \xrightarrow{\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_\bullet^{\check{}}} \mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_\bullet) \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

και $H_n(\iota_\bullet)$ ο ομομορφισμός ο επαγόμενος μέσω τού αλυσωτού μετασχηματισμού

$$\iota_\bullet : \mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_\bullet \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet.$$

(Πρβλ. απόδειξη τής προτάσεως 3.2.18.) Για μια διεξοδικότερη μελέτη τού (A.106) θεωρούμε τους ακόλουθους ομομορφισμούς:

(i) Τον $\widetilde{\mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}}$, ο οποίος (ένεκα τής ισχύος τής εγκλειστικής σχέσεως

$$B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)\subseteq \mathrm{Ker}(\mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet})$$

και τής καθολικής ιδιότητας πηλικομοδίων 2.3.6) είναι ο μοναδικός ομομορφισμός που καθιστά το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[dl, "\pi^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n}_{B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)}"'] \arrow[dr, "\mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n/B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \arrow[rr, dashed, "\widetilde{\mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}}"'] & & Z_{n-1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)\subseteq\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet,H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1}
\end{tikzcd} \tag{A.107}$$

(ii) Τον επιμορφισμό

$$\underline{\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\breve{}_n} : \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n / B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_n \subseteq \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n,$$
$$x + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \longmapsto \mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n(x),$$

τον προκύπτοντα μέσω τού πορίσματος 3.1.15,

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n+1} \arrow[r, "\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\breve{}_{n+1}"] \arrow[d, "\partial^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Im}(\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_{n+1} \arrow[d, "\partial^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}_{n+1}"] \\
\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r, "\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\breve{}_n"] \arrow[d, two heads, "\pi^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n}_{B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Im}(\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_n \arrow[d, two heads, "\pi^{\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_n}_{B_n(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_\bullet)}"] \\
\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n / B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \arrow[r, dashed, two heads, "\underline{\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\breve{}_n}"'] \arrow[d] & \mathrm{Im}(\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_n / \underbrace{B_n(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_\bullet)}_{\cong\{0\}} \arrow[d] \\
\{0\} & \{0\}
\end{tikzcd}$$

από τον επιμορφισμό $\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\breve{}_n$ που επάγει ο

$$\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n : \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n,$$

όπου $\partial^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}_{n+1} : \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n+1} \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n$ και

$$\partial^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}_{n+1} : \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n+1} \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n$$

είναι οι αντίστοιχοι συνοριακοί τελεστές, λαμβανομένου υπ’ όψιν τού ότι το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_\bullet$ έχει *μηδενικούς* συνοριακούς τελεστές.
(iii) Τον ομομορφισμό

$$\overline{(\partial_1^{[\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_\bullet \mathbf{F}]})_{n-1}} : Z_{n-1}((\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_1 \mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \longrightarrow Z_{n-1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)$$

τον προκύπτοντα μέσω τού πορίσματος 3.1.12 από τον

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_1 \mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1} \arrow[r, "(\partial_1^{[\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_\bullet \mathbf{F}]})_{n-1} := \bigoplus_{p+q=n-1} \partial_1^{[\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_\bullet \mathbf{F}]}"] \arrow[d, equal] & \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1} \arrow[d, equal] \\
\bigoplus_{p+q=n-1} (\mathscr{L}^{\pi\varrho.}_1 \mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) & \bigoplus_{p+q=n-1} \mathbf{F}(\mathbf{M}''_p, H_q(\mathbf{N}_\bullet))
\end{tikzcd}$$

Ο ανωτέρω θεωρηθείς ομομορφισμός (i) είναι *ισομορφισμός*. Πράγματι· εάν υποτεθεί ότι $y \in Z_{n-1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)$, τότε (ένεκα τής ακυκληματικότητας τού $\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet$, βλ. λήμμα A.4.39) έχουμε $y \in B_{n-1}(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)$, οπότε

$$\exists x \in \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n : \mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}(x) = y. \tag{A.108}$$

Λόγω τής μεταθετικότητας στο τρίγωνο (A.107) η (A.108) δίδει

$$\begin{aligned} &\left(\mathfrak{d}_n^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}} \circ \pi^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n}_{B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)}\right)(x) = y \\ &\Longrightarrow \mathfrak{d}_n^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}}(x + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)) = y, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται η επιρριπτικότητα τού ομομορφισμού $\mathfrak{d}_n^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}}$. Εξάλλου, εάν $x_1, x_2 \in \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n$ είναι τέτοια, ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\mathfrak{d}_n^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}}(x_1 + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)) = \mathfrak{d}_n^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}}(x_2 + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)),$$

έχουμε (εξαιτίας τής ακυκληματικότητας τού $\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet$)

$$\begin{aligned} &\mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}(x_1) = \mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}(x_2) \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 \in Z_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) = B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \\ &\Longrightarrow x_1 + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) = x_2 + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet), \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται η ενριπτικότητα τού $\mathfrak{d}_n^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}}$. Τώρα για οιοδήποτε στοιχείο $w \in Z_n(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_\bullet)$ $\exists u \in \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n$:

$$w + B_n(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_\bullet) = \underline{\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\check{}_n}(u + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)) \tag{A.109}$$

(λόγω τής επιρριπτικότητας τού $\underline{\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\check{}_n}$) και

$$\mathfrak{d}_n^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}}(u + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)) \in \mathrm{Im}(\overline{(\partial_1^{[\mathscr{L}^{\pi\varrho}_\bullet \mathbf{F}]})_{n-1}}),$$

όπου η ίνα τού $\overline{(\partial_1^{[\mathscr{L}^{\pi\varrho}_\bullet \mathbf{F}]})_{n-1}}$

$$\left(\overline{(\partial_1^{[\mathscr{L}^{\pi\varrho}_\bullet \mathbf{F}]})_{n-1}}\right)^{-1}\left(\left\{\mathfrak{d}_n^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}}(u + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet))\right\}\right) = \{z\} \tag{A.110}$$

υπεράνω τού $\mathfrak{d}_n^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet}}(u + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet))$ είναι ένα μονοσύνολο με (μοναδικό) στοιχείο του κάποιο $z \in Z_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)$, οπότε

$$\partial_n^{(1)}(w + B_n(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_\bullet) = z + B_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet).$$

(Πρβλ. (3.21).) Επειδή δε αμφότερα τα αλυσωτά σύμπλοκα $\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_\bullet$ και $(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet$ έχουν μηδενικούς συνοριακούς τελεστές, μπορούμε να γράψουμε (εν είδει εμφανούς συμβάσεως)

$$\partial_n^{(1)}(w) = z. \tag{A.111}$$

Από τις σχέσεις (A.109), (A.110) και (A.111) συνάγεται ότι ο αντίστροφος τού ισομορφισμού $\partial_n^{(1)}$ είναι ο

$$(\partial_n^{(1)})^{-1} = \underline{\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\check{}_n} \circ \left(\mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_\bullet}\right)^{-1} \circ \overline{(\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho.}\mathbf{F}]})_{n-1}}$$

και ότι ως *συγκεκριμένος* τύπος εκφράσεως τής εικόνας οιουδήποτε στοιχείου

$$x \in H_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)(= (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1})$$

μέσω τού (A.106) μπορεί να ιδωθεί ο

$$\boxed{\begin{aligned}\delta_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}(x) = \left(\underline{\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\check{}_n} \circ \left(\mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_\bullet}\right)^{-1} \circ \overline{(\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho.}\mathbf{F}]})_{n-1}}\right)(x) \\ + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet))\end{aligned}} \tag{A.112}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

A.4.45 Θεώρημα. *Έστω* $\mathbf{F}$ *ένας εκ δεξιών ακριβής διπλός συναρτητής* (A.34), *συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές και τέτοιος, ώστε για οιονδήποτε παγιωμένον προβολικό R-μόδιο P ο συναρτητής*

$$\mathbf{F}(P, -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

(σε επίπεδο R-μοδίων) να είναι ακριβής. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι κληρονομικός και $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι δυο προβολικά αλυσωτά σύμπλοκα R-μοδίων, τότε υφίσταται μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \xhookrightarrow{\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\zeta_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}} (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1} \longrightarrow \{0\}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για καταλλήλως οριζόμενον επιμορφισμό $\zeta_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}$ *και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου ο αλυσωτός μετασχηματισμός* $\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}$ *είναι αυτός τού λήμματος* A.4.3 *και όπου αμφότεροι οι*

$$\left\{\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)} \,\middle|\, (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2)\right\}, \quad \left\{\zeta_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)} \,\middle|\, \begin{array}{l}\text{ζεύγη } (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \\ \text{έχοντα τις προαναφερθείσες ιδιότητες}\end{array}\right\}$$

είναι φυσικοί μετασχηματισμοί.

Απόδειξη. **Βήμα 1ο.** Θεωρούμε τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}''_\bullet \xhookrightarrow{e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{\rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}} H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{N}''_\bullet \xhookrightarrow{k_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet}} \mathbf{N}_\bullet \xrightarrow{\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet}} H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet) \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

προβολικών προσεγγίσεων $(\mathbf{M}_\bullet, \rho_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet})$ και $(\mathbf{N}_\bullet, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})$ των αλυσωτών συμπλόκων $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ και $H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$, αντιστοίχως, η ύπαρξη των οποίων είναι εξασφαλισμένη α-πό το λήμμα A.4.40. Επειδή (εξ υποθέσεως) το $\mathbf{M}_\bullet$ είναι προβολικό και ο δακτύλιος R κληρονομικός, οι R-μόδιοι $B_p(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι προβολικοί και οι πρώτες θεμελιώδεις βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow Z_p(\mathbf{M}_\bullet) \xhookrightarrow{j_p^{\mathbf{M}_\bullet}} M_p \xrightarrow{\check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet}} B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow \{0\}$$

(βλ. (A.58)) είναι *διασπώμενες* (δυνάμει τού θεωρήματος 4.2.7) για κάθε $p \in \mathbb{Z}$. Το θεώρημα 3.1.29 μας πληροφορεί ότι

$$[\exists \beta_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet), M_p) : \check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \beta_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet} = \mathrm{id}_{B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet)}] \tag{A.113}$$

και

$$[\exists \alpha_p^{\mathbf{M}_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(M_p, Z_p(\mathbf{M}_\bullet)) : \alpha_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_p^{\mathbf{M}_\bullet} = \mathrm{id}_{Z_p(\mathbf{M}_\bullet)}] \tag{A.114}$$

με

$$j_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \alpha_p^{\mathbf{M}_\bullet} + \beta_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet} = \mathrm{id}_{M_p} \tag{A.115}$$

και

$$\alpha_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \beta_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet} = 0. \tag{A.116}$$

Από την απόδειξη τού λήμματος A.4.40 είναι πρόδηλο ότι $\rho_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_p^{\mathbf{M}_\bullet} = \pi_p^{\mathbf{M}_\bullet}$. Άρα στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & B_p(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, hook, "\iota_p^{\mathbf{M}_\bullet}"] \arrow[d, dashed, "\eta_p^{\mathbf{M}_\bullet}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_p(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r, two heads, "\pi_p^{\mathbf{M}_\bullet}"] \arrow[d, hook, "j_p^{\mathbf{M}_\bullet}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_p(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{H_p(\mathbf{M}_\bullet)}"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & M''_p \arrow[r, hook, "e_p^{\mathbf{M}_\bullet}"'] & M_p \arrow[r, two heads, "\rho_p^{\mathbf{M}_\bullet}"'] & H_p(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd} \tag{A.117}$$

(που έχει τη δεύτερη θεμελιώδη βραχεία ακριβή ακολουθία (A.67) ως πρώτη του γραμμή) το δεύτερο τετράγωνο είναι μεταθετικό. Βάσει τής προτάσεως 3.1.11 υ-φίσταται[60] $\eta_p^{\mathbf{M}_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(B_p(\mathbf{M}_\bullet), M''_p)$ που το συμπληρώνει μεταθετικώς. Επειδή τόσον οι M_p όσον και οι υπομόδιοί τους $Z_p(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι προβολικοί, έχουμε (λόγω των (A.48) και A.3.13 (i))

$$(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(Z_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \cong \{0\} \cong (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M_p, H_q(\mathbf{N}_\bullet)),\ \forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

οπότε από τις μακρές ακριβείς ακολουθίες που παρετέθησαν στο (ii) τού εδαφίου A.4.15 και τη μεταθετικότητα τού (A.117) καταλήγουμε στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

[60] Σημειωτέον ότι η απεικόνιση $\eta_p^{\mathbf{M}_\bullet}$ είναι ένθεση: Εάν $x \in B_p(\mathbf{M}_\bullet)$, τότε $x = j_p^{\mathbf{M}_\bullet}(\iota_p^{\mathbf{M}_\bullet}(x)) = e_p^{\mathbf{M}_\bullet}(\eta_p^{\mathbf{M}_\bullet}(x))$, οπότε

$$\rho_p^{\mathbf{M}_\bullet}(x) = (\underbrace{\rho_p^{\mathbf{M}_\bullet} \circ e_p^{\mathbf{M}_\bullet}}_{=0})(\eta_p^{\mathbf{M}_\bullet}(x)) = 0_{H_p(\mathbf{M}_\bullet)} \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(\rho_p^{\mathbf{M}_\bullet}) = M''_p$$

και επειδή η $e_p^{\mathbf{M}_\bullet}$ είναι ένθεση έχουμε τελικώς $\eta_p^{\mathbf{M}_\bullet}(x) = x$.

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r, "\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πρ.}}\mathbf{F}]}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{(\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet))}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}(B_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r, "\mathbf{F}(\iota_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)})"] \arrow[d, "\mathbf{F}(\eta_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)})"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}(Z_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r, "\mathbf{F}(\pi_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)})"] \arrow[d, "\mathbf{F}(j_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)})"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet))}"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r, "\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πρ.}}\mathbf{F}]}"'] & \mathbf{F}(\mathbf{M}_p'', H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r, "\mathbf{F}(e_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)})"'] & \mathbf{F}(\mathbf{M}_p, H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r, "\mathbf{F}(\rho_p^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)})"'] & \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, όπου οι μονομορφισμοί

$$\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πρ.}}\mathbf{F}]} : (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \longrightarrow \mathbf{F}(M_p'', H_q(\mathbf{N}_\bullet))$$

και

$$\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πρ.}}\mathbf{F}]} : (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \longrightarrow \mathbf{F}(B_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \tag{A.118}$$

είναι οι αντίστοιχοι συνδετικοί μονομορφισμοί. Προφανώς, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,

$$M_n'' := \operatorname{Ker}(\rho_n^{\mathbf{M}_\bullet}) = (\rho_n^{\mathbf{M}_\bullet})^{-1}(\{0_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)}\}) = (\alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet})^{-1}((\pi_n^{\mathbf{M}_\bullet})^{-1}(\{0_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)}\})),$$

όπου

$$\begin{aligned}(\pi_n^{\mathbf{M}_\bullet})^{-1}(\{0_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)}\}) &= \{x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet) | \, x + B_n(\mathbf{M}_\bullet) = B_n(\mathbf{M}_\bullet)\} \\ &= \{x \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet) | \, x \in B_n(\mathbf{M}_\bullet)\} = B_n(\mathbf{M}_\bullet) = \iota_n^{\mathbf{M}_\bullet}(B_n(\mathbf{M}_\bullet))\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(\alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet})^{-1}((\pi_n^{\mathbf{M}_\bullet})^{-1}(\{0_{H_n(\mathbf{M}_\bullet)}\})) &= \left\{x \in M_n | \, \alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x) \in B_n(\mathbf{M}_\bullet)\right\} \\ &= \left\{x \in M_n | \, \exists z \in M_{n+1} : \alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x) = d_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet}(z)\right\} \\ &= \left\{x \in M_n | \, \exists z \in M_{n+1} : \alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x) = (j_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet})(z)\right\}.\end{aligned} \tag{A.119}$$

Ισχυρισμός:

$$\boxed{M_n'' = j_n^{\mathbf{M}_\bullet}(\iota_n^{\mathbf{M}_\bullet}(B_n(\mathbf{M}_\bullet))) \oplus \beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)).} \tag{A.120}$$

Απόδειξη τού εγκλεισμού "$\subseteq$". Έστω τυχόν στοιχείο $x \in M_n''$. Η (A.115) δίδει

$$\begin{aligned}x &= j_n^{\mathbf{M}_\bullet}(\alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x)) + (\beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x)) = \alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x) + (\beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}(x)) \\ &\underset{(\text{A.119})}{=} \underbrace{(j_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet})(z) + \beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(\check{d}_p^{\mathbf{M}_\bullet}(x))}_{\in (j_n^{\mathbf{M}_\bullet}(\iota_n^{\mathbf{M}_\bullet}(B_n(\mathbf{M}_\bullet))) \oplus \beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet))} \qquad (\text{για κάποιο } z \in M_{n+1}).\end{aligned}$$

Απόδειξη τού αντιστρόφου εγκλεισμού "$\supseteq$". Για οιοδήποτε στοιχείο που γράφεται ως

$$d_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet}(z) + \beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}(z')) = j_n^{\mathbf{M}_\bullet}(\iota_n^{\mathbf{M}_\bullet}(\check{d}_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet}(z))) + \beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}(z')) \quad (\text{για κάποια } z \in M_{n+1}, \ z' \in M_n)$$

παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}&\alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet}(\underbrace{d_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet}(z) + \beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}(z'))}_{\in M_n}) = \alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet}(d_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet}(z)) + (\underbrace{\alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}}_{=0})(\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}(z')) \qquad (\text{βλ. (A.116)}) \\ &= \alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet}(d_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet}(z)) = \alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet}((j_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet})(z)) = (\underbrace{\alpha_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_n^{\mathbf{M}_\bullet}}_{=\mathrm{id}_{Z_n(\mathbf{M}_\bullet)}})(\iota_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet})(z) \qquad (\text{βλ. (A.114)}) \\ &= (\iota_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \check{d}_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet})(z) = (\iota_n^{\mathbf{M}_\bullet}(j_n^{\mathbf{M}_\bullet}(\check{d}_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet}(z)))) = d_{n+1}^{\mathbf{M}_\bullet}(z),\end{aligned}$$

οπότε αυτό ανήκει κατ' ανάγκην στον M_n'' λόγω τής (A.119).

Βήμα 2ο. Θεωρούμε τον συνοριακό τελεστή $d_n^{\mathbf{M}''_\bullet} : M''_n \longrightarrow M''_{n-1}$. Κάθε στοιχείο τού M''_n γράφεται (λόγω τής (A.120)) υπό τη μορφή

$$j_n^{\mathbf{M}_\bullet}(\iota_n^{\mathbf{M}_\bullet}(b_1)) + \beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(b_2),$$

για κατάλληλα $b_1 \in B_n(\mathbf{M}_\bullet)$ και $b_2 \in B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} d_n^{\mathbf{M}''_\bullet}(j_n^{\mathbf{M}_\bullet}(\iota_n^{\mathbf{M}_\bullet}(b_1)) + \beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(b_2)) &= \underbrace{d_n^{\mathbf{M}''_\bullet}(j_n^{\mathbf{M}_\bullet}(\iota_n^{\mathbf{M}_\bullet}(b_1)))}_{=0_{M''_{n-1}}} + d_n^{\mathbf{M}''_\bullet}(\beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(b_2))) \\ &= d_n^{\mathbf{M}''_\bullet}(\beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(b_2))) = j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(\iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}((\underbrace{\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}}_{=\mathrm{id}_{B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)}})(b_2)))) \\ &= j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(\iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(b_2)) \end{aligned} \tag{A.121}$$

(λόγω τού ότι $b_1 \in B_n(\mathbf{M}_\bullet) \subseteq Z_n(\mathbf{M}_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n^{\mathbf{M}_\bullet})$ και λόγω τής (A.113)). Άρα

$$\mathrm{Im}(d_n^{\mathbf{M}''_\bullet}) \subseteq (j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet})(B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)).$$

Ορίζοντας (λόγω τής (A.120)) για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τις φυσικές ενθέσεις

$$\begin{aligned} \widehat{j_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_n^{\mathbf{M}_\bullet}} : B_n(\mathbf{M}_\bullet) &\hookrightarrow M''_n, & \widehat{\beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}} : B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet) &\hookrightarrow M''_n, \\ b_1 &\longmapsto b_1 & b_2 &\longmapsto \beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(b_2) \end{aligned}$$

παρατηρούμε αφ' ενός μεν ότι $\widehat{j_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_n^{\mathbf{M}_\bullet}} = \eta_n^{\mathbf{M}_\bullet}$, αφ' ετέρου δε ότι για κάθε στοιχείο $b_2 \in B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)$ ισχύει

$$d_n^{\mathbf{M}''_\bullet}(\widehat{\beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}}(b_2)) = d_n^{\mathbf{M}''_\bullet}(\beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(b_2)) \underset{(\mathrm{A.121})}{=} j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(\iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(b_2)) = \widehat{j_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \iota_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}}(b_2) = \eta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(b_2),$$

οπότε $d_n^{\mathbf{M}''_\bullet} \circ \widehat{\beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}} = \eta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}$ και, κατ' επέκταση, για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$\boxed{\mathbf{F}(d_p^{\mathbf{M}''_\bullet}, \mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)}) \circ \mathbf{F}(\widehat{\beta_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet}}, \mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)}) = \mathbf{F}(\eta_{p-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_q(\mathbf{N}_\bullet)}).} \tag{A.122}$$

Ύστερα από μετάβασή μας σε ευθέα αθροίσματα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p + q = n$ στην (A.122) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το αλυσωτό σύμπλοκο $H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)$ έχει μηδενικούς συνοριακούς τελεστές διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} &\mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet} \circ \mathbf{F}(\widehat{\beta_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n-1} = \mathbf{F}(\eta_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n \\ \Longrightarrow\ &\mathfrak{d}_n^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}_\bullet} \circ \pi^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n}_{B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)} \circ \mathbf{F}(\widehat{\beta_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n-1} = \mathbf{F}(\eta_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n \\ \Longrightarrow\ &\pi^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n}_{B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)} \circ \mathbf{F}(\widehat{\beta_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n-1} = \left(\mathfrak{d}_n^{\widetilde{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}_\bullet}\right)^{-1} \circ \mathbf{F}(\eta_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n. \end{aligned} \tag{A.123}$$

Επίσης, ύστερα από μετάβασή μας σε ευθέα αθροίσματα για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ με $p + q = n - 1$ στο αμέσως προηγούμενο μεταθετικό διάγραμμα λαμβάνουμε ένα νέο μεταθετικό διάγραμμα, από το οποίο συνάγεται ότι

$$\boxed{\overline{(\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho.}\mathbf{F}]})_{n-1}} = (\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho.}\mathbf{F}]})_{n-1} = \left(\mathbf{F}(\eta_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n-1} \circ (\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho.}\mathbf{F}}]_{n-1})\right).} \tag{A.124}$$

καθόσον

$$H_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \cong Z_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) = (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1}.$$

Βήμα 3ο. Για οιοδήποτε στοιχείο $x \in \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &\underline{\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\check{}_n}\,(\pi^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n}_{B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)}(x)) = \underline{\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\check{}_n}\,(x + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)) \\ &= \mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n(x) + \underbrace{B_n(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_\bullet)}_{\cong\{0\}} = \mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n(x), \end{aligned} \tag{A.125}$$

διότι το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)}))_\bullet$ έχει μηδενικούς συνοριακούς τελεστές. Κατά συνέπειαν,

$$\underline{\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\check{}_n} \circ \pi^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n}_{B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)} = \mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Εξάλλου,

$$\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n \circ \mathbf{F}(\widehat{\beta}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n-1} = \mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \widehat{\beta}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n-1} = \mathbf{F}(\beta_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n-1}, \tag{A.126}$$

διότι $e_n^{\mathbf{M}_\bullet}(\beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(y)) = \beta_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(y) = \widehat{\beta}_{n-1}^{\mathbf{M}_\bullet}(y)$ για κάθε $y \in B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet)$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Για οιοδήποτε στοιχείο

$$x \in Z_{n-1}((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \ (= (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1})$$

η (A.112) δίδει

$$\begin{aligned} \delta_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}(x) &= \left(\underline{\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\check{}_n} \circ (\mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, \widetilde{H_\bullet}(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet})^{-1} \circ \overline{(\partial_1^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1}}\right)(x) + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \\ &\underset{(A.124)}{=} \left(\underline{\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\check{}_n} \circ (\mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, \widetilde{H_\bullet}(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet})^{-1} \circ \mathbf{F}(\eta_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n-1} \circ (\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1}\right)(x) + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \\ &= \left(\underline{\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})\check{}_n} \circ (\mathfrak{d}_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, \widetilde{H_\bullet}(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet})^{-1} \circ \mathbf{F}(\eta_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n \circ (\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1}\right)(x) + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \\ &\underset{(A.123),(A.125)}{=} \left(\mathbf{F}(e_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n \circ \mathbf{F}(\widehat{\beta}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n-1} \circ (\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1}\right)(x) + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \\ &\underset{(A.126)}{=} \left(\mathbf{F}(\beta_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n-1} \circ (\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1}\right)(x) + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet), \end{aligned}$$

ήτοι

$$\boxed{\delta_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}(x) = \left(\mathbf{F}(\beta_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n-1} \circ (\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1}\right)(x) + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet).} \tag{A.127}$$

Βήμα 4ο. Επειδή

$$\begin{aligned} H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) &= H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \\ &= H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_\bullet) \circ H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \end{aligned}$$

το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[rr, "H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)"] \arrow[d, "H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, dash] & & H_n(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[d, "H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \arrow[dr] & \\ H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \arrow[rr, "H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_\bullet)"'] & & H_n(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Έστω τυχόν στοιχείο $x \in \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n$. Επειδή (κατά το (i) τής παρατηρήσεως A.4.4) ο $\mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n$ είναι επιμορφισμός,

$$\exists y \in \mathbf{F}(Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), Z_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n : \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y) = x.$$

Κατά συνέπειαν,

$$\begin{aligned}\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}(x) &= (\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \circ \mathbf{F}(\pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \pi_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n)(y)\\ &= (\pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet} \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n)(y) = \pi_n^{\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet}(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y))\\ &= \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y) + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet),\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}&(H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)})(x) = H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)(\mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y) + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet))\\ &= (\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n \circ \mathbf{F}(j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n)(y) + \underbrace{B_n(\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)}_{\cong\{0\}}\\ &= \mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} \circ j_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_n(y) = 0_{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)},\end{aligned}$$

διότι $\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ j_n^{\mathbf{M}_\bullet} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ (βλ. (A.58)), οπότε

$$\boxed{H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}.} \tag{A.128}$$

Επιπροσθέτως, για οιοδήποτε $x \in (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1}$,

$$\begin{aligned}&(H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))})(x)\\ &= (H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_\bullet) \circ H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))})(x)\\ &\underset{(\mathrm{A.102})}{=} (H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_\bullet) \circ \delta_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))})(x)\\ &\underset{(\mathrm{A.127})}{=} (H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_\bullet) \circ \mathbf{F}(\beta_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_{n-1} \circ (\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1})(x) + B_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)\\ &= (\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n \circ \mathbf{F}(\beta_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n \circ (\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1})(x) + \underbrace{B_n(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)}_{\cong\{0\}}\\ &\underset{(\mathrm{A.113})}{=} (\mathbf{F}(\underbrace{\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} \circ \beta_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}}_{=\ \mathrm{id}_{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)}}, \mathrm{id}_{H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet)})_n \circ (\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1})(x) = (\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1}(x),\end{aligned}$$

οπότε

$$\boxed{H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))} = (\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1},\ \forall n \in \mathbb{Z}.} \tag{A.129}$$

Προφανώς, ο επιμορφισμός

$$(\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})\check{}_{n-1} \colon (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1} \twoheadrightarrow \mathrm{Im}((\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1})$$

ο επαγόμενος από τον μονομορφισμό (A.118) είναι *ισομορφισμός*. Μάλιστα, ισχύει

$$\mathrm{Im}(H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)) \subseteq \mathrm{Im}((\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})\check{}_{n-1})\ (= \mathrm{Im}((\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F}]})_{n-1})). \tag{A.130}$$

Πράγματι· επειδή αμφότεροι οι $\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ και $\omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}$ είναι μονομορφισμοί, το 1ο θεώρημα ισομορφισμών 2.3.7 μας πληροφορεί ότι υφίστανται ισομορφισμοί

$$\mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}) \subseteq H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$$

και $(\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(\omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}) \subseteq H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$. Από την άλλη μεριά, το θεώρημα A.4.42 εγγυάται την ύπαρξη κάποιου ισομορφισμού:

$$H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \underset{\mathfrak{f}}{\xrightarrow{\cong}} \mathrm{Im}(\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}) \oplus \mathrm{Im}(\omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}) \subseteq H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet).$$

Έστω τυχόν στοιχείο $x \in H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$. Η εικόνα του μέσω τού $\mathfrak{f}$ γράφεται υπό τη μορφή $\mathfrak{f}(x) = y_1 + y_2$, για κάποια μονοσημάντως ορισμένα στοιχεία $y_1 \in \mathrm{Im}(\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)})$ και $y_2 \in \mathrm{Im}(\omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))})$. Επομένως,

$$H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)(\mathfrak{f}(x)) = \underbrace{H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)(y_1)}_{\in \mathrm{Im}(H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)\circ\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)})} + \underbrace{H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)(y_2)}_{\in \mathrm{Im}(H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)\circ\omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))})}.$$

Εξαιτίας των (A.128) και (A.129) ο πρώτος προσθετέος ισούται με το $0_{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)}$ και ο δεύτερος ανήκει στο $\mathrm{Im}((\check{\partial}_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πρ.}}\mathbf{F}]})_{n-1})$. Άρα και για το ίδιο το στοιχείο x, $H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)(x) \in \mathrm{Im}((\check{\partial}_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πρ.}}\mathbf{F}]})_{n-1})$, και η εγκλειστική σχέση (A.130) είναι όντως αληθής. Λόγω τής (A.130) *ορίζεται καλώς* η σύνθεση

$$\boxed{\zeta_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} := ((\check{\partial}_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πρ.}}\mathbf{F}]})_{n-1})^{-1} \circ H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet),\ \forall n \in \mathbb{Z}.} \tag{A.131}$$

Οι (A.129) και (A.131) δίδουν

$$\begin{aligned}\zeta_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \circ \omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))} &= ((\check{\partial}_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πρ.}}\mathbf{F}]})_{n-1})^{-1} \circ H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \omega_n^{(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}\\ &= ((\check{\partial}_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πρ.}}\mathbf{F}]})_{n-1})^{-1} \circ (\check{\partial}_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πρ.}}\mathbf{F}]})_{n-1}\\ &= \mathrm{id}_{(\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1}},\end{aligned} \tag{A.132}$$

και ο ομομορφισμός $\zeta_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ είναι *επιμορφισμός*. (Βλ. λήμμα 2.2.22.) Ο πυρήνας του είναι ο ακόλουθος:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ker}(\zeta_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}) = \mathrm{Ker}(((\check{\partial}_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πρ.}}\mathbf{F}]})_{n-1})^{-1} \circ H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet))\\ &= \mathrm{Ker}(H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet))\\ &= \mathrm{Ker}(\underbrace{H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)}_{\text{ισομορφισμός}} \circ H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet))\\ &= \mathrm{Ker}(H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)) = \mathrm{Im}(\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}).\end{aligned}$$

Υπολείπεται η αιτιολόγηση τής ισχύος τής τελευταίας ισότητας. Ο M_n είναι (εξ υποθέσεως) προβολικός και ο R κληρονομικός, οπότε οι $B_n(\mathbf{M}_\bullet)$ και $Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι προβολικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Οι συναρτητές $\mathbf{F}(B_n(\mathbf{M}_\bullet),-)$ και $\mathbf{F}(Z_n(\mathbf{M}_\bullet),-)$ είναι εξ υποθέσεως ακριβείς. Από τα (A.48) και A.3.13 (i) συνάγεται ότι οι συναρτητές $(\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(B_n(\mathbf{M}_\bullet),-)$ και $(\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(Z_n(\mathbf{M}_\bullet),-)$ είναι μηδενικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Άρα είναι εφαρμόσιμο εδώ το θεώρημα A.4.22. Μέσω τού μεγάλου διαγράμματος τού βήματος 4 τής αποδείξεως τού θεωρήματος A.4.22 καταλήγει κανείς στην επιθυμητή ισότητα και, ως εκ τούτου, στην ακρίβεια τής προκύπτουσας βραχείας ακολουθίας *και* στον μεσαίο όρο. Επιπροσθέτως, από την (A.132) έπεται ότι η εν λόγω βραχεία ακριβής ακολουθία είναι *διασπώμενη*. (Βλ. θεώρημα 3.1.29.)

Βήμα 5ο. Το ότι η οικογένεια

$$\left\{ \psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \,\middle|\, (\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \right\}$$

αποτελεί φυσικό μετασχηματισμό είναι γνωστό από το θεώρημα A.4.5. Θεωρούμε το προβολικό αλυσωτό σύμπλοκο $B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)$ (που έχει μηδενικούς συνοριακούς τελεστές). Εφαρμόζοντας το θεώρημα A.4.42 για τα αλυσωτά σύμπλοκα $B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)$ και $\mathbf{N}_\bullet$ λαμβάνουμε τη διασπώμενη ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow (\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1} \xhookrightarrow{\omega_n^{(H_\bullet(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))}} H_n(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{H_n(\mathbf{F}(\rho_\bullet^{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)} \mathbf{F}(H_\bullet(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \longrightarrow \{0\}$$

Σημειωτέον ότι $\rho_\bullet^{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)} = \mathrm{id}_{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)}$, καθώς ισχύει $H_\bullet(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)) = B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)$. (Βλ. λήμμα A.4.40.) Επιπλέον, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στην απόδειξη τού θεωρήματος A.4.42, έχουμε

$$H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ \psi_n^{(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)} = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n},\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ο συναρτητής $\mathbf{F}(B_n(\mathbf{M}_\bullet),-) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ είναι εξ υποθέσεως ακριβής, οπότε ο ομομορφισμός

$$\psi_n^{(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)} : \mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \longrightarrow H_n(\mathbf{F}(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)_\bullet)$$

είναι *ισομορφισμός* (επί τη βάσει τού (iii) τής προτάσεως A.4.13) για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επομένως,

$$H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) = (\psi_n^{(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)})^{-1},\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}
\zeta_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} &:= ((\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πϱ.}}\mathbf{F}]})\check{}_{n-1})^{-1} \circ H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \\
&= ((\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πϱ.}}\mathbf{F}]})\check{}_{n-1})^{-1} \circ H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet)},\rho_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \\
&= ((\partial_1'^{[\mathscr{L}_\bullet^{\text{πϱ.}}\mathbf{F}]})\check{}_{n-1})^{-1} \circ (\psi_n^{(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)})^{-1} \circ H_n(\mathbf{F}(\check{d}_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet).
\end{aligned}$$

Επειδή η $\psi_n^{(B_{\bullet-1}(\mathbf{M}_\bullet),\mathbf{N}_\bullet)}$ είναι φυσική απεικόνιση (πρβλ. θεώρημα A.4.5), η απεικόνιση $\zeta_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ είναι ωσαύτως φυσική (ως σύνθεση φυσικών απεικονίσεων) και η οικογένεια

$$\left\{ H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \overset{\zeta_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}}{\longrightarrow} (\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{ζεύγη } (\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \\ \text{έχοντα τις αρχικώς αναφερθείσες ιδιότητες} \end{array} \right\}$$

αποτελεί φυσικό μετασχηματισμό από τον συναρτητή $H_\bullet(-) \circ \mathbf{F}$ στον συναρτητή $(\mathscr{L}_1^{\text{πϱ.}}\mathbf{F}) \circ (H_\bullet(-) \times H_\bullet(-))$. □

A.4.46 Ορισμός. Λέμε πως μια προβολική προσέγγιση $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ ενός αλυσωτού συμπλόκου R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet$ (υπό την έννοια τού ορισμού A.4.34) είναι **γνήσια** όταν για τον επιμορφισμό $f_n : M'_n \longrightarrow M_n$ ισχύει $f_n(Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)) = Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

A.4.47 Λήμμα. *Έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων, όπου R ένας κληρονομικός δακτύλιος. Η (συγκεκριμένη) προβολική προσέγγιση $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ τού $\mathbf{M}_\bullet$, η κατασκευασθείσα κατά την απόδειξη τού λήμματος A.4.35, είναι γνήσια.*

Απόδειξη. Διατηρώντας τούς συμβολισμούς που εισήχθησαν στην απόδειξη τού λήμματος A.4.35 έχουμε $M'_n = L_n \oplus U_{n-1}$ και

$$d'_n : M'_n \longrightarrow M'_{n-1}, \ \ (x,y) \longmapsto d'_n(x,y) := (y, 0_{U_{n-2}}),$$

όπου[61]

$$Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) := \ \mathrm{Ker}(d'_n) = \mathrm{Ker}(j'_{n-1} \circ \iota'_{n-1} \circ \check{d}'_n) = L_n \oplus \{0_{U_{n-1}}\}. \tag{A.133}$$

Έστω τυχόν στοιχείο $z \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$. Επειδή ο $f_n : M'_n \longrightarrow M_n$ είναι εξ υποθέσεως επιμορφισμός (βλ. A.4.34 **(II)**),

$$\exists (x,y) \in M'_n : j_n(\varpi_n(x)) + \kappa_{n-1}(y) = \varpi_n(x) + \kappa_{n-1}(y) = f_n(x,y) = z,$$

οπότε

$$\begin{aligned}
& d_n(j_n(\varpi_n(x)) + \kappa_{n-1}(y)) = d_n(j_n(\varpi_n(x))) + d_n(\kappa_{n-1}(y)) = d_n(z) = 0_{M_{n-1}} \\
& \Longrightarrow \check{d}_n(j_n(\varpi_n(x))) + \check{d}_n(\kappa_{n-1}(y)) = 0_{M_{n-1}} \\
& \Longrightarrow (\underbrace{\check{d}_n \circ j_n}_{= \ 0 \text{ (βλ. (A.58))}})(\varpi_n(x)) + \check{d}_n(\kappa_{n-1}(y)) = 0_{M_{n-1}} \Longrightarrow \check{d}_n(\kappa_{n-1}(y)) = 0_{M_{n-1}} \\
& \Longrightarrow \kappa_{n-1}(y) \in \ \mathrm{Ker}(\check{d}_n) \underset{\text{(βλ. (A.58))}}{=} \mathrm{Im}(j_n) \Longrightarrow [\exists t \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet) : \kappa_{n-1}(y) = j_n(t)].
\end{aligned}$$

Επειδή ο $\varpi_n : L_n \longrightarrow Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$ είναι εξ υποθέσεως επιμορφισμός,

$$\exists w \in L_n : t = \varpi_n(w),$$

οπότε $\kappa_{n-1}(y) = j_n(\varpi_n(w)) = \varpi_n(w) = f_n(w, 0_{U_{n-1}})$, απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}
& z = \varpi_n(x) + \kappa_{n-1}(y) = f_n(x, 0_{U_{n-1}}) + f_n(w, 0_{U_{n-1}}) = f_n(\underbrace{x+w}_{\in L_n}, 0_{U_{n-1}}) \\
& \underset{\text{(A.133)}}{\Longrightarrow} (x+w, 0_{U_{n-1}}) \in Z_n(\mathbf{M}'_\bullet).
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, $f_n(Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)) = Z_n(\mathbf{M}_\bullet)$. □

[61] Εδώ, αντί των $d_n^{\mathbf{M}'_\bullet}$, $\check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet}$, $j_n^{\mathbf{M}'_\bullet}$, $\iota_n^{\mathbf{M}'_\bullet}$, γράφουμε απλώς d'_n, $\check{d}'_n$, j'_n και ι'_n, αντιστοίχως, και παρομοίως για τα σύμβολα με $\mathbf{M}_\bullet$ (χωρίς τόνο).

Α.4.48 Λήμμα. *Έστω R ένας κληρονομικός δακτύλιος. Δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, καθώς και γνήσιων προβολικών προσεγγίσεων αυτών $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ και $(\mathbf{N}'_\bullet, g_\bullet)$ (η ύπαρξη των οποίων είναι διασφαλισμένη από τα λήμματα Α.4.35 και Α.4.47), ισχύει το εξής: Εάν $\tau_\bullet = \tau_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{N}_\bullet$ είναι τυχών αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε υπάρχει αλυσωτός μετασχηματισμός $\tau'_\bullet = \tau_\bullet^{\mathbf{M}'_\bullet} : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{N}'_\bullet$, τέτοιος ώστε να ισχύει*

$$\boxed{\tau_n \circ f_n = g_n \circ \tau'_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathbf{M}''_\bullet \arrow[r, hook] & \mathbf{M}'_\bullet \arrow[r, two heads, "f_\bullet"] \arrow[d, dashed, "\tau'_\bullet"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{M}_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\tau_\bullet"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathbf{N}''_\bullet \arrow[r, hook] & \mathbf{N}'_\bullet \arrow[r, two heads, "g_\bullet"'] & \mathbf{N}_\bullet \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Επειδή οι $f_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}_\bullet$, $g_\bullet : \mathbf{N}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{N}_\bullet$ είναι αλυσωτοί μετασχηματισμοί, έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,

$$f_n(Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)) \subseteq Z_n(\mathbf{M}_\bullet), \quad f_n(B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) \subseteq B_n(\mathbf{M}_\bullet),$$
$$g_n(Z_n(\mathbf{N}'_\bullet)) \subseteq Z_n(\mathbf{N}_\bullet), \quad g_n(B_n(\mathbf{N}'_\bullet)) \subseteq B_n(\mathbf{N}_\bullet).$$

Από την προϋπόθεση τής *γνησιότητας* των προβολικών προσεγγίσεων $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ και $(\mathbf{N}'_\bullet, g_\bullet)$ των $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{N}_\bullet$,

$$f_n(Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)) = Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \quad \text{και} \quad g_n(Z_n(\mathbf{N}'_\bullet) = Z_n(\mathbf{N}_\bullet).$$

Έχουμε λοιπόν τη δυνατότητα ορισμού των ομομορφισμών

$$Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \ni x \overset{f_{Z_n}}{\longmapsto} f_n(x) \in Z_n(\mathbf{M}_\bullet), \quad B_n(\mathbf{M}'_\bullet) \ni x \overset{f_{B_n}}{\longmapsto} f_n(x) \in B_n(\mathbf{M}_\bullet),$$
$$Z_n(\mathbf{N}'_\bullet) \ni x \overset{g_{Z_n}}{\longmapsto} g_n(x) \in Z_n(\mathbf{N}_\bullet), \quad Z_n(\mathbf{N}'_\bullet) \ni x \overset{g_{B_n}}{\longmapsto} g_n(x) \in B_n(\mathbf{M}_\bullet),$$

με τους f_{Z_n} και g_{Z_n} *επιμορφισμούς*. Κατ' αναλογίαν ορίζονται και οι ομομορφισμοί

$$Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \ni x \overset{\tau_{Z_n}}{\longmapsto} \tau_n(x) \in Z_n(\mathbf{N}_\bullet), \quad B_n(\mathbf{M}_\bullet) \ni x \overset{\tau_{B_n}}{\longmapsto} \tau_n(x) \in B_n(\mathbf{N}_\bullet).$$

▸ *Ισχυρισμός* 1ος. Υπάρχουν ομομορφισμοί $\tau'_{Z_n} : Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \longrightarrow Z_n(\mathbf{N}'_\bullet)$, τέτοιοι ώστε το κάτωθι διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \arrow[d, "\tau_{Z_n}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[l, "f_{Z_n}"'] \arrow[r, two heads, "\pi_n^{\mathbf{M}'_\bullet}"] \arrow[d, dashed, "\tau'_{Z_n}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[d, "\upsilon_n"] \\
Z_n(\mathbf{N}_\bullet) & Z_n(\mathbf{N}'_\bullet) \arrow[l, "g_{Z_n}"] \arrow[r, two heads, "\pi_n^{\mathbf{N}'_\bullet}"'] & H_n(\mathbf{N}'_\bullet)
\end{tikzcd} \tag{A.134}$$

να είναι μεταθετικό, όπου[62] $\upsilon_n := H_n(g_\bullet)^{-1} \circ H_n(\tau_\bullet) \circ H_n(f_\bullet)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

[62]Ο ομομορφισμός $H_n(g_\bullet)$ είναι *ισομορφισμός*. (Βλ. Α.4.34 **(III)**.)

Επαλήθευση 1ου *ισχυρισμού*: Επειδή ο $Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)$ (ως υπομόδιος τού προβολικού μοδίου M'_n) είναι προβολικός, υπάρχει $h_n \in \mathrm{Hom}_R(Z_n(\mathbf{M}'_\bullet), Z_n(\mathbf{N}'_\bullet))$ που καθιστά το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} & Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[dl, dashed, "h_n"'] \arrow[d, "\upsilon_n \circ \pi_n^{\mathbf{M}'_\bullet}"] & \\ Z_n(\mathbf{N}'_\bullet) \arrow[r, two heads, "\pi_n^{\mathbf{N}'_\bullet}"'] & H_n(\mathbf{N}'_\bullet) \arrow[r] & \{0\}, \end{tikzcd}$$

ήτοι ισχύει η ισότητα

$$\pi_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ h_n = \upsilon_n \circ \pi_n^{\mathbf{M}'_\bullet}, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.135}$$

Θέτουμε

$$\boxed{\ell_n := g_{Z_n} \circ h_n - \tau_{Z_n} \circ f_{Z_n} : Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \longrightarrow Z_n(\mathbf{N}_\bullet), \ \forall n \in \mathbb{Z}.} \tag{A.136}$$

Είναι άμεσος ο έλεγχος τής ισχύος των ακόλουθων τριών ισοτήτων:

$$\pi_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ g_{Z_n} = H_n(g_\bullet) \circ \pi_n^{\mathbf{N}'_\bullet}, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.137}$$

$$\pi_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ \tau_{Z_n} = H_n(\tau_\bullet) \circ \pi_n^{\mathbf{M}_\bullet}, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.138}$$

$$\pi_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ f_{Z_n} = H_n(f_\bullet) \circ \pi_n^{\mathbf{M}'_\bullet}, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.139}$$

Είναι προφανές ότι

$$\begin{aligned} \pi_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ \ell_n &\underset{(A.136)}{=} \pi_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ (g_{Z_n} \circ h_n - \tau_n \circ f_{Z_n}) = \pi_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ g_{Z_n} \circ h_n - \pi_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ \tau_n \circ f_{Z_n} \\ &\underset{(A.137), (A.138)}{=} H_n(g_\bullet) \circ \pi_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ h_n - H_n(\tau_\bullet) \circ \pi_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ f_{Z_n} \\ &\underset{(A.135), (A.139)}{=} H_n(g_\bullet) \circ \upsilon_n \circ \pi_n^{\mathbf{M}'_\bullet} - H_n(\tau_\bullet) \circ H_n(f_\bullet) \circ \pi_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \\ &= (H_n(g_\bullet) \circ \upsilon_n - H_n(\tau_\bullet) \circ H_n(f_\bullet)) \circ \pi_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \\ &= \big(H_n(g_\bullet) \circ H_n(g_\bullet)^{-1} \circ H_n(\tau_\bullet) \circ H_n(f_\bullet) - H_n(\tau_\bullet) \circ H_n(f_\bullet)\big) \circ \pi_n^{\mathbf{M}'_\bullet} = 0, \end{aligned}$$

ήτοι ότι

$$\pi_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ \ell_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.140}$$

Έστω τυχόν στοιχείο $x \in Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)$. Λόγω τής (A.140) έχουμε

$$\pi_n^{\mathbf{N}_\bullet}(\ell_n(x)) = 0_{H_n(\mathbf{N}_\bullet)} \Longrightarrow \ell_n(x) \in B_n(\mathbf{N}_\bullet).$$

Γι' αυτό ορίζεται καλώς ο ομομορφισμός

$$\mu_n : Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \longrightarrow B_n(\mathbf{N}_\bullet), \ x \longmapsto \mu_n(x) := \ell_n(x).$$

Είναι δε πρόδηλη η ισότητα

$$\iota_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ \mu_n = \ell_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.141}$$

Σημειωτέον ότι, πέραν τού g_{Z_n}, *και* ο ομομορφισμός g_{B_n} είναι *επιμορφισμός*. Πράγματι· εάν $y \in B_n(\mathbf{N}_\bullet)$, τότε (εξ ορισμού)

$$\exists x \in N_{n+1} : d^{\mathbf{N}_\bullet}_{n+1}(x) = y.$$

Επειδή ο g_{n+1} είναι *επιμορφισμός* (βλ. A.4.34 **(II)**), υπάρχει κάποιο $z \in N'_{n+1}$ με $g_{n+1}(z) = x$, οπότε από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & N'_{n+1} \arrow[r, "d^{\mathbf{N}'_\bullet}_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N'_n \arrow[r] \arrow[d, "g_n"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N_{n+1} \arrow[r, "d^{\mathbf{N}_\bullet}_{n+1}"'] & N_n \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

συνάγεται ότι

$$y = d^{\mathbf{N}_\bullet}_{n+1}(x) = d^{\mathbf{N}_\bullet}_{n+1}(g_{n+1}(z)) = g_n(\underbrace{d^{\mathbf{N}'_\bullet}_{n+1}(z)}_{\in B_n(\mathbf{N}'_\bullet)}) = g_{B_n}(d^{\mathbf{N}'_\bullet}_{n+1}(z)).$$

Έστω τώρα τυχόν στοιχείο $x \in Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)$. Προφανώς, $\mu_n(x) \in B_n(\mathbf{N}_\bullet)$. Λόγω τής ανωτέρω αποδειχθείσας επιρριπτικότητας τού g_{B_n},

$$\exists y \in B_n(\mathbf{N}'_\bullet) : g_{B_n}(y) = \mu_n(x). \tag{A.142}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται (καλώς) ένας νέος ομομορφισμός

$$\boxed{s_n : Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \longrightarrow B_n(\mathbf{N}'_\bullet),\ x \longmapsto s_n(x) := y,\ \forall n \in \mathbb{Z},} \tag{A.143}$$

με y όπως στην (A.142). Όπως έπεται άμεσα από τον ορισμό τού (A.143),

$$\mu_n = g_{B_n} \circ s_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.144}$$

Θέτοντας

$$\boxed{\tau'_{Z_n} := h_n - \iota^{\mathbf{N}'_\bullet}_n \circ s_n : Z_n(\mathbf{M}'_\bullet) \longrightarrow Z_n(\mathbf{N}'_\bullet),\ \forall n \in \mathbb{Z},} \tag{A.145}$$

διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\pi^{\mathbf{N}'_\bullet}_n \circ \tau'_{Z_n} &\underset{(A.145)}{=} \pi^{\mathbf{N}'_\bullet}_n \circ (h_n - \iota^{\mathbf{N}'_\bullet}_n \circ s_n) = \pi^{\mathbf{N}'_\bullet}_n \circ h_n - \underbrace{\pi^{\mathbf{N}'_\bullet}_n \circ \iota^{\mathbf{N}'_\bullet}_n}_{=0} \circ s_n \\
&= \pi^{\mathbf{N}'_\bullet}_n \circ h_n \underset{(A.135)}{=} \upsilon_n \circ \pi^{\mathbf{M}'_\bullet}_n,\ \forall n \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

κάτι που σημαίνει ότι το δεύτερο τετράγωνο τού διαγράμματος (A.134) είναι μεταθετικό. Εξάλλου, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$\iota^{\mathbf{N}_\bullet}_n \circ g_{B_n} = g_{Z_n} \circ \iota^{\mathbf{N}'_\bullet}_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{A.146}$$

διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} g_{Z_n} \circ \tau'_{Z_n} &\underset{(\text{A.145})}{=} g_{Z_n} \circ (h_n - \iota_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ s_n) = g_{Z_n} \circ h_n - g_{Z_n} \circ \iota_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ s_n \\ &\underset{(\text{A.136})}{=} \tau_{Z_n} \circ f_{Z_n} + \ell_n - g_{Z_n} \circ \iota_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ s_n \\ &\underset{(\text{A.141}),\,(\text{A.144})}{=} \tau_{Z_n} \circ f_{Z_n} + \iota_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ g_{B_n} \circ s_n - g_{Z_n} \circ \iota_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ s_n \\ &\underset{(\text{A.146})}{=} \tau_{Z_n} \circ f_{Z_n} + (\underbrace{\iota_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ g_{B_n} - g_{Z_n} \circ \iota_n^{\mathbf{N}'_\bullet}}_{=0}) \circ s_n = \tau_n \circ f_{Z_n}, \end{aligned}$$

οπότε *και* το πρώτο τετράγωνο τού διαγράμματος (A.134) είναι μεταθετικό, και ο 1ος ισχυρισμός είναι αληθής. Εν συνεχεία, θεωρούμε τυχόν στοιχείο $x \in B_n(\mathbf{M}'_\bullet)$. Από τη μεταθετικότητα τού (A.134) έπεται ότι

$$\pi_n^{\mathbf{N}'_\bullet}(\tau'_{Z_n}(x)) = \upsilon_n(\pi_n^{\mathbf{M}'_\bullet}(x)) = \upsilon_n(x + B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) = \upsilon_n(0_{H_n(\mathbf{M}'_\bullet)}) = 0_{H_n(\mathbf{N}'_\bullet)},$$

δηλαδή ότι $\tau'_{Z_n}(x) \in B_n(\mathbf{N}'_\bullet)$, οπότε

$$\tau'_{Z_n}(B_n(\mathbf{M}'_\bullet)) \subseteq B_n(\mathbf{N}'_\bullet).$$

Λόγω αυτής τής εγκλειστικής σχέσεως ορίζεται (καλώς) ο ομομορφισμός

$$\tau'_{B_n} : B_n(\mathbf{M}'_\bullet) \longrightarrow B_n(\mathbf{N}'_\bullet),\ \ x \longmapsto \tau'_{B_n}(x) := \tau'_{Z_n}(x),$$

για τον οποίο ισχύει

$$g_{B_n} \circ \tau'_{B_n} = \tau_{B_n} \circ f_{B_n},\ \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{A.147}$$

εξαιτίας τής μεταθετικότητας τού πρώτου τετραγώνου τού (A.134).

▸ *Ισχυρισμός* 2ος. Υπάρχει $\lambda_n \in \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet), N'_n)$, τέτοιος ώστε το κάτωθι διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[d, "\tau_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[l, "f_n \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet}"'] \arrow[d, dashed, "\lambda_n"] \arrow[dr, "\tau'_{B_{n-1}}"] \arrow[d, phantom, shift left=8, "\circlearrowleft"] & \\ N_n & N'_n \arrow[l, "g_n"] \arrow[r, "\check{d}_n^{\mathbf{N}'_\bullet}"'] & B_{n-1}(\mathbf{N}'_\bullet) \end{tikzcd} \tag{A.148}$$

Εν προκειμένω, ο $\beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet), M'_n)$ είναι τέτοιος, ώστε να ισχύει η ισότητα $\check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} = \mathrm{id}_{B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)}$. (Βλ. (A.113).) Θέτουμε

$$\boxed{p_n := g_n \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{B_{n-1}} - \tau_n \circ f_n \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} : B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \longrightarrow N_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.} \tag{A.149}$$

Επαλήθευση 2ου ισχυρισμού: Είναι άμεσος ο έλεγχος τής ισχύος των ακόλουθων τριών ισοτήτων:

$$\check{d}_n^{\mathbf{N}_\bullet}\circ g_n = g_{B_{n-1}}\circ \check{d}_n^{\mathbf{N}'_\bullet},\ \forall n\in\mathbb{Z}, \tag{A.150}$$

$$\check{d}_n^{\mathbf{N}_\bullet}\circ \tau_n = \tau_{B_{n-1}}\circ \check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet},\ \forall n\in\mathbb{Z}, \tag{A.151}$$

$$\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}\circ f_n = f_{B_{n-1}}\circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet},\ \forall n\in\mathbb{Z}, \tag{A.152}$$

Είναι προφανές ότι

$$\begin{aligned}
\check{d}_n^{\mathbf{N}_\bullet}\circ p_n &\underset{(\text{A.149})}{=} \check{d}_n^{\mathbf{N}_\bullet}\circ\left(g_n\circ\beta_{n-1}^{\mathbf{N}'_\bullet}\circ\tau'_{B_{n-1}} - \tau_n\circ f_n\circ\beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet}\right)\\
&= \check{d}_n^{\mathbf{N}_\bullet}\circ g_n\circ\beta_{n-1}^{\mathbf{N}'_\bullet}\circ\tau'_{B_{n-1}} - \check{d}_n^{\mathbf{N}_\bullet}\circ\tau_n\circ f_n\circ\beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet}\\
&\underset{(\text{A.150}),\,(\text{A.151}),\,(\text{A.152})}{=} g_{B_{n-1}}\circ\underbrace{\check{d}_n^{\mathbf{N}'_\bullet}\circ\beta_{n-1}^{\mathbf{N}'_\bullet}}_{=\mathrm{id}_{B_{n-1}(\mathbf{N}'_\bullet)}}\circ\tau'_{B_{n-1}} - \tau_{B_{n-1}}\circ f_{B_{n-1}}\circ\underbrace{\check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet}\circ\beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet}}_{=\mathrm{id}_{B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)}}\\
&= g_{B_{n-1}}\circ\tau'_{B_{n-1}} - \tau_{B_{n-1}}\circ f_{B_{n-1}} \underset{(\text{A.147})}{=} 0,
\end{aligned}$$

ήτοι ότι

$$\check{d}_n^{\mathbf{N}_\bullet}\circ p_n = 0,\ \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{A.153}$$

Έστω τυχόν στοιχείο $x\in B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)$. Λόγω τής (A.153) έχουμε

$$\check{d}_n^{\mathbf{N}_\bullet}(p_n(x)) = 0_{B_n(\mathbf{N}'_\bullet)} \Longrightarrow p_n(x)\in\ \mathrm{Ker}(\check{d}_n^{\mathbf{N}_\bullet}) = \mathrm{Ker}(d_n^{\mathbf{N}_\bullet}) = Z_n(\mathbf{N}_\bullet).$$

Γι' αυτό ορίζεται καλώς ο ομομορφισμός

$$q_n : B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)\longrightarrow Z_n(\mathbf{N}_\bullet),\ x\longmapsto q_n(x) := p_n(x).$$

Είναι δε πρόδηλη η ισότητα

$$p_n = j_n^{\mathbf{N}_\bullet}\circ q_n,\ \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{A.154}$$

Επειδή ο $B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)$ (ως υπομόδιος τού προβολικού μοδίου M'_{n-1}) είναι προβολικός, υπάρχει $r_n\in\mathrm{Hom}_R(B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet), Z_n(\mathbf{N}'_\bullet))$ που καθιστά το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
& B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet) \arrow[dl, dashed, "r_n"'] \arrow[d, "q_n"] & \\
Z_n(\mathbf{N}'_\bullet) \arrow[r, two heads, "g_{Z_n}"'] & Z_n(\mathbf{N}_\bullet) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

ήτοι ισχύει η ισότητα

$$g_{Z_n}\circ r_n = q_n,\ \forall n\in\mathbb{Z}. \tag{A.155}$$

Θέτοντας

$$\boxed{\lambda_n := \beta_{n-1}^{\mathbf{N}'_\bullet}\circ\tau'_{B_{n-1}} - j_n^{\mathbf{N}'_\bullet}\circ r_n : B_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)\longrightarrow N'_n,\ \forall n\in\mathbb{Z},} \tag{A.156}$$

διαπιστώνουμε ότι

$$\check{d}_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \lambda_n \underset{(\text{A.156})}{=} \check{d}_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ (\beta_{n-1}^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{B_{n-1}} - j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ r_n)$$

$$= \underbrace{\check{d}_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{N}'_\bullet}}_{=\mathrm{id}_{B_{n-1}(\mathbf{N}'_\bullet)}} \circ \tau'_{B_{n-1}} - \underbrace{\check{d}_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ j_n^{\mathbf{N}'_\bullet}}_{=0} \circ r_n = \tau'_{B_{n-1}}, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

κάτι που σημαίνει ότι το τρίγωνο τού διαγράμματος (A.134) είναι μεταθετικό. Εξάλλου, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$j_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ g_{Z_n} = g_n \circ j_n^{\mathbf{N}'_\bullet}, \ \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{A.157}$$

διαπιστώνουμε ότι

$$g_n \circ \lambda_n \underset{(\text{A.156})}{=} g_n \circ (\beta_{n-1}^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{B_{n-1}} - j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ r_n) = g_n \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{B_{n-1}} - g_n \circ j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ r_n$$

$$\underset{(\text{A.149})}{=} \tau_n \circ f_n \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} + p_n - g_n \circ j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ r_n$$

$$\underset{(\text{A.154}),\,(\text{A.155})}{=} \tau_n \circ f_n \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} + j_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ g_{Z_n} \circ r_n - g_n \circ j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ r_n$$

$$\underset{(\text{A.157})}{=} \tau_n \circ f_n \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} + (\underbrace{j_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ g_{Z_n} - g_n \circ j_n^{\mathbf{N}'_\bullet}}_{=0}) \circ r_n = \tau_n \circ f_n \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet},$$

οπότε *και* το τετράγωνο τού διαγράμματος (A.148) είναι μεταθετικό, και ο 2ος ισχυρισμός είναι αληθής.

▸ *Αποπεράτωση αποδείξεως*. Ορίζουμε τον ομομορφισμό

$$\boxed{\tau'_n := j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{Z_n} \circ \alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} + \lambda_n \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet} : M'_n \longrightarrow N'_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.} \tag{A.158}$$

Εν προκειμένω, ο $\alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(M'_n, Z_n(\mathbf{M}'_\bullet))$ είναι τέτοιος, ώστε να ισχύει η ισότητα $\alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ j_n^{\mathbf{M}'_\bullet} = \mathrm{id}_{Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)}$. (Βλ. (A.114).)

(a) Η σχηματιζόμενη ακολουθία $\tau'_\bullet : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{N}'_\bullet$ αποτελεί *αλυσωτό μετασχηματισμό*, δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M'_n \arrow[r, "d_n^{\mathbf{M}'_\bullet}"] \arrow[d, "\tau'_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\tau'_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N'_n \arrow[r, "d_n^{\mathbf{N}'_\bullet}"'] & N'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Πράγματι· επειδή $\check{d}_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} = 0$ και $\check{d}_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ d_n^{\mathbf{M}'_\bullet} = 0$, η αποδεικτέα γίνεται

$$\tau'_{n-1} \circ d_n^{\mathbf{M}'_\bullet} = d_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_n$$

$$\underset{(\text{A.158})}{\Longleftrightarrow} (j_{n-1}^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{Z_{n-1}} \circ \alpha_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} + \lambda_{n-1} \circ \check{d}_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet}) \circ d_n^{\mathbf{M}'_\bullet} = d_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ (j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{Z_n} \circ \alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} + \lambda_n \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet})$$

ή -ισοδυνάμως-

$$j_{n-1}^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{Z_{n-1}} \circ \alpha_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ d_n^{\mathbf{M}'_\bullet} = d_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \lambda_n \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet}. \tag{A.159}$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \tau'_n \circ j_n^{\mathbf{M}'_\bullet} &= (j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{Z_n} \circ \alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} + \lambda_n \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet}) \circ j_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \\ &= j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{Z_n} \circ \underbrace{\alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ j_n^{\mathbf{M}'_\bullet}}_{=\mathrm{id}_{Z_n(\mathbf{M}'_\bullet)}} + \lambda_n \circ \underbrace{\check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ j_n^{\mathbf{M}'_\bullet}}_{=0} = j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{Z_n} \end{aligned}$$

και $d_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \lambda_n \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet} = \tau'_{B_{n-1}} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet}$, η (A.159) ισοδυναμεί με την

$$\tau'_{n-1} \circ j_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ \alpha_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ d_n^{\mathbf{M}'_\bullet} = \tau'_{B_{n-1}} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet}. \tag{A.160}$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε $x \in M'_n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet}(d_n^{\mathbf{M}'_\bullet}(x)) &= \alpha_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet}(\check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet}(x)) = \alpha_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet}(j_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet}(\check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet}(x))) \\ &= (\underbrace{\alpha_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ j_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet}}_{=\mathrm{id}_{Z_{n-1}(\mathbf{M}'_\bullet)}})(\check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet}(x)) = \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet}(x), \end{aligned}$$

οπότε η (A.160) ισοδυναμεί με την

$$\tau'_{n-1} \circ j_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet} = \tau'_{B_{n-1}} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet},$$

η οποία είναι *προδήλως αληθής*.

(b) Ισχύει η ισότητα

$$\boxed{\tau_n \circ f_n = g_n \circ \tau'_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}.} \tag{A.161}$$

Κατ' αρχάς (εκ των ορισμών) έχουμε

$$j_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ \tau_{Z_n} \circ f_{Z_n} = \tau_n \circ f_n \circ j_n^{\mathbf{M}'_\bullet}, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.162}$$

Απλοί υπολογισμοί δίδουν

$$\begin{aligned} & g_n \circ \tau'_n \underset{(A.158)}{=} g_n \circ (j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{Z_n} \circ \alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} + \lambda_n \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet}) \\ & = g_n \circ j_n^{\mathbf{N}'_\bullet} \circ \tau'_{Z_n} \circ \alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} + g_n \circ \lambda_n \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \underset{(A.157)}{=} j_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ g_{Z_n} \circ \tau'_{Z_n} \circ \alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} + g_n \circ \lambda_n \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \\ & \underset{(A.148)}{=} j_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ g_{Z_n} \circ \tau'_{Z_n} \circ \alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} + \tau_n \circ f_n \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \underset{(A.134)}{=} j_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ \tau_{Z_n} \circ f_{Z_n} \circ \alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} + \tau_n \circ f_n \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ d_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \\ & \underset{(A.162)}{=} \tau_n \circ f_n \circ j_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ \alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} + \tau_n \circ f_n \circ \beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet} = (\tau_n \circ f_n) \circ (j_n^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ \alpha_n^{\mathbf{M}'_\bullet} + \beta_{n-1}^{\mathbf{M}'_\bullet} \circ \check{d}_n^{\mathbf{M}'_\bullet}) \\ & \underset{(A.115)}{=} (\tau_n \circ f_n) \circ \mathrm{id}_{M'_n} = \tau_n \circ f_n, \end{aligned}$$

οπότε η (A.161) είναι όντως αληθής. □

Α.4.49 Θεώρημα («Κατηγορική εκδοχή τού θεωρήματος τού Künneth για μοδίους ομολογίας υπεράνω κληρονομικών R ως προς τον συναρτητή $\mathbf{F}$»). *Έστω $\mathbf{F}$ ένας εκ δεξιών ακριβής διπλός συναρτητής (Α.34), συναλλοίωτος ως προς αμφότερες τις μεταβλητές. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι κληρονομικός, τότε, δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{N}_\bullet = (N_n, d_n^{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$, ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν για οιονδήποτε παγιωμένον προβολικό R-μόδιο P ο συναρτητής*

$$\mathbf{F}(P,-) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

(σε επίπεδο R-μοδίων) είναι ακριβής και εάν, ταυτοχρόνως, το αλυσωτό σύμπλοκο $(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ είναι ακυκληματικό, ήτοι ισχύει

$$\boxed{H_n((\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z},} \tag{A.163}$$

(πρβλ. εδ. 3.2.3), *τότε υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\begin{array}{l} \{0\} \longrightarrow \bigoplus\limits_{p+q=n} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \xhookrightarrow{\ \psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}\ } H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \\ \xrightarrow{\ \chi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}\ }\!\!\!\!\rightarrow \bigoplus\limits_{p+q=n-1} (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H_q(\mathbf{N}_\bullet)) \longrightarrow \{0\} \end{array} \tag{A.164}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου ο αλυσωτός μετασχηματισμός $\psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ είναι αυτός τού λήμματος Α.4.3 και όπου αμφότεροι οι

$$\left\{ \psi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \,\middle|\, (\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \right\},\ \left\{ \chi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{ζεύγη } (\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \\ \text{έχοντα τις προαναφερθείσες ιδιότητες} \end{array} \right\}$$

είναι φυσικοί μετασχηματισμοί.

(ii) *Η* (Α.164) *είναι (άνευ άλλων επιπροσθέτων προϋποθέσεων) διασπώμενη, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\boxed{H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \cong \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \oplus (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1}.}$$

Απόδειξη. **Βήμα 1ο.** Με τη βοήθεια των λημμάτων Α.4.35 και Α.4.47 κατασκευάζουμε *γνήσιες* προβολικές προσεγγίσεις $(\mathbf{M}'_\bullet, f_\bullet)$ και $(\mathbf{N}'_\bullet, g_\bullet)$ των $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{N}_\bullet$, αντιστοίχως. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Α.4.45 (με τα $\mathbf{M}'_\bullet$ και $\mathbf{N}'_\bullet$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{N}_\bullet$) λαμβάνουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τη διασπώμενη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\begin{array}{l} \{0\} \to \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_n \xhookrightarrow{\ \psi_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}\ } H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \\ \xrightarrow{\ \zeta_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}\ }\!\!\!\!\rightarrow (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho\cdot}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_{n-1} \to \{0\} \end{array} \tag{A.165}$$

Εν συνεχεία, θεωρούμε το κάτωθι διάγραμμα (που έχει την (Α.165) ως άνω γραμμή του):

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_n \arrow[r, hook, "\psi_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}"] \arrow[d, "\mathbf{F}(H_\bullet(f_\bullet), H_\bullet(g_\bullet))_n"] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \arrow[r, two heads, "\zeta_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}"] \arrow[d, "H_n(\mathbf{F}(f_\bullet,g_\bullet)_\bullet)"'] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(f_\bullet), H_\bullet(g_\bullet))_{n-1}"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_n \arrow[r, hook, "\psi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"'] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, dashed] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1} \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd} \tag{A.166}$$

Όπως έχει ήδη εξηγηθεί στο τρίτο βήμα τής αποδεικτικής διαδικασίας τού θεωρήματος A.4.33, αμφότεροι οι $H_n(f_\bullet), H_n(g_\bullet)$ είναι *ισομορφισμοί* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κατ' επέκταση, *και* οι $\mathbf{F}(H_\bullet(f_\bullet), H_\bullet(g_\bullet))_n$, $(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(f_\bullet), H_\bullet(g_\bullet))_n$ είναι *ισομορφισμοί* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. *Ισχυρισμός*: Ο $H_n(\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet)$ είναι ωσαύτως *ισομορφισμός* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ας κατατμήσουμε την ακριβή ακολουθία (τεσσάρων αλυσωτών συμπλόκων) (A.101) (με το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ ακυκληματικό) σε δύο *βραχείες* ακριβείς ακολουθίες

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \hookrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{A.167}$$

και

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet \hookrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \twoheadrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet. \tag{A.168}$$

Εξαιτίας τής ακυκληματικότητας των $\mathbf{F}(\mathbf{M}''_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ και $(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet$ (τού τελευταίου εξ υποθέσεως) και τής ακριβείας τής (A.167) το $\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet,\mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet$ είναι ωσαύτως ακυκληματικό. Τούτο, εν συνδυασμώ με τη *μακρά* ακριβή ακολουθία την κατασκευαζόμενη μέσω τού θεωρήματος 3.2.13 για την (A.168),

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \underbrace{H_n(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet)}_{\cong\{0\}} \arrow[r] & H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[dll, rounded corners, "H_n(\mathbf{F}(f_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)" description] & \\
H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r] & \underbrace{H_{n-1}(\mathrm{Im}(\mathbf{F}(e_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet)}_{\cong\{0\}} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

δίδει *ισομορφισμούς*

$$H_n(\mathbf{F}(f_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) : H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Οι επιπρόσθετοι *ισομορφισμοί*

$$H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, g_\bullet)_\bullet) : H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet), \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

μας είναι ήδη γνωστοί (βλ. (A.100)), οπότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι

$$H_n(\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet) = H_n(\mathbf{F}(f_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet) \circ H_n(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}'_\bullet}, g_\bullet)_\bullet),$$

καταλήγουμε στην επαλήθευση τού ισχυρισμού. Έχουμε πλέον το δικαίωμα να ορίσουμε τον επιμορφισμό

$$\boxed{\chi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} := (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(f_\bullet), H_\bullet(g_\bullet))_{n-1} \circ \zeta_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)} \circ H_n(\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet)^{-1}, \ \forall n \in \mathbb{Z},}$$

όπου $\zeta_n^{(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'_\bullet)}$ όπως στο θεώρημα A.4.45. Τοποθετώντας τόν $\chi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}$ υπεράνω τού διακεκομμένου (και «ανωνύμου») βέλους τού διαγράμματος (A.166), αυτό κλείνει κατά τέτοιον τρόπο, ώστε το δεύτερο ορθογώνιο παραλληλόγραμμό του να είναι μεταθετικό. Η μεταθετικότητα τού πρώτου είναι διασφαλισμένη από το θεώρημα A.4.5. Επομένως το (A.166) είναι *καθ' ολοκληρίαν μεταθετικό*, απ' όπου έπεται (επειδή και τα τρία κατακόρυφα βέλη του δηλούν *ισομορφισμούς*) ότι η κάτω του γραμμή οφείλει να είναι (όπως και η επάνω) διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία.

Βήμα 2ο. Το θεώρημα A.4.5 μας πληροφορεί ότι η οικογένεια $\psi_\bullet^{(-,-)}$ αποτελεί φυσικό μετασχηματισμό. Υπολείπεται να αποδειχθεί ότι η οικογένεια

$$\left\{ \chi_\bullet^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ζεύγη } (\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)^2) \\ \text{έχοντα τις προαναφερθείσες ιδιότητες} \end{array} \right\}$$

είναι ωσαύτως φυσικός μετασχηματισμός. Εάν $\tau_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \widetilde{\mathbf{M}}_\bullet$, $\tau_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet} : \mathbf{N}_\bullet \longrightarrow \widetilde{\mathbf{N}}_\bullet$ είναι (κατάλληλοι) αλυσωτοί μετασχηματισμοί, πρέπει να δειχθεί ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
H_\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\chi_n^{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}_\bullet)}"] \arrow[d, "H_\bullet(\mathbf{F}(\tau_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet},\tau_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}),H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet \arrow[d, "(\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\tau_{\bullet-1}^{\mathbf{M}_\bullet}),H_\bullet(\tau_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet}))_\bullet"] \\
H_\bullet(\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{M}}_\bullet,\widetilde{\mathbf{N}}_\bullet)_\bullet) \arrow[r, "\chi_n^{(\widetilde{\mathbf{M}}_\bullet,\widetilde{\mathbf{N}}_\bullet)}"'] & (\mathscr{L}_1^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\widetilde{\mathbf{M}}_{\bullet-1}),H_\bullet(\widetilde{\mathbf{N}}_\bullet))_\bullet
\end{tikzcd}$$

Προς τούτο θεωρούμε *γνήσιες* προβολικές προσεγγίσεις $(\widetilde{\mathbf{M}}'_\bullet,\widetilde{f}_\bullet)$ και $(\widetilde{\mathbf{N}}'_\bullet,\widetilde{g}_\bullet)$ των $\widetilde{\mathbf{M}}_\bullet$ και $\widetilde{\mathbf{N}}_\bullet$, αντιστοίχως. Σύμφωνα με το λήμμα A.4.48 υπάρχουν αλυσωτοί μετασχηματισμοί $\tau_\bullet^{\mathbf{M}'_\bullet} : \mathbf{M}'_\bullet \longrightarrow \widetilde{\mathbf{M}'}_\bullet$ και $\tau_\bullet^{\mathbf{N}'_\bullet} : \mathbf{N}'_\bullet \longrightarrow \widetilde{\mathbf{N}'}_\bullet$, τέτοιοι ώστε τα διαγράμματα αλυσωτών συμπλόκων

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0}_\bullet \arrow[r] & \mathbf{M}''_\bullet \arrow[r, hook] & \mathbf{M}'_\bullet \arrow[r, two heads, "f_\bullet"] \arrow[d, dashed, "\tau_\bullet^{\mathbf{M}'_\bullet}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{M}_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\tau_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}"] & \mathbf{0}_\bullet \\
\mathbf{0}_\bullet \arrow[r] & \widetilde{\mathbf{M}}''_\bullet \arrow[r, hook] & \widetilde{\mathbf{M}}'_\bullet \arrow[r, two heads, "\widetilde{f}_\bullet"'] & \widetilde{\mathbf{M}}_\bullet \arrow[r] & \mathbf{0}_\bullet
\end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0}_\bullet \arrow[r] & \mathbf{N}''_\bullet \arrow[r, hook] & \mathbf{N}'_\bullet \arrow[r, two heads, "g_\bullet"] \arrow[d, dashed, "\tau_\bullet^{\mathbf{N}'_\bullet}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{N}_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\tau_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet}"] & \mathbf{0}_\bullet \\
\mathbf{0}_\bullet \arrow[r] & \widetilde{\mathbf{N}}''_\bullet \arrow[r, hook] & \widetilde{\mathbf{N}}'_\bullet \arrow[r, two heads, "\widetilde{g}_\bullet"'] & \widetilde{\mathbf{N}}_\bullet \arrow[r] & \mathbf{0}_\bullet
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικά ή -ισοδυνάμως- να ισχύει

$$\widetilde{f}_n \circ \tau_n^{\mathbf{M}'_\bullet} = \tau_n^{\mathbf{M}_\bullet} \circ f_n, \quad \text{και} \quad \widetilde{g}_n \circ \tau_n^{\mathbf{N}'_\bullet} = \tau_n^{\mathbf{N}_\bullet} \circ g_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.169}$$

Επειδή οι $H_n(f_\bullet), H_n(g_\bullet)$, $H_n(\widetilde{f}_\bullet), H_n(\widetilde{g}_\bullet)$ είναι ισομορφισμοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τα τέσσερα κατακορυφα βέλη τού τριδιάστατου διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{M}}_\bullet, \widetilde{\mathbf{N}}_\bullet)_\bullet) \arrow[rr, "\chi_n^{(\widetilde{\mathbf{M}}_\bullet, \widetilde{\mathbf{N}}_\bullet)}"] & & (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\widetilde{\mathbf{M}}_\bullet), H_\bullet(\widetilde{\mathbf{N}}_\bullet))_{n-1} \\
H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet) \arrow[ur, "H_n(\mathbf{F}(\tau_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}, \tau_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet})_\bullet)"] \arrow[rr, "\chi_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}"] & & (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_{n-1} \arrow[ur, "(\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\tau_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet}), H_\bullet(\tau_\bullet^{\mathbf{N}_\bullet}))_{n-1}"] & \\
 & H_n(\mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{M}'}_\bullet, \widetilde{\mathbf{N}'}_\bullet)_\bullet) \arrow[uu, "H_n(\mathbf{F}(\tilde{f}_\bullet, \tilde{g}_\bullet)_\bullet)"] \arrow[rr, "\zeta_n^{(\widetilde{\mathbf{M}'}_\bullet, \widetilde{\mathbf{N}'}_\bullet)}"'] & & (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\widetilde{\mathbf{M}'}_\bullet), H_\bullet(\widetilde{\mathbf{N}'}_\bullet))_{n-1} \arrow[uu, "(\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\tilde{f}_\bullet), H_\bullet(\tilde{g}_\bullet))_{n-1}"'] \\
H_n(\mathbf{F}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet) \arrow[uu, "H_n(\mathbf{F}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet)"] \arrow[ur, "H_n(\mathbf{F}(\tau_\bullet^{\mathbf{M}'_\bullet}, \tau_\bullet^{\mathbf{N}'_\bullet})_\bullet)"] \arrow[rr, "\zeta_n^{(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)}"'] & & (\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}'_\bullet), H_\bullet(\mathbf{N}'_\bullet))_{n-1} \arrow[uu, "(\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(f_\bullet), H_\bullet(g_\bullet))_{n-1}"] \arrow[ur, "(\mathscr{L}_1^{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\tau_\bullet^{\mathbf{M}'_\bullet}), H_\bullet(\tau_\bullet^{\mathbf{N}'_\bullet}))_{n-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

(το οποίο έχει το σχήμα ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου) δηλούν *ισομορφισμούς*. Το *δάπεδό του* (ως υποδιάγραμμα) είναι μεταθετικό λόγω τής φυσικότητας τού $\zeta_\bullet^{(-,-)}$. Οι πλευρές αυτού οι ευρισκόμενες στο *εμπρόσθιο* και στο *οπίσθιο μέρος του* είναι μεταθετικές ένεκα τού τρόπου ορισμού τού $\chi_n^{(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)}$. Το ίδιο ισχύει και για *τη δεξιά και την αριστερή πλευρά του* εξαιτίας των σχέσεων (A.169). Ως εκ τούτου, *και* η *οροφή του* οφείλει να είναι μεταθετική. □

• **Περί των χρησιμοποιούμενων συναρτητών**. Σύμφωνα με ένα θεώρημα των Watts[63] και Eilenberg[64], κάθε προσθετικός, συναλλοίωτος συναρτητής $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ που είναι εκ δεξιών ακριβής *και διατηρεί τα ευθέα αθροίσματα*[65] είναι φυσικώς ισοδύναμος προς τον $- \otimes_R A$ για κάποιον παγιωμένο R-μόδιο A. Μεταβαίνοντας σε *διπλούς* R-διγραμμικούς συναρτητές (A.34), οι οποίοι είναι συναλλοίωτοι ως προς αμφότερες τις μεταβλητές και εκ δεξιών ακριβείς (και, ως εκ τούτου, υποψήφιοι για εφαρμογή τους σε κάποια κατηγορική εκδοχή τού θεωρήματος Künneth για μοδίους ομολογίας), παρατηρούμε ότι, ακόμη και αν προϋποτεθεί η διατήρηση των ευθέων αθροισμάτων ως προς τουλάχιστον μία εκ των μεταβλητών, ναι μεν υφίστανται οι προαναφερθείσες *φυσικές ισοδυναμίες* ως προς τον περιορισμό τους σε αυτή (ή αυτές), αλλά επειδή οι εν λόγω φυσικές ισοδυναμίες παραπέμπουν εξ ορισμού σε *ισομορφισμούς* R-μοδίων (παραμετρούμενους από τις εκάστοτε «παύλες», πρβλ. εδ. A.3.1 (ii)) και υφίστανται *ποικίλοι* ισομορφισμοί αυτού τού είδους, όταν κανείς εργάζεται με *συγκεκριμένους* συναρτητές (A.34) είναι δυνατόν να κάνει χρήση όχι απλώς τού $- \otimes_R -$ αλλά και πολλών άλλων. Επί παραδείγματι, *παγιώνοντας* έναν R-μόδιο L, μπορούμε να ορίσουμε δυο συναρτητές $\mathbf{F}_{(L)}$ και $\mathbf{G}_{(L)}$ τού ζητούμενου είδους ως ακολούθως: Έχοντας ως κίνητρό μας την *προσεταιριστικότητα* τού συνήθους τανυστικού γινομένου (βλ. θεώρημα 4.4.5), θέτουμε

$$\mathbf{F}_{(L)} = - \otimes_R (- \otimes_R L) : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R) \ni (M, N) \longmapsto \mathbf{F}_{(L)}(M, N) = M \otimes_R (N \otimes_R L) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \times \mathrm{Hom}_R(N, N') \ni (f, g) \longmapsto \mathbf{F}_{(L)}(f, g) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}_{(L)}(M, N), \mathbf{F}_{(L)}(M', N')),$$

[63] Βλ. C.E. Watts: *Intrinsic characterizations of some additive functors*, Proceedings of the American Mathematical Society **11** (1960), no. 1, 5-8.

[64] Βλ. S. Eilenberg: *Abstract description of some basic functors*, Journal of Indian Math. Soc. **24** (1960), 231-234.

[65] Αυτό σημαίνει ότι $\mathbf{F}(\bigoplus_{j \in J} M_j) \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbf{F}(M_j)$ για *οιαδήποτε* οικογένεια R-μοδίων $(M_j)_{j \in J}$.

όπου $\mathbf{F}_{(L)}(f,g) := f\overline{\otimes}(g\overline{\otimes}\,\mathrm{id}_L)$ και θεωρούμε (κατά τα ειωθότα) την επέκταση αυτού σε επίπεδο αλυσωτών συμπλόκων:

$$\mathbf{F}_{(L)} : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \longmapsto \mathbf{F}_{(L)}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$
$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet) \times \mathrm{Hom}_R(\mathbf{N}_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet) \ni (f_\bullet, g_\bullet) \longmapsto \mathbf{F}_{(L)}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}_{(L)}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet, \mathbf{F}_{(L)}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet),$$

όπου $\mathbf{F}_{(L)}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet := (\mathbf{M}_\bullet \otimes_R (\mathbf{N}_\bullet \otimes_R L)_\bullet)_\bullet$ και $\mathbf{F}_{(L)}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet := (f_\bullet\overline{\otimes}(g_\bullet\overline{\otimes}\,\mathrm{id}_L)_\bullet)_\bullet$. Εφαρμογή τού θεωρήματος A.4.49 για τον $\mathbf{F}_{(L)}$ δίδει το ακόλουθο:

A.4.50 Πόρισμα. *Εάν για δυο αλυσωτά σύμπλοκα R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet$, όπου ο R είναι κληρονομικός, το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathrm{Tor}_1^R(\mathbf{M}_\bullet, (\mathbf{N}_\bullet \otimes_R L)_\bullet)_\bullet$ είναι ακυκληματικό, τότε έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\boxed{\begin{gathered} H_n((\mathbf{M}_\bullet \otimes_R (\mathbf{N}_\bullet \otimes_R L)_\bullet)_\bullet) \cong \\ (H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet) \otimes_R (H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet) \otimes_R L)_\bullet)_n \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), (H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet) \otimes_R L)_\bullet)_{n-1}. \end{gathered}}$$

Εν συνεχεία, θέτουμε[66]

$$\mathbf{G}_{(L)} = - \otimes_R \mathrm{Hom}_R(L, -) : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R) \ni (M, N) \longmapsto \mathbf{G}_{(L)}(M, N) = M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(L, N) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \times \mathrm{Hom}_R(N, N') \ni (f, g) \longmapsto \mathbf{G}_{(L)}(f, g) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{G}_{(L)}(M, N), \mathbf{G}_{(L)}(M', N')),$$

όπου $\mathbf{G}_{(L)}(f,g) := f\overline{\otimes}(\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_L, g))$ και θεωρούμε (κατά τα ειωθότα) την επέκταση αυτού σε επίπεδο αλυσωτών συμπλόκων:

$$\mathbf{G}_{(L)} : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \longmapsto \mathbf{G}_{(L)}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$
$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet) \times \mathrm{Hom}_R(\mathbf{N}_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet) \ni (f_\bullet, g_\bullet) \longmapsto \mathbf{G}_{(L)}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{G}_{(L)}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet, \mathbf{G}_{(L)}(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}'_\bullet)_\bullet),$$

όπου[67] $\mathbf{G}_{(L)}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet := (\mathbf{M}_\bullet \otimes_R \mathrm{Hom}_R(L, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)_\bullet$ και

$$\mathbf{G}_{(L)}(f_\bullet, g_\bullet)_\bullet := (f_\bullet\overline{\otimes}(\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_L, g_\bullet))_\bullet)_\bullet.$$

Εφαρμογή τού θεωρήματος A.4.49 για τον $\mathbf{G}_{(L)}$ δίδει το ακόλουθο:

A.4.51 Πόρισμα. *Εάν για δυο αλυσωτά σύμπλοκα R-μοδίων $\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet$, όπου ο R είναι κληρονομικός, το αλυσωτό σύμπλοκο $\mathrm{Tor}_1^R(\mathbf{M}_\bullet \otimes_R \mathrm{Hom}_R(L, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)_\bullet$ είναι ακυκληματικό, τότε έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\boxed{\begin{gathered} H_n((\mathbf{M}_\bullet \otimes_R \mathrm{Hom}_R(L, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet)_\bullet) \cong \\ (H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(L, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)_n \oplus \mathrm{Tor}_1^R(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), \mathrm{Hom}_R(L, H_\bullet(\mathbf{N}_\bullet))_\bullet)_{n-1}. \end{gathered}}$$

[66]Σημειωτέον ότι, για *παγιωμένους* R-μοδίους A και B, ο μεν συναλλοίωτος $- \otimes_R A$ διατηρεί (σύμφωνα με το θεώρημα 4.4.6) τα ευθέα αθροίσματα, ο δε συναλλοίωτος $B \otimes_R \mathrm{Hom}_R(L, -)$ *δεν τα διατηρεί*. (Είναι προφανές ότι αρκεί να τεθεί $B = R$, $L = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} K\mathsf{X}^j$, K σώμα, και να ληφθεί υπ' όψιν το παράδειγμα τής παρατηρήσεως 4.1.11 εν συνδυασμώ με το θεώρημα 4.4.3.)

[67]Εν προκειμένω, $\mathrm{Hom}_R(L, \mathbf{N}_\bullet)_\bullet = (\mathrm{Hom}_R(L, \mathbf{N}_\bullet)_n, \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_L, d_n^{\mathbf{N}_\bullet}))_{n \in \mathbb{Z}}$.

▸ **Το δεύτερο πρόβλημα.** Δοθέντος ενός R-διγραμμικού συναρτητή

$$\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R, \tag{A.170}$$

ανταλλοίωτου ως προς την πρώτη και συναλλοίωτου ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, θεωρούμε την επέκτασή του

$$\mathbf{F} : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \tag{A.171}$$

(αποτελούσα έναν διπλό συναρτητή, προσθετικό ως προς αμφότερες τις μεταβλητές, ανταλλοίωτο ως προς την πρώτη και συναλλοίωτο ως προς τη δεύτερη μεταβλητή) και ορίζουμε για αλυσωτά και συναλυσωτά σύμπλοκα

$$\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}, \ \ \mathbf{N}^\bullet = (N^n, d^n_{\mathbf{N}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}},$$

το συναλυσωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet = (\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^n, \mathfrak{d}^n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

όπως στο εδ. A.2.19. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ συμβολίζουμε ως

$$Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \xhookrightarrow{j_n^{\mathbf{M}_\bullet}} M_n, \qquad Z^n(\mathbf{N}^\bullet) \xhookrightarrow{j^n_{\mathbf{N}^\bullet}} N^n$$

τις συνήθεις ενθέσεις, ως

$$Z_n(\mathbf{M}_\bullet) \xrightarrow{\pi_n^{\mathbf{M}_\bullet}} H_n(\mathbf{M}_\bullet), \qquad Z^n(\mathbf{N}^\bullet) \xrightarrow{\pi^n_{\mathbf{N}^\bullet}} H^n(\mathbf{N}^\bullet),$$

τους φυσικούς επιμορφισμούς και ως

$$M_n \xrightarrow{\check{d}_n^{\mathbf{M}_\bullet}} B_{n-1}(\mathbf{M}_\bullet), \qquad N^n \xrightarrow{\check{d}^n_{\mathbf{N}^\bullet}} B^{n+1}(\mathbf{N}^\bullet).$$

τους επιμορφισμούς τους επαγόμενους από τους (συσ)συνοριακούς τελεστές των ανωτέρω συμπλόκων κατόπιν περιορισμού τού πεδίου τιμών αυτών επί τής εικόνας τους. Επιπροσθέτως, θέτουμε

$$j_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} := (j_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}, \ j^\bullet_{\mathbf{N}^\bullet} := (j^n_{\mathbf{N}^\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}, \ \pi_\bullet^{\mathbf{M}_\bullet} := (\pi_n^{\mathbf{M}_\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}, \ \pi^\bullet_{\mathbf{N}^\bullet} := (\pi^n_{\mathbf{N}^\bullet})_{n\in\mathbb{Z}}$$

κ.ο.κ., και θεωρούμε τα σύμπλοκα $H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet)$, τα υποσύμπλοκα $Z_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$, $B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet)$ τού $\mathbf{M}_\bullet$ και $Z^\bullet(\mathbf{N}^\bullet)$, $B^\bullet(\mathbf{N}^\bullet)$ τού $\mathbf{N}^\bullet$, καθώς και τα συναλυσωτά σύμπλοκα

$$H^\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet) \ \text{ και } \ \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet))^\bullet. \tag{A.172}$$

Κατ' αναλογίαν προς ό,τι συνέβαινε στο πρώτο πρόβλημα, μια κομψή σχέση μεταξύ των συναρτητών (A.172) είναι εφικτή μόνον στην περίπτωση όπου ο (A.171) είναι *εξ αριστερών ακριβής*.

A.4.52 Ορισμός. Ο συναρτητής (A.171) καλείται **εξ αριστερών ακριβής**[68] όταν για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{M}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathbf{M}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

(βλ. εδ. 3.2.11) και, αντιστοίχως, για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{N}^{\bullet\prime} \xrightarrow{h^{\bullet}} \mathbf{N}^{\bullet} \xrightarrow{k^{\bullet}} \mathbf{N}^{\bullet\prime\prime} \longrightarrow \mathbf{0}^{\bullet}$$

(βλ. εδ. 3.2.28), αμφότερες οι

$$\mathbf{0}^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}'_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{\bullet} \xrightarrow{\mathbf{F}(f_{\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}^{\bullet}})^{\bullet}} \mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{\bullet} \xrightarrow{\mathbf{F}(g_{\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}^{\bullet}})^{\bullet}} \mathbf{F}(\mathbf{M}''_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{\bullet}$$

(όπου $\mathbf{N}^{\bullet}$ κάποιο παγιωμένο συναλυσωτό σύμπλοκο) και

$$\mathbf{0}^{\bullet} \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}'^{\bullet})^{\bullet} \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_{\bullet}}, h^{\bullet})^{\bullet}} \mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{\bullet} \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_{\bullet}}, k^{\bullet})^{\bullet}} \mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet\prime\prime})^{\bullet}$$

(όπου $\mathbf{M}_{\bullet}$ κάποιο παγιωμένο αλυσωτό σύμπλοκο) είναι ακριβείς, ήτοι αμφότερες οι

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}'_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{n} \xrightarrow{\mathbf{F}(f_{\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}^{\bullet}})^{n}} \mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{n} \xrightarrow{\mathbf{F}(g_{\bullet}, \mathrm{id}_{\mathbf{N}^{\bullet}})^{n}} \mathbf{F}(\mathbf{M}''_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{n}$$

και

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}'^{\bullet})^{n} \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_{\bullet}}, h^{\bullet})^{n}} \mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{n} \xrightarrow{\mathbf{F}(\mathrm{id}_{\mathbf{M}_{\bullet}}, k^{\bullet})^{n}} \mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet\prime\prime})^{n}$$

είναι ακριβείς ακολουθίες R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων *για οιονδήποτε* $n \in \mathbb{Z}$.

Το αντίστοιχο τού λήμματος A.4.3 είναι το ακόλουθο:

A.4.53 Λήμμα. *Εάν ο συναρτητής* (A.171) *είναι εξ αριστερών ακριβής* (*υπό την έννοια τού εδ.* A.4.52), *τότε υφίσταται ακριβώς ένας συναλυσωτός μετασχηματισμός*

$$\boxed{H^{\bullet}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{\bullet}) \xrightarrow{\psi^{\bullet}_{(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})}} \mathbf{F}(H_{\bullet}(\mathbf{M}_{\bullet}), H^{\bullet}(\mathbf{N}^{\bullet}))^{\bullet}}$$

που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα συναλυσωτών μετασχηματισμών μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} Z^{\bullet}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{\bullet}) \arrow[r, two heads, "\pi^{\bullet}_{\mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{\bullet}}"] \arrow[d, "\mathbf{F}(j^{\mathbf{M}_{\bullet}}_{\bullet}, j^{\bullet}_{\mathbf{N}^{\bullet}})^{\bullet}"'] \arrow[dr, "\psi^{\bullet}_{(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})} \circ \pi^{\bullet}_{\mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{\bullet}}" description] & H^{\bullet}(\mathbf{F}(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})^{\bullet}) \arrow[d, dashed, "\psi^{\bullet}_{(\mathbf{M}_{\bullet}, \mathbf{N}^{\bullet})}"] \\ \mathbf{F}(Z_{\bullet}(\mathbf{M}_{\bullet}), Z^{\bullet}(\mathbf{N}^{\bullet}))^{\bullet} \arrow[r, "\mathbf{F}(\pi^{\mathbf{M}_{\bullet}}_{\bullet}, \pi^{\bullet}_{\mathbf{N}^{\bullet}})^{\bullet}"'] & \mathbf{F}(H_{\bullet}(\mathbf{M}_{\bullet}), H^{\bullet}(\mathbf{N}^{\bullet}))^{\bullet} \end{tikzcd}$$

Το αντίστοιχο τού θεωρήματος A.4.5 είναι το ακόλουθο:

[68] Πρβλ. [29], Proposition 4.3.a, σελ. 25.

Α.4.54 Θεώρημα. *Διατηρώντας τά δεδομένα και τον συμβολισμό τού* Α.4.53, *οι*

$$\left\{ H^\bullet(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet) \xrightarrow{\psi^\bullet_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}} \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet))^\bullet \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{M}_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \\ \mathbf{N}^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \end{array} \right\}$$

αποτελούν έναν φυσικό μετασχηματισμό από τη σύνθεση $H^\bullet(-)\circ\mathbf{F}$ *των συναρτητών*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)\times\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[r, rightsquigarrow, "\mathbf{F}"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "H^\bullet(-)\circ\mathbf{F}"'] & \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[d, rightsquigarrow, "H^\bullet(-)"] \\
& \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)
\end{tikzcd}$$

στη σύνθεση $\mathbf{F}\circ(H_\bullet(-)\times H^\bullet(-))$ *των συναρτητών*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)\times\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[r, rightsquigarrow, "H_\bullet(-)\times H^\bullet(-)"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "\mathbf{F}\circ(H_\bullet(-)\times H^\bullet(-))"'] & \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)\times\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[d, rightsquigarrow, "\mathbf{F}"] \\
& \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)
\end{tikzcd}$$

Για να ορίσουμε *εκ δεξιών παραγώγους συναρτητές* τού συναρτητή (Α.170) *ως προς την πρώτη μεταβλητή* (όταν αυτός είναι εξ αριστερών ακριβής) αρκεί να μιμηθούμε τον τρόπο δομήσεως τού ορισμού Α.3.30.

Α.4.55 Ορισμός. Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε μέσω τού δοθέντος αρχικού (Α.170) (όταν προϋποτεθεί ότι αυτός είναι εξ αριστερών ακριβής) τον διπλό συναρτητή

$$(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(-,-)\ : \mathfrak{Mod}_R\times\mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R\times\mathfrak{Mod}_R)\ni(M,N)\longmapsto(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M,N)\in\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M',M)\times\mathrm{Hom}_R(N,N')\ni(\varphi,\psi)\mapsto(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\varphi,\psi)\in\mathrm{Hom}_R((\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M,N),(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M',N')),$$

(που καλείται, ιδιαιτέρως, m-**οστός εκ δεξιών παράγωγος συναρτητής τού F ως προς την πρώτη μεταβλητή**) θέτοντας αφ' ενός μεν[69]

$$\boxed{(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M,N) := \mathscr{R}^m(\mathbf{F}(-,N))(M),} \tag{Α.173}$$

αφ' ετέρου δε

$$\boxed{(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\varphi,\psi) := h^m(M')\circ(\mathscr{R}^m(\mathbf{F}(-,N))(\varphi)),}$$

όπου

$$h^0 := t_{N'} \circ \mathbf{F}(\mathrm{id}_{-}, \psi) \circ t_N^{-1} : \mathscr{R}^0(\mathbf{F}(-, N)) \longrightarrow \mathscr{R}^0(\mathbf{F}(-, N')),$$

με $t_N : \mathbf{F}(-, N) \longrightarrow \mathscr{R}^0(\mathbf{F}(-, N))$, $t_{N'} : \mathbf{F}(-, N') \longrightarrow \mathscr{R}^0(\mathbf{F}(-, N'))$ τις φυσικές ισοδυναμίες τις κατασκευαζόμενες μέσω τού θεωρήματος A.3.8 (με τους $\mathbf{F}(-, N)$ και $\mathbf{F}(-, N')$ στη θέση τού εκεί παρατεθέντος $\mathbf{F}$) και

$$\mathfrak{h} = \{h^m\}_{m\in\mathbb{Z}} : \{\mathscr{R}^m(\mathbf{F}(-, N))\}_{m\in\mathbb{Z}} \longrightarrow \{\mathscr{R}^m(\mathbf{F}(-, N'))\}_{m\in\mathbb{Z}}$$

τη μοναδική (σύμφωνα με το θεώρημα A.3.24) επέκταση τού φυσικού μετασχηματισμού h^0 σε έναν φυσικό μετασχηματισμό Α.Σ.Α.Α.Σ., ο οποίος καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M, N) \arrow[d, equal] & & (\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M, N') \arrow[d, equal] \\
\mathscr{R}^m(\mathbf{F}(-, N))(M) \arrow[rr, "h^m(N) = (\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\mathrm{id}_M, \psi)"] \arrow[d, "(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\varphi, \mathrm{id}_N)"'] \arrow[drr, "(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\varphi, \psi)" description] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathscr{R}^m(\mathbf{F}(-, N))(M') \arrow[d, "(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\varphi, \mathrm{id}_{N'})"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
\mathscr{R}^m(\mathbf{F}(-, N))(M') \arrow[rr, "h^m(M') = (\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\mathrm{id}_{M'}, \psi)"'] \arrow[d, equal] & & \mathscr{R}^m(\mathbf{F}(-, N'))(M') \arrow[d, equal] \\
(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M', N) & & (\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M', N')
\end{tikzcd}$$

A.4.56 Σημείωση. (i) *Εναλλακτικός χαρακτηρισμός τού* $\mathscr{R}^m(\mathbf{F}(-, N))$. Έστω $\mathbf{F}$ όπως στο εδάφιο A.4.55. Εάν M είναι τυχών R-μόδιος, τότε υπάρχει (κατά το πόρισμα 2.5.23) κάποιος *ελεύθερος* (και, κατ' επέκταση, βάσει τής προτάσεως 4.2.4, *προβολικός*) R-μόδιος L, καθώς και ένας υπομόδιος W τού L, ούτως ώστε να ισχύει $M \cong L/W$. Λόγω αυτού δημιουργείται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow W \xhookrightarrow{\;\;\iota\;\;} L \xrightarrow{\;\;\pi\;\;} \!\!\!\!\rightarrow M \longrightarrow \{0\}\ . \tag{A.174}$$

Επειδή ο $\mathbf{F}(-, N)$ είναι ανταλλοίωτος, θέτουμε

$$\boxed{(\mathrm{Sat}^1_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M, N) := \mathrm{Coker}(\ \mathbf{F}(L, N) \xrightarrow{\mathbf{F}(\iota, \mathrm{id}_N)} \mathbf{F}(W, N)\ ) = \mathbf{F}(W, N)/\mathrm{Im}(\mathbf{F}(\iota, \mathrm{id}_N)).} \tag{A.175}$$

Εάν M' είναι ένας R-μόδιος,

$$\{0\} \longrightarrow W' \xhookrightarrow{\;\;\iota'\;\;} L' \xrightarrow{\;\;\pi'\;\;} \!\!\!\!\rightarrow M' \longrightarrow \{0\}$$

[69] Από τον ορισμό (A.173) έπεται ότι $(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(-, N) = \mathscr{R}^m(\mathbf{F}(-, N))$.

μια βραχεία ακριβής ακολουθία αυτού τού είδους και $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$, τότε από την προβολικότητα τού L έπεται η ύπαρξη ενός $h \in \mathrm{Hom}_R(L, L')$ με την ιδιότητα $\pi' \circ h = \varphi \circ \pi$ (βλ. εδ. 4.2.1) και από την πρόταση 3.1.11 η ύπαρξη μονοσημάντως ορισμένου ομομορφισμού $g \in \mathrm{Hom}_R(W, W')$ με $\iota' \circ g = h \circ \iota$.

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & W \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & L \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & W' \arrow[r, hook, "\iota'"] & L' \arrow[r, two heads, "\pi'"] & M' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Κατόπιν εφαρμογής τού $\mathbf{F}(-, N)$ λαμβάνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(L, N) \arrow[r, "\mathbf{F}(\iota, \mathrm{id}_N)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}(W, N) \arrow[r, two heads, "\pi^{\mathbf{F}(W,N)}_{\mathrm{Im}(\mathbf{F}(\iota,\, \mathrm{id}_N))}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Coker}(\mathbf{F}(\iota, \mathrm{id}_N)) \arrow[r] & \{0\} \\
\mathbf{F}(L', N) \arrow[r, "\mathbf{F}(\iota', \mathrm{id}_N)"'] \arrow[u, "\mathbf{F}(h, \mathrm{id}_N)"] & \mathbf{F}(W', N) \arrow[r, two heads, "\pi^{\mathbf{F}(W',N)}_{\mathrm{Im}(\mathbf{F}(\iota',\, \mathrm{id}_N))}"'] \arrow[u, "\mathbf{F}(g, \mathrm{id}_N)"'] & \mathrm{Coker}(\mathbf{F}(\iota', \mathrm{id}_N)) \arrow[r] \arrow[u, dashed, "\underline{\mathbf{F}(g, \mathrm{id}_N)}"'] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

όπου $\underline{\mathbf{F}(g, \mathrm{id}_N)}$ είναι ο μοναδικός ομομορφισμός που το συμπληρώνει βάσει τού πορίσματος 3.1.15. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι ο $\underline{\mathbf{F}(g, \mathrm{id}_N)}$ *δεν εξαρτάται*[70] από τη συγκεκριμένη επιλογή τού h (με $\pi' \circ h = \pi$) και τού ότι επιδεικνύει ανταλλοίωτη συμπεριφορά ως προς τη σύνθεση τού g με έναν άλλον ομοειδή g'. Μάλιστα, στην περίπτωση όπου $M = M'$ και $\varphi = \mathrm{id}_M$, αυτός καθίσταται *ισομορφισμός*[71], πράγμα που σημαίνει ότι ο R-μόδιος (A.175) είναι (μέχρις ισομορφισμού) ανεξάρτητος τής συγκεκριμένης επιλογής τής (A.174). Θέτοντας $(\mathrm{Sat}^1_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\varphi) := \underline{\mathbf{F}(g, \mathrm{id}_N)}$, παρατηρούμε ότι τα δεδομένα

$$(\mathrm{Sat}^1_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(-, N) \ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto (\mathrm{Sat}^1_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M, N) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M', M) \ni \varphi \longmapsto (\mathrm{Sat}^1_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\varphi) \in \mathrm{Hom}_R((\mathrm{Sat}^1_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M, N), (\mathrm{Sat}^1_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M', N)),$$

καθορίζουν έναν ανταλλοίωτο, προσθετικό συναρτητή (ο οποίος μπορεί να επεκταθεί κατά τα ειωθότα σε διπλό συναρτητή), τον λεγόμενο και **πρώτο δεξιό δορυφόρο** (right satellite) **τού F ως προς την πρώτη μεταβλητή**. Ο ορισμός αυτός γενικεύεται και για *τυχόντες* ακεραίους m. Για $m \geqslant 2$, ορίζεται ο m-**οστός δεξιός δορυφόρος τού F ως προς την πρώτη μεταβλητή** (μέσω επαναληπτικής διαδικασίας) θέτοντας

$$\boxed{(\mathrm{Sat}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M, N) := (\mathrm{Sat}^1_{\text{πρ.}}(\mathrm{Sat}^{m-1}_{\text{πρ.}}\mathbf{F}))(M, N).}$$

Για $m = 0$ αρκεί να ορισθεί ως $\mathrm{Sat}^0_{\text{πρ.}}\mathbf{F}$ ο ίδιος ο $\mathbf{F}$ και για $m < 0$ να θεωρήσουμε τον $\mathrm{Sat}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F}$ ως τον μηδενικό συναρτητή. Η οικογένεια $\left\{(\mathrm{Sat}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(-, N)\right\}_{m \in \mathbb{Z}}$ αυτών

[70] Βλ. Hu [21], Chapter II, §6.

[71] Βλ. Cartan & Eilenberg [29], § III.1, σελ. 33-36, και § III.7, σελ. 49.

των δεξιών δορυφόρων ως προς την πρώτη μεταβλητή αποτελεί μια Α.Σ.Α.Α.Σ.[72] Επιπλέον, όταν $m > 0$, ισχύει[73] $(\mathrm{Sat}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(P,N) \cong \{0\}$ για κάθε προβολικό R-μόδιο P. Επομένως, η (προϋποτεθείσα) εξ αριστερών ακρίβεια τού $\mathbf{F}(-,N)$ δίδει $(\mathscr{L}_0^{\pi\varrho.}\mathbf{F})(-,N) \underset{\varphi.\iota.}{\cong} \mathbf{F}(-,N)$ (πρβλ. A.3.8) και το πόρισμα A.3.25 μας πληροφορεί ότι υφίσταται ακριβώς μία φυσική ισοδυναμία:

$$\boxed{\left\{(\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(-,N)\right\}_{m\in\mathbb{Z}} \underset{\varphi.\iota.}{\cong} \left\{(\mathrm{Sat}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(-,N)\right\}_{m\in\mathbb{Z}}.}$$

(ii) Επειδή η οικογένεια $\{(\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(-,N)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ είναι μια (ειδικής φύσεως) Α.Σ.Α.Α.Σ. (βλ. A.3.22, A.3.26 (ii) και A.3.12), μέσω οιασδήποτε βραχείας ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{\;f\;} M \xrightarrow{\;g\;} M'' \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται μια *μακρά ακριβής ακολουθία*

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathbf{F}(M'',N) \arrow[r, "\mathbf{F}(g,\mathrm{id}_N)"] & \mathbf{F}(M,N) \arrow[r, "\mathbf{F}(f,\mathrm{id}_N)"] & \mathbf{F}(M',N) \arrow[dll, "\widetilde{\partial}^0_{[\mathscr{R}^\bullet_{\pi\varrho.}\mathbf{F}]}"] & \\
 & (\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M'',N) \arrow[r, "(\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(g,\mathrm{id}_N)"] & (\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M,N) \arrow[r, "(\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(f,\mathrm{id}_N)"] & (\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M',N) \arrow[r, "\widetilde{\partial}^1_{[\mathscr{R}^\bullet_{\pi\varrho.}\mathbf{F}]}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\widetilde{\partial}^{m-1}_{[\mathscr{R}^\bullet_{\pi\varrho.}\mathbf{F}]}"] & (\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M'',N) \arrow[r, "(\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(g,\mathrm{id}_N)"] & (\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M,N) \arrow[r, "(\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(f,\mathrm{id}_N)"] & (\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M',N) \arrow[r, "\widetilde{\partial}^m_{[\mathscr{R}^\bullet_{\pi\varrho.}\mathbf{F}]}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

έχουσα τον

$$\widetilde{\partial}^m_{[\mathscr{R}^\bullet_{\pi\varrho.}\mathbf{F}]} : (\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M',N) \longrightarrow (\mathscr{R}^{m+1}_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M'',N)$$

ως *συνδετικό ομομορφισμό* της. Μάλιστα, στην περίπτωση όπου ο δακτύλιος αναφοράς R είναι Π.Κ.Ι., αυτή έχει *το πολύ* 6 μη τετριμμένους όρους:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathbf{F}(M'',N) \arrow[r, "\mathbf{F}(g,\mathrm{id}_N)"] & \mathbf{F}(M,N) \arrow[r, "\mathbf{F}(f,\mathrm{id}_N)"] & \mathbf{F}(M',N) \arrow[dll, "\widetilde{\partial}^0_{[\mathscr{R}^\bullet_{\pi\varrho.}\mathbf{F}]}"] & \\
 & (\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M'',N) \arrow[r, "(\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(g,\mathrm{id}_N)"] & (\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M,N) \arrow[r, "(\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(f,\mathrm{id}_N)"] & (\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(M',N) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

(λόγω τού (ii) τής προτάσεως A.3.29 και τού ότι ο $(\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(-,N)$ είναι προσθετικός).

A.4.57 Ορισμός. *Και ο ανωτέρω* συναρτητής $(\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(-,-)$ τού εδαφίου A.4.55 μπορεί να *επεκταθεί* σε έναν συναρτητή, ανταλλοίωτο ως προς την πρώτη και συναλλοίωτο ως προς τη δεύτερη μεταβλητή (για τον οποίο θα εξακολουθούμε να χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό)

$$(\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(-,-) : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni (\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet) \longmapsto (\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$

$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{M}_\bullet) \times \mathrm{Hom}_R(\mathbf{N}^\bullet, \mathbf{N}^{\bullet\prime}) \ni (f_\bullet, g^\bullet) \mapsto (\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(f_\bullet, g^\bullet)^\bullet \in \mathrm{Hom}_R((\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet, (\mathscr{R}^m_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}'_\bullet, \mathbf{N}^{\bullet\prime})^\bullet),$$

[72] Βλ. Cartan & Eilenberg [29], Chapter III, Proposition 2.1 and Theorem 3.1, σελ. 38-42.

[73] Βλ. Cartan & Eilenberg [29], Proposition III.1.3, σελ. 37.

θέτοντας

$$\boxed{(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^n := \prod_{p\in\mathbb{Z}}(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M_p,N^{n-p}) = \prod_{p+q=n}(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(M_p,N^q),}$$

και ορίζοντας τον συσσυνοριακό τελεστή

$$\mathfrak{d}^n_{(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet} \in \mathrm{Hom}_R((\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^n,(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^{n+1})$$

όπως στο εδ. A.2.19 (ύστερα από αντικατάσταση τού εκεί παρατεθέντος $\mathbf{F}$ με τον συναρτητή $\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F}$).

A.4.58 Παράδειγμα. Όταν $\mathbf{F} = \mathrm{Hom}_R(-,-)$, ο μεν $(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(-,-)$ ο ορισθείς στο εδ. A.4.55 είναι ο $\mathrm{Ext}^m_R(-,-)$, το δε συναλυσωτό σύμπλοκο $(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet$ το ορισθέν στο εδ. A.4.57 είναι το

$$\mathrm{Ext}^m_R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet = (\mathrm{Ext}^m_R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^n,\mathfrak{d}^n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

όπου

$$\boxed{\mathrm{Ext}^m_R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^n := \prod_{p\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}^m_R(M_p,N^{n-p}) = \prod_{p+q=n}\mathrm{Ext}^m_R(M_p,N^q)}$$

και ο περιορισμός τού συσσυνοριακού τελεστή

$$\mathfrak{d}^n = \mathfrak{d}^n_{\mathrm{Ext}^m_R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet} \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}^m_R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^n,\mathrm{Ext}^m_R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^{n+1})$$

επί τού (εκάστοτε γινομένου επεκτάσεως) $\mathrm{Ext}^m_R(M_p,N^q)$ δίδεται από τον τύπο

$$\boxed{\mathfrak{d}^n|_{\mathrm{Ext}^m_R(M_p,N^q)} = \mathrm{Ext}^m_R(d_p^{\mathbf{M}_\bullet},\mathrm{id}_{N^q}) + (-1)^p\,\mathrm{Ext}^m_R(\mathrm{id}_{M_p},d^{q-1}_{\mathbf{N}^\bullet}).}$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $m=0$, το 0-στό Ext των $\mathbf{M}_\bullet$ και $\mathbf{N}^\bullet$ ταυτίζεται με το **συναλυσωτό σύμπλοκο ομομορφισμών** αυτών $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet$.

A.4.59 Σημείωση. Αναλόγως, είναι δυνατόν να ορισθούν για κάθε $m\in\mathbb{Z}$ *εκ δεξιών παράγωγοι συναρτητές* ενός τέτοιου $\mathbf{F}$ *ως προς τη δεύτερη μεταβλητή,*

$$(\mathscr{R}^m_{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(-,-)\ : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

(εάν κανείς μιμηθεί τον τρόπο δομήσεως τού ορισμού A.3.32), με

$$(\mathscr{R}^m_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(-,-) \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} (\mathscr{R}^m_{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(-,-),\ \forall m\in\mathbb{N}_0,$$

καθώς και οι επεκτάσεις αυτών

$$(\mathscr{R}^m_{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(-,-) : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)\times\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R).$$

Παρομοίως δε, είναι δυνατόν να ορισθούν *δεξιοί δορυφόροι* $(\mathrm{Sat}^m_{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})$ ενός τέτοιου $\mathbf{F}$ *ως προς τη δεύτερη μεταβλητή,* με

$$\{(\mathscr{R}^m_{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(,-)\}_{m\in\mathbb{Z}} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \{(\mathrm{Sat}^m_{\text{δεύτ.}}\mathbf{F})(,-)\}_{m\in\mathbb{Z}}.$$

Εκκινώντας από τις δυο *θεμελιώδεις* βραχείες ακριβείς ακολουθίες (A.58) και (A.67), ακολουθώντας την αποδεικτική πορεία τη χρησιμοποιηθείσα για το θεώρημα A.4.22 και λαμβάνοντας, εκ παραλλήλου, υπ' όψιν το *ανταλλοίωτο* τού εκάστοτε θεωρούμενου συναρτητή $\mathbf{F}$ (ως προς την πρώτη μεταβλητή, με αποτέλεσμα την αντιστροφή των βελών) καταλήγουμε στο κάτωθι[74]:

A.4.60 Θεώρημα («Κατηγορική εκδοχή τού θεωρήματος τού Künneth για μοδίους συνομολογίας ως προς τον συναρτητή F»). *Έστω* $\mathbf{F}$ *ένας εξ αριστερών ακριβής διπλός συναρτητής* (A.171), *ανταλλοίωτος ως προς την πρώτη και συναλλοίωτος ως προς τη δεύτερη μεταβλητή. Δοθέντων δυο συμπλόκων R-μοδίων, ενός αλυσωτού* $\mathbf{M}_\bullet$ *και ενός συναλυσωτού* $\mathbf{N}^\bullet$, *ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν (σε επίπεδο R-μοδίων) οι συναρτητές*

$$\mathbf{F}(B_n(\mathbf{M}_\bullet), -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R, \;\; \mathbf{F}(Z_n(\mathbf{M}_\bullet), -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

είναι ακριβείς για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και εάν, ταυτοχρόνως, οι συναρτητές

$$(\mathscr{R}^1_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(B_n(\mathbf{M}_\bullet), -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R, \;\; (\mathscr{R}^1_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(Z_n(\mathbf{M}_\bullet), -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

είναι μηδενικοί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, τότε υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow (\mathscr{R}^1_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet))^\bullet \xhookrightarrow{\varphi^\bullet_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}} H^\bullet(\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet) \xrightarrow{\psi^\bullet_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}} \twoheadrightarrow \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet))^\bullet \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet$$

ή, ισοδυνάμως, υφίστανται βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \to \prod_{p+q=n-1} (\mathscr{R}^1_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H^q(\mathbf{N}^\bullet)) \xhookrightarrow{\varphi^n_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}} H^n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet) \xrightarrow{\psi^n_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}} \twoheadrightarrow \prod_{p+q=n} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H^q(\mathbf{N}^\bullet)) \longrightarrow \{0\} \tag{A.176}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου $\psi^\bullet_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}$ ο συναλυσωτός μετασχηματισμός τού λήμματος A.4.53 *και*

$$\varphi^n_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)} \circ \theta^{n-1} = H^n(\mathbf{F}(\check{d}^{\mathbf{M}_\bullet}_\bullet, \mathrm{id}_{\mathbf{N}^\bullet})^\bullet) \circ (\psi^n_{(B_\bullet(\mathbf{M}_{\bullet-1}),\mathbf{N}^\bullet)})^{-1}, \; n \in \mathbb{Z},$$

όπου

$$\theta^{n-1} : \mathbf{F}(B_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet))^{n-1} \longrightarrow (\mathscr{R}^1_{\text{πρ.}}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet))^{n-1}$$

[74] Πρβλ. Cartan & Eilenberg [29], Theorem 8.1a, σελ. 72.

ο ομομορφισμός ο δημιουργούμενος από τις αντίστοιχες μακρές ακριβείς ακολουθίες[75] *τού εδαφίου* A.4.56 (ii). *Επιπροσθέτως, αμφότεροι οι*

$$\left\{ \psi^{\bullet}_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{M}_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \\ \mathbf{N}^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \varphi^{\bullet}_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{M}_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \\ \mathbf{N}^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \\ \text{με τις προαναφερθείσες ιδιότητες} \end{array} \right\}$$

είναι φυσικοί μετασχηματισμοί.

(ii) *Εάν, πέραν τής ισχύος των προϋποθέσεων τού* (i)*, υποτεθεί ότι οι* $B^m(\mathbf{N}^\bullet)$ *είναι εμβολικοί (ή ότι οι* $H^m(\mathbf{N}^\bullet)$ *είναι προβολικοί)* R*-μόδιοι για κάθε* $m \in \mathbb{Z}$*, τότε οι* (A.176) *είναι διασπώμενες, οπότε για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$*,*

$$\boxed{H^n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet) \cong \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet))^n \oplus (\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet))^{n-1}} \tag{A.177}$$

ή, ισοδυνάμως,

$$\boxed{H^n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet) \cong \left(\prod_{p+q=n} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H^q(\mathbf{N}^\bullet))\right) \oplus \left(\prod_{p+q=n-1} (\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H^q(\mathbf{N}^\bullet))\right).}$$

Μολαταύτα, οι διασπάσεις (A.177) *δεν είναι κατ' ανάγκην φυσικές.*

Το αντίστοιχο τού πορίσματος A.4.25 είναι το ακόλουθο:

A.4.61 Πόρισμα («Κατηγορική εκδοχή τού κλασικού θεωρήματος τού Künneth για μοδίους συνομολογίας ως προς τον συναρτητή F»). *Έστω* **F** *ένας εξ αριστερών ακριβής διπλός συναρτητής* (A.171)*, ανταλλοίωτος ως προς την πρώτη και συναλλοίωτος ως προς τη δεύτερη μεταβλητή. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς* R *είναι Π.Κ.Ι., τότε δοθέντων δυο συμπλόκων* R*-μοδίων, ενός ελεύθερου αλυσωτού* $\mathbf{M}_\bullet$ *και ενός συναλυσωτού* $\mathbf{N}^\bullet$*, ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν για οιονδήποτε παγιωμένον ελεύθερο* R*-μόδιο* A *ο συναρτητής*

$$\mathbf{F}(A,-) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

(σε επίπεδο R*-μοδίων) είναι ακριβής, τότε υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$\{0\} \to \prod_{p+q=n-1} (\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H^q(\mathbf{N}^\bullet)) \xhookrightarrow{\varphi^n_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}} H^n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet) \xrightarrow{\psi^n_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}} \prod_{p+q=n} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H^q(\mathbf{N}^\bullet)) \longrightarrow \{0\} \tag{A.178}$$

R*-μοδίων και ομομορφισμών* R*-μοδίων, όπου οι* $\psi^n_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}$, $\varphi^n_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}$, $n \in \mathbb{Z}$*, είναι όπως στο θεώρημα* A.4.60.

[75] Αρκεί να θεωρηθούν οι συνδετικοί ομομορφισμοί εκείνων που αντιστοιχούν στις βραχείες ακριβείς ακολουθίες $\{0\} \to B_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow Z_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet) \longrightarrow H_{p-1}(\mathbf{M}_\bullet) \to \{0\}$, $p \in \mathbb{Z}$, (με δεύτερη σταθερή εγγραφή τον $H^q(\mathbf{N}^\bullet)$) και να γίνει μετάβαση σε ευθέα γινόμενα για τα ζεύγη (p,q) με $p+q = n-1$.

(ii) *Εάν, πέραν τής ισχύος των προϋποθέσεων τού* (i), *υποτεθεί ότι το συναλυσωτό σύμπλοκο* $\mathbf{N}^\bullet$ *είναι ωσαύτως ελεύθερο, τότε η* (A.178) *είναι διασπώμενη, οπότε για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{H^n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet) \cong \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet))^n \oplus (\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet))^{n-1}.}$$

▸ **Το πλέον γενικευμένο θεώρημα τού Künneth για μοδίους συνομολογίας**. Κάνοντας χρήση των λεγομένων *ελεύθερων προσεγγίσεων* κανείς μπορεί (για R μια Π.Κ.Ι.) να απαλλαγεί από την προϋπόθεση περί τής ελευθερίας των θεωρούμενων αλυσωτών συμπλόκων στο πόρισμα A.4.61 και να αρκεσθεί (τόσο για τη δημιουργία όσον και για τη διάσπαση τής επιθυμητής βραχείας ακριβούς ακολουθίας) στην *πολύ ασθενή* συνθήκη (A.179) τής ακυκληματικότητας τού συναλυσωτού συμπλόκου $(\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet$. Μάλιστα, μέσω χρησιμοποιήσεως *και εμβολικών προσεγγίσεων*[76] τούτο είναι επεκτάσιμο *ακόμη και εάν* στον δακτύλιο αναφοράς R επιτραπεί να είναι *κληρονομικός*[77]. (Βλ. εδάφιο 4.2.12.)

A.4.62 Θεώρημα («Κατηγορική εκδοχή τού θεωρήματος τού Künneth για μοδίους συνομολογίας υπεράνω κληρονομικών R ως προς τον συναρτητή F»). *Έστω* **F** *ένας εξ αριστερών ακριβής διπλός συναρτητής* (A.171), *ανταλλοίωτος ως προς την πρώτη και συναλλοίωτος ως προς τη δεύτερη μεταβλητή. Εάν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι κληρονομικός, τότε, δοθέντων δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων, ενός αλυσωτού* $\mathbf{M}_\bullet$ *και ενός συναλυσωτού* $\mathbf{N}^\bullet$, *ισχύουν τα εξής:*

(i) *Εάν για οιονδήποτε παγιωμένον προβολικό R-μόδιο P ο συναρτητής*

$$\mathbf{F}(P, -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

(σε επίπεδο R-μοδίων) είναι ακριβής και εάν, ταυτοχρόνως, το συναλυσωτό σύμπλοκο $(\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet$ *είναι ακυκληματικό, ήτοι ισχύει*

$$\boxed{H^n((\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z},} \tag{A.179}$$

τότε υφίσταται βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \to \prod_{p+q=n-1} (\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H^q(\mathbf{N}^\bullet)) \xhookrightarrow{\chi^n_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}} H^n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet)^\bullet) \xrightarrow{\psi^n_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}} \prod_{p+q=n} \mathbf{F}(H_p(\mathbf{M}_\bullet), H^q(\mathbf{N}^\bullet)) \longrightarrow \{0\} \tag{A.180}$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου ο συναλυσωτός μετα-

[76] Αρκεί κανείς στον ορισμό A.4.34 να αντικαταστήσει το επίθετο *προβολικός* με το επίθετο *εμβολικός*, αλυσωτά με συναλυσωτά σύμπλοκα και μοδίους ομολογίας με μοδίους συνομολογίας.

[77] Ο R είναι κληρονομικός εάν και μόνον εάν κάθε πηλικομόδιος τής μορφής M/U, όπου M εμβολικός R-μόδιος, είναι εμβολικός. Βλ. [27], Theorem 8.1.13, σελ. 195-196.

σχηματισμός $\psi^{\bullet}_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)}$ *είναι αυτός τού λήμματος* A.4.53 *και όπου αμφότεροι οι*

$$\left\{ \psi^{\bullet}_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{M}_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \\ \mathbf{N}^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \chi^{\bullet}_{(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{M}_\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \\ \mathbf{N}^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \\ \text{με τις προαναφερθείσες ιδιότητες} \end{array} \right\}$$

είναι φυσικοί μετασχηματισμοί.

(ii) *Η* (A.180) *είναι* (*άνευ άλλων επιπροσθέτων προϋποθέσεων*) *διασπώμενη, οπότε για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{H^n(\mathbf{F}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet) \cong \mathbf{F}(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet))^n \oplus (\mathscr{R}^1_{\pi\varrho.}\mathbf{F})(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet))^{n-1}.}$$

• **Δυο παραδείγματα χρησιμοποιούμενων συναρτητών** (πέραν τού ιδίου τού συναρτητή $\mathrm{Hom}_R(-,-)$). Παγιώνοντας έναν R-μόδιο L, ορίζουμε δυο συναρτητές $\mathbf{F}_{(L)}$ και $\mathbf{G}_{(L)}$ ως ακολούθως: Θέτουμε εν πρώτοις

$$\mathbf{F}_{(L)} = \mathrm{Hom}_R(-, - \otimes_R L) : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R) \ni (M,N) \longmapsto \mathbf{F}_{(L)}(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_R L) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M',M) \times \mathrm{Hom}_R(N,N') \ni (f,g) \longmapsto \mathbf{F}_{(L)}(f,g) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}_{(L)}(M,N), \mathbf{F}_{(L)}(M',N')),$$

όπου $\mathbf{F}_{(L)}(f,g) := \mathrm{Hom}_R(f, g\overline{\otimes}\mathrm{id}_L)$ και θεωρούμε (κατά τα ειωθότα) την επέκταση αυτού

$$\mathbf{F}_{(L)} : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni (\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet) \longmapsto \mathbf{F}_{(L)}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$
$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{M}_\bullet) \times \mathrm{Hom}_R(\mathbf{N}^\bullet,\mathbf{N}'^\bullet) \ni (f_\bullet,g^\bullet) \longmapsto \mathbf{F}_{(L)}(f_\bullet,g^\bullet)^\bullet \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}_{(L)}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet, \mathbf{F}_{(L)}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'^\bullet)^\bullet),$$

όπου

$$\mathbf{F}_{(L)}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet) := \mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet \otimes_R L)^\bullet \text{ και } \mathbf{F}_{(L)}(f_\bullet,g^\bullet)^\bullet := \mathrm{Hom}_R(f_\bullet, g^\bullet\overline{\otimes}\mathrm{id}_L)^\bullet.$$

Εφαρμογή τού θεωρήματος A.4.62 δίδει το ακόλουθο:

A.4.63 Πόρισμα. *Εάν για δυο σύμπλοκα* R*-μοδίων, ένα αλυσωτό* $\mathbf{M}_\bullet$ *και ένα συναλυσωτό* $\mathbf{N}^\bullet$, *όπου ο δακτύλιος* R *είναι κληρονομικός, το συναλυσωτό σύμπλοκο* $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet \otimes_R L)^\bullet)$ *είναι ακυκληματικό, τότε έχουμε για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{\begin{gathered} H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet \otimes_R L)^\bullet) \cong \\ \mathrm{Hom}_R(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet \otimes_R L))^n \oplus \mathrm{Ext}^1_R(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathbf{N}^\bullet \otimes_R L))^{n-1}. \end{gathered}}$$

Εν συνεχεία, θέτουμε

$$\mathbf{G}_{(L)} = \mathrm{Hom}_R(-, \mathrm{Hom}_R(L,-)) : \mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R \times \mathfrak{Mod}_R) \ni (M,N) \longmapsto \mathbf{G}_{(L)}(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(L,N)) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Hom}_R(M',M) \times \mathrm{Hom}_R(N,N') \ni (f,g) \longmapsto \mathbf{G}_{(L)}(f,g) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{G}_{(L)}(M,N), \mathbf{G}_{(L)}(M',N')),$$

όπου $\mathbf{G}_{(L)}(f,g) := \mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_L, g))$ και θεωρούμε (κατά τα ειωθότα) την επέκταση αυτού

$$\mathbf{G}_{(L)} : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \times \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni (\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet) \longmapsto \mathbf{G}_{(L)}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$
$$\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{M}_\bullet) \times \mathrm{Hom}_R(\mathbf{N}^\bullet,\mathbf{N}'^\bullet) \ni (f_\bullet,g^\bullet) \longmapsto \mathbf{G}_{(L)}(f_\bullet,g^\bullet)^\bullet \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{F}_{(L)}(\mathbf{M}_\bullet,\mathbf{N}^\bullet)^\bullet, \mathbf{F}_{(L)}(\mathbf{M}'_\bullet,\mathbf{N}'^\bullet)^\bullet),$$

όπου

$$\mathbf{G}_{(L)}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}^\bullet) := \mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathrm{Hom}_R(L, \mathbf{N}^\bullet))^\bullet,\ \mathbf{G}_{(L)}(f_\bullet, g^\bullet)^\bullet := \mathrm{Hom}_R(f_\bullet, \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_L, g^\bullet))^\bullet.$$

Εφαρμογή τού θεωρήματος A.4.62 δίδει το ακόλουθο:

A.4.64 Πόρισμα. *Εάν για δυο σύμπλοκα R-μοδίων, ένα αλυσωτό $\mathbf{M}_\bullet$ και ένα συναλυσωτό $\mathbf{N}^\bullet$, όπου ο R είναι κληρονομικός, το συναλυσωτό σύμπλοκο*

$$\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathrm{Hom}_R(L, \mathbf{N}^\bullet))^\bullet)$$

είναι ακυκληματικό, τότε έχουμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{\begin{gathered} H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, \mathrm{Hom}_R(L, \mathbf{N}^\bullet))^\bullet) \cong \\ \mathrm{Hom}_R(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathrm{Hom}_R(L, \mathbf{N}^\bullet)))^n \oplus \mathrm{Ext}^1_R(H_\bullet(\mathbf{M}_\bullet), H^\bullet(\mathrm{Hom}_R(L, \mathbf{N}^\bullet)))^{n-1}. \end{gathered}}$$

A.5 ΑΚΥΚΛΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Στην (κλασική) Αλγεβρική Τοπολογία (κυρίως για τις συνήθεις θεωρίες ομολογίας και συνομολογίας) χρησιμοποιούνται συναρτητές με τιμές ανήκουσες στις κατηγορίες $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ και $\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)$. Αυτοί είναι εξ ορισμού περίπλοκες οντότητες, καθώς ορίζονται σε μια *γνήσια κλάση αντικειμένων*. Θα ήταν, λοιπόν, εξαιρετικά χρήσιμο το να μπορεί κανείς να εξαγάγει συμπεράσματα για τη συμπεριφορά τους μελετώντας τους σε κάποια κατάλληλη «μικρή» υποκλάση -ειδικότερα, *υποσύνολο*- τού πεδίου ορισμού τους. Ως αφετηρία για τη χάραξη μιας προς τούτο προσήκουσας γραμμής πλεύσεως είναι δυνατόν να θεωρηθεί η θεμελιώδης ιδιότητα που χρησιμοποιείται κατά τη μελέτη των *ελευθέρων* R-μοδίων: Οι ομομορφισμοί οι έχοντες ως πεδίο ορισμού τους έναν τέτοιου είδους R-μόδιο καθορίζονται μονοσημάντως από τις τιμές που λαμβάνουν σε ένα υποσύνολό του, ήτοι σε μια *βάση* του. (Πρβλ. με το «θεώρημα 2.5.20 τής γραμμικής επεκτάσεως»[78].) Μέσω αυτής τής ιδιότητας αποδεικνύονται διάφορες προτάσεις υπάρξεως ομομορφισμών σε κατάλληλα μεταθετικά διαγράμματα. Η μέθοδος των «ακυκληματικών μοντέλων» (ή «ακυκληματικών προτύπων»), εισαχθείσα στη γλώσσα των κατηγοριών το έτος[79] 1953 από τους Eilenberg και Mac Lane, αποτελεί μια εφαρμογή αυτής τής ιδέας σε μεταθετικά διαγράμματα συναρτητών και φυσικών μετασχηματισμών μεταξύ αυτών, καθιερώνοντας πρωτίστως την έννοια τού «ελεύθερου συναρτητή». Κατ' αυτόν τον τρόπο, είναι σε κάποιες -από θεωρητικής πλευράς- λίαν ενδιαφέρουσες περιπτώσεις δυνατή η κατασκευή *φυσικών αλυσωτών μετασχηματισμών*, καθώς και *φυσικών αλυσωτών ομοτοπιών* μεταξύ τέτοιων αλυσωτών μετασχηματισμών. Μια ειδική εφαρμογή τού *θεωρήματος* A.5.14 *των ακυκληματικών μοντέλων* απαιτείται για την απόδειξη τού λεγομένου *θεωρήματος των Eilenberg και Zilber* (βλ. §8.2), το οποίο -με τη σειρά του- απαιτείται προκειμένου να καταλήξουμε στις *τοπολογικές εκδοχές* τού θεωρήματος τού Künneth τής §8.3.

[78] Εξ αυτού έπεται άμεσα και το εξής: *Εάν $(x_j)_{j\in J}$ είναι μια βάση ενός ελεύθερου R-μοδίου F και $(y_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια στοιχείων τυχόντος R-μοδίου G* (αλλά με το ίδιο σύνολο δεικτών), *τότε υπάρχει μοναδικός $f \in \mathrm{Hom}_R(F, G)$, τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_j) = y_j$* για κάθε $j \in J$.

[79] Βλ. S. Eilenberg & S. Mac Lane: *Acyclic models*, American Journal of Mathematics **75** (1953), No. 1, 189-199.

A.5.1 Ορισμός. (i) Ένα διατεταγμένο ζεύγος $(\mathscr{C}, \mathbb{M})$ αποτελούμενο από μια κατηγορία $\mathscr{C}$ και μια υποκλάση $\mathbb{M}$ τής κλάσεως $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ των αντικειμένων τής $\mathscr{C}$ καλείται **κατηγορία με μοντέλα** $\mathbb{M}$ (ή **με πρότυπα** $\mathbb{M}$). Τα στοιχεία τής $\mathbb{M}$ καλούνται **μοντέλα** (ή **πρότυπα**).

(ii) Έστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία και έστω $\mathbf{F} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ ένας συναλλοίωτος συναρτητής. Ως **στοιχείο** τού $\mathbf{F}$ ορίζουμε οιοδήποτε ζεύγος (C, x), όπου $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ και $x \in \mathbf{F}(C)$. Γενικότερα, **μια οικογένεια στοιχείων** τού $\mathbf{F}$ είναι μια οικογένεια ζευγών $(C_j, x_j)_{j \in J}$, όπου $C_j \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ και $x_j \in \mathbf{F}(C_j)$ για κάθε $j \in J$. Δυο τέτοιες οικογένειες (όχι απαραίτητα τού ιδίου συναρτητή) ονομάζονται **συμβατές** όταν οι οικογένειες των δεικτών τους είναι ίδιες.

(iii) Εάν $(\mathscr{C}, \mathbb{M})$ είναι μια κατηγορία με μοντέλα και $(C_j, x_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια στοιχείων ενός τέτοιου συναρτητή $\mathbf{F}$, τότε η $(C_j, x_j)_{j \in J}$ καλείται $\mathbb{M}$-**οικογένεια στοιχείων τού F**.

A.5.2 Ορισμός. Ας υποθέσουμε ότι $(\mathscr{C}, \mathbb{M})$ είναι μια κατηγορία με μοντέλα και ότι $\mathbf{F} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής. Λέμε ότι ο $\mathbf{F}$ είναι **ελεύθερος** (και αντιστοίχως, **ελεύθερος ως προς τα μοντέλα** $\mathbb{M}$ ή $\mathbb{M}$-**ελεύθερος**) όταν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ο R-μόδιος $\mathbf{F}(C)$ είναι ελεύθερος (υπό την έννοια τού ορισμού 2.5.6).

(ii) Υπάρχει μια οικογένεια στοιχείων (και αντιστοίχως, μια $\mathbb{M}$-οικογένεια στοιχείων) $(M_j, x_j)_{j \in J}$ τού $\mathbf{F}$, ούτως ώστε για κάθε $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ το σύνολο[80] $\{\mathbf{F}(\sigma)(x_j) \,|\, j \in J,\ \sigma \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(M_j, C)\}$ να είναι μια βάση τού $\mathbf{F}(C)$ (υπό την έννοια τού ορισμού 2.5.7.) Μια τέτοιου είδους οικογένεια στοιχείων τού $\mathbf{F}$ καλείται **βάση τού F** (και αντιστοίχως, **βάση τού F ως προς τα μοντέλα** $\mathbb{M}$).

A.5.3 Παρατήρηση. Στο εδ. A.5.2 ορίσθηκαν δύο έννοιες «ελευθερίας»: Μία «απόλυτη» και μία που εξαρτάται από κάποια συλλογή μοντέλων $\mathbb{M}$. Το ότι ένας συναλλοίωτος συναρτητής είναι *ελεύθερος ως προς τα μοντέλα* $\mathbb{M}$ σημαίνει απλώς ότι είναι ελεύθερος με κάποιον περιορισμό για τις πιθανές βάσεις. Δηλαδή μια βάση τού $\mathbf{F}$ ως προς τα μοντέλα $\mathbb{M}$ είναι μια συνήθης βάση $(M_j, x_j)_{j \in J}$ *με την επιπλέον ιδιότητα* $M_j \in \mathbb{M}$ για κάθε $j \in J$. (Εάν $\mathbb{M}'$ είναι μια υποκλάση τής $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ και ο $\mathbf{F}$ είναι ελεύθερος ως προς τα μοντέλα $\mathbb{M}$, όπου $\mathbb{M}$ μια υποκλάση τής $\mathbb{M}'$, τότε ο $\mathbf{F}$ είναι ελεύθερος *και* ως προς τα μοντέλα $\mathbb{M}'$.) Εξάλλου, ένας ελεύθερος $\mathbf{F}$ (υπό την «απόλυτη» έννοια τού όρου), έχων μια οικογένεια στοιχείων του $(M_j, x_j)_{j \in J}$ ως μια βάση του, *είναι πάντοτε* ελεύθερος ως προς τα μοντέλα $\mathbb{M}$ εάν θέσουμε $\mathbb{M} := \{M_j \,|\, j \in J\}$.

A.5.4 Παραδείγματα. (i) Έστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία και έστω L ένας R-μόδιος. Ορίζουμε τον *σταθερό συναρτητή* $\mathbf{F}_L : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ θέτοντας $\mathbf{F}_L(C) := L$, και, εκ παραλλήλου, $\mathbf{F}_L(f) := \mathrm{id}_L$ για οιαδήποτε $C, D \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ και οιονδήποτε μορφισμό

[80] Το σύνολο αυτό *ορίζεται καλώς*, καθόσον $\sigma \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(M_j, C)$, οπότε $\mathbf{F}(\sigma) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Mod}_R}(\mathbf{F}(M_j), \mathbf{F}(C))$ και (ταυτοχρόνως) $x_j \in \mathbf{F}(M_j)$ για κάθε $j \in J$. Επομένως, $\mathbf{F}(\sigma)(x_j) \in \mathbf{F}(C)$.

$f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(C, D)$. Εάν $(C_j, x_j)_{j \in J}$ είναι μια οικογένεια στοιχείων τού $\mathbf{F}_L$, η $(x_j)_{j \in J}$ είναι μια οικογένεια στοιχείων τού L. Και αντιστρόφως· κάθε οικογένεια στοιχείων τού L προέρχεται από μια αντίστοιχη τού $\mathbf{F}_L$ κατ' αυτόν τον τρόπο. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι ο $\mathbf{F}_L$ είναι ελεύθερος με την $(C_j, x_j)_{j \in J}$ ως μια βάση του (υπό την έννοια τού ορισμού A.5.2) *εάν και μόνον εάν* ο L είναι ελεύθερος R-μόδιος με την $(x_j)_{j \in J}$ ως μια βάση του. (Εν προκειμένω, ο $\mathbf{F}_L$ θα είναι ελεύθερος *και* ως προς οιοδήποτε σύστημα μοντέλων $\mathbb{M}$, αρκεί να επιλεγεί καταλλήλως η οικογένεια $(C_j, x_j)_{j \in J}$.) Ως εκ τούτου, η έννοια τού ελευθέρου συναρτητή μπορεί να θεωρηθεί ως *γενίκευση* τής εννοίας τού ελευθέρου R-μοδίου.

(ii) Ένας (εκ κατασκευής) ελεύθερος συναρτητής είναι ο εξής:

$$\mathbf{Fr}_R : \mathfrak{Sets} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Sets}) \ni \mathscr{X} \longmapsto \mathbf{Fr}_R(\mathscr{X}) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Sets}}(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) \ni f \longmapsto \mathbf{Fr}_R(f) \in \mathrm{Hom}_R(\mathbf{Fr}_R(\mathscr{X}), \mathbf{Fr}_R(\mathscr{Y})),$$

όπου

$$\boxed{\mathbf{Fr}_R(\mathscr{X}) := \begin{cases} \text{τετριμμένος μόδιος}, & \text{όταν } \mathscr{X} = \varnothing, \\ R^{(\mathscr{X})}, & \text{όταν } \mathscr{X} \neq \varnothing, \end{cases}} \tag{A.181}$$

$j_{\mathscr{X}} : \mathscr{X} \hookrightarrow \mathbf{Fr}_R(\mathscr{X})$ η ενριπτική απεικόνιση, έχουσα (όταν $\mathscr{X} \neq \varnothing$) ως εικόνα $j_{\mathscr{X}}(x) := \delta_x$ οιουδήποτε $x \in \mathscr{X}$ την απεικόνιση την οριζόμενη μέσω τής (2.17) (και επεκτεινόμενη κατά τρόπο πρόδηλο και στο $\varnothing$), και

$$\mathbf{Fr}_R(f) := f(x), \; \forall x \in \mathscr{X},$$

οριζόμενη *και* επί ολοκλήρου τού $\mathbf{Fr}_R(\mathscr{X})$ (όταν $\mathscr{X} \neq \varnothing$) μέσω *γραμμικής επεκτάσεως* τής απεικονίσεως

$$\mathscr{X} \ni x \longmapsto (f \circ j_{\mathscr{X}})(x) \in \mathbf{Fr}_R(\mathscr{Y}).$$

(Βλ. θεώρημα 2.5.20.) Εάν ως $\{*\}$ συμβολίσουμε οιοδήποτε *μονοσύνολο*, παρατηρούμε ότι για κάθε $\mathscr{X} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Sets})$ υφίσταται μια *αμφίρριψη*

$$\mathscr{X} \ni x \longmapsto \{\text{απεικονίσεις } \overline{x} : \{*\} \longrightarrow \mathscr{X} \,|\, \overline{x}(\{*\}) = x\}.$$

Μάλιστα, οι ομομορφισμοί

$$\mathbf{Fr}_R(\overline{x}) : \mathbf{Fr}_R(\{*\}) \cong R \longrightarrow \mathbf{Fr}_R(\mathscr{X})$$

είναι πλήρως καθορισμένοι από την ιδιότητα τού ότι στέλνουν το $j_{\{*\}} = 1_{\mathbf{Fr}_R(\{*\})}$ να απεικονισθεί στο

$$\mathbf{Fr}_R(\overline{x})(1_{\mathbf{Fr}_R(\{*\})}) = \overline{x}(1_{\mathbf{Fr}_R(\{*\})}) = j_{\mathscr{X}}(\overline{x}(\{*\})) = j_{\mathscr{X}}(x).$$

Επομένως,

$$\{\mathbf{Fr}_R(\overline{x})(1_{\mathbf{Fr}_R(\{*\})}) \,|\overline{x} : \{*\} \longrightarrow \mathscr{X}\} = \{j_{\mathscr{X}}(\overline{x}(\{*\})) \,|\overline{x} : \{*\} \longrightarrow \mathscr{X}\} = \{j_{\mathscr{X}}(x) \,|x \in \mathscr{X}\}$$

ήτοι ένα σύνολο που είναι όντως μια βάση τού $\mathbf{Fr}_R(\mathscr{X})$. (Πρβλ. λήμμα 2.5.12.)

(iii) Υιοθετώντας τόν συμβολισμό τής §D.2 παγιώνουμε έναν $n \in \mathbb{N}_0$ και θεωρούμε την κατηγορία $(\mathfrak{Top}, \mathbb{M})$, εφοδιασμένη με το (*μονοσύνολο*!) μοντέλο $\mathbb{M} := \{\Delta_n\}$ (το έχον ως μοναδικό του στοιχείο το *θεμελιακό n-μονόπλοκο* Δ_n). Έστω

$$S_n(-) : \mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}) \ni X \longmapsto S_n(X;R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X,Y) \ni f \longmapsto S_n(f) \in \mathrm{Hom}_R(S_n(X;R), S_n(Y;R)),$$

ο συναλλοίωτος συναρτητής με

$$S_n(X;R) := \begin{cases} \mathbf{Fr}_R(\mathfrak{V}_n(X)), & \text{όταν } n \in \mathbb{N}_0, \\ \text{τετριμμένος μόδιος}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

όπου

$$\mathfrak{V}_n(X) := \{\sigma : \Delta_n \longrightarrow X \,|\, \sigma \text{ ιδιάζον } n\text{-μονόπλοκο εντός τού } X\}$$

και

$$\mathfrak{V}_n(X) \ni \sigma \longmapsto S_n(f)\,(\sigma) := f \circ \sigma \in \mathfrak{V}_n(Y),$$

επεκτεινόμενος σε ομομορφισμό R-μοδίων επί ολοκλήρου τού $S_n(X;R)$,

$$S_n(X;R) \ni x \longmapsto S_n(f)(x) \in S_n(Y;R),$$

μέσω *γραμμικής επεκτάσεως*. (Βλ. θεώρημα 2.5.20.) Το μονοσύνολο $\{(\Delta_n,\mathrm{id}_{\Delta_n})\}$ (όπου id_{Δ_n} η *ταυτοτική απεικόνιση* επί τού Δ_n, εκλαμβανόμενη αφ' εαυτής ως ένα ιδιάζον n-μονόπλοκο $\mathrm{id}_{\Delta_n} \in \mathfrak{V}_n(\Delta_n) \subseteq S_n(\Delta_n;R)$) είναι *προδήλως* μια (μονομελής) $\mathbb{M}$-οικογένεια στοιχείων τού $S_n(-)$. Ο R-μόδιος $S_n(X;R)$ είναι εξ ορισμού ελεύθερος για κάθε τοπολογικό χώρο X με βάση του το $\mathfrak{V}_n(X)$. Όμως για κάθε $\sigma \in \mathfrak{V}_n(X)$ έχουμε $S_n(\sigma)\,(\mathrm{id}_{\Delta_n}) = \sigma$, οπότε

$$\{S_n(\sigma)(\mathrm{id}_{\Delta_n})\,|\sigma \in \mathfrak{V}_n(X)\} = \mathfrak{V}_n(X),$$

το οποίο είναι μια βάση τού $S_n(X;R)$. Άρα ο $S_n(-)$ είναι $\mathbb{M}$-ελεύθερος συναρτητής έχων το $\{(\Delta_n,\mathrm{id}_{\Delta_n})\}$ ως μια βάση του.

Θα επικεντρωθούμε εφεξής σε συναλλοίωτους συναρτητές $\mathbf{F} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ και σε φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ αυτών. (Βλ. εδ. A.3.1.) Παρότι οι εν λόγω συναρτητές δεν αποτελούν πάντοτε μια κατηγορία, υπάρχει μια *αναλογική ομοιότητα* προς την κατηγορία $\mathfrak{Mod}_R$ (η οποία εν μέρει ανεφάνη στο παράδειγμα A.5.4 (i)) και η οποία θα οδηγήσει τόσο στη θεώρηση *μεταθετικών διαγραμμάτων* συναρτητών και φυσικών μετασχηματισμών μεταξύ αυτών όσον και στην απόδειξη διαφόρων προτάσεων που θα «θυμίζουν» κατά τι άλλες γνωστές. (Βλ., π.χ., θεώρημα συγκρίσεως 5.1.4 κ.ά.) Σε ό,τι ακολουθεί, η σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών, το άθροισμα, η διαφορά τους, ο ταυτοτικός και ο μηδενικός μετασχηματισμός κ.ά., ορίζονται «κατά συντεταγμένες»· επί παραδείγματι, γράφουμε $(h \circ k)(C)$ υπονοώντας τη σύνθεση $h(C) \circ k(C)$ (για $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$) κ.λπ.[81]

[81] Φυσικά, θα μπορούσαμε να ορίσουμε και *πυρήνες* και *εικόνες* φυσικών μετασχηματισμών με παρόμοιο τρόπο.

A.5.5 Ορισμός. Ας υποθέσουμε ότι $(\mathscr{C}, \mathbb{M})$ είναι μια κατηγορία με μοντέλα. Εάν $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ είναι τρεις συναλλοίωτοι συναρτητές, τότε, δοθέντων δυο φυσικών μετασχηματισμών

$$\mathbf{E} \xrightarrow{k} \mathbf{F} \xrightarrow{h} \mathbf{G} \tag{A.182}$$

λέμε ότι το (A.182) είναι **ακριβές** (στη μεσαία θέση) όταν $\mathrm{Im}(k) = \mathrm{Ker}(h)$, ήτοι όταν $\mathrm{Im}(k(C)) = \mathrm{Ker}(h(C))$ για κάθε $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, ενώ λέμε ότι είναι $\mathbb{M}$-**ακριβές** όταν $\mathrm{Im}(k(M)) = \mathrm{Ker}(h(M))$ για κάθε $M \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

A.5.6 Παρατήρηση. (i) Αυτοί οι ορισμοί επεκτείνονται κατά προφανή τρόπο και σε πιο περίπλοκα διαγράμματα. Επίσης, η συνθήκη $\mathrm{Im}(h(C)) = \mathrm{Ker}(k(C))$ (για κάποιο $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$) ισοδυναμεί με το ότι $h \circ k = 0$.

(ii) Ένεκα των προαναφερθέντων μπορεί να γίνει λόγος ακόμη και για *αλυσωτά σύμπλοκα* τέτοιων *συναρτητών*, ήτοι για ακολουθίες τής μορφής

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{F}_{\nu+1} \xrightarrow{h_{\nu+1}} \mathbf{F}_{\nu} \xrightarrow{h_{\nu}} \mathbf{F}_{\nu-1} \longrightarrow \cdots$$

όπου οι $\mathbf{F}_\nu : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ είναι συναλλοίωτοι συναρτητές και οι h_ν φυσικοί μετασχηματισμοί για κάθε $\nu \in \mathbb{Z}$.

A.5.7 Λήμμα. *Έστω $(\mathscr{C}, \mathbb{M})$ μια κατηγορία με μοντέλα και έστω $\mathbf{F} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ ένας ελεύθερος συναρτητής (και αντιστοίχως, ελεύθερος συναρτητής ως προς τα μοντέλα $\mathbb{M}$ υπό την έννοια τού ορισμού A.5.2) έχων την $\mathscr{X} = (M_j, x_j)_{j \in J}$ ως μια βάση του. Εάν υποτεθεί ότι $\mathbf{G} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής και $\mathscr{Y} = (M_j, y_j)_{j \in J}$ τυχούσα συμβατή οικογένεια στοιχείων (και αντιστοίχως, $\mathbb{M}$-οικογένεια στοιχείων) τού $\mathbf{G}$, τότε υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος φυσικός μετασχηματισμός $\mathbf{F} \xrightarrow{k} \mathbf{G}$, οποίος «απεικονίζει την $\mathscr{X}$ στην $\mathscr{Y}$», ήτοι ισχύει $k(M_j)(x_j) = y_j$ για κάθε $j \in J$.*

Απόδειξη. **Βήμα 1ο**. *Μοναδικότητα*. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας k με την ως άνω ιδιότητα. Παγιώνουμε κάποιον δείκτη $j \in J$. Τότε για κάθε $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ και για κάθε $\sigma \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(M_j, C)$ προκύπτει (λόγω τού ότι ο k είναι φυσικός μετασχηματισμός) το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(M_j) \arrow[r, "k(M_j)"] \arrow[d, "\mathbf{F}(\sigma)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{G}(M_j) \arrow[d, "\mathbf{G}(\sigma)"] \\
\mathbf{F}(C) \arrow[r, "k(C)"'] & \mathbf{G}(C)
\end{tikzcd}$$

Επομένως, $(k(C) \circ \mathbf{F}(\sigma))(x_j) = (\mathbf{G}(\sigma) \circ k(M_j))(x_j)$, απ' όπου έπεται ότι

$$k(C)(\mathbf{F}(\sigma)(x_j)) = \mathbf{G}(\sigma)(k(M_j)(x_j)) = \mathbf{G}(\sigma)(y_j).$$

Άρα για *οιουσδήποτε* k, k' με την ως άνω ιδιότητα και για *οιοδήποτε* $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ έχουμε $k(C)(\mathbf{F}(\sigma)(x_j)) = \mathbf{G}(\sigma)(y_j) = k'(C)(\mathbf{F}(\sigma)(x_j))$ *για κάθε* $\sigma \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(M_j, C)$ και *για κάθε* $j \in J$. Επειδή $k(C) = k'(C)$ *για κάθε* $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, λαμβάνουμε $k = k'$.

Βήμα 2ο. *Ύπαρξη.* Επειδή για *οιοδήποτε* $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ το σύνολο

$$\{\mathbf{F}(\sigma)(x_j)\,|\, j \in J,\ \sigma \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(M_j, C)\} \tag{A.183}$$

αποτελεί (εξ υποθέσεως) μια βάση τού R-μοδίου $\mathbf{F}(C)$, αρκεί για την *κατασκευή* τού ζητούμενου φυσικού μετασχηματισμού $k : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ να *ορίσουμε* τον $k(C)$ (στα στοιχεία αυτής τής βάσεως):

$$k(C)(\mathbf{F}(\sigma)(x_j)) := \mathbf{G}(\sigma)(y_j),\ \ \forall \sigma \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(M_j, C)\ \text{ και }\ \forall j \in J,$$

και να χρησιμοποιήσουμε *γραμμική επέκταση*. (Βλ. θεώρημα 2.5.20.) Εφαρμόζοντας, ιδιαιτέρως, αυτόν τον ορισμό για $C = M_j$ και $\sigma = \mathrm{id}_{M_j}$ λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} k(M_j)(\mathbf{F}(\mathrm{id}_{M_j})(x_j)) &= k(M_j)(\mathrm{id}_{\mathbf{F}(M_j)}(x_j)) = k(M_j)(x_j) \\ &= \mathbf{G}(\mathrm{id}_{M_j})(y_j) = \mathrm{id}_{\mathbf{G}(M_j)}(y_j) = y_j, \end{aligned}$$

ήτοι $k(M_j)(x_j) = y_j$ για κάθε $j \in J$. Απομένει, ως εκ τούτου, να αποδείξουμε ότι *αυτός* ο k είναι όντως φυσικός μετασχηματισμός. Προς τούτο θεωρούμε τυχόντα μορφισμό $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(C, D)$ για κάποια $C, D \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Θα δείξουμε ότι το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}(C) \arrow[r, "k(C)"] \arrow[d, "\mathbf{F}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{G}(C) \arrow[d, "\mathbf{G}(f)"] \\ \mathbf{F}(D) \arrow[r, "k(D)"'] & \mathbf{G}(D) \end{tikzcd}$$

Επειδή ο $\mathbf{F}(C)$ είναι ελεύθερος R-μόδιος, είναι αρκετός ο έλεγχος επί των στοιχείων τής βάσεως (A.183). Για οιαδήποτε $\sigma \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(M_j, C)$ και $j \in J$ έχουμε αφ' ενός μεν

$$(\mathbf{G}(f) \circ k(C))(\mathbf{F}(\sigma)(x_j)) = \mathbf{G}(f)(k(C)(\mathbf{F}(\sigma)(x_j))) = \mathbf{G}(f)(\mathbf{G}(\sigma)(y_j)) = \mathbf{G}(f \circ \sigma)(y_j),$$

αφ' ετέρου δε

$$(k(D) \circ \mathbf{F}(f))(\mathbf{F}(\sigma)(x_j)) = k(D)((\mathbf{F}(f) \circ \mathbf{F}(\sigma))(x_j)) = k(D)(\mathbf{F}(f \circ \sigma)(x_j)) = \mathbf{G}(f \circ \sigma)(y_j).$$

Τελικώς, λοιπόν, $\mathbf{G}(f) \circ k(C) = k(D) \circ \mathbf{F}(f)$. □

A.5.8 Λήμμα. *Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων (χωρίς τον*[82] *c).*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, dashed, "c"'] & G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "b"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G'' \arrow[d, "a"] \\ E' \arrow[r, "\mu"'] & E \arrow[r, "\xi"'] & E'' \end{tikzcd}$$

Εάν υποτεθεί ότι το δεξιό τετράγωνό του είναι μεταθετικό, η κάτω του γραμμή είναι ακριβής (υπό τη συνήθη έννοια), $\lambda \circ \kappa = 0$ και ότι ο F είναι ελεύθερος R-μόδιος, τότε υπάρχει ένας ομομορφισμός R-μοδίων $c : F \longrightarrow E'$ που το συμπληρώνει με-

ταθετικώς (στο αριστερό τετράγωνο).

Αποδειξη. Κατ' αρχάς θα δείξουμε ότι $\mathrm{Im}(b\circ\kappa)\subseteq\mathrm{Im}(\mu)$. Λόγω τής ακριβείας τής κάτω γραμμής έχουμε $\mathrm{Im}(\mu)=\mathrm{Ker}(\xi)$. Επειδή

$$\xi\circ(b\circ\kappa)=(\xi\circ b)\circ\kappa=(a\circ\lambda)\circ\kappa=a\circ(\lambda\circ\kappa)=a\circ 0=0,$$

συμπεραίνουμε ότι $\xi\circ(b\circ\kappa)=0\Rightarrow\mathrm{Im}(b\circ\kappa)\subseteq\mathrm{Ker}(\xi)=\mathrm{Im}(\mu)$. Θεωρούμε τον *επιμορφισμό* R-μοδίων $(b\circ\kappa)\check{\ }:F\twoheadrightarrow\mathrm{Im}(\mu)$ τον επαγόμενο μέσω τού ομομορφισμού $b\circ\kappa$. (Βλ. (2.11).) Προφανώς, $j\circ(b\circ\kappa)\check{\ }=b\circ\kappa$, όπου $j:\mathrm{Im}(\mu)\hookrightarrow E$ η φυσική ένθεση. Ο F (όντας ελεύθερος) είναι (σύμφωνα με την πρόταση 4.2.4) προβολικός, οπότε υπάρχει προβολική ανύψωση $c:F\longrightarrow E'$ που καθιστά το

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "c"'] \arrow[d, "(b\circ\kappa)\check{\ }"] & \\ E' \arrow[r, "\check{\mu}"'] & \mathrm{Im}(\mu) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

(όπου $j\circ\check{\mu}=\mu$) μεταθετικό. Προφανώς,

$$\check{\mu}\circ c=(b\circ\kappa)\check{\ }\Rightarrow\mu\circ c=j\circ(\check{\mu}\circ c)=j\circ(b\circ\kappa)\check{\ }=b\circ\kappa,$$

επαληθεύοντας τον ισχυρισμό. □

A.5.9 Λήμμα. *Έστω $(\mathscr{C},\mathbb{M})$ μια κατηγορία με μοντέλα. Θεωρούμε το ακόλουθο (μεταθετικό στο δεξιό τετράγωνο) διάγραμμα συναλλοίωτων συναρτητών από την $\mathscr{C}$ στην $\mathfrak{Mod}_R$ και φυσικών μετασχηματισμών μεταξύ αυτών, στο οποίο $h\circ k=0$, η κάτω γραμμή είναι $\mathbb{M}$-ακριβής και ο $\mathbf{F}$ ένας ελεύθερος συναρτητής ως προς τα μοντέλα $\mathbb{M}$.*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F} \arrow[r, "k"] \arrow[d, dashed, "\gamma"'] & \mathbf{G} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{G}'' \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathbf{E}' \arrow[r, "\rho"'] & \mathbf{E} \arrow[r, "p"'] & \mathbf{E}'' \end{tikzcd} \tag{A.184}$$

Τότε υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\gamma:\mathbf{F}\longrightarrow\mathbf{E}'$ που το συμπληρώνει μεταθετικώς (στο αριστερό τετράγωνο).

Αποδειξη. Από την υπόθεσή μας υπάρχει μια $\mathbb{M}$-οικογένεια στοιχείων $(M_j,x_j)_{j\in J}$ τού $\mathbf{F}$ με $x_j\in\mathbf{F}(M_j)$ για κάθε $j\in J$ (και με το (A.183) ως μια βάση τού $\mathbf{F}(C)$ για κάθε $C\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$). Σε κάθε j αντιστοιχεί ένα διάγραμμα εντός τής $\mathfrak{Mod}_R$:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}(M_j) \arrow[r, "k(M_j)"] \arrow[d, dashed, "c_j"'] & \mathbf{G}(M_j) \arrow[r, "h(M_j)"] \arrow[d, "\beta_j"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{G}''(M_j) \arrow[d, "\alpha_j"] \\ \mathbf{E}'(M_j) \arrow[r, "\rho(M_j)"'] & \mathbf{E}(M_j) \arrow[r, "p(M_j)"'] & \mathbf{E}''(M_j) \end{tikzcd} \tag{A.185}$$

[82]Σε όσα διαγράμματα αυτής τής ενότητας εμφανίζονται μορφισμοί υποδηλούμενοι με *διακεκομμένες γραμμές*, υποθέτουμε ότι αυτοί *δεν* δίδονται εξαρχής αλλά συμπληρώνονται κατά την εκάστοτε αποδεικτική πορεία.

με το δεύτερο τετράγωνό του μεταθετικό. Επειδή $\mathrm{Im}(\rho(M_j)) = \mathrm{Ker}(p(M_j))$ και $h(M_j) \circ k(M_j) = 0$, πληρούνται οι προϋποθέσεις τού λήμματος A.5.8. Άρα υπάρχει (βάσει αυτού) ομομορφισμός R-μοδίων $c_j : \mathbf{F}(M_j) \longrightarrow \mathbf{E}'(M_j)$ που συμπληρώνει το διάγραμμα (A.185) μεταθετικώς. Επιπροσθέτως, κάθε $x_j \in \mathbf{F}(M_j)$ καθορίζει ένα $y'_j \in \mathbf{E}'(M_j)$, όπου $y'_j := c_j(x_j)$. Η $(M_j, y_j)_{j\in J}$ αποτελεί μια συμβατή $\mathbb{M}$-οικογένεια στοιχείων τού $\mathbf{E}'$. Σύμφωνα με το λήμμα A.5.7 υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\gamma : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{E}'$, τέτοιος ώστε $\gamma(M_j)(x_j) = y'_j$ για κάθε $j \in J$. Απομένει να αποδειχθεί η μεταθετικότητα στο πρώτο τετράγωνο τού (A.184). Ορίζοντας για κάθε $j \in J$, $y_j := \rho(M_j)(y'_j) \in \mathbf{E}(M_j)$, αποκτούμε μια $\mathbb{M}$-οικογένεια στοιχείων $(M_j, y_j)_{j\in J}$ τού $\mathbf{E}$. Από τη μεταθετικότητα τού (A.185) έπεται ότι

$$\begin{aligned}
&\beta(M_j)(k(M_j)(x_j)) = \rho(M_j)(c_j(x_j)) = \rho(M_j)(y'_j) = \rho(M_j)(\gamma(M_j)(x_j)) \\
&\Rightarrow (\beta \circ k)(M_j)(x_j) = (\rho \circ \gamma)(M_j)(x_j) = \rho(M_j)(y'_j) = y_j, \quad \forall j \in J.
\end{aligned}$$

Επειδή η $\mathscr{X} := (M_j, x_j)_{j\in J}$ είναι εξ υποθέσεως μια βάση τού $\mathbf{F}$ ως προς τα μοντέλα $\mathbb{M}$, από τη συνθήκη περί μοναδικότητας (τη διασφαλιζόμενη από το λήμμα A.5.7) έπεται ότι $\beta \circ k = \rho \circ \gamma$. □

A.5.10 Ορισμός. Έστω $\mathbf{E} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ ένας συναλλοίωτος συναρτητής[83], όπου $\mathscr{C}$ τυχούσα κατηγορία.

(i) Για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ ορίζεται (ως *αυτόνομος* συναρτητής) **η i-οστή προβολή**:

$$\mathbf{P}_i : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$$

με *απεικόνιση αντικειμένων*

$$\mathbf{P}_i : \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R), \ \ \mathbf{M}_\bullet = (M_\nu, d_\nu)_{\nu\in\mathbb{Z}} \longmapsto \mathbf{P}_i(\mathbf{M}_\bullet) := M_i,$$

και *απεικόνιση μορφισμών*

$$\mathbf{P}_i : \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{N}_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_i, N_i)\ , \quad f_\bullet \longmapsto \mathbf{P}_i(\ f_\bullet) := f_i.$$

(ii) Για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ο $\mathbf{E}_i : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ ως η *σύνθεση* $\mathbf{E}_i := \mathbf{P}_i \circ \mathbf{E}$ τού συναρτητή $\mathbf{E}$ με την i-οστή προβολή $\mathbf{P}_i$, με *απεικόνιση αντικειμένων*

$$\mathbf{E}_i : \mathrm{Ob}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R), \ \ C \longmapsto \mathbf{E}_i(C) := \mathbf{P}_i(\mathbf{E}(C)_\bullet) = \mathbf{E}(C)_i,$$

και *απεικόνιση μορφισμών*

$$\mathbf{E}_i : \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(C, D) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{E}(C)_i, \mathbf{E}(D)_i), \ \ f \longmapsto \mathbf{E}_i(f) := \mathbf{P}_i(\mathbf{E}(f)_\bullet) = \mathbf{E}(f)_i.$$

A.5.11 Σημείωση. Επιπρόσθετες διευκρινίσεις για τον ορισμό A.5.10 (και συνοδευτικοί συμβολισμοί):

[83] Για να δηλούμε (εμφαντικώς) ότι η απεικόνιση αντικειμένων τού $\mathbf{E}$ στέλνει κάθε $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ σε ένα *αλυσωτό σύμπλοκο* θα γράφουμε (για την εικόνα του) $\mathbf{E}(C)_\bullet$ (αντί $\mathbf{E}(C)$). Κατ' αναλογίαν, για να δηλούμε ότι η απεικόνιση μορφισμών τού $\mathbf{E}$ στέλνει κάθε $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(C, D)$ σε έναν *αλυσωτό μετασχηματισμό* θα γράφουμε (για την εικόνα του) $\mathbf{E}(f)_\bullet$ (αντί $\mathbf{E}(f)$).

(i) Εάν $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, οι συνοριακοί τελεστές τού αλυσωτού συμπλόκου $\mathbf{E}(C)_\bullet$ θα συμβολίζονται ως $\partial_\nu^{\mathbf{E}(C)_\bullet} : \mathbf{E}(C)_\nu \longrightarrow \mathbf{E}(C)_{\nu-1}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{Z}$. Σημειωτέον ότι, παγιώνοντας έναν $i \in \mathbb{Z}$, ορίζεται *φυσικός μετασχηματισμός*

$$\boxed{\partial_i : \mathbf{E}_i \longrightarrow \mathbf{E}_{i-1} \ \text{ με } \ \partial_i(C) := \partial_i^{\mathbf{E}(C)_\bullet} \ \text{ για κάθε } \ C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$$

καθόσον το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathbf{E}_i(C) \arrow[r, "\partial_i(C)"] \arrow[d, "\mathbf{E}_i(f)"'] & \mathbf{E}_{i-1}(C) \arrow[d, "\mathbf{E}_{i-1}(f)"] \\ \mathbf{E}_i(D) \arrow[r, "\partial_i(D)"'] & \mathbf{E}_{i-1}(D) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για οιαδήποτε $C, D \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Εκτός τούτου, $\partial_{\nu-1} \circ \partial_\nu = 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{Z}$, διότι για κάθε $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ λαμβάνουμε

$$(\partial_{\nu-1} \circ \partial_\nu)(C) = \partial_{\nu-1}(C) \circ \partial_\nu(C) = \partial_{\nu-1}^{\mathbf{E}(C)_\bullet} \circ \partial_\nu^{\mathbf{E}(C)_\bullet} = 0.$$

Επομένως μέσω τού $\mathbf{E}$ σχηματίζεται ένα «αλυσωτό σύμπλοκο συναρτητών»

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{E}_{\nu+1} \xrightarrow{\partial_{\nu+1}} \mathbf{E}_\nu \xrightarrow{\partial_\nu} \mathbf{E}_{\nu-1} \longrightarrow \cdots$$

από την $\mathscr{C}$ στην $\mathfrak{Mod}_R$. Και αντιστρόφως· μέσω κάθε τέτοιου «αλυσωτού συμπλόκου συναρτητών» από την $\mathscr{C}$ στην $\mathfrak{Mod}_R$ κατασκευάζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής $\mathbf{E} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ με τον προφανή τρόπο: Για κάθε $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ορίζεται ως $\mathbf{E}(C)_\bullet$ το

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{E}_{\nu+1}(C) \xrightarrow{\partial_{\nu+1}} \mathbf{E}_\nu(C) \xrightarrow{\partial_\nu} \mathbf{E}_{\nu-1}(C) \longrightarrow \cdots$$

και για κάθε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(C, D)$ ορίζεται ως $\mathbf{E}(f)_\bullet$ ο $(\mathbf{E}_i(f))_{\nu \in \mathbb{Z}}$. (Αυτή η αντιστοιχία θα χρησιμοποιείται κατ' επανάληψη σε ό,τι θα ακολουθήσει.)

(ii) Εάν $\mathbf{F}, \mathbf{E} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ είναι δυο συναλλοίωτοι συναρτητές και $h : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{E}$ ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ αυτών, ο h μπορεί να εκληφθεί ως «αλυσωτός μετασχηματισμός» μεταξύ των «αλυσωτών συμπλόκων» που αντιστοιχούν στους $\mathbf{F}$ και $\mathbf{E}$. Πράγματι· ορίζοντας για κάθε $\nu \in \mathbb{Z}$ τον φυσικό μετασχηματισμό $h_\nu : \mathbf{F}_\nu \longrightarrow \mathbf{E}_\nu$ με $h_\nu(C) : \mathbf{F}(C)_\bullet \longrightarrow \mathbf{E}(C)_\bullet$ τον $h(C)_\nu$ για οιοδήποτε $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}(C)_\nu \arrow[r, "h_\nu(C)"] \arrow[d, "\mathbf{F}(f)_\nu"'] & \mathbf{E}(C)_\nu \arrow[d, "\mathbf{E}(f)_\nu"] \\ \mathbf{F}(D)_\nu \arrow[r, "h_\nu(D)"'] & \mathbf{E}(D)_\nu \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Είναι, μάλιστα, εύκολος ο έλεγχος τού ότι το

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}_{\nu+1} \arrow[r, "\partial_{\nu+1}"] \arrow[d, "h_{\nu+1}"'] & \mathbf{F}_{\nu} \arrow[r, "\partial_{\nu}"] \arrow[d, "h_{\nu}"] & \mathbf{F}_{\nu-1} \arrow[r] \arrow[d, "h_{\nu-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{E}_{\nu+1} \arrow[r, "\partial'_{\nu+1}"'] & \mathbf{E}_{\nu} \arrow[r, "\partial'_{\nu}"'] & \mathbf{E}_{\nu-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(όπου $\mathbf{F}_\nu := \mathbf{P}_\nu \circ \mathbf{F}$ και $\mathbf{E}_\nu := \mathbf{P}_\nu \circ \mathbf{E}$) είναι ωσαύτως μεταθετικό.

A.5.12 Ορισμός. Έστω $(\mathscr{C}, \mathbb{M})$ μια κατηγορία με μοντέλα και έστω

$$\mathbf{E} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \tag{A.186}$$

ένας συναλλοίωτος συναρτητής.

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ως $H_n(\mathbf{E}) := H_n(-) \circ \mathbf{E}$ η σύνθεση των συναρτητών

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, rightsquigarrow, "\mathbf{E}"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "H_n(\mathbf{E})"'] & \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[d, rightsquigarrow, "H_n(-)"] \\
& \mathfrak{Mod}_R
\end{tikzcd}$$

όπου $H_n(-)$ ο n-οστός συναρτητής ομολογίας τού εδ. A.2.4 (vii).

(ii) Ο $\mathbf{E}$ λέγεται **μη αρνητικός** όταν το $\mathbf{E}(C)_\bullet$ είναι μη αρνητικό αλυσωτό σύμπλοκο[84] για κάθε $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ ή, ισοδυνάμως, όταν οι $\mathbf{E}_\nu$ είναι μηδενικοί συναρτητές για κάθε $\nu \leqslant -1$.

(iii) Ο $\mathbf{E}$ λέγεται **ακυκληματικός** (και αντιστοίχως, $\mathbb{M}$-**ακυκληματικός**) όταν το $\mathbf{E}(C)_\bullet$ είναι ακυκληματικό αλυσωτό σύμπλοκο για κάθε $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ (και αντιστοίχως, για κάθε $C \in \mathbb{M}$) ή, ισοδυνάμως, όταν ο $H_n(\mathbf{E})$ ως συναρτητής (και αντιστοίχως, ως συναρτητής περιορισμένος στο $\mathbb{M}$) είναι μηδενικός για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Ο $\mathbf{E}$ λέγεται (και αντιστοίχως, $\mathbb{M}$-**ελεύθερος**) όταν οι $\mathbf{E}_\nu : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ είναι ελεύθεροι (και αντιστοίχως, $\mathbb{M}$-ελεύθεροι) συναρτητές υπό την έννοια τού ορισμού A.5.2 για κάθε $\nu \in \mathbb{Z}$.

A.5.13 Σημείωση. Εδώ, όπως συμβαίνει και με τους (ελεύθερους ή προβολικούς) κερματισμούς R-μοδίων (βλ. εδ. 5.1.1), εκκινώντας από το «αλυσωτό σύμπλοκο»

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{E}_{\nu+1} \xrightarrow{\partial_{\nu+1}} \mathbf{E}_\nu \xrightarrow{\partial_\nu} \mathbf{E}_{\nu-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{E}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{E}_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbf{0} \longrightarrow \cdots$$

που αντιστοιχεί σε έναν *μη αρνητικό* συναρτητή (A.186), το «επεκτείνουμε» *κατά τα αναμενόμενα*: Θεωρούμε τον $H_0(\mathbf{E}) := H_0(-) \circ \mathbf{E}$ και κατασκευάζουμε φυσικό

[84] Ένα $\mathbf{M}_\bullet = (M_\nu, d_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R))$ καλείται **μη αρνητικό αλυσωτό σύμπλοκο** όταν $M_\nu \cong \{0\}$ για κάθε $\nu \leqslant -1$.

μετασχηματισμό $\varpi : \mathbf{E}_0 \longrightarrow H_0(\mathbf{E})$ θέτοντας $\varpi(C) := \pi^{\mathbf{E}(C)_0}_{\mathrm{Im}(\partial_1)}(C)$ για κάθε αντικείμενο $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, οπότε προκύπτει η

$$\cdots \longrightarrow \mathbf{E}_\nu \xrightarrow{\partial_\nu} \mathbf{E}_{\nu-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{E}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{E}_0 \xrightarrow{\varpi} H_0(\mathbf{E}) \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots$$

A.5.14 Θεώρημα («Θεώρημα ακυκληματικών μοντέλων», Eilenberg & Mac Lane/1953). *Έστω $(\mathscr{C}, \mathbb{M})$ μια κατηγορία με μοντέλα. Εάν $\mathbf{F}, \mathbf{E} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ είναι δυο συναλλοίωτοι, μη αρνητικοί συναρτητές, με τον μεν $\mathbf{F}$ $\mathbb{M}$-ελεύθερο, τον δε $\mathbf{E}$ $\mathbb{M}$-ακυκληματικό, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Για κάθε φυσικό μετασχηματισμό $\varphi : H_0(\mathbf{F}) \longrightarrow H_0(\mathbf{E})$ υφίσταται φυσικός μετασχηματισμός $k : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{E}$ ο οποίος «επεκτείνει τον φ», ήτοι ισχύει η ισότητα $\varphi \circ \varpi = \varpi' \circ k_0$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το A.5.11* (ii), *αυτό σημαίνει ότι υφίσταται ακολουθία φυσικών μετασχηματισμών $(k_\nu : \mathbf{F}_\nu \longrightarrow \mathbf{E}_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$, τέτοια ώστε το κάτωθι διάγραμμα να καθίσταται μεταθετικό*[85]

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{F}_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "k_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "k_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}_0 \arrow[r, "\varpi"] \arrow[d, dashed, "k_0"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_0(\mathbf{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbf{0} \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{E}_2 \arrow[r, "\partial_2"'] & \mathbf{E}_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & \mathbf{E}_0 \arrow[r, "\varpi'"'] & H_0(\mathbf{E}) \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

(Ένας τέτοιου είδους φυσικός μετασχηματισμός $k : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{E}$ καλείται ***φυσικός αλυσωτός μετασχηματισμός****.)*

(ii) *Εάν $k, k' : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{E}$ είναι δυο φυσικοί αλυσωτοί μετασχηματισμοί «επεκτείνοντες τον φ», τότε αυτοί είναι φυσικώς αλυσωτώς ομότοποι, ήτοι υπάρχει μια ακολουθία φυσικών μετασχηματισμών $s_\nu : \mathbf{F}_\nu \longrightarrow \mathbf{E}_{\nu+1}$, τέτοια ώστε να ισχύει*

$$\partial_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n = k_n - k'_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(iii) *Στην περίπτωση κατά την οποία αμφότεροι οι $\mathbf{F}$ και $\mathbf{E}$ είναι $\mathbb{M}$-ελεύθεροι και $\mathbb{M}$-ακυκληματικοί και ο φ φυσική ισοδυναμία, κάθε φυσικός αλυσωτός μετασχηματισμός που «επεκτείνει τον φ» είναι φυσική ισοδυναμία. Με άλλα λόγια, εάν $k : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{E}$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός που «επεκτείνει τον φ», υπάρχει φυσικός αλυσωτός μετασχηματισμός $h : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ με*

$$h \circ k \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{F}} \quad \text{και} \quad k \circ h \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{E}},$$

όπου $\mathrm{id}_{\mathbf{F}}$ και $\mathrm{id}_{\mathbf{E}}$ είναι οι ταυτοτικοί φυσικοί μετασχηματισμοί.

Απόδειξη. (i) Οι φυσικοί μετασχηματισμοί[86] $(k_\nu : \mathbf{F}_\nu \longrightarrow \mathbf{E}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ κατασκευάζονται κάνοντας χρήση μαθηματικής επαγωγής επί τού n. Για $n = 0$ η ύπαρξη τού k_0 προκύπτει κατόπιν εφαρμογής τού λήμματος A.5.9. Άρα υπάρχει k_0, ούτως ώστε να

[85] Ως $(d_n)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ (και αντιστοίχως, ως $(\partial_n)_{\nu \in \mathbb{Z}}$) θα συμβολίζονται οι συνοριακοί τελεστές τού «αλυσωτού συμπλόκου» που αντιστοιχεί στον $\mathbf{F}$ (και αντιστοίχως, στον $\mathbf{E}$).

[86] Για $\nu \leqslant -1$ ορίζουμε ως k_ν τον μηδενικό συναρτητή.

ισχύει $\varphi \circ \varpi = \varpi' \circ k_0$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}_0 \arrow[r, "\varpi"] \arrow[d, dashed, "k_0"'] & H_0(\mathbf{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{0} \arrow[d] \\
\mathbf{E}_0 \arrow[r, "\varpi'"'] & H_0(\mathbf{E}) \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

Ομοίως για $n = 1$: Στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "k_1"'] & \mathbf{F}_0 \arrow[r, "\varpi"] \arrow[d, "k_0"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_0(\mathbf{F}) \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbf{E}_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & \mathbf{E}_0 \arrow[r, "\varpi'"'] & H_0(\mathbf{E})
\end{tikzcd}$$

έχουμε $\varpi \circ d_1 = 0$, η κάτω του γραμμή είναι $\mathbb{M}$-ακριβής (αφού ο $\mathbf{E}$ είναι εξ υποθέσεως $\mathbb{M}$-ακυκληματικός) και το δεξιό του τετράγωνο μεταθετικό. Από το λήμμα A.5.9 έπεται η ύπαρξη φυσικού μετασχηματισμού $k_1 : \mathbf{F}_1 \longrightarrow \mathbf{E}_1$ που το συμπληρώνει μεταθετικώς. Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι $n \geqslant 2$ και ότι για κάθε $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ έχουν ήδη κατασκευασθεί οι $k_j : \mathbf{F}_j \longrightarrow \mathbf{E}_j$ με $\partial_j \circ k_j = k_{j-1} \circ d_j$. Στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, dashed, "k_n"'] & \mathbf{F}_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "k_{n-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{F}_{n-2} \arrow[d, "k_{n-2}"] \\
\mathbf{E}_n \arrow[r, "\partial_n"'] & \mathbf{E}_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"'] & \mathbf{E}_{n-2}
\end{tikzcd}$$

έχουμε $d_{n-1} \circ d_n = 0$, η κάτω του γραμμή είναι $\mathbb{M}$-ακριβής και το δεξιό τετράγωνό του μεταθετικό. Εκ νέου εφαρμογή τού λήμματος A.5.9 εξασφαλίζει την ύπαρξη φυσικού μετασχηματισμού $k_n : \mathbf{F}_n \longrightarrow \mathbf{E}_n$ με $\partial_n \circ k_n = k_{n-1} \circ d_n$.

(ii) Ας υποθέσουμε ότι $k, k' : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{E}$ είναι δυο «φυσικοί αλυσωτοί μετασχηματισμοί επεκτείνοντες τον φ». Αναζητούμε «φυσικούς μετασχηματισμούς συναρτητών» $s_n : \mathbf{F}_n \longrightarrow \mathbf{E}_{n+1}$, ούτως ώστε να ισχύει

$$\partial_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n = k_n - k'_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{A.187}$$

Θέτουμε $s_j := 0$ για $j \leqslant -1$ και κατασκευάζουμε τους s_ν, $\nu \in \mathbb{N}_0$, επαγωγικώς. Επειδή

$$\varphi \circ \varpi = \varpi' \circ k_0 = \varpi' \circ k'_0,$$

έχουμε $\varpi' \circ (k_0 - k'_0) = 0$, το δεξιό τετράγωνο τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}_0 \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{F}_0}"] \arrow[d, dashed, "s_0"'] & \mathbf{F}_0 \arrow[r] \arrow[d, "k_0 - k'_0"] & \mathbf{0} \arrow[d] \\
\mathbf{E}_1 \arrow[r, "\partial_1"'] & \mathbf{E}_0 \arrow[r, "\varpi'"'] & H_0(\mathbf{E})
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και βάσει τού λήμματος A.5.9 υφίσταται φυσικός μετασχηματισμός $s_0 : \mathbf{F}_0 \longrightarrow \mathbf{E}_1$ που το συμπληρώνει (και στο αριστερό τετράγωνό του) μεταθετικώς, οπότε

$$\partial_1 \circ s_0 + s_{-1} \circ d_0 = \partial_1 \circ s_0 = k_0 - k_0'.$$

Ας υποθέσουμε ότι $\nu \geqslant 1$ και ότι για κάθε $j \in \{0, ..., \nu-1\}$ έχουν ήδη κατασκευασθεί φυσικοί μετασχηματισμοί $s_j : \mathbf{F}_j \longrightarrow \mathbf{E}_{j+1}$ με

$$\partial_{j+1} \circ s_j + s_{j-1} \circ d_j = k_j - k_j'. \tag{A.188}$$

Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}_\nu \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbf{F}_\nu}"] \arrow[d, dashed, "s_\nu"'] & \mathbf{F}_\nu \arrow[r] \arrow[d, "k_\nu - k_\nu' - s_{\nu-1}\circ d_\nu"] & \mathbf{0} \arrow[d] \\ \mathbf{E}_{\nu+1} \arrow[r, "\partial_{\nu+1}"'] & \mathbf{E}_\nu \arrow[r, "\partial_\nu"'] & \mathbf{E}_{\nu-1} \end{tikzcd} \tag{A.189}$$

Προφανώς,

$$\begin{aligned} &\partial_\nu \circ (k_\nu - k_\nu' - s_{\nu-1} \circ d_\nu) = \partial_\nu \circ (k_\nu - k_\nu') - (\partial_\nu \circ s_{\nu-1}) \circ d_\nu \\ &= \partial_\nu \circ (k_\nu - k_\nu') - (k_{\nu-1} - k_{\nu-1}' - s_{\nu-2} \circ d_{\nu-1}) \circ d_\nu \\ &= \partial_\nu \circ (k_\nu - k_\nu') - (k_{\nu-1} - k_{\nu-1}') \circ d_\nu + s_{\nu-2} \circ \underbrace{d_{\nu-1} \circ d_\nu}_{=0} \\ &= \partial_\nu \circ (k_\nu - k_\nu') - (k_{\nu-1} - k_{\nu-1}') \circ d_\nu = 0, \end{aligned}$$

με την δεύτερη ισότητα προκύπτουσα ύστερα από εφαρμογή τής (A.188) για την τιμή $j = \nu - 1$ και την τελευταία οφειλόμενη στο γεγονός τού ότι ο $k - k'$ είναι «φυσικός αλυσωτός μετασχηματισμός». Λόγω τής ισότητας

$$\partial_\nu \circ (k_\nu - k_\nu' - s_{\nu-1} \circ d_\nu) = 0$$

έχουμε το δικαίωμα εκ νέου εφαρμογής τού λήμματος A.5.9: Υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $s_\nu : \mathbf{F}_\nu \longrightarrow \mathbf{E}_{\nu+1}$ που συμπληρώνει το (A.189) (και στο αριστερό τετράγωνό του) μεταθετικώς και, ως εκ τούτου, οι ισότητες (A.187) είναι αληθείς.

(iii) Εάν υποτεθεί ότι ο φ είναι φυσική ισοδυναμία, τότε αυτός διαθέτει αντίστροφο $\varphi^{-1} : H_0(\mathbf{E}) \longrightarrow H_0(\mathbf{F})$. Λόγω τού (i) υπάρχει «φυσικός αλυσωτός μετασχηματισμός» $h : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{F}$ που «επεκτείνει τον φ^{-1}». Άρα ο $h \circ k$ είναι «φυσικός αλυσωτός μετασχηματισμός» που «επεκτείνει τον $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{H_0(\mathbf{E})}$». Την ίδια, όμως, ιδιότητα έχει και ο ταυτοτικός, οπότε $h \circ k \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{F}}$. Η απόδειξη τού ότι $k \circ h \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$ είναι παρόμοια. Άρα τα «αλυσωτά σύμπλοκα συναρτητών» που αντιστοιχούν στους $\mathbf{F}$ και $\mathbf{E}$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα. □

Παράρτημα Β

Υπομνήσεις θεμελιωδών τοπολογικών εννοιών

Το δεύτερο παράρτημα περιέχει εν συνόψει υπομνήσεις θεμελιωδών εννοιών και βασικών παραδειγμάτων από τη Γενική Τοπολογία που είναι αναγκαίες για την ανάγνωση των κεφαλαίων 7 και 8. (Για περαιτέρω μελέτη, βλ., π.χ., [37], [38], [39], [40], [41], [42] και [43].)

B.1 ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ

Προϋποτίθεται ότι οι αναγνώστες διαθέτουν κάποιες πρωταρχικές γνώσεις Γενικής Τοπολογίας περιλαμβάνουσες τα ακόλουθα:
▸ Τοπολογία επί συνόλου, τοπολογικοί χώροι και υπόχωροι, ανοικτά και κλειστά σύνολα. Παραδείγματα.
▸ Βάση τοπολογίας, βασικά υποσύνολα, περιοχές σημείων, βάση περιοχών ενός σημείου, βασικές περιοχές.
▸ Για δοθέν υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X: *Το τοπολογικό εσωτερικό* (ή ο *ανοικτός πυρήνας*) τού[1] A,

$$\mathrm{int}_X(A) := \bigcup\{B \subseteq X \mid B \subseteq A,\ B \text{ ανοικτό}\},$$

η *κλειστή θήκη* (ή το *κλειστό περίβλημα*) τού A,

$$\mathrm{cl}_X(A) := \bigcap\{C \subseteq X \mid A \subseteq C,\ C \text{ κλειστό}\}$$

και η *μεθόριος*[2] τού A,

$$\mathrm{frnt}_X(A) := \mathrm{cl}_X(A) \cup \mathrm{cl}_X(X \smallsetminus A).$$

▸ Διαχωριστικά αξιώματα. Συνθήκες αριθμησιμότητας σε τοπολογικούς χώρους.

[1]Τα στοιχεία τού $\mathrm{int}_X(A)$ ονομάζονται ενίοτε και *εσωτερικά σημεία* τού A και τα στοιχεία τού $\mathrm{int}_X(X \smallsetminus A)$ *εξωτερικά σημεία* τού A.

[2]Το “frnt” παραπέμπει στον αγγλικό όρο *frontier*. (Προσοχή! Ορισμένοι συγγραφείς χρησιμοποιούν αντ’ αυτού τον όρο (**τοπολογικό**) **σύνορο**. Ωστόσο, ο όρος *boundary*, ήτοι το **σύνορο**, τουλάχιστον όπως ορίζεται εντός τού πλαισίου τής Θεωρίας Πολυπτυγμάτων, *δεν συμπίπτει* με αυτόν. Πρβλ. εδ. Ε.1.23 (iv).)

▸ Η ιδιότητα τής συμπάγειας (compactness) και τής τοπικής συμπάγειας.
▸ Εξοικείωση με τον ρόλο που διαδραματίζουν οι συνεχείς, οι ανοικτές και οι κλειστές απεικονίσεις, και ιδιαιτέρως οι *ομοιομορφισμοί* που αποτελούν τους $\mathfrak{Top}$-*ισομορφισμούς*. (Βλ. εδάφια A.1.1 και A.1.5 (v).)

B.1.1 Ορισμός. Μια αμφιρριπτική απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ τοπολογικών χώρων καλείται **ομοιομορφισμός** όταν είναι *αμφισυνεχής*, ήτοι όταν αμφότερες οι f και $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ είναι συνεχείς. Χρησιμοποιούμενος συμβολισμός:

$$\boxed{X \approx Y \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\text{υπάρχει κάποιος ομοιομορφισμός } f : X \longrightarrow Y].}$$

(Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι οι X και Y είναι **ομοιομορφικοί**[3].)

B.1.2 Πρόταση. *Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι και $f : X \longrightarrow Y$ μια αμφιρριπτική απεικόνιση, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:
(i) *Η f είναι ένας ομοιομορφισμός.*
(ii) *Η f είναι συνεχής και ανοικτή.*
(iii) *Η f είναι συνεχής και κλειστή.*
(iv) $f(\mathrm{cl}_X(A)) = \mathrm{cl}_Y(f(A))$, *για κάθε* $A \subseteq X$.

B.1.3 Παραδείγματα. Έστω $d \in \mathbb{N}_0$. Εφοδιάζουμε τον $\mathbb{R}^d$ με τη συνήθη τοπολογία την επαγόμενη από την ευκλείδεια μετρική.
(i) Όταν $d \geqslant 2$, ορίζουμε τους εξής υποχώρους του: Τον

$$\boxed{\mathbb{B}^d := \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, ||\mathbf{x}|| \leqslant 1\}}$$

ως την d-**διάστατη μοναδιαία μπάλα**[4], όπου $||\mathbf{x}|| := \sqrt{x_1^2 + ... + x_d^2}$, τον

$$\boxed{\mathbb{S}^{d-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, ||\mathbf{x}|| = 1\}}$$

ως την $(d-1)$-**διάστατη μοναδιαία σφαίρα**[5], τον

$$\boxed{\mathring{\mathbb{B}}^d := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \,|\, ||\mathbf{x}|| < 1\}}$$

ως το d-**διάστατο μοναδιαίο κύτταρο**[6] και τον

$$\boxed{\mathbf{I}^d := \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d \,|\, 0 \leqslant x_i \leqslant 1, \, \forall i \in \{1, ..., d\}\}}$$

[3] Κατ' αναλογίαν, ο συμβολισμός $X \not\approx Y$ θα δηλοί ότι οι X και Y δεν είναι ομοιομορφικοί.

[4] Ιδιαιτέρως, όταν $d = 2$, η $\mathbb{B}^2$ καλείται **μοναδιαίος δίσκος**.

[5] Ιδιαιτέρως, όταν $d = 2$, η $\mathbb{S}^1$ καλείται **μοναδιαίος κύκλος**.

[6] Ιδιαιτέρως, όταν $d = 2$, το $\mathring{\mathbb{B}}^2$ καλείται **μοναδιαίος ανοικτός δίσκος**.

ως τον d-**διάστατο μοναδιαίο κύβο**, ενώ για $d \in \{0,1\}$ θέτουμε:

$$\mathbb{R}^0 := \{0\},\ \mathbb{S}^{-1} := \varnothing,\ \mathbb{S}^0 := \{\pm 1\},\ \mathbb{B}^1 := [-1,1],\ \mathring{\mathbb{B}}^1 := (-1,1),\ \mathbf{I}^1 := \mathbf{I} := [0,1].$$

Ένας τοπολογικός χώρος καλείται d-**μπάλα**[7] και, αντιστοίχως, $(d-1)$-**σφαίρα**, d-**κύτταρο** (d-cell), d-**κύβος** όταν είναι ομοιομορφικός τού $\mathbb{B}^d$ και, αντιστοίχως, τής $\mathbb{S}^{d-1}$, τού $\mathring{\mathbb{B}}^d$ και τού $\mathbf{I}^d$.

(ii) Εάν $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ είναι μια συσχετική απεικόνιση (affine map):

$$f(x_1,...,x_d) = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \mathbf{b},\ \mathbf{A} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}),\ \mathbf{b} = (b_1,...,b_d) \in \mathbb{R}^d,$$

τότε $X \approx f(X)$ για κάθε υπόχωρο X τού $\mathbb{R}^d$.

(iii) Ορίζοντας την $f : \mathring{\mathbb{B}}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{1-||\mathbf{x}||}$, η οποία απεικονίζει κάθε διάμετρο τού $\mathring{\mathbb{B}}^d$ στην ευθεία την οριζόμενη μέσω αυτής, διαπιστώνεται εύκολα ότι η f είναι αμφιρριπτική, συνεχής με την αντίστροφό της

$$f^{-1} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathring{\mathbb{B}}^d,\ \mathbf{y} \longmapsto f^{-1}(\mathbf{y}) := \frac{\mathbf{y}}{1+||\mathbf{y}||},\ \text{συνεχή.}$$

Άρα το $\mathbb{R}^d \approx \mathring{\mathbb{B}}^d$ είναι ένα d-κύτταρο. Επιπροσθέτως, το $\mathbb{R}^{d_1+d_2} = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ είναι ένα (d_1+d_2)-κύτταρο, οπότε εν γένει ισχύει:

$$(d_1\text{-κύτταρο}) \times (d_2\text{-κύτταρο}) \approx ((d_1+d_2)\text{-κύτταρο}).$$

(iv) Εντός τής d-διάστατης μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^d$ ορίζουμε το

$$\boxed{\mathbb{S}^d_+ := \{\mathbf{x} = (x_1,...,x_d,x_{d+1}) \in \mathbb{S}^d \mid x_{d+1} \geqslant 0\}}$$

ως το **βόρειο** και το

$$\boxed{\mathbb{S}^d_- := \{\mathbf{x} = (x_1,...,x_d,x_{d+1}) \in \mathbb{S}^d \mid x_{d+1} \leqslant 0\}}$$

ως το **νότιο ημισφαίριο τής** $\mathbb{S}^d$. Προφανώς,

$$\mathbb{S}^d_+ \cup \mathbb{S}^d_- = \mathbb{S}^d, \qquad \mathbb{S}^d_+ \cap \mathbb{S}^d_- = \mathbb{S}^{d-1}\ (\textbf{ο ισημερινός τής}\ \mathbb{S}^d).$$

Εν συνεχεία, ορίζουμε το σημείο $P_+ := (\underbrace{0,0,...,0}_{d\text{-φορές}},1)$ ως τον **βόρειο πόλο** και το σημείο $P_- := (\underbrace{0,0,...,0}_{d\text{-φορές}},-1)$ ως τον **νότιο πόλο** τής $\mathbb{S}^d$, καθώς και την **ορθογώνια προβολή**

$$p_\pm : \mathbb{B}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d_\pm,\ \ p_\pm(x_1,...,x_d) := \left(x_1,...,x_d,\pm\sqrt{1-(x_1^2+\cdots+x_d^2)}\right).$$

[7] Ιδιαιτέρως, οι 2-μπάλες καλούνται και **δίσκοι**, και τα 2-κύτταρα **ανοικτοί δίσκοι**.

Η $p_{\pm}$ είναι ομοιομορφισμός, οπότε καθένα εκ των ημισφαιρίων είναι μια d-μπάλα (ήτοι $\mathbb{S}^d_{\pm} \approx \mathbb{B}^d$). Από την άλλη μεριά, η λεγομένη **στερεογραφική προβολή** (βλ. το επόμενο σχήμα για $d = 2$)

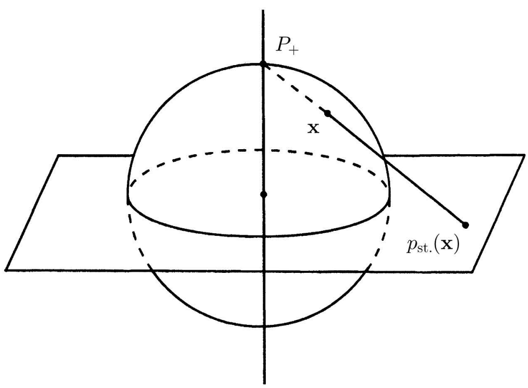
$$p_{\text{st.}} : \mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_+\} \longrightarrow \mathbb{R}^d, \ p_{\text{st.}}(x_1, ..., x_d, x_{d+1}) := \left(\frac{x_1}{1 - x_{d+1}}, ..., \frac{x_d}{1 - x_{d+1}} \right),$$

η οποία απεικονίζει κάθε σημείο $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d, x_{d+1}) \in \mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_+\}$ στο σημείο τομής τής ευθείας τής διερχομένης από τα P_+ και $\mathbf{x}$ με το υπερεπίπεδο

$$\mathbb{R}^d \approx \{(x_1, ..., x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \,|\, x_{d+1} = 0\} \subset \mathbb{R}^{d+1},$$

είναι ωσαύτως ομοιομορφισμός, με αντίστροφό της την $p_{\text{st.}}^{-1} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_+\}$ την οριζόμενη μέσω τού τύπου:

$$\mathbb{R}^d \ni (y_1, ..., y_d) = \mathbf{y} \mapsto p_{\text{st.}}^{-1}(\mathbf{y}) := \left(\frac{2y_1}{1 + ||\mathbf{y}||^2}, ..., \frac{2y_d}{1 + ||\mathbf{y}||^2}, \frac{||\mathbf{y}||^2 - 1}{1 + ||\mathbf{y}||^2} \right).$$



Στερεογραφική προβολή.

Επειδή για κάθε σημείο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{S}^d$ υπάρχει ομοιομορφισμός $\mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ που απεικονίζει το $\mathbf{x}_0$ στο P_+ (π.χ. μια κατάλληλη στροφή) έχουμε

$$\mathbb{S}^d \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\} \approx \mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_+\} \approx \mathbb{R}^d \approx \mathring{\mathbb{B}}^d \text{ (δηλαδή ένα } d\text{-κύτταρο).} \qquad \text{(B.1)}$$

(v) Σημειωτέον ότι

$$\mathbb{S}^{d-1} \times (0, +\infty) \approx \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{d-1}} \underbrace{\{\gamma\mathbf{x} \,|\, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}\}}_{\text{ημιευθείες}} = \mathbb{R}^d \smallsetminus \{(0, 0, ..., 0)\}$$

(π.χ., μέσω τού ομοιομορφισμού $(\mathbf{x}, \gamma) \mapsto \gamma\mathbf{x}$). Κι επειδή $(0, +\infty) \approx \mathbb{R}$, λαμβάνουμε

$$\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}^d \smallsetminus \{(0, 0, ..., 0)\} \text{ (π.χ., απευθείας μέσω τού } (\mathbf{x}, t) \mapsto \exp(t)\,\mathbf{x}).$$

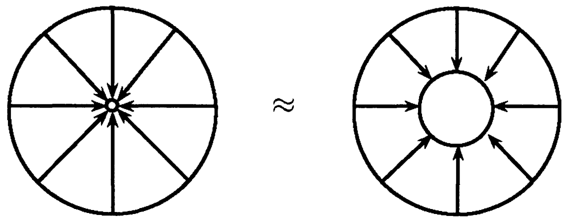
(vi) Από την άλλη μεριά,

$$\mathbb{S}^{d-1} \times (0, 1] \approx \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{d-1}} \{\gamma\mathbf{x} \,|\, 0 < \gamma \leqslant 1\} = \mathbb{B}^d \smallsetminus \{(0, 0, ..., 0)\}$$

Επίσης, για $r \in \mathbb{R}$ με $0 < r < 1$ έχουμε $(0,1] \approx (r,1]$, οπότε

$$\mathbb{B}^d \smallsetminus \{(0,0,...,0)\} \approx \{\mathbf{y} \in \mathbb{B}^d \mid r < ||\mathbf{y}|| \leqslant 1\}$$

(π.χ., μέσω τού ομοιομορφισμού $\gamma\mathbf{x} \longmapsto ((1-\gamma)r + \gamma\mathbf{x})$).



Μεγέθυνση τρύπας.

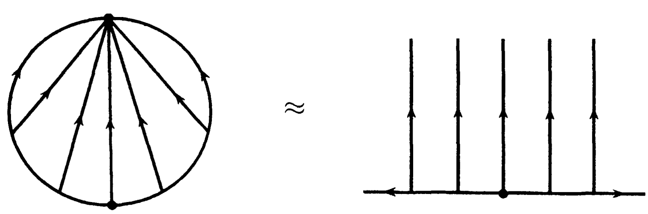
(vii) Ο αντίστοιχος τοπολογικός χαρακτηρισμός τού $\mathbb{B}^d \smallsetminus \{P_+\}$ (όπου P_+ ο βόρειος πόλος τής $\mathbb{S}^{d-1}$) είναι ο ακόλουθος:

$$(\mathbb{S}^{d-1} \smallsetminus \{P_+\}) \times [0,1) \approx \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{d-1} \smallsetminus \{P_+\}} \{(1-t)\mathbf{x} + tP_+ \mid 0 \leqslant t < 1\} = \mathbb{B}^d \smallsetminus \{P_+\}.$$

Επειδή η $p_{\text{st.}}^{-1} : \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{d-1} \smallsetminus \{P_+\}$ είναι ομοιομορφισμός, λαμβάνουμε έναν ομοιομορφισμό

$$\mathbb{R}^{d-1} \times [0,1) \longrightarrow \mathbb{B}^d \smallsetminus \{P_+\},\ (\mathbf{y},t) \mapsto (1-t)p_{\text{στ.}}^{-1}(\mathbf{y}) + tP_+.$$

Κι επειδή $[0,1) \approx [0,+\infty)$, προκύπτει ένας ομοιομορφισμός (υποδηλούμενος μέσω τού κάτωθι σχήματος όταν $d=2$) μεταξύ τού $\mathbb{B}^d \smallsetminus \{P_+\}$ και τού ευκλειδείου ημιχώρου $\mathbb{R}^{d-1} \times [0,+\infty)$:



B.1.4 Σημείωση. Τα ανωτέρω παραδείγματα ομοιομορφισμών αναφύονται από άμεσες γεωμετρικές κατασκευές. (*Εν γένει*, δοθέντων δυο τοπολογικών χώρων X και Y, το πρόβλημα τού κατά πόσον αυτοί είναι ομοιομορφικοί είναι *αλγοριθμικώς μη επιλύσιμο*[8]. Ως εκ τούτου, χρηστικές *ταξινομήσεις* τοπολογικών χώρων *μέχρις ομοιομορφισμού* συναντώνται μόνον όταν κανείς περιορίζεται σε *πολύ ειδικές υποκλάσεις* τοπολογικών χώρων.) Από την άλλη μεριά, για την απόδειξη τού ότι δυο

[8] Βλ. A.A. Markov: *Undecidability of the homeomorphism problem*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (1958), Cambridge University Press, 1960, pp. 300-306.

συγκεκριμένοι τοπολογικοί χώροι *δεν είναι ομοιομορφικοί* αρκεί να αποδειχθεί ότι ο ένας εξ αυτών έχει μια *τοπολογική ιδιότητα*[9] που δεν την έχει ο άλλος. Επί παραδείγματι[10], $\mathbb{S}^d \not\approx \mathbb{R}^d$. Ωστόσο, για να συγκριθούν οι $\mathbb{R}^{d_1}$ και $\mathbb{R}^{d_2}$ (και αντιστοίχως, οι $\mathbb{S}^{d_1}$ και $\mathbb{S}^{d_2}$, και οι $\mathbb{B}^{d_1}$ και $\mathbb{B}^{d_2}$, για $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, βλ. πόρισμα B.1.6) απαιτείται η χρήση μιας τοπολογικής ιδιότητας περιγραφόμενης στο ιδιάζουσας σημασίας θεώρημα B.1.5 (το οποίο μπορεί, μαζί με ποικίλες γενικεύσεις του, να προκύψει ως πόρισμα[11] τού θεωρήματος 7.7.10).

B.1.5 Θεώρημα («Θεώρημα τού αναλλοιώτου των περιοχών»). *Εάν X, Y είναι δυο υπόχωροι τού $\mathbb{R}^d$, ο X ανοικτός και $X \approx Y$, τότε και ο Y οφείλει να είναι ανοικτός.*

B.1.6 Πόρισμα («Θεώρημα τού αναλλοιώτου τής διαστάσεως»).
Έστω ότι $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$. Εάν $d_1 \neq d_2$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) $\mathbb{R}^{d_1} \not\approx \mathbb{R}^{d_2}$,
(ii) $\mathbb{S}^{d_1} \not\approx \mathbb{S}^{d_2}$,
(iii) $\mathbb{B}^{d_1} \not\approx \mathbb{B}^{d_2}$.

Απόδειξη. (i) Εάν $d_1 < d_2$, τότε ο $\mathbb{R}^{d_1}$ (θεωρούμενος κατά τρόπο φυσικό ως *γνήσιος* υπόχωρος τού $\mathbb{R}^{d_2}$) είναι μη ανοικτός στον $\mathbb{R}^{d_2}$. Όμως ο $\mathbb{R}^{d_2}$ είναι ανοικτός στον $\mathbb{R}^{d_2}$. Από το θεώρημα B.1.5 έχουμε $\mathbb{R}^{d_1} \not\approx \mathbb{R}^{d_2}$.
(ii) Εάν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{S}^{d_1} \longrightarrow \mathbb{S}^{d_2}$, τότε από την (B.1) λαμβάνουμε

$$\mathbb{R}^{d_1} \approx \mathring{\mathbb{B}}^{d_1} \approx \mathbb{S}^{d_1} \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\} \approx \mathbb{S}^{d_2} \smallsetminus \{f(\mathbf{x}_0)\} \approx \mathring{\mathbb{B}}^{d_2} \approx \mathbb{R}^{d_2}$$

και από το (i) συμπεραίνουμε ότι $d_1 = d_2$.
(iii) Εάν $d_1 < d_2$ και εάν υποτεθεί ότι υπάρχει ομοιομορφισμός

$$f : \mathbb{B}^{d_1} \longrightarrow \mathbb{B}^{d_2},$$

τότε

$$\mathbb{R}^{d_2} \approx \mathring{\mathbb{B}}^{d_2} \approx f^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}^{d_2}) \subseteq \mathbb{B}^{d_1} \subsetneqq \mathbb{R}^{d_1} \subsetneqq \mathbb{R}^{d_2},$$

το οποίο είναι άτοπο βάσει τού θεωρήματος B.1.5. □

B.1.7 Πόρισμα. *Κάθε ομοιομορφισμός $f : \mathbb{B}^d \longrightarrow \mathbb{B}^d$ απεικονίζει την $\mathbb{S}^{d-1}$ επί τής $\mathbb{S}^{d-1}$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{z} := f(\mathbf{x}) \in \mathring{\mathbb{B}}^d$. Τότε για αρκούντως μικρό $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ προσδιορίζουμε ένα σύνολο

$$U := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \mid ||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| < \varepsilon\}$$

[9] *Τοπολογικές ιδιότητες* είναι εκείνες οι ιδιότητες που διατηρούνται μέσω ομοιομορφισμών.

[10] O $\mathbb{S}^d$ είναι συμπαγής (ως κλειστό και φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{R}^{d+1}$), ενώ ο $\mathbb{R}^d$ δεν είναι (αφού δεν είναι συμπαγής ούτε και ο ίδιος ο $\mathbb{R}$).

[11] Βλ. Bredon [57], Chapter IV, Corollary 19.9, σελ. 235. Σε μια πιο γενικευμένη του εκδοχή το θεώρημα B.1.5 είχε πρωτοαποδειχθεί από τον L.E.J. Brouwer στο άρθρο του: *Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets*, Mathematische Annalen **71** (1912), 55-56.

το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^d$ κείμενο καθ' ολοκληρίαν εντός τής $\mathbb{B}^d$. Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^d$ τού U μέσω τής f είναι ομοιομορφική τού ιδίου τού U, αλλά επειδή $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{B}^d$ και ταυτοχρόνως $f^{-1}(U) \cap \mathbb{S}^{d-1} \neq \varnothing$, δεν είναι ανοικτή εντός τού $\mathbb{R}^d$. Τούτο αντιφάσκει προς το θεώρημα B.1.5. □

B.1.8 Ορισμός. Μια απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ τοπολογικών χώρων καλείται **(τοπολογική) εμφύτευση (τού X εντός τού Y)** όταν η επαγομένη επίρριψη

$$\hat{f} : X \longrightarrow f(X),\ x \longmapsto \hat{f}(x) := f(x),$$

είναι ομοιομορφισμός[12].

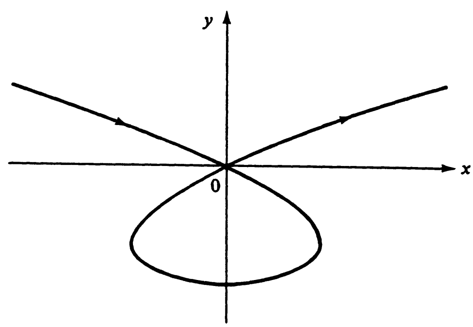
B.1.9 Παραδείγματα. (i) Ένας τοπολογικός χώρος είναι δυνατόν να επιδέχεται *διαφορετικές* εμφυτεύσεις εντός ενός άλλου. Επί παραδείγματι, αμφότερες οι απεικονίσεις

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto (x, 0) \text{ και } f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x \longmapsto (e^x \cos x, e^x \sin x),$$

αποτελούν εμφυτεύσεις τού $\mathbb{R}$ εντός τού $\mathbb{R}^2$ (ως προς τις συνήθεις τοπολογίες). Αντιθέτως, η

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \ x \longmapsto g(x) = \left(x^3 - 4x,\ x^2 - 4\right),$$

(το γράφημα τής οποίας δείχνεται στο κάτωθι σχήμα) *δεν είναι* εμφύτευση, διότι έχει μια αυτοδιατομή στο σημείο $(0, 0)$ (για $x = 2$ και $x = -2$).



(ii) Υπάρχουν τοπολογικοί χώροι, όπως π.χ. η λεγομένη *φιάλη τού Klein* (βλ. εδάφιο B.2.4 (v)) που δεν επιδέχονται *καμία εμφύτευση* εντός τού $\mathbb{R}^3$ (παρότι *είναι* εμφυτεύσιμοι στους ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 4$). Δειγματοληπτικώς αναφέρουμε ότι μέσω τής απεικονίσεως

$$f : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^5,\ (x, y) \longmapsto (\cos x, \cos 2y, \sin 2y, \sin x \cos y, \sin x \sin y)$$

επάγεται μια εμφύτευση τής φιάλης τού Klein εντός τού $\mathbb{R}^5$.

▸ Τέλος, προϋποτίθενται βασικές γνώσεις περί συνεκτικότητας (connectedness) τοπολογικών χώρων, συμπεριλαμβανομένων των εννοιών: *συνεκτικές συνιστώσες* και *τοπική συνεκτικότητα*.

[12]Όταν υπάρχει (τουλάχιστον) μία τέτοια εμφύτευση, τότε λέμε ότι ο X **είναι εμφυτεύσιμος εντός τού** Y.

B.1.10 Ορισμός. Ένας **δρόμος**[13] εντός ενός τοπολογικού χώρου X είναι μια συνεχής απεικόνιση $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow X$ (όπου $\mathbf{I} := [0,1]$). Τα $\alpha(0)$ και $\alpha(1)$ καλούνται **σημείο αρχής** και **σημείο απολήξεως** ενός δρόμου α, αντιστοίχως. (Επίσης, λέμε ότι ο α **συνδέει το** $\alpha(0)$ **με το** $\alpha(1)$.)

B.1.11 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος καλείται **δρομοσυνεκτικός** όταν δύο οιαδήποτε σημεία του είναι συνδέσιμα μέσω ενός δρόμου.

B.1.12 Θεώρημα. *Κάθε δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Έστω X τυχών δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος. Παγιώνουμε ένα σημείο $x_0 \in X$. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει δρόμος

$$\alpha_x : \mathbf{I} \longrightarrow X$$

με σημείο αρχής του το x_0 και σημείο λήξεώς του το x. Τα σύνολα $\alpha_x(\mathbf{I})$, $x \in X$, είναι συνεκτικά (ως συνεχείς εικόνες[14] τού συνεκτικού $\mathbf{I}$), το x_0 είναι κοινό σημείο τους και η ένωσή τους είναι όλος ο χώρος X. Άρα ο X είναι συνεκτικός[15]. $\square$

B.1.13 Σημείωση. Υπάρχει πληθώρα παραδειγμάτων συνεκτικών τοπολογικών χώρων (άλλων ολιγότερο και άλλων περισσότερο εξωτικών) που δεν είναι δρομοσυνεκτικοί. (Ίσως το γνωστότερο παράδειγμα να είναι εκείνο τής *κλειστής ημιτονοειδούς καμπύλης τού τοπολόγου*. Βλ. Munkres [41] σελ. 156-157.)

B.1.14 Παράδειγμα. Η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^d$ είναι δρομοσυνεκτική όταν $d \geqslant 1$. Πράγματι· θεωρούμε σημεία $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Εάν $\mathbf{x} \neq -\mathbf{y}$, τότε η απεικόνιση

$$\mathbf{I} \ni t \longmapsto f_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(t) := \frac{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}}{||(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}||} \in \mathbb{S}^d$$

είναι ένας δρόμος συνδέων το $\mathbf{x}$ με το $\mathbf{y}$. (Ο παρονομαστής μηδενίζεται μόνον όταν $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ και $t = \frac{1}{2}$). Εάν $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$, επιλέγουμε ένα $\mathbf{z} \in \mathbb{S}^d$ με $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$ και $\mathbf{z} \neq \mathbf{y}$. Τότε η απεικόνιση

$$\mathbf{I} \ni t \longmapsto g(t) := \begin{cases} f_{\mathbf{x},\mathbf{z}}(2t), & \text{όταν } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ f_{\mathbf{z},\mathbf{y}}(2t-1), & \text{όταν } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

είναι (και πάλι) ένας δρόμος συνδέων το $\mathbf{x}$ με το $\mathbf{y}$.

---

[13] Εν προκειμένω, προτιμάται η χρήση τής λέξεως *δρόμος* που αποδίδει τον αντίστοιχο γερμανικό όρο *Weg*. Κατ' αυτόν τον τρόπο έχουμε τη δυνατότητα δομήσεως τού όρου *δρομοσυνεκτικός* (*wegzusammenhängend* ή *wegweise zusammenhängend*) στο εδ. B.1.11. Αποφεύγεται η αντ' αυτού χρησιμοποίηση τού *κατά μονοπάτια συνεκτικός* (για την απόδοση τού αγγλικού όρου *path connected* ή *pathwise connected*) που θα ήταν μάλλον προβληματική (κυρίως λόγω τού *μακρόσυρτου* τής εν λόγω αποδόσεως).

[14] Η εικόνα ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου μέσω μιας συνεχούς απεικονίσεως είναι συνεκτική. Βλ., π.χ., [38], Chapter V, Theorem 1.4, σελ. 108, [40], Theorem 5.3, σελ. 68, [41], Chapter 3, Theorem 23.5, σελ. 150, ή [42], Πρόταση 7.5, σελ.113.

[15] Εάν η τομή των μελών μιας οικογενείας συνεκτικών υποσυνόλων ενός τοπολογικού χώρου είναι μη κενή, τότε η ένωσή τους αποτελεί ένα συνεκτικό υποσύνολο τού θεωρηθέντος τοπολογικού χώρου. Βλ., π.χ., [38], Chapter V, Theorem 1.5, σελ. 108, [40], Lemma 5.5, σελ. 69, [41], Chapter 3, Theorem 23.3, σελ. 150, ή [42], Πρόταση 7.6, σελ. 113-114.

B.1.15 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Επί τού X ορίζουμε τη διμελή σχέση $\underset{\text{δρ/συν.}}{\sim} \subseteq X \times X$ ως ακολούθως:

$$x_1 \underset{\text{δρ/συν.}}{\sim} x_2 \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\exists \text{ δρόμος εντός τού } X \text{ συνδέων το } x_1 \text{ με το } x_2].$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η “$\underset{\text{δρ/συν.}}{\sim}$” αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας. Οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την “$\underset{\text{δρ/συν.}}{\sim}$” καλούνται **δρομοσυνεκτικές συνιστώσες τού τοπολογικού χώρου** X.

B.1.16 Λήμμα. *Έστω $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια δρομοσυνεκτικών υποσυνόλων (τού υποκειμένου συνόλου) X ενός τοπολογικού χώρου. Εάν $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο τού X.*

Αποδειξη. Έστω τυχόν $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Εάν $y, z \in \bigcup_{i\in I} A_i$, τότε $y \in A_j$ και $z \in A_k$ για κάποιους δείκτες $j, k \in I$. Επειδή αμφότεροι οι A_j και A_k είναι (εξ υποθέσεως) δρομοσυνεκτικοί, υπάρχουν δρόμοι $\alpha_j : \mathbf{I} \longrightarrow A_j$ και $\alpha_k : \mathbf{I} \longrightarrow A_k$ με $\alpha_j(0) = y$, $\alpha_j(1) = x = \alpha_k(0)$, $\alpha_k(1) = z$. Ο δρόμος[16]

$$\mathbf{I} \ni t \longmapsto \beta_{j,k}(t) := \begin{cases} \alpha_j(2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \alpha_k(2t-1), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

εντός τής ενώσεως $\bigcup_{i\in I} A_i$ συνδέει το y με το z. □

B.1.17 Λήμμα. *Οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες ενός τοπολογικού χώρου X είναι ακριβώς τα μεγιστικά δρομοσυνεκτικά υποσύνολα τού X, ήτοι τα δρομοσυνεκτικά υποσύνολά του τα οποία δεν περιέχονται σε οιοδήποτε μεγαλύτερο δρομοσυνεκτικό υποσύνολο.*

Αποδειξη. Εάν $x \in X$, C είναι η δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού X που περιέχει το x και $B := \bigcup \{E \subseteq X \,|\, E \text{ δρομοσυνεκτικό και } x \in E\}$, τότε το B είναι αφ' εαυτού δρομοσυνεκτικό (λόγω τού λήμματος B.1.16) και, ως εκ τούτου, ένα μεγιστικό δρομοσυνεκτικό υποσύνολο τού X. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $B = C$. Εάν $y \in B$, τότε αμφότερα τα x, y ανήκουν στο δρομοσυνεκτικό υποσύνολο B, οπότε $y \underset{\text{δρ/συν.}}{\sim} x \Rightarrow y \in C$. Επομένως, $B \subseteq C$. Και αντιστρόφως· εάν $y \in C$, τότε $y \underset{\text{δρ/συν.}}{\sim} x$ και το y ανήκει σε κάποιο δρομοσυνεκτικό υποσύνολο τού X που περιέχει το x. Άρα $y \in B$ και ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $C \subseteq B$. □

B.1.18 Πρόταση. *Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*
(i) *Κάθε δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού X περιέχεται σε μία (και μόνον) συνεκτική συνιστώσα τού X και κάθε συνεκτική συνιστώσα τού X είναι μια αποσυνδετή ένωση*

[16] Επειδή οι περιορισμοί $\beta_{j,k}|_{[0,\frac{1}{2}]}$ και $\beta_{j,k}|_{[\frac{1}{2},1]}$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, η απεικόνιση $\beta_{j,k}$ είναι καθ' ολοκληρίαν (ήτοι επί ολοκλήρου τού $\mathbf{I}$) συνεχής επί τη βάσει τού *λήμματος τής συγκολλήσεως* (gluing lemma). Βλ. Dugundji [38], Chapter III, Theorem 9.4, σελ. 83, και Munkres [41], Chapter 2, Theorem 18.3, σελ. 108-109.

(κάποιων) δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του.

(ii) *Εάν $A \subseteq X$ είναι δρομοσυνεκτικό υποσύνολο, τότε το A περιέχεται σε μία (και μόνον) δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού X.*

Απόδειξη. (i) Έστω A μια δρομοσυνεκτική συνιστώσα τού X. Τότε η A είναι συνεκτικό σύνολο τού X, οπότε περιέχεται σε μία και μόνον συνεκτική συνιστώσα τού X. Εξάλλου, επειδή η "$\underset{\text{δρ/συν.}}{\sim}$" είναι σχέση ισοδυναμίας, οι δρομοσυνεκτικές συνιστώσες τού X τον διαμελίζουν, ήτοι $X = \coprod_{j\in J} A_j$, όπου $\{A_j | j \in J\}$ είναι η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών τού X. Έστω C τυχούσα συνεκτική συνιστώσα τού X. Τότε $C = \coprod_{j\in J} A_j \cap C$ (διότι τα $A_j \cap C$ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους).

(ii) Έστω A ένα δρομοσυνεκτικό υποσύνολο τού X. Επειδή η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών τού X αποτελεί ένα κάλυμμα αυτού, υπάρχει κάποια δρομοσυνεκτική συνιστώσα B με $B \cap A \neq \varnothing$. Σύμφωνα με το λήμμα B.1.16, η ένωση $B \cup A$ είναι δρομοσυνεκτική. Σύμφωνα με το λήμμα B.1.17, το B είναι ένα μεγιστικό δρομοσυνεκτικό υποσύνολο τού X, οπότε $B \subseteq B \cup A \Rightarrow B = B \cup A \Rightarrow A \subseteq B$. □

B.1.19 Πρόταση. *Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής, επιρριπτική απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων και ο X δρομοσυνεκτικός, τότε και ο Y είναι δρομοσυνεκτικός.*

Απόδειξη. Έστω ότι $y_1, y_2 \in Y$. Προφανώς, $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, για κάποια $x_1, x_2 \in X$ (αφού η f είναι επιρριπτική). Επειδή ο X είναι δρομοσυνεκτικός, υπάρχει δρόμος $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow X$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\alpha(0) = x_1$ και $\alpha(1) = x_2$. Η σύνθεση $f \circ \alpha : \mathbf{I} \longrightarrow Y$ είναι τέτοιος δρόμος, ώστε να ισχύει $f \circ \alpha(0) = y_1$ και $f \circ \alpha(1) = y_2$. Κατά συνέπειαν, ο Y είναι δρομοσυνεκτικός. □

B.1.20 Παρατήρηση. Είναι πρόδηλο μέσω τής προτάσεως B.1.19 ότι η ιδιότητα τού να είναι ένας τοπολογικός χώρος *δρομοσυνεκτικός* είναι *τοπολογική*. (Εάν X είναι δρομοσυνεκτικός και $X \approx Y$, τότε ο Y είναι ωσαύτως δρομοσυνεκτικός.)

B.2 ΠΗΛΙΚΟΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΤΑΥΤΙΣΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

B.2.1 Ορισμός. Έστω $(X, \mathscr{T})$ ένας τοπολογικός χώρος[17] και έστω $\mathfrak{R} \subseteq X \times X$ μια σχέση ισοδυναμίας. Θεωρούμε τη φυσική επίρριψη

$$p : X \longrightarrow X/\mathfrak{R},\ x \longmapsto p(x) := [x]_{\mathfrak{R}},$$

όπου $[x]_{\mathfrak{R}} := \{y \in X \,|\, (x,y) \in \mathfrak{R}\}$ είναι η κλάση ισοδυναμίας τού x ως προς την $\mathfrak{R}$ και $X/\mathfrak{R} := \{[x]_{\mathfrak{R}} \,|\, x \in X\}$. Μέσω αυτής δημιουργείται ο **πηλικόχωρος** $(X/\mathfrak{R}, \mathscr{T}_{\mathfrak{R}})$, όπου η **πηλικοτοπολογία** $\mathscr{T}_{\mathfrak{R}}$ ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{U \in \mathscr{T}_{\mathfrak{R}} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} p^{-1}(U) \in \mathscr{T}.}$$

B.2.2 Παρατήρηση. (i) Η p είναι συνεχής.

(ii) Η p είναι ανοικτή (και αντιστοίχως, κλειστή) εάν και μόνον εάν το σύνολο

$$p^{-1}(p(A)) = \{x \in X \,|\, [x]_{\mathfrak{R}} = [a]_{\mathfrak{R}}, \text{ για κάποιο } a \in A\}$$

είναι ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό) για κάθε ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό) υποσύνολο $A \subseteq X$.

(iii) Συνήθως λέμε ότι ο X προκύπτει *κατόπιν συγκολλήσεως* των $\mathfrak{R}$-ισοδυνάμων στοιχείων τού X. Είθισται μια τέτοια $\mathfrak{R}$ να περιγράφεται μέσω *συστημάτων σχέσεων* (ενώ για τα υπόλοιπα $(x, y) \in \mathfrak{R}$ να υπονοείται ότι $[x]_{\mathfrak{R}} \neq [y]_{\mathfrak{R}}$).

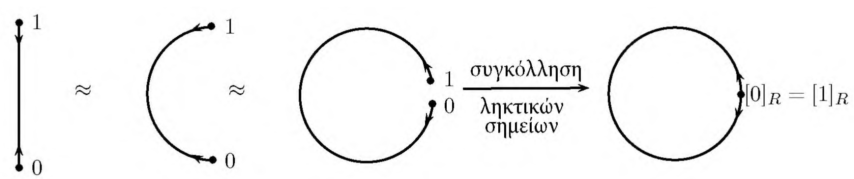
(iv) Εάν $A \subseteq X$ και εάν το $p^{-1}(p(A))$ είναι είτε ανοικτό είτε κλειστό, τότε η σχετική τοπολογία επί τού $p(A)$ ταυτίζεται με την πηλικοτοπολογία επί τού $p^{-1}(p(A))/\mathfrak{R}$.

B.2.3 Σημείωση. Κατά την παράθεση συγκεκριμένων παραδειγμάτων πηλικόχωρων άλλοτε ορίζεται διεξοδικώς η σχέση ισοδυναμίας $\mathfrak{R} \subseteq X \times X$ και άλλοτε δίδεται κάποιος *διαμελισμός*[18] $\mathfrak{Z}$ τού X και γίνεται μετάβαση στην αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας[19] $\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}} \subseteq X \times X$.

B.2.4 Παραδείγματα. (i) Εάν επί τού $X = \mathbf{I}\,(:= [0, 1])$ ορισθεί η σχέση ισοδυναμίας $\mathfrak{R} \subseteq X \times X$ ως εξής:

$$(x_1, x_2) \in \mathfrak{R} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\text{είτε } x_1 = x_2 \text{ είτε } \{x_1, x_2\} = \{0, 1\}],$$

τότε $X/\mathfrak{R} = \{[0]_{\mathfrak{R}}\} \coprod \{[t]_{\mathfrak{R}} : 0 < t < 1\}$. (Βλ. σχήμα.)



Η $f : X/\mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1 (\subsetneqq \mathbb{C})$, $[t]_{\mathfrak{R}} \longmapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$, είναι ομοιομορφισμός[20].

(ii) Επί τού $X = \mathbf{I}^2 = \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας $\mathfrak{R}$ ως εξής:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathfrak{R} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c} \text{είτε } [x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2] \\ \text{είτε } [x_1 = x_2 \text{ και } \{y_1, y_2\} = \{0, 1\}] \end{array}\right].$$

[17] Οι τοπολογικοί χώροι συμβολίζονται ως επί το πλείστον με κεφαλαία λατινικά γράμματα. Όταν συμβεί (όπως εδώ) να συμβολίζονται ως ζεύγος $(X, \mathscr{T})$, τότε το $\mathscr{T}$ θα είναι το σύνολο όλων των ανοικτών τους συνόλων (ήτοι η τοπολογία τους).

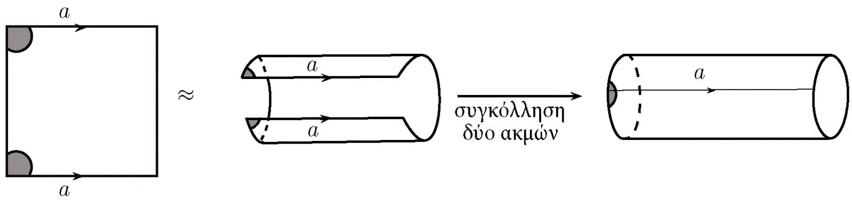
[18] Ένα υποσύνολο $\mathfrak{Z}$ τού δυναμοσυνόλου $\mathfrak{P}(X)$ τού X ονομάζεται **διαμελισμός τού** X όταν πληρούνται οι ακόλουθες συνθήκες: (i) $B \neq \varnothing$, $\forall B \in \mathfrak{Z}$, (ii) Για $B, B' \in \mathfrak{Z}$ ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή $B \cap B' \neq \varnothing \Leftrightarrow B = B'$, και (iii) $X = \bigcup\{B \mid B \in \mathfrak{Z}\}$.

[19] Κάθε διαμελισμός $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ τού X καθορίζει μια σχέση ισοδυναμίας $\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}} \subseteq X \times X$ επί τού X ως ακολούθως:

$$(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} [\exists B \in \mathfrak{Z} : \text{αμφότερα τα } x_1 \text{ και } x_2 \text{ ανήκουν στο } B].$$

[20] Περιοχές των $0, 1 \in \mathbf{I}$ συντίθενται για να δομήσουν μια περιοχή τού $f([0]_{\mathfrak{R}}) = f([1]_{\mathfrak{R}})$.

Η απεικόνιση $f : \mathbf{I}^2/\mathfrak{R} \longrightarrow \mathbf{I} \times \mathbb{S}^1$, $[(s,t)]_{\mathfrak{R}} \mapsto (s, \exp(2\pi\sqrt{-1}t))$ είναι ομοιομορφισμός μεταξύ τού $\mathbf{I}^2/\mathfrak{R}$ και τού **κυλίνδρου** $\mathbf{I} \times \mathbb{S}^1$ τού δημιουργούμενου ύστερα από τη συγκόλληση τής άνω και τής κάτω ακμής τού (μοναδιαίου) τετραγώνου $\mathbf{I}^2$.



(iii) Επί τού $X = \mathbf{I}^2$ ορίζεται και άλλη μία σχέση ισοδυναμίας $\mathfrak{R}'$ ως εξής:

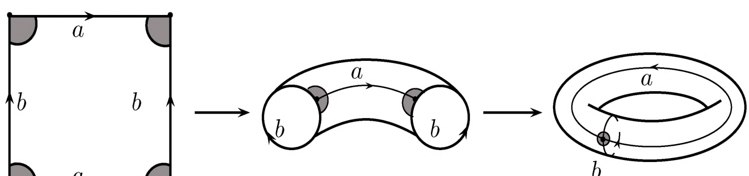
$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \in \mathfrak{R}' \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \text{είτε } [x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2] \\ \text{είτε } [x_1 = x_2 \text{ και } \{y_1,y_2\} = \{0,1\}] \\ \text{είτε } [\{x_1,x_2\} = \{0,1\} \text{ και } y_1 = y_2] \end{bmatrix}.$$

Εν προκειμένω, συγκολλούμε την άνω με την κάτω ακμή και κατόπιν τη δεξιά με την αριστερή ακμή τού $\mathbf{I}^2$. Μέσω τού ομοιομορφισμού

$$f : \mathbf{I}^2/\mathfrak{R}' \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \ [(s,t)]_{\mathfrak{R}'} \mapsto (\exp(2\pi\sqrt{-1}s), \exp(2\pi\sqrt{-1}t)),$$

διαπιστώνουμε ότι ο πηλικόχωρος $\mathbf{I}^2/\mathfrak{R}'$ είναι ομοιομορφικός τού (διδιάστατου, μοναδιαίου[21]) **τόρου**[22]

$$\boxed{\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.}$$



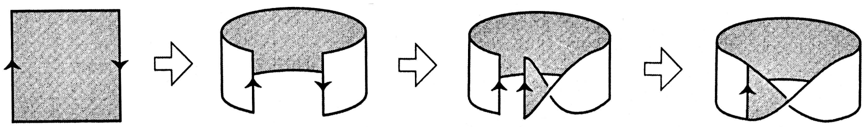
(iv) Έστω $X/\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}$ ο πηλικόχωρος που δημιουργείται μέσω τού διαμελισμού

$$\mathfrak{Z} := \{\{\{(x,y)\} \,|\, 0 < x < 1, y \in \mathbf{I}\}, \{\{(0,y),(1,1-y)\} \,|\, y \in \mathbf{I}\}\}$$

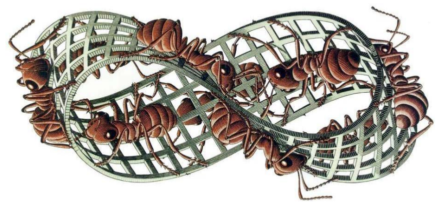
τού $X = \mathbf{I}^2$ ο περιγραφόμενος στο κάτωθι σχήμα.

[21] Από τούδε και στο εξής, *κάθε* τοπολογικός χώρος που είναι $\approx \mathbb{T}^2$ θα καλείται **τόρος**.

[22] Η λέξη *τόρος* (*torus*), έχει τις ΙΕ ρίζες **tere/*τέρ-jω*, εξ ου και τα αρχαιοελληνικά ρήματα *τετραίνω* και *τείρω*, απ' όπου παράγονται πάμπολλες λέξεις *και* των νέων Ελληνικών (όπως, π.χ., οι: *διάτορος*, *διάτρητος*, *τρυπώ*, *τρύπα*, *τρυπάνι* (αρχ. *τέρετρον*), *τόρνος*, *τερηδόνα* κ.ά.). Υπό την τεχνική της έννοια (*τορεύς*, *τορευτική*) μαρτυρείται ήδη σε ελευσίνιες και άλλες αττικές επιγραφές τού 5ου αιώνα π.Χ.



Κάθε τοπολογικός χώρος που είναι ομοιομορφικός αυτού καλείται **ταινία τού Möbius**[23]. Οι παράξενες ιδιότητες των (τόσο εύκολα κατασκευαζόμενων) ταινιών τού Möbius (μόνον μία ακμή, μόνον μία πλευρά, αδυναμία προσανατολισμού) καταπλήσσουν όσους τις συναντούν για πρώτη φορά. Μάλιστα, αντίγραφα τής εικόνας των «εγκάθειρκτων μυρμηγκιών» σε μια τέτοια ταινία (από την πασίγνωστη ξυλογραφία τού M.C. Escher[24] τού έτους 1963) κοσμούν ακόμη και σήμερα πολλά φοιτητικά δωμάτια.



(v) Έστω $X/\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}'}$ ο πηλικόχωρος που δημιουργείται μέσω τού διαμελισμού

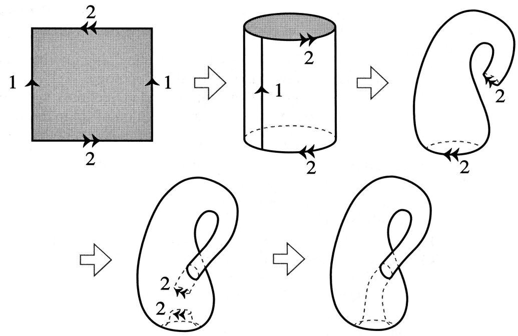
$$\mathfrak{Z}' := \{\{\{(x,y)\}| \, x,y \in (0,1)\}\,, \{\{(x,0),(1-x,1)\}| \, x \in \mathbf{I}\}\,, \{\{(0,y),(1,y)\}| \, y \in \mathbf{I}\}\}$$

τού $X = \mathbf{I}^2$. Κάθε τοπολογικός χώρος που είναι ομοιομορφικός αυτού καλείται **φιάλη τού Klein**[25], δεν είναι (τοπολογικώς) εμφυτεύσιμος εντός τού τριδιάστατου ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ (πρβλ. B.1.9 (ii)) και για να καταστεί εφικτή μια κάποια οπτικοποίησή του εντός τού $\mathbb{R}^3$ είναι αναγκαίο να επιτραπεί η συμπερίληψη *αυτοδιατομών*.

[23] Möbius, *August Ferdinand* (17/11/1790-26/9/1868). Γερμανός αστρονόμος και μαθηματικός. Ύστερα από συστάσεις τού C.F. Gauss εξελέγη έκτακτος καθηγητής στο Αστρονομικό Τμήμα τού Πανεπιστημίου τής Λειψίας το 1816. Υπήρξε για δεκαετίες ένας άψογος παιδαγωγός και το σύγγραμμά του περί τού «Βαρυκεντρικού Λογισμού» παρέμεινε ένα απαραίτητο βοήθημα για πολλές γενεές φοιτητών και μετά τον θάνατό του. Η διεξοδική μελέτη τών ιδιοτήτων τής «ταινίας» του έλαβε χώρα γύρω στο 1858 (ενώ την ίδια περίπου εποχή αυτές είχαν ανεξαρτήτως διερευνηθεί και από τον J.B. Listing), παρότι δημοσίευσε τα αποτελέσματά του μόλις το 1865. Το 1844 έγινε τακτικός καθηγητής τού Πανεπιστημίου και το 1848 διευθυντής τού Αστεροσκοπείου τής Λειψίας. Για πιο λεπτομερή βιογραφικά στοιχεία βλ. J. Fauvel, R. Flood & R. Wilson (Eds.), *Möbius and his band*, Oxford University Press, 1993.

[24] Escher, *Maurits Cornelis* (17/6/1898-27/3/1972). Ολλανδός εικαστικός καλλιτέχνης. Διέπρεψε στο σχέδιο και στη γραφιστική, καθώς και στις τεχνικές τής ξυλογραφίας, τής λιθογραφίας και τής χαλκογραφίας. Χαρακτηριστικό στοιχείο τής τέχνης του υπήρξε η απεικόνιση «αδύνατων» γραφικών παραστάσεων (ανθρώπων, ζώων, αντικειμένων κ.ά.) που δημιουργούν την *ψευδαίσθηση τού απείρου*, δηλαδή τής ατελείωτης δημιουργίας σχεδίων, καθώς και «αδύνατων» παραδοξολογικών κατασκευών (κτήρια κ.ά.). Αυτή η ιδιαιτερότητα των σχεδίων του οφείλετο στη σημαντική επιρροή που δέχθηκε από τα Μαθηματικά, κυρίως δε από προτάσεις και πορίσματα τής Μη Ευκλείδειας και τής Προβολικής Γεωμετρίας. Βλ. D. Schattschneider & M. Emmer (Eds.): *M.C. Escher's Legacy. A Centennial Celebration*, Springer-Verlag, 2003.

[25] Klein, *Christian Felix* (24/4/1849-22/6/1925). Γερμανός μαθηματικός. Ένας από τους μεγαλύτερους γεωμέτρες τού 19ου αιώνα, με πληθώρα σπουδαίων εργασιών και συγγραμμάτων σε διαφόρους μαθηματικούς κλάδους. Διετέλεσε καθηγητής των Πανεπιστημίων Erlangen (1872-1875), TH-Μονάχου (1875-1880), Λειψίας (1880-1886) και Göttingen (1886-1913). Βλ. R. Tobies: *Felix Klein*, Teubner, Leibniz, 1981. Οι ιδιότητες τής «φιάλης» του περιγράφονται ανάγλυφα στη σελίδα 571 τού τρίτου τόμου των «έργων» του [Gesammelte Mathematische Abhandlungen III, Springer, 1922].



Όπως δείχνεται στο άνωθι σχήμα, για να κτισθεί η κατά τι «παράδοξη φιάλη» (ως «πρότυπο» τού $X/\mathfrak{R}_3$, εντός τού $\mathbb{R}^3$), το πρώτο ήμισυ τής κατασκευής (όσον αφορά στην κατασκευή τού κυλίνδρου) παραμένει όπως στο παράδειγμα (ii), αλλά εν συνεχεία τα άκρα τού κυλίνδρου πρέπει να ταυτισθούν στην *αντίθετη* κατεύθυνση. Για να συμβεί αυτό ο κύλινδρος οφείλει να καμφθεί και το ένα άκρο του να ωθηθεί *διαπερνώντας* την πλευρά[26].

A. F. Möbius

F. Klein

B.2.5 Πρόταση. *Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων, η $\mathfrak{R}$ (και αντιστοίχως, η $\mathfrak{S}$) μια σχέση ισοδυναμίας επί τού X (και αντιστοίχως, μια σχέση ισοδυναμίας επί τού Y) και η f είναι συμβατή με τις $\mathfrak{R}$ και $\mathfrak{S}$, δηλαδή για $x, x' \in X$ ισχύει η συνεπαγωγή*

$$[x]_{\mathfrak{R}} = [x']_{\mathfrak{R}} \Longrightarrow [f(x)]_{\mathfrak{S}} = [f(x')]_{\mathfrak{S}}, \tag{B.2}$$

τότε ορίζεται καλώς η απεικόνιση

$$\bar{f} : X/\mathfrak{R} \longrightarrow Y/\mathfrak{S}, \ \ [x]_{\mathfrak{R}} \longmapsto \bar{f}([x]_{\mathfrak{R}}) := [f(x)]_{\mathfrak{S}},$$

η οποία είναι συνεχής.

Απόδειξη. Εάν $p_X : X \longrightarrow X/\mathfrak{R}$ και $p_Y : Y \longrightarrow Y/\mathfrak{S}$ είναι οι φυσικές επιρρίψεις,

[26] Για μια κινηματογραφική αναπαράσταση τού τρόπου δομήσεως μιας φιάλης τού Klein εντός τού $\mathbb{R}^3$ (διά χειρός Jos Leys) βλ. στη διαδικτυακή διεύθυνση: https://www.youtube.com/watch?v=yaeyNjUPVqs.

τότε η $\bar{f}$ είναι καλώς ορισμένη λόγω τής (B.2) και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$(p_Y \circ f)(x) = p_Y(f(x)) = [f(x)]_{\mathfrak{S}} = \bar{f}([x]_{\mathfrak{R}}) = \bar{f}(p_X(x)) = (\bar{f} \circ p_X)(x),$$

απ' όπου προκύπτει η μεταθετικότητα τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y \arrow[d, "p_Y"] \\ X/\mathfrak{R} \arrow[r, "\bar{f}"'] & Y/\mathfrak{S} \end{tikzcd}$$

Επειδή η $p_Y \circ f$ είναι συνεχής (ως σύνθεση συνεχών) και $p_Y \circ f = \bar{f} \circ p_X$, εάν U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο τού $Y/\mathfrak{S}$, τότε το $(\bar{f} \circ p_X)^{-1}(U) = {p_X}^{-1}(\bar{f}^{-1}(U))$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού X, οπότε το $\bar{f}^{-1}(U)$ ανοικτό υποσύνολο τού $X/\mathfrak{R}$. Άρα η $\bar{f}$ είναι συνεχής. □

B.2.6 Πόρισμα. *Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων, η $\mathfrak{R}$ μια σχέση ισοδυναμίας επί τού X και ισχύει η συνεπαγωγή $[x]_{\mathfrak{R}} = [x']_{\mathfrak{R}} \Rightarrow f(x) = f(x')$, τότε η*

$$\bar{f} : X/\mathfrak{R} \longrightarrow Y, \ \ [x]_{\mathfrak{R}} \longmapsto \bar{f}([x]_{\mathfrak{R}}) := f(x), \tag{B.3}$$

είναι συνεχής.

B.2.7 Ορισμός. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια συνεχής και επιρριπτική απεικόνιση μεταξύ (των υποκειμένων συνόλων) δυο τοπολογικών χώρων. Επί τού X ορίζεται η σχέση ισοδυναμίας $\mathfrak{R}_f$ ως εξής:

$$(x, x') \in \mathfrak{R}_f \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} f(x) = f(x').$$

Η f ονομάζεται **ταυτισμική απεικόνιση** όταν ισχύει μία (και, κατ' επέκταση, και οι τρεις) εκ των κάτωθι ισοδυνάμων συνθηκών:

(i) Η $\bar{f} : X/\mathfrak{R}_f \longrightarrow Y$ (όπως στην (B.3)) είναι ομοιομορφισμός.

(ii) Ένα $A \subseteq Y$ είναι ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό) $\Leftrightarrow$ το $f^{-1}(A) \subseteq X$ είναι ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό).

(iii) Μια απεικόνιση $g : Y \longrightarrow Z$, όπου Z τυχών τοπολογικός χώρος, είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ η σύνθεση $g \circ f : X \longrightarrow Z$ είναι συνεχής.

Εν τοιαύτη περιπτώσει, η τοπολογία επί τού Y είναι *μονοσημάντως ορισμένη* μέσω τής f και τής τοπολογίας επί τού X και καλείται **ταυτισμική τοπολογία ως προς την** f.

B.2.8 Παράδειγμα. Εάν $X = \mathbb{R}$ (με τη συνήθη τοπολογία), $Y = [0, +\infty)$ και εάν θέσουμε $f(x) := x^2$, τότε η ταυτισμική τοπολογία επί τού Y ως προς την f είναι ακριβώς η σχετική τοπολογία.

B.2.9 Πρόταση. (i) *Κάθε συνεχής, επιρριπτική και ανοικτή (και αντιστοίχως, κλειστή) απεικόνιση μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων είναι ταυτισμική.*

(ii) *Κάθε συνεχής, επιρριπτική απεικόνιση από έναν συμπαγή τοπολογικό χώρο επί ενός χώρου Hausdorff είναι κλειστή και, κατ' επέκταση, ταυτισμική απεικόνιση.*

(iii) *Εάν η $f : X \longrightarrow Y$ είναι ταυτισμική και η $g : Y \longrightarrow Z$ συνεχής, τότε η $g \circ f$ είναι ταυτισμική $\Leftrightarrow$ η g είναι ταυτισμική.*

(iv) *Εάν η $f : X \longrightarrow Y$ είναι ταυτισμική, το $B \subseteq Y$ ανοικτό (και αντιστοίχως, κλειστό) και $A := f^{-1}(B)$, τότε και η $f|_A : A \longrightarrow B$ είναι ταυτισμική.*

Εν συνεχεία παρατίθενται διάφοροι μέθοδοι κατασκευής *πηλικόχωρων*.

B.2.10 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, A ένα υποσύνολο τού X και $D_X := \{(x,x) \,|\, x \in X\}$ η διαγώνιος τού X. Επί τού X ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}_A \underset{\text{ορσ.}}{\iff} [\text{είτε } x_1 = x_2 \text{ είτε } x_1, x_2 \in A]$, ήτοι

$$\mathfrak{R}_A := D_X \cup (A \times A).$$

Λέμε ότι ο

$$\boxed{X/A := X/\mathfrak{R}_A}$$

είναι **ο πηλικόχωρος ο δημιουργούμενος ύστερα από την ταύτιση όλων των σημείων τού** A (ή **ύστερα από συρρίκνωση τού** A **σε ένα και μόνον σημείο**).

B.2.11 Παραδείγματα. (i) Εάν ορίσουμε την απεικόνιση

$$\ell_d : \mathbb{B}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$$

$$\ell_d(tx) := (\cos(\pi(1-t)), x_1 \sin(\pi(1-t)), ..., x_d \sin(\pi(1-t)))$$

για κάθε $t \in \mathbf{I}$ και κάθε $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{S}^{d-1}$ (ταυτίζοντας τη μπάλα $\mathbb{B}^d$ με την ένωση $\bigcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^{d-1}} \{t\mathbf{x} \,|\, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$), τότε η ℓ_d είναι συνεχής με

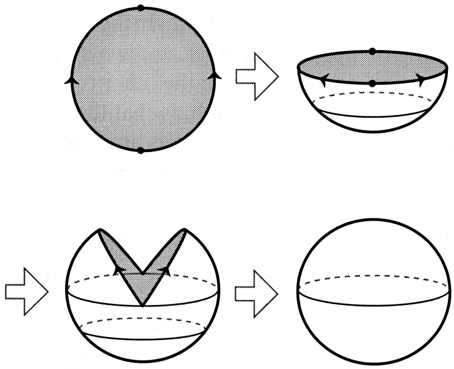
$$\ell_d(\mathbb{S}^{d-1}) = \{P_+\},$$

ενώ η επαγομένη απεικόνιση (B.3)

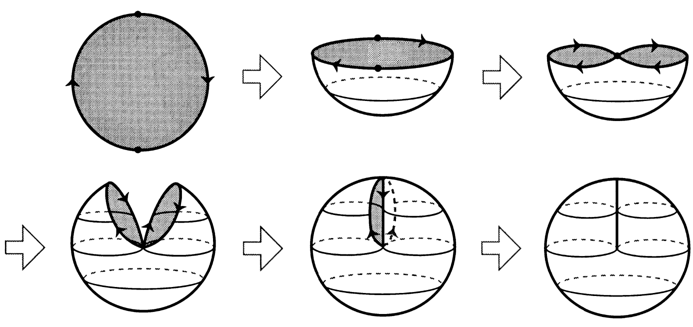
$$\overline{\ell_d} : \mathbb{B}^d/\mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{S}^d$$

είναι ένας ομοιομορφισμός. Ο τρόπος τής σταδιακής ταυτίσεως των σημείων τού μοναδιαίου κύκλου $\mathbb{S}^1$ τού περιβάλλοντος τον δίσκο $\mathbb{B}^2$ (όταν $d = 2$) για την απόκτηση τής μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^2$ εικονογραφείται στο ακόλουθο σχήμα[27]:

[27] Η *ομοιότητα* με το κλείσιμο τού φερμουάρ ενός μικρού πορτοφολιού κερμάτων («ψιλών») είναι χαρακτηριστική.



Σημειωτέον ότι εάν κάποιος, αντί να συρρικνώσει όλα τα σημεία τού $\mathbb{S}^1$ στον βόρειο πόλο τής $\mathbb{S}^2$ (όπως στο ανωτέρω σχήμα), επιθυμεί να ταυτίσει (ανά δύο) τα *αντιδιαμετρικά* σημεία τού $\mathbb{S}^1$ (τηρώντας, π.χ., την ωρολογιακή φορά για την περιδιάβασή του), ήτοι να μεταβεί στον πηλικόχωρο $\mathbb{B}^2/\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}$ τον δημιουργούμενο μέσω τού διαμελισμού $\mathfrak{Z} := \left\{\left\{\{\mathbf{x}\} \mid \mathbf{x}\in\mathbb{B}^2\smallsetminus\mathbb{S}^1\right\}, \left\{\{\mathbf{x},-\mathbf{x}\} \mid \mathbf{x}\in\mathbb{S}^1\right\}\right\}$ τού μοναδιαίου δίσκου $\mathbb{B}^2$, τότε, όπως συμβαίνει και στην περίπτωση τής φιάλης τού Klein, προκειμένου να καταλήξει σε κάποια οπτικοποίηση τού $\mathbb{B}^2/\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}$ *εντός τού* $\mathbb{R}^3$, είναι αναγκασμένος να επιτρέψει *την ύπαρξη αυτοδιατομών* και, συγκεκριμένα, ένα ολόκληρο ευθύγραμμο τμήμα αυτοδιατομών, όπως δείχνεται στο επόμενο σχήμα.



Κάθε τοπολογικός χώρος που είναι ομοιομορφικός τού καταληκτικού (εξ όσων παρατίθενται στο σχήμα) καλείται **σταυρωτό διαπέτασμα**[28].

(ii) Εάν X είναι τυχών τοπολογικός χώρος και $\mathrm{cyl}(X) := X \times \mathbf{I}$ ο (μοναδιαίος) **κύλινδρος υπεράνω τού** X (εφοδιασμένος με την τοπολογία γινομένου), τότε ο **κώνος** $\mathrm{cone}(X)$ **υπεράνω τού** X ορίζεται ως ο πηλικόχωρος $\mathrm{cone}(X) := \mathrm{cyl}(X)/X \times \{1\}$. (Πρβλ. εδ. 7.3.5.) Σημειωτέον ότι η απεικόνιση

$$\mathrm{cone}(\mathbb{S}^n) \longrightarrow \mathbb{B}^{n+1}, \quad [(\mathbf{x},t)]_{\mathfrak{R}_{\mathbb{S}^n\times\{1\}}} \longmapsto (1-t)\mathbf{x},$$

αποτελεί έναν ομοιομορφισμό.

[28] Γερμανιστί *Kreuzhaube* ή *Kreuzkappe*, αγγλιστί *crosscap* και γαλλιστί *anse de deuxième espèce*. Για μια κινηματογραφική αναπαράσταση τού τρόπου δομήσεως ενός σταυρωτού διαπετάσματος εντός τού $\mathbb{R}^3$ (διά χειρός Jos Leys) βλ. στη διαδικτυακή διεύθυνση: https://www.youtube.com/watch?v=W-sKLN0VBkk

(iii) Εάν $(X_j, \mathscr{T}_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια τοπολογικών χώρων και

$$X := \coprod_{j\in J} X_j := \bigcup_{j\in J} X'_j \ \ (\text{με } X'_j := X_j \times \{j\})$$

η **αποσυνδετή ένωση** των μελών τής εν λόγω οικογενείας, τότε επί τού X ορίζεται η τοπολογία $\mathscr{T}$ η έχουσα ως βάση της το σύνολο

$$\mathscr{B} := \{U \times \{j\} \mid j \in J,\, U \in \mathscr{T}_j\}.$$

Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathscr{T})$ καλείται **τοπολογικό άθροισμα** των X_j, $j \in J$. Αντί τού X γράφουμε συνήθως $\sum_{j\in J} X_j$. (Όταν $J = \{1, 2\}$, γράφουμε απλώς $X_1 + X_2$.) Εάν $(X_j, \mathscr{T}_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια τοπολογικών χώρων και εάν παγιώσουμε στοιχεία $x_j^\circ \in X_j$ (θεωρώντας τα ως *σημεία αναφοράς* και τους X_j ως *εστιγμένους χώρους*, βλ. εδ. B.7.12) και υποθέσουμε ότι το μονοσύνολο $\{x_j^\circ\} \subseteq X_j$ είναι κλειστό για κάθε $j \in J$, όπως, π.χ., στην περίπτωση κατά την οποία ο X_j είναι Hausdorff, τότε ορίζουμε **τη μονοσημειακή ένωση των** X_j, $j \in J$, ως τον πηλικόχωρο

$$\boxed{\bigvee_{j\in J} X_j := \sum_{j\in J} X_j / A,}$$

όπου $A := \{x_j^\circ \mid j \in J\}$. (Όταν $J = \{1, ..., k\}$, γράφουμε απλώς $X_1 \vee ... \vee X_k$.) Για τη φυσική επίρριψη $\varpi_A : \sum_{j\in J} X_j \longrightarrow \bigvee_{j\in J} X_j$ με

$$\varpi_A(x_j^\circ) = x^\circ := \{[y]_{R_A} : y \in A\},\ \forall j \in J,$$

ισχύουν τα εξής:
(a) Ο περιορισμός $\varpi_A|_{X_j} : X_j \hookrightarrow \bigvee_{j\in J} X_j$ είναι μια (τοπολογική) εμφύτευση και ο $\bigvee_{j\in J} X_j$ είναι η ένωση των $\varpi_A(X_j) \approx X_j$ (με $\varpi_A(X_j) \cap \varpi_A(X_{j'}) = \{x^\circ\}$ για $j \neq j'$).
(b) Όταν $J = \{1, 2, ..., n\}$, τότε μέσω συνεχών απεικονίσεων

$$f_j : X_j \longrightarrow X'_j \ \text{ με } f_j(x_j^\circ) := {x'_j}^\circ,\ \forall j \in J,$$

επάγεται μια συνεχής απεικόνιση:

$$f_1 \vee f_2 \vee ... \vee f_n : X_1 \vee X_2 \vee ... \vee X_n \longrightarrow X'_1 \vee X'_2 \vee ... \vee X'_n,\ \ [x_j]_{\mathfrak{R}_A} \longmapsto [f_j(x_j)]_{\mathfrak{R}_{A'}}$$

ενώ μέσω συνεχών απεικονίσεων $g_j : X_j \longrightarrow Y$ με $g_j(x_j^\circ) = g_{j'}(x_{j'}^\circ)$ (για οιαδήποτε $j, j' \in J$) επάγεται μια συνεχής απεικόνιση:

$$(g_1, g_2, ..., g_n) : X_1 \vee X_2 \vee ... \vee X_n \longrightarrow Y,\ \ [x_j]_{\mathfrak{R}_A} \longmapsto g_j(x_j).$$

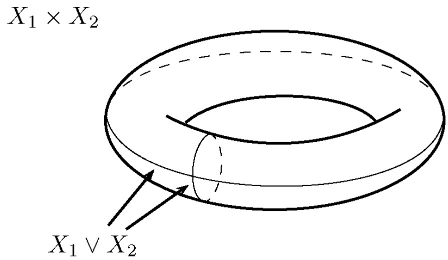
(c) Εάν ως $\iota_j : X_j \longrightarrow X_1 \times ... \times X_n$ συμβολίσουμε την ένθεση:

$$x_j \longmapsto (x_1^\circ, ..., x_{j-1}^\circ, x_j, x_{j+1}^\circ, ..., x_n^\circ),\ \forall j \in J,$$

τότε η εικόνα αυτής $\Lambda_j := \mathrm{Im}(\iota_j) = \{x_j^\circ\} \times ... \times \{x_{j-1}^\circ\} \times X_j \times \{x_{j+1}^\circ\} \times ... \times \{x_n^\circ\}$, είναι ο j-οστός «άξονας των συντεταγμένων» (εντός τού $\prod_{j=1}^n X_j$). Εν προκειμένω, η απεικόνιση

$$\boxed{(\iota_1, ..., \iota_n) : \bigvee_{j=1}^n X_j \longrightarrow \prod_{j=1}^n X_j}$$

στέλνει τον τοπολογικό χώρο $\bigvee_{j=1}^{n} X_j$ να απεικονισθεί ομοιομορφικώς επί τής ενώσεως $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \cup \Lambda_n$ των «αξόνων συντεταγμένων». (Βλ. το κάτωθι σχήμα στην περίπτωση όπου $n = 2$ και $X_1 = X_2 = \mathbb{S}^1$.)



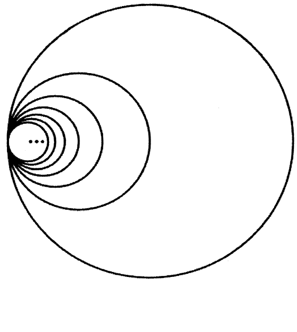
Προσοχή! Τούτο δεν είναι αληθές για *απειροπληθή* σύνολα δεικτών J! Ας θεωρήσουμε, επί παραδείγματι, τη μονοσημειακή ένωση

$$X := \mathbb{S}_1^1 \vee \mathbb{S}_2^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_j^1 \vee \mathbb{S}_{j+1}^1 \vee \cdots \subsetneqq \mathbb{R}^2$$

απείρων (αριθμήσιμων) σφαιρών $\mathbb{S}_j^1 \approx \mathbb{S}^1$, όπου $x_j^\circ = 1$, $\forall j \in \mathbb{N}\,(=: J)$. Οι περιοχές τού $x^\circ \in X$ είναι τής μορφής $U_1 \cup U_2 \cup \ldots$, όπου (δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι) οι U_j είναι κύκλοι περί το 1 εντός τής $\mathbb{S}_j^1$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Ιδιαιτέρως, το $\{x^\circ\}$ δεν διαθέτει καμία συμπαγή περιοχή ούτε κάποια αριθμήσιμη βάση περιοχών. Άρα ο X δεν είναι ούτε τοπικώς συμπαγής ούτε μετρικοποιήσιμος. Αντιθέτως ο $\prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{S}_j^1$ είναι ένας συμπαγής[29] μετρικός χώρος, κάτι που σημαίνει ότι ο *X δεν μπορεί να εμφυτευθεί εντός τού $\prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{S}_j^1$*. Προφανώς, ο X (που θα μπορούσε να εκληφθεί ως το περίγραμμα μιας ροζέτας με *απείρου πλήθους* φύλλα), παρότι ομοιάζει, *δεν είναι ομοιομορφικός* τού υπόχωρου

$$\mathrm{HE} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n,\ C_n := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\} \approx \mathbb{S}^1,$$

τού $\mathbb{R}^2$ (τού επομένου σχήματος) που καλείται **χαβανέζικο σκουλαρίκι**[30], διότι



[29] Συμπαγής λόγω τού θεωρήματος τού Tychonoff. (Βλ., π.χ., [41], Theorem 37.3, σελ. 234-235.)

[30] Αγγλιστί *Hawaiian earring*.

ο HE είναι (λόγω τού θεωρήματος των Heine και Borel) *συμπαγής* υπόχωρος τού $\mathbb{R}^2$ (αφού είναι φραγμένος και μπορεί να εκφρασθεί ως τομή κλειστών υποσυνόλων[31] τού $\mathbb{R}^2$).

▸ **Προσαρτήσεις χώρων.** Μια πιο γενικευμένη μέθοδος κατασκευής πηλικόχωρου περιλαμβάνει τη λεγομένη *διαδικασία προσαρτήσεως* ή *συγκολλήσεως χώρων*.

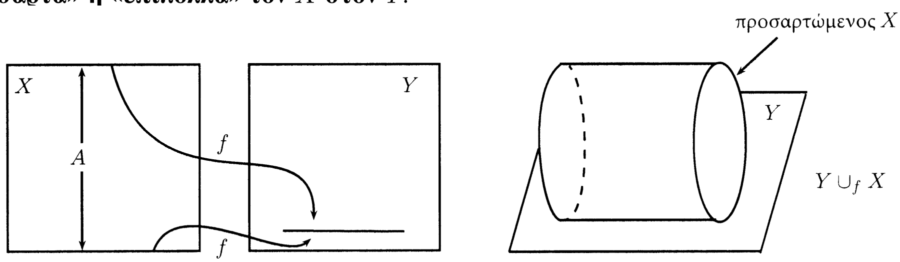
B.2.12 Ορισμός. Ας υποθέσουμε ότι δίδονται δυο τοπολογικοί χώροι X και Y, ένας κλειστός υπόχωρος $A \subseteq X$, καθώς και μια συνεχής απεικόνιση $f : A \longrightarrow Y$. Επί τού τοπολογικού αθροίσματος $X + Y$ ορίζεται μια *σχέση ισοδυναμίας* $\mathfrak{R}_{A,f}$ ως ακολούθως:

$$(w, z) \in \mathfrak{R}_{A,f} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{ll} \text{είτε } w \notin A \cup f(A) & \text{και } w = z, \\ \text{είτε } w, z \in A & \text{και } f(w) = f(z), \\ \text{είτε } w \in A, z \in f(A) & \text{και } f(w) = z, \\ \text{είτε } z \in A, w \in f(A) & \text{και } w = f(z). \end{array} \right\}$$

(Ειδικότερα, μέσω τής $\mathfrak{R}_{A,f}$ επέρχεται *ταύτιση των* $a, a' \in A$ *όταν* $f(a) = f(a')$. Ωστόσο, οιαδήποτε σαφώς διακεκριμένα σημεία τού Y παραμένουν αμετάβλητα, ήτοι *δεν ταυτίζονται μεταξύ τους* μέσω αυτής.) Λέμε ότι ο

$$\boxed{Y \cup_f X := (X + Y)\,/\mathfrak{R}_{A,f}}$$

είναι **ο πηλικόχωρος ο δημιουργούμενος μέσω τής απεικονίσεως** f, **η οποία «προσαρτά» ή «επικολλά» τον** X **στον** Y.



B.2.13 Σημείωση. Από όσα προαναφέρθησαν στο εδ. B.2.2 (iv) προκύπτουν για τη φυσική επίρριψη $p : X + Y \longrightarrow Y \cup_f X$ τα ακόλουθα:

(i) Ο περιορισμός $p|_Y : Y \longrightarrow Y \cup_f X$ αποτελεί μια (τοπολογική) εμφύτευση (οπότε κανείς μπορεί να εκλαμβάνει το $Y \approx p(Y)$ ως κλειστό υπόχωρο τού $Y \cup_f X$.)

(ii) Ο περιορισμός $p|_X : X \longrightarrow Y \cup_f X$ απεικονίζει το $X \smallsetminus A$ ομοιομορφικώς επί τού $(Y \cup_f X) \smallsetminus Y$.

(iii) Λόγω των (i) και (ii) ο $Y \cup_f X$ απαρτίζεται από δύο τμήματα: Το πρώτο είναι

[31] Θέτοντας $H_n := B_n \cup (\bigcup_{i=1}^{n} C_i)$, όπου B_n συμβολίζει την κλειστή θήκη τού ανοικτού δίσκου κέντρου $(\frac{1}{n}, 0)$ και ακτίνας $\frac{1}{n}$, παρατηρούμε ότι το H_n (ως ένωση *πεπερασμένου πλήθους* κλειστών υποσυνόλων τού $\mathbb{R}^2$) είναι κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^2$ και ότι HE$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$.

ομοιομορφικό τού $X \smallsetminus A$ και το δεύτερο ομοιομορφικό τού Y. Το τι υφής είναι ο τοπολογικός χώρος $Y \cup_f X$ εκεί που τα δύο αυτά τμήματα συναντώνται *εξαρτάται από την απεικόνιση συγκολλήσεως* f.

B.2.14 Παρατήρηση. Αξίζει να επισημανθεί το ποιος είναι ο $Y \cup_f X$ σε τρεις *ειδικές περιπτώσεις*:

(i) Εάν $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y = \{\text{ένα σημείο}\}$, τότε $Y \cup_f X = X/A$. (Βλ. εδ. B.2.10.)

(ii) Εάν $X \supseteq A = \{\text{ένα σημείο}\} \xrightarrow{f} Y$, τότε $Y \cup_f X = X \vee Y$.

(iii) Εάν $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$ είναι τέτοια, ώστε να ισχύει $f(A) = \{\text{ένα σημείο}\}$, τότε έχουμε $Y \cup_f X = (X/A) \vee Y$.

Ένας τρόπος κατασκευής συνεχών απεικονίσεων επί τού $Y \cup_f X$ υποδεικνύεται από την εξής:

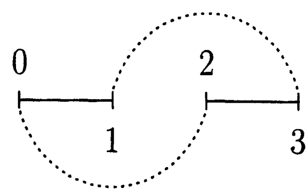
B.2.15 Πρόταση. *Ας υποθέσουμε ότι δίδονται τοπολογικοί χώροι* X, Y *και* Z, *ένας κλειστός υπόχωρος* $A \subseteq X$ *και συνεχείς απεικονίσεις*

$$X \supseteq A \xrightarrow{f} Y,\ \varphi : X \longrightarrow Z \text{ και } \psi : Y \longrightarrow Z \text{ με } \ \varphi|_A = \psi \circ f.$$

Εάν η $\varphi + \psi : X + Y \longrightarrow Z$ *είναι η απεικόνιση που ταυτίζεται με την* φ *επί τού* X *και με την* ψ *επί τού* Y, *τότε η σύνθεση*[32] $(\varphi + \psi) \circ p^{-1} : Y \cup_f X \longrightarrow Z$ *είναι καλώς ορισμένη και συνεχής.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το πόρισμα B.2.6. □

B.2.16 Παραδείγματα. (i) Εάν $X = A = \mathbf{I}$, $Y = [2,3]$ και $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, τότε $Y \cup_f X \approx \mathbb{S}^1$.



(ii) Εάν $X = \mathbb{B}^2 \supsetneqq \mathbb{S}^1 = A$ και $Y = \{(2,2)\}$ με $f(x,y) = (2,2)$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{B}^2$, τότε έχουμε $Y \cup_f X = X/A = \mathbb{B}^2/\mathbb{S}^1 \approx \mathbb{S}^2$. (Πρβλ. B.2.11.)

(iii) Εάν $X = \mathbf{I}^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbf{I}^2 \,|\, x \in \{0,1\}\}$, $Y = \mathbf{I}$ και $f : A \longrightarrow Y$ η απεικόνιση η οριζόμενη από τον τύπο

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) := \begin{cases} y, & \text{όταν } x = 0, \\ 1 - y, & \text{όταν } x = 1, \end{cases}$$

τότε ο $Y \cup_f X$ είναι μια ταινία τού Möbius.

[32] Για κάθε $w \in Y \cup_f X \ (= (X+Y)/\mathfrak{R}_{f,A})$ η ίνα $(\varphi + \psi)\,(p^{-1}(\{w\}))$ αποτελείται από ένα και μόνον σημείο. Αυτό ισούται με το $\overline{\varphi + \psi}(w)$ (όπως στην (B.3)).

▸ **Προσάρτηση κυττάρων.** Εδώ παρατίθεται μια *ειδική* αλλά πολύ σημαντική, από θεωρητικής πλευράς, κατασκευή πηλικόχωρων δημιουργούμενων μέσω συνεχών απεικονίσεων $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$ (που *προσαρτούν* τον X στον Y, βλ. εδ. B.2.12).

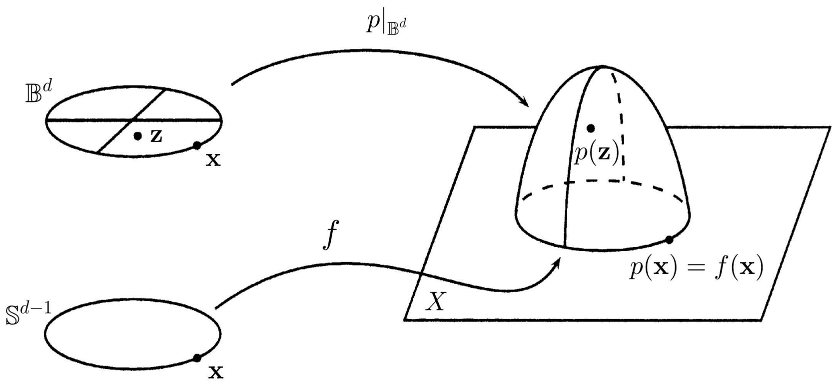
B.2.17 Ορισμός. Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και η $f : \mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τον χώρο $X \cup_f \mathbb{B}^d$ (όπως στον ορισμό B.2.12). Εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$\begin{cases} p : \mathbb{B}^d + X \longrightarrow X \cup_f \mathbb{B}^d & \text{για τη φυσική επίρριψη,} \\ \mathfrak{e}^d := p(\mathring{\mathbb{B}}^d) \subseteq X \cup_f \mathbb{B}^d & \text{για το } d\text{-κύτταρο και} \\ i := p|_X : X \hookrightarrow X \cup_f \mathbb{B}^d & \text{για τη συνήθη ένθεση.} \end{cases}$$

Ο $X \cup_f \mathbb{B}^d$ είναι η ένωση τού X με το d-κύτταρο $\mathfrak{e}^d$. (Ενίοτε, αντί τού $X \cup_f \mathbb{B}^d$, γράφουμε απλώς $X \cup_f \mathfrak{e}^d$ ή $X \cup \mathfrak{e}^d$ και λέμε ότι **ο** $X \cup_f \mathfrak{e}^d$ **προκύπτει κατόπιν προσαρτήσεως τού** d-**κυττάρου** $\mathfrak{e}^n$ **μέσω τής απεικονίσεως** f, καθότι

$$\boxed{X \cup_f \mathfrak{e}^d = X \cup \{p(\mathbf{z}) \in \mathfrak{e}^d \mid \mathbf{z} \in \mathbb{B}^d \text{ και } p(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}),\ \forall \mathbf{z} \in \mathbb{S}^{d-1}\}.}$$

Πρβλ. B.2.13 (i). Σημειωτέον ότι για $d = 0$ η προσάρτηση ενός 0-κυττάρου στον X είναι η προσάρτηση ενός και μόνον σημείου στον X.)



B.2.18 Πρόταση. *Εάν η $f : \mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow X$ είναι συνεχής και επιρριπτική, τότε ο περιορισμός $p|_{\mathbb{B}^d} : \mathbb{B}^d \longrightarrow X \cup_f \mathfrak{e}^d$ είναι μια ταυτισμική απεικόνιση. Κατά συνέπειαν, ο $X \cup_f \mathfrak{e}^d$ δημιουργείται από την μπάλα $\mathbb{B}^d$ ύστερα από την ταύτιση συνοριακών σημείων $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{S}^{d-1}$ εάν και μόνον εάν $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{z})$.*

B.2.19 Παραδείγματα. (i) Εάν $f : \mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow X = \{\text{ένα σημείο}\}$, τότε

$$X \cup_f \mathfrak{e}^d \approx \mathbb{B}^d/\mathbb{S}^{d-1} \approx \mathbb{S}^d.$$

(ii) Εάν η $f : \mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow X$ είναι σταθερή, τότε $X \cup_f \mathfrak{e}^d \approx X \vee (\mathbb{B}^d/\mathbb{S}^{d-1}) \approx X \vee \mathbb{S}^d$.
(iii) Εάν $f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{d-1}} : \mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{d-1}$, τότε $\mathbb{S}^{d-1} \cup_f \mathfrak{e}^d \approx \mathbb{B}^d$.
(iv) Εάν η $f : \mathbb{S}^{d-1} \hookrightarrow \mathbb{B}^d$ είναι η συνήθης ένθεση, τότε $\mathbb{B}^d \cup_f \mathfrak{e}^d \approx \mathbb{S}^d$.

B.3 ΠΡΟΒΟΛΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Εξέχουσα θέση (κυρίως λόγω των σημαντικών γεωμετρικών ιδιοτήτων τους) εντός τής κλάσεως των παραδειγμάτων συνεκτικών συμπαγών τοπολογικών χώρων κατέχουν οι λεγόμενοι *προβολικοί χώροι*. Έστω $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}\}$ το σώμα των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ ή το στρεβλό σώμα $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ των τετρανίων υπεράνω τού $\mathbb{R}$. (Βλ. εδ. 1.2.16 (iii).) Θέτουμε

$$\nu := \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K}) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ 2, & \text{όταν } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ 4, & \text{όταν } \mathbb{K} = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}, \end{cases} \tag{B.4}$$

θεωρούμε το (υποκείμενο σύνολο τού $\mathbb{K}$) ως το $\mathbb{R}^\nu$ και το εφοδιάζουμε με τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία. Ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος

$$\mathbb{K}^{d+1} = \underbrace{\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K}}_{d+1 \text{ φορές}} \ (d \in \mathbb{N}_0)$$

είναι ωσαύτως τοπολογικός χώρος (ταυτιζόμενος με τον $\mathbb{R}^{\nu(d+1)}$). Εδώ εξυπονοείται ότι εργαζόμαστε με τη μετρική τοπολογία την επαγομένη από τις συνήθεις στάθμες («νόρμες»):

• Για $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ και για κάθε $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$,

$$||\mathbf{x}|| := \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_d^2}$$

• Για $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ και για κάθε $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$,

$$||\mathbf{z}|| := \sqrt{|z_0|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_d|^2},$$

όπου $z_j := x_j + \sqrt{-1}y_j$, $x_j := \mathrm{Re}(z_j)$, $y_j := \mathrm{Img}(z_j)$ και $|z_j| := \sqrt{x_j^2 + y_j^2}$ για κάθε $j \in \{0, \ldots, d\}$.

• Για $\mathbb{K} = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$, θεωρώντας (ως συνήθως) το σύνολο $\{\mathbf{I}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ως βάση τού $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ (ως τετραδιάστατου $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου) με

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \ \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \ \mathbf{ik} = -\mathbf{ki} = -\mathbf{j}, \ \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i},$$

ορίζεται για κάθε $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ το *μέτρο* τού τετρανίου $\xi = a\mathbf{I} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ ως ο πραγματικός αριθμός

$$|\xi| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

δίνοντας το έναυσμα για τον ορισμό τής *στάθμης*

$$||\boldsymbol{\xi}|| := \sqrt{|\xi_0|^2 + |\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_d|^2}$$

οιουδήποτε $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{d+1}$, όπου $\xi_\rho = a_\rho\mathbf{I} + b_\rho\mathbf{i} + c_\rho\mathbf{j} + d_\rho\mathbf{k}$ για κάθε $\rho \in \{0, \ldots, d\}$.

B.3.1 Ορισμός. Ως d-**διάστατος προβολικός χώρος υπεράνω τού** $\mathbb{K}$ ορίζεται ο πηλικόχωρος

$$\boxed{\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} := (\mathbb{K}^{d+1} \smallsetminus \{0_{\mathbb{K}^{d+1}}\}) / \underset{\text{προβ.}}{\sim}}$$

ο δημιουργούμενος μέσω τής σχέσεως ισοδυναμίας

$$(x_0, x_1, ..., x_d) \underset{\text{προβ.}}{\sim} (x'_0, x'_1, ..., x'_d) \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\exists \lambda \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0_{\mathbb{K}}\} : x_j = \lambda x'_j,\ \forall j \in \{0, 1, ..., d\}]$$

<u>Συμβολισμός.</u> $[x_0 : x_1 : ... : x_d]$:= κλάση ισοδυναμίας τού $(x_0, x_1, ..., x_d)$ ως προς την "$\underset{\text{προβ.}}{\sim}$" (: **ομογενείς συντεταγμένες**).

B.3.2 Σημείωση. (i) Εάν για κάθε $j \in \{0, ..., d\}$ θεωρήσουμε το σύνολο

$$U_j := \{[x_0 : x_1 : ... : x_d] \in \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} \,|\, x_j \neq 0_{\mathbb{K}}\},$$

παρατηρούμε ότι ορίζονται ομοιομορφισμοί

$$\mathbb{K}^d \ni (y_1, ..., y_d) \overset{\approx}{\longmapsto} [y_1 : ... : y_{j-1} : 1_{\mathbb{K}} : y_{j+1} : ... : y_d] \in U_j.$$

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^0_{\mathbb{K}} &= \{\text{ένα σημείο}\}, \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} &= \{[x : 1_{\mathbb{K}}] \,|\, x \in \mathbb{K}\} \cup \underbrace{\{[1_{\mathbb{K}} : 0_{\mathbb{K}}]\}}_{\text{κατ' εκδοχήν σημείο}}, \\ \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} &= \{[x : y : 1_{\mathbb{K}}] \,|\, (x, y) \in \mathbb{K}^2\} \cup \underbrace{\{[x : y : 0_{\mathbb{K}}] \,|[x : y] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}\}}_{\text{κατ' εκδοχήν ευθεία}}. \end{aligned}$$

Άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε εμφυτεύσεις:

$$\mathbb{P}^0_{\mathbb{K}} \subsetneqq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \subsetneqq \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \subsetneqq ... \subsetneqq \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} \subsetneqq \mathbb{P}^{d+1}_{\mathbb{K}} \subsetneqq ...,$$

ταυτίζοντας τον $\mathbb{P}^{d-1}_{\mathbb{K}}$ με το σύνολο των σημείων $[x_0 : x_1 : ... : x_{d-1} : 0] \in \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$.

(iii) Ο χώρος $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ καλείται **πραγματικό προβολικό επίπεδο** και ο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ **μιγαδικό προβολικό επίπεδο**. Το πρώτο εξ αυτών των «προβολικών επιπέδων» είναι ένα σταυρωτό διαπέτασμα (βλ. σχήμα στη σελ. 639), διότι η

$$f : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}},\ \ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \longmapsto f(\mathbf{x}) := [x_1 : x_2 : \sqrt{1 - ||\mathbf{x}||^2}],$$

είναι ταυτισμική απεικόνιση (βλ. εδ. B.2.7) με την

$$\mathbb{B}^2/\mathfrak{R}_f \ni [\mathbf{x}]_{\mathfrak{R}_f} \overset{\bar{f}}{\longmapsto} f(x) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$$

ομοιομορφισμό και με $\mathfrak{R}_f = \mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}$, όπου

$$\mathfrak{Z} := \left\{ \left\{ \{\mathbf{x}\} | \, \mathbf{x} \in \mathbb{B}^2 \smallsetminus \mathbb{S}^1 \right\}, \left\{ \{\mathbf{x}, -\mathbf{x}\} | \, \mathbf{x} \in \mathbb{S}^1 \right\} \right\}$$

ο διαμελισμός τού $\mathbb{B}^2$ τού εδ.[33] B.2.11 (i).

[33] Πράγματι· εάν υποθέσουμε ότι ισχύει $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathfrak{R}_f \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}')$, τότε έχουμε προφανώς $x_1 = \lambda x'_1$, $x_2 = \lambda x'_2$ και $\sqrt{1 - ||\mathbf{x}||^2} = \lambda \sqrt{1 - ||\mathbf{x}'||^2}$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Εξ αυτών συμπεραίνουμε ότι $\lambda \in \{\pm 1\}$, ήτοι ότι $\mathbf{x} = \pm\, \mathbf{x}'$. Άρα $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}$ και, ως εκ τούτου, $\mathfrak{R}_f \subseteq \mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}} \subseteq \mathfrak{R}_f$ είναι προφανής.

B.4 ΤΡΟΧΙΑΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΧΩΡΟΙ ΦΑΚΟΥ

▸ **Τροχιακοί χώροι.** Οι *προβολικοί χώροι* τής §B.3 μπορούν (μέχρις ομοιομορφισμού) να θεωρηθούν ως ειδικοί *τροχιακοί χώροι* (προκύπτοντες από τη δράση *τοπολογικών ομάδων* επί τοπολογικών χώρων).

B.4.1 Ορισμός. Ένα μη κενό σύνολο G, το οποίο είναι *ταυτοχρόνως* εφοδιασμένο με τη δομή μιας ομάδας $(G, \cdot)$ *και* με μια τοπολογία, καλείται **τοπολογική ομάδα** όταν αμφότερες οι απεικονίσεις

$$G \times G \ni (x, y) \longmapsto xy \in G \;\text{ και }\; G \ni x \longmapsto x^{-1} \in G$$

είναι συνεχείς (με το $G \times G$ φέρον τη συνήθη τοπολογία γινομένου).

B.4.2 Παραδείγματα. (i) Η προσθετική ομάδα των πραγματικών αριθμών $(\mathbb{R}, +)$ είναι τοπολογική ομάδα (ως προς τη συνήθη τοπολογία).

(ii) Ο κύκλος $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ είναι τοπολογική (πολλαπλασιαστική) ομάδα, καθότι οι

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \ni (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \longmapsto e^{i(\theta_1+\theta_2)} \in \mathbb{S}^1 \;\text{ και }\; \mathbb{S}^1 \ni e^{i\theta} \longmapsto e^{-i\theta} \in \mathbb{S}^1$$

είναι συνεχείς.

(iii) Ο διδιάστατος τόρος $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ και, γενικότερα, το καρτεσιανό γινόμενο δυο τοπολογικών ομάδων είναι μια τοπολογική ομάδα.

(iv) Τοπολογικές ομάδες είναι η **γενική γραμμική ομάδα**[34]

$$\mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R}) \,|\, \det(\mathbf{A}) \neq 0\} \; (d \in \mathbb{N})$$

και η **ορθογώνια** (και αντιστοίχως, η **ειδική ορθογώνια**) **ομάδα**

$$\mathrm{O}_d(\mathbb{R}) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R}) \,|\, \mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1}\}$$
$$(\text{και αντιστοίχως, } \mathrm{SO}_d(\mathbb{R}) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{O}_d(\mathbb{R}) \,|\, \det(\mathbf{A}) = 1\})$$

με τη σχετική τοπολογία εντός τού ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^{d^2}$ (όταν κανείς εκλαμβάνει κάθε πίνακα $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$ ως σημείο τού $\mathbb{R}^{d^2}$). Κατ' αναλογίαν, τοπολογικές ομάδες είναι η **(μιγαδική) γενική γραμμική ομάδα**

$$\mathrm{GL}_d(\mathbb{C}) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{C}) \,|\, \det(\mathbf{A}) \neq 0\}$$

και η **μοναδιακή** (και αντιστοίχως, η **ειδική μοναδιακή**) **ομάδα**

$$\mathrm{U}_d(\mathbb{C}) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}) \,|\, \overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{-1}\}$$
$$(\text{και αντιστοίχως, } \mathrm{SU}_d(\mathbb{C}) := \{\mathbf{A} \in \mathrm{U}_d(\mathbb{C}) \,|\, \det(\mathbf{A}) = 1\}).$$

[34]Συνήθεις συμβολισμοί: Ως $\mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$ (και αντιστοίχως, ως $\mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{C})$) συμβολίζεται το σύνολο των $(d \times d)$-πινάκων με εγγραφές ειλημμένες από το $\mathbb{R}$ (και αντιστοίχως, από το $\mathbb{C}$), ως $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ ο *ανάστροφος* ενός πίνακα $\mathbf{A}$, ως $\mathbf{A}^{-1}$ ο *αντίστροφος* και ως $\det(\mathbf{A})$ η *ορίζουσα* ενός αντιστρέψιμου $(d \times d)$-πίνακα $\mathbf{A}$, και ως $\overline{\mathbf{A}}$ (και αντιστοίχως, $\overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}$) ο *συζυγής* (και αντιστοίχως, ο *αναστροφοσυζυγής*) ενός $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$.

Σημειωτέον ότι η $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ (και αντιστοίχως, η $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$), ως ανοικτός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^{d^2}$ (και αντιστοίχως, τού $\mathbb{C}^{d^2} = \mathbb{R}^{d^2}$), είναι συμπαγής και ότι

$$\mathrm{SO}_d(\mathbb{R}) \times \mathbb{S}^0 \approx \mathrm{O}_d(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{SU}_d(\mathbb{C}) \times \mathbb{S}^1 \approx \mathrm{U}_d(\mathbb{C}).$$

Οι $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$,$\mathrm{U}_d(\mathbb{C})$ και $\mathrm{SU}_d(\mathbb{C})$ είναι δρομοσυνεκτικές, ενώ η $\mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ διαθέτει ακριβώς δύο δρομοσυνεκτικές συνιστώσες (καθεμία των οποίων είναι $\approx \mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$. Επίσης, η $\mathrm{SO}_d(\mathbb{R})$ (και αντιστοίχως, η $\mathrm{SU}_d(\mathbb{C})$) είναι συμπαγής. Για μικρά n έχουμε:

$$\mathrm{SO}_1(\mathbb{R}) = \mathrm{SU}_1(\mathbb{C}) = \{\text{ένα σημείο}\},\ \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \underset{\text{τ.ο.}}{\cong} \mathrm{U}_1(\mathbb{C}) \underset{\text{τ.ο.}}{\cong} \mathbb{S}^1,\ \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \underset{\text{τ.ο.}}{\cong} \mathbb{S}^3$$

και $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \underset{\text{τ.ο.}}{\cong} \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, όπου το "$\underset{\text{τ.ο.}}{\cong}$" δηλοί *ισομορφισμό τοπολογικών ομάδων* (ήτοι ισομορφισμό ομάδων που είναι -ταυτοχρόνως- και ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων).

B.4.3 Ορισμός. Έστω $(G, \cdot)$ μια τοπολογική ομάδα και έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Μια **δράση τής G επί τού X** είναι μια συνεχής απεικόνιση

$$G \times X \ni (g, x) \longmapsto g \bullet x \in X,$$

τέτοια ώστε να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες[35]:
(i) $g \bullet (g' \bullet x) = (gg') \bullet x$, $\forall (g, g') \in G \times G$ και $\forall x \in X$,
(ii) $1_G \bullet x = x$, $\forall x \in X$.
Για $x \in X$ το σύνολο $\mathrm{orb}_G(x) := \{g \bullet x \,|\, g \in G\}$ καλείται **τροχιά τού** x. Επί τού X ορίζεται η σχέση ισοδυναμίας " $\sim_G$ " ως εξής:

$$x \sim_G x' \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{orb}_G(x) = \mathrm{orb}_G(x') \Longleftrightarrow [\exists g \in G : \ g \bullet x = x'].$$

(Προφανώς, $[x]_{\sim_G} := \{y \in X | \, x \sim_G y\} = \mathrm{orb}_G(x),\ \forall x \in X$.) Ο πηλικόχωρος

$$\boxed{X/G := X/\sim_G}$$

καλείται **τροχιακός χώρος** (orbit space) τού X ως προς τη δράση τής G επ' αυτού.

B.4.4 Σημείωση. Για παγιωμένο $g \in G$ η $X \ni x \longmapsto g \bullet x \in X$ είναι ένας ομοιομορφισμός (έχων εμφανώς την $X \ni x \longmapsto g^{-1} \bullet x \in X$ ως αντίστροφό του).

B.4.5 Παραδείγματα. (i) Ο τροχιακός χώρος $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ που κατασκευάζεται μέσω τής δράσεως $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \ni (n, x) \longmapsto x + n \in \mathbb{Z}$ είναι $\approx \mathbb{S}^1$.
(ii) Η $(\mathbb{Z}, +)$ δρα επί τού $\mathbb{R}^2$ ως εξής:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \ni (n, (x_1, x_2)) \longmapsto (x_1 + n, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

και δίδει $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (μέσω τού $[(x_1, x_2)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \overset{\approx}{\longmapsto} (\exp(2\pi i x_1), x_2)$).

[35] Προσοχή! Με το ένα (αχνό) "dot" σημειώνεται η (*εσωτερική*) πράξη τής ομάδας G και με το άλλο (έντονο) "dot" (ή "bullet") η δράση στοιχείων τής G επί τού X.

(iii) Η δράση

$$\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni ((m,n),(x_1,x_2)) \longmapsto (x_1+m, x_2+m) \in \mathbb{R}^2$$

δίδει τον πηλικόχωρο $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 =: \mathbb{T}^2$.
(iv) Η $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ (όπου $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$) δρα επί τού $\mathbb{C}$ ως εξής:

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{C} \ni (\lambda, z) \longmapsto \lambda z \in \mathbb{C}.$$

Η τροχιά $\mathrm{orb}_{\mathbb{S}^1}(z)$, για $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$, είναι ο κύκλος κέντρου $\{\mathbf{0}\}$ και ακτίνας $|z|$, ενώ $\mathrm{orb}_{\mathbb{S}^1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{0}\}$. Άρα $\mathbb{C}/\mathbb{S}^1 \approx [0, +\infty)$.
(v) Εάν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, ν όπως στην (B.4) και

$$p : \mathbb{S}^{\nu(d+1)-1} \longrightarrow \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}},\ \mathbf{x} \longmapsto \mathbb{K}\mathbf{x} = \{\lambda \mathbf{x} \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\} \subseteq \mathbb{K}^{d+1},$$

δηλαδή

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, ..., x_d) \overset{p}{\longmapsto} [x_0 : x_1 : ... : x_n], \qquad \text{για } \nu = 1,$$
$$\mathbf{x} = (x_0, y_0, x_1, y_1, ..., x_d, y_d) \overset{p}{\longmapsto} [x_0 : y_0 : ... : x_d : y_d], \quad \text{για } \nu = 2,$$

η p είναι μια ταυτισμική απεικόνιση και μάλιστα ισχύει

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}') \Longleftrightarrow [\exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ με } |\lambda| = 1 : \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}].$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ταυτίσεις $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ και $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ και το ότι οι εν λόγω σφαίρες φέρουν τη δομή πολλαπλασιαστικής ομάδας, καθώς και τις ταυτίσεις

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{S}^d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1} : ||\mathbf{x}|| = 1\} \\ \mathbb{S}^{2d+1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{d+1} : ||\mathbf{z}|| = 1\}\ (\mathbb{C}^{d+1} = \mathbb{R}^{2d+2}) \end{array} \right\},$$

έχουμε τη δυνατότητα ορισμού δράσεων

$$\mathbb{S}^{\nu-1} \times \mathbb{S}^{\nu(d+1)-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{\nu(d+1)-1},\ (\mu, \xi_0, ..., \xi_d) \longmapsto (\mu\xi_0, ..., \mu\xi_d),$$

(μέσω πολλαπλασιασμού *κατά συντεταγμένες*) και τη δημιουργία τού τροχιακού χώρου $\mathbb{S}^{\nu(d+1)-1}/\mathbb{S}^{\nu-1}$, ο οποίος είναι εκ κατασκευής *ομοιομορφικός τού* $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ (πρβλ. εδ. B.2.7):

$$\overline{p} : \mathbb{S}^{\nu(d+1)-1}/\mathbb{S}^{\nu-1} \overset{\approx}{\longrightarrow} \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}.$$

Επειδή $p(\mathbb{S}^{\nu(d+1)-1}) = \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$, όπου η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^{\nu(d+1)-1}$ είναι συμπαγής, συνεκτική, Hausdorff και 2η αριθμήσιμη (ως προς τη συνήθη τοπολογία), ο $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ είναι ωσαύτως συμπαγής, συνεκτικός, Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος.
(vi) Θεωρώντας τήν $\mathrm{O}_d(\mathbb{R})$ ως υποομάδα τής $\mathrm{O}_{d+1}(\mathbb{R})$ και την

$$\mathrm{O}_{d+1}(\mathbb{R}) \ni \mathbf{A} \overset{p}{\longmapsto} \mathbf{A}(0, 0, ..., 1)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{S}^{d-1}$$

διαπιστώνουμε (με παρόμοιο τρόπο) ότι

$$\mathrm{O}_{d+1}(\mathbb{R})/\mathrm{O}_d(\mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^d$$

και ότι

$$\mathrm{SO}_{d+1}(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_d(\mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^d$$

(κατόπιν περιορισμού επί τής $\mathrm{SO}_{d+1}(\mathbb{R})$). Κατ' αναλογίαν, αποδεικνύονται και οι ομοιομορφισμοί[36]

$$\mathrm{U}_{d+1}(\mathbb{C})/\mathrm{U}_d(\mathbb{C}) \approx \mathbb{S}^{2d+1}, \qquad \mathrm{O}_{d+1}(\mathbb{R})/(\mathrm{O}_d(\mathbb{R}) \times \mathrm{O}_1(\mathbb{R})) \approx \mathbb{P}^d_{\mathbb{R}},$$

$$\mathrm{U}_{d+1}(\mathbb{C})/(\mathrm{U}_d(\mathbb{C}) \times \mathrm{U}_1(\mathbb{C})) \approx \mathbb{P}^d_{\mathbb{C}}, \qquad \mathrm{Sp}_{d+1}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}})/(\mathrm{Sp}_d(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}) \times \mathrm{Sp}_1(\mathbb{H}_{\mathbb{R}})) \approx \mathbb{P}^d_{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}}.$$

B.4.6 Πρόταση. *Εάν μια τοπολογική ομάδα G δρα επί ενός τοπολογικού χώρου X και αμφότεροι οι G και X/G είναι συνεκτικοί, τότε και ο X είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο X γράφεται ως ένωση δύο ξένων μεταξύ τους, μη κενών, ανοικτών υποσυνόλων U και V. Επειδή η αντίστοιχη ταυτισμική απεικόνιση $p : X \longrightarrow X/G$ είναι πάντοτε ανοικτή (βλ. B.2.7 (ii)) και επειδή ο X/G είναι συνεκτικός, έχουμε

$$p(U) \cap p(V) \neq \varnothing.$$

Και για οιοδήποτε $x \in X$ με $p(x) \in p(U) \cap p(V)$ ισχύει $U \cap \mathrm{orb}_G(x) \neq \varnothing$ και $V \cap \mathrm{orb}_G(x) \neq \varnothing$. Αυτά τα δύο σύνολα αποσυνθέτουν την τροχιά $\mathrm{orb}_G(x)$ τού x και την εμφανίζουν ως αποσυνδετή ένωση δύο μη κενών, ανοικτών συνόλων. Από την άλλη μεριά, η $\mathrm{orb}_G(x)$ αποτελεί την εικόνα τής G μέσω τής συνεχούς απεικονίσεως

$$f : G \longrightarrow X,\ g \longmapsto f(g) := g \bullet x,$$

Άρα η τροχιά $\mathrm{orb}_G(x)$ τού x είναι συνεκτική[37], απ' όπου έπεται και η επιθυμητή αντίφαση. $\square$

B.4.7 Πρόταση. *Εάν μια πεπερασμένη (διακριτή) ομάδα G δρα επί ενός χώρου Hausdorff X, τότε ο τροχιακός χώρος X/G είναι χώρος Hausdorff.*

Απόδειξη. Έστω $p : X \longrightarrow X/G,\ x \longmapsto p(x) := [x]_{\sim_G}$, η φυσική επίρριψη. Εάν $[x_1]_{\sim_G}, [x_2]_{\sim_G} \in X/G$ και $x_1 \not\sim_G x_2$, τότε $g_1 \bullet x_1 \neq g_2 \bullet x_2$, για οιοδήποτε ζεύγος $g_1, g_2 \in G$, οπότε

$$p^{-1}([x_1]_{\sim_G}) \cap p^{-1}([x_2]_{\sim_G}) = \{gx_1 \mid g \in G\} \cap \{gx_2 \mid g \in G\} = \varnothing.$$

Επειδή αυτά τα σύνολα είναι πεπερασμένα, είναι δυνατόν (κατόπιν επαναλαμβανόμενης εφαρμογής τής ιδιότητας τού Hausdorff) να κατασκευασθούν ανοικτά υποσύνολα U_1, U_2 τού X, τέτοια ώστε να ισχύει

$$U_1 \cap U_2 = \varnothing, \qquad p^{-1}([x_1]_{\sim_G}) \subseteq U_1, \qquad p^{-1}([x_2]_{\sim_G}) \subseteq U_2.$$

Επειδή $p^{-1}(p(X \smallsetminus U_j)) = \bigcup_{g \in G} g \bullet (X \smallsetminus U_j)$, για $j \in \{1,2\}$, το $p^{-1}(p(X \smallsetminus U_j))$ είναι κλειστό υποσύνολο τού X. Άρα το $p(X \smallsetminus U_j)$, $j \in \{1,2\}$, είναι κλειστό υποσύνολο

[36] Η $\mathrm{Sp}_d(\mathbb{H}_{\mathbb{R}})$ συμβολίζει τη **συμπλεκτική ομάδα** (που είναι ανάλογη τής ορθογώνιας αλλά) υπεράνω τού $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$. Για περαιτέρω παραδείγματα αυτού τού είδους βλ. I.R. Porteous: *Topological Geometry*, second edition, Cambridge University Press, 1981.

[37] Βλ., π.χ., [38], Theorem V.1.4, σελ. 108, [41], Chapter 3, Theorem 23.5, σελ. 150, ή [42], Πρόταση 7.5, σελ. 113.

τού X/G και, κατ' επέκταση, το

$$W_j := X/G \smallsetminus p(X \smallsetminus U_j),\ j \in \{1,2\},$$

είναι ανοικτό υποσύνολο τού X/G. Τέλος, επειδή

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= X/G \smallsetminus (p(X \smallsetminus U_1) \cup p(X \smallsetminus U_2)) \\ &= X/G \smallsetminus p((X \smallsetminus U_1) \cup (X \smallsetminus U_2)) \\ &= X/G \smallsetminus p(X \smallsetminus (\underbrace{U_1 \cap U_2}_{=\varnothing})) = X/G \smallsetminus p(X) = \varnothing, \end{aligned}$$

ο τροχιακός χώρος X/G είναι όντως χώρος Hausdorff. □

▸ **Χώροι φακού.** Έχουν ήδη δοθεί διάφοροι χαρακτηρισμοί για το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Αυτό είναι αφ' ενός μεν ένα *σταυρωτό διαπέτασμα*, αφ' ετέρου δε ένας *τροχιακός χώρος*. (Βλ. B.3.2 (iii) και B.4.5 (v).) Υψώνοντας κατά ένα τη διάσταση, ο *τριδιάστατος* πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ μπορεί να ιδωθεί ως ένας «χώρος φακού» (συγκεκριμένα, είναι $\approx \mathbb{L}(2,1)$). Οι *χώροι φακού* $\mathbb{L}(p,q)$ εισήχθησαν από τον H. Tietze[38] το έτος[39] 1908 και έκτοτε έγιναν αντικείμενο μελέτης πληθώρας ερευνητών. Η ταξινόμησή τους *μέχρις ομοιομορφισμού* (μέσω μιας απλούστατης αριθμοθεωρητικής συνθήκης ικανοποιούμενης από τις παραμέτρους τους p και q) επετεύχθη το[40] 1935 από τον K. Reidemeister[41] κάνοντας χρήση μιας ειδικής συνδυαστικής αναλλοιώτου. (Βλ. θεώρημα B.4.11.) Μέσω των χώρων φακού κατασκευάζονται παραδείγματα συμπαγών τοπολογικών χώρων που ναι μεν *είναι* ομοτοπικώς ισοδύναμοι αλλά *δεν είναι* ομοιομορφικοί. (Βλ. εδ. B.5.20.)

H. Tietze

K. Reidemeister

[38]Tietze, *Heinrich Franz Friedrich* (31/8/1880-17/2/1964). Γερμανός μαθηματικός. Υπήρξε καθηγητής των Πανεπιστημίων τού Erlangen (1919-1924) και τού Μονάχου (1925-1950). Αφιέρωσε το μεγαλύτερο τμήμα τής ζωής του στη μελέτη τοπολογικών προβλημάτων. Επιπροσθέτως, για την επίτευξη τοπολογικής διακρίσεως μεταξύ δυο κόμπων, εφάρμοσε με ιδιαίτερη επιτυχία μεθόδους προερχόμενες από τη Θεωρία Ομάδων και την Αριθμοθεωρία.

[39]Βλ. H. Tietze: *Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten*, Monatshefte für Mathematik und Physik **19** (1908), 1-118.

[40]K. Reidemeister: *Homotopie und Linsenräume*, Abhandlungen des Mathematischen Seminars der Universität Hamburg **11** (1935), 102-109.

[41]Reidemeister, *Kurt Werner Friedrich* (13/10/1893-8/7/1971). Γερμανός μαθηματικός. Εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό την επίβλεψη τού E. Hecke (1887-1947). Ωστόσο, η έρευνά του μεταπήδησε σε σύντομο χρονικό διάστημα από την Αλγεβρική Θεωρία Αριθμών στη Γεωμετρία, υπό την επίδραση τής συνεργασίας του με τον W. Blaschke (1885-1962). Εν συνεχεία, εστράφη στη μελέτη προβλημάτων προερχομένων από τη Συνδυαστική και την Αλγεβρική Τοπολογία, και από τη Θεωρία Κόμπων. Διετέλεσε καθηγητής στα Πανεπιστήμια τής Βιέννης (1922-1924), τού Königsberg (1925-1933), τού Marburg (1934-1954) και τού Göttingen (από το 1955). Συνέγραψε 17 βιβλία (ορισμένα εξ αυτών επί τής Ιστορίας των Μαθηματικών) και άνω των 70 ερευνητικών εργασιών.

B.4.8 Ορισμός. Ταυτίζοντας την $\mathbb{S}^3$ με το σύνολο $\{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$ και θεωρώντας δυο ακεραίους p, q με $0 \leqslant q < p$ και $\text{μκδ}(p, q) = 1$, είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}_p = \{[0]_p, [1]_p, ..., [p-1]_p\}$ δρα επ' αυτής ως εξής[42]:

$$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{S}^3 \ni ([k]_p, (z_0, z_1)) \longmapsto (\exp(\tfrac{2\pi ik}{p})z_0, \exp(\tfrac{2\pi iqk}{p})z_1) \in \mathbb{S}^3.$$

Η ομάδα $\mathbb{Z}_p$ δρα (κατ' αυτόν τον τρόπο) ελευθέρως[43] επί τής μοναδιαίας σφαίρας $\mathbb{S}^2$. Πράγματι· εάν $[k]_p \bullet (z_0, z_1) = (z_0, z_1)$, τότε $\exp(\frac{2\pi ik}{p})z_0 = z_0$ και $\exp(\frac{2\pi iqk}{p})z_1 = z_1$. Από την πρώτη εξίσωση έπεται ότι είτε $\exp(\frac{2\pi ik}{p}) = 1$ είτε $z_0 = 0$. Στην πρώτη περίπτωση, $\frac{k}{p} \in \mathbb{Z} \Rightarrow p|k \Rightarrow k = 0$. Στην δεύτερη περίπτωση, $z_0 = 0$, οπότε

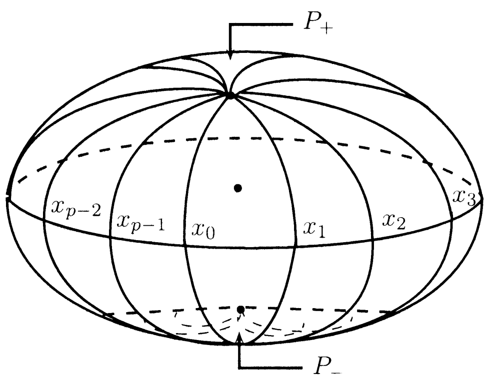
$$|z_1| = 1 \Rightarrow z_1 \neq 0 \Rightarrow \exp(\tfrac{2\pi iqk}{p}) = 1 \Rightarrow \tfrac{kq}{p} \in \mathbb{Z} \underset{\text{μκδ}(p,q)=1}{\Longrightarrow} p|k \Rightarrow k = 0.$$

Ο (λόγω των προτάσεων B.4.6 και B.4.7) συνεκτικός τροχιακός χώρος Hausdorff

$$\boxed{\mathbb{L}(p, q) := \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p}$$

καλείται **χώρος φακού (με παραμέτρους τα** p **και** q). (Πρβλ. εδ. E.1.13.)

Ο κλασικός *γεωμετρικός ορισμός* τού χώρου τού φακού είναι κάπως διαφορετικός. (Βλ. ορισμό B.4.9 και θεώρημα B.4.10 για την ισοδυναμία των ορισμών μέχρις ομοιομορφισμού.) Ας θεωρήσουμε (εντός τού $\mathbb{R}^3$) το στερεό (εν είδει «φακού») τού κάτωθι σχήματος (που είναι $\approx \mathbb{B}^3$), το σύνορο τού οποίου αποτελείται από δύο συμμετρικά πώματα συναντώμενα σε ένα κυκλικό στεφάνι.



Συμβολίζουμε τον βόρειο (αντιστοίχως, τον νότιο) πόλο αυτού ως P_+ (και αντιστοί-

[42] Εδώ με το i σημειώνεται η *φανταστική μονάδα*.

[43] Έστω G μια τοπολογική ομάδα, η οποία δρα επί ενός τοπολογικού χώρου X. Λέμε ότι η G **δρα ελευθέρως** (ή ότι **στερείται σταθερών σημείων**) **επί τού** X όταν $g \bullet x \neq x$, $\forall g \in G \smallsetminus \{1_G\}$ (δηλαδή όταν η $X \ni x \longmapsto g \bullet x \in X$ στερείται σταθερών σημείων, $\forall g \in G \smallsetminus \{1_G\}$).

χως, ως P_-) και διαμερίζουμε το κυκλικό στεφάνι σε p ίσα τόξα

$$x_0\widehat{\ }x_1,\ x_1\widehat{\ }x_2, ...,\ x_{p-1}\widehat{\ }x_0\ .$$

Κατόπιν τούτου συνδέουμε καθένα εκ των x_j, $0 \leqslant j \leqslant p-1$, με τα P_+ και P_- (μέσω μεγάκυκλων) χωρίζοντας καθένα των δύο πωμάτων σε p τριγωνικούς τομείς.

B.4.9 Ορισμός. Ορίζουμε τον τοπολογικό χώρο $\widetilde{\mathbb{L}}(p,q)$ ως τον ταυτισμικό χώρο τον δημιουργούμενο από το στερεό τού προηγουμένου σχήματος κατόπιν ταυτίσεως των τριγώνων με κορυφές τις x_j, x_{j+1}, P_+ και x_{j+q}, x_{j+q+1}, P_- για κάθε $j \in \{0, 1, ..., p-1\}$, και μάλιστα έτσι, ώστε το x_j να ταυτίζεται με το x_{j+q}, το x_{j+1} με το x_{j+q+1}, και το P_+ με το P_-. (Οι υποδείκτες $j+1, j+q, j+q+1$ οφείλουν να διαβάζονται «mod p».)

B.4.10 Θεώρημα. $\mathbb{L}(p,q) \approx \widetilde{\mathbb{L}}(p,q)$.

B.4.11 Θεώρημα (Ταξινόμηση χώρων φακού μέχρις “ $\approx$ ”, K. Reidemeister, 1935.). *Δυο χώροι φακού $\mathbb{L}(p,q)$ και $\mathbb{L}(p',q')$ είναι μεταξύ τους ομοιομορφικοί εάν και μόνον εάν $p = p'$ και είτε $q \equiv \pm q' (\mathrm{mod}\ p)$ είτε $qq' \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\ p)$.*

B.5 ΟΜΟΤΟΠΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΕΧΩΝ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ ΚΑΙ ΟΜΟΤΟΠΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ

Η «ομοτοπία» αποτελεί μία από τις πλέον θεμελιώδεις έννοιες τής Τοπολογίας.

B.5.1 Ορισμός. Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι και $f, g : X \longrightarrow Y$ δυο συνεχείς απεικονίσεις. Μια συνεχής απεικόνιση

$$H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y \tag{B.5}$$

καλείται **ομοτοπία από την f στην g** (και οι f, g **ομότοπες**) όταν

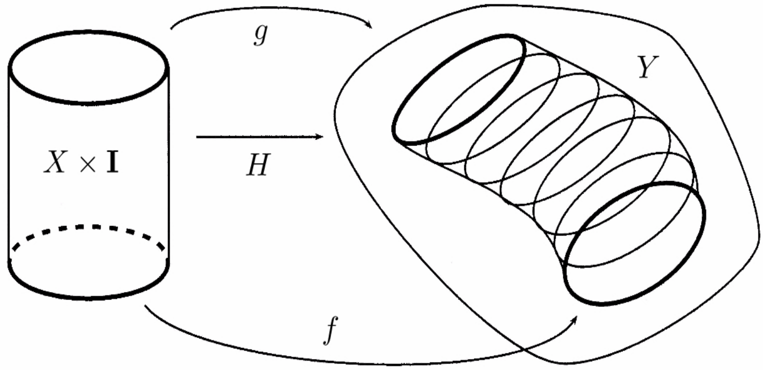
$$H(x,0) = f(x) \ \text{ και } \ H(x,1) = g(x),\ \forall x \in X.$$

Κάθε ομοτοπία (B.5) από την f στην g ορίζει μια μονοπαραμετρική οικογένεια απεικονίσεων

$$H_t(x) := H(x,t),\ \forall t \in \mathbf{I},\ \text{ με } \ H_0 = f \ \text{ και } \ H_1 = g.$$

Χρησιμοποιούμενος συμβολισμός:

$$\boxed{f \simeq g \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} [\text{οι } f \text{ και } g \text{ είναι ομότοπες}].}$$



B.5.2 Πρόταση. *Η “$\simeq$” αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τής κλάσεως όλων των συνεχών απεικονίσεων $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X και Y.*

Αποδειξη. *Αυτοπάθεια.* Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, τότε $f \simeq f$ μέσω τής ομοτοπίας

$$X \times \mathbf{I} \ni (x,t) \longmapsto H(x,t) := f(x) \in Y.$$

Συμμετρικότητα. Εάν $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ είναι μια ομοτοπία από την f στην g, τότε η ακόλουθη είναι μια ομοτοπία από την g στην f:

$$X \times \mathbf{I} \ni (x,t) \longmapsto H^{-}(x,t) := H(x, 1-t) \in Y.$$

Μεταβατικότητα. Εάν $H_1 : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ και $H_2 : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπίες από την f στην g και από την g στην h, αντιστοίχως, τότε ορίζουμε την $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ μέσω τού τύπου

$$H(x,t) := \begin{cases} H_1(x, 2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(x, 2t-1), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Αυτή η H είναι *καλώς ορισμένη*, διότι $H_1(x,1) = g(x) = H_2(x,0)$. Επιπροσθέτως, είναι *συνεχής*[44] και ισχύει $H(x,0) = H_1(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = H_2(x,1) = h(x)$. Άρα η H είναι ομοτοπία από την f στην h. □

B.5.3 Συμβολισμός. Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ θα σημειώνουμε με το σύμβολο $[f]^{\text{ομ.}}_{X,Y}$ την κλάση ισοδυναμίας της ως προς την “$\simeq$”, ήτοι[45]

$$[f]^{\text{ομ.}}_{X,Y} := \{h : X \longrightarrow Y \ \text{ συνεχής} \,|\, f \simeq h\}$$

(που καλείται, ιδιαιτέρως, και **κλάση ομοτοπίας τής** f).

[44] Βλ. *λήμμα τής συγκολλήσεως* (gluing lemma), π.χ., στον Dugundji [38], Chapter III, Theorem 9.4, σελ. 83, και στον Munkres [41], Chapter 2, Theorem 18.3, σελ. 108-109.

[45] Προφανώς, $[f]^{\text{ομ.}}_{X,Y} = [g]^{\text{ομ.}}_{X,Y} \Leftrightarrow f \simeq g$.

B.5.4 Πρόταση. *Η "$\simeq$" είναι συμβατή με τη σύνθεση συνεχών απεικονίσεων, δηλαδή εάν οι $f, g : X \longrightarrow Y$ και $f', g' : Y \longrightarrow Z$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, τότε ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:* $[f \simeq g \text{ και } f' \simeq g'] \Longrightarrow f' \circ f \simeq g' \circ g$.

Απόδειξη. Εάν $H_1 : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ και $H_2 : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπίες από την f στην g και από την f' στην g', αντιστοίχως, τότε ορίζουμε την

$$H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y,\ (x, t) \longmapsto H(x, t) := H_2(f(x), t).$$

Αυτή είναι προδήλως *συνεχής*, $H(x, 0) = H_2(f(x), 0) = f'(f(x)) = (f' \circ f)(x)$ και

$$H(x, 1) = H_2(f(x), 1) = g'(f(x)) = (g' \circ f)(x).$$

Εν συνεχεία, παρατηρούμε ότι για τη σύνθεση $H' := g' \circ H_1$ (που είναι προδήλως *συνεχής*) ισχύει $H'(x, 0) = (g' \circ H_1)(x, 0) = g'(f(x)) = (g' \circ f)(x)$ και

$$H'(x, 1) = \left(g' \circ H_1\right)(x, 1) = g'(g(x)) = (g' \circ g)(x).$$

Εξ αυτών έπεται ότι

$$\left.\begin{array}{l} f' \circ f \simeq g' \circ f \\ g' \circ f \simeq g' \circ g \end{array}\right\} \underset{\text{B.5.2}}{\Longrightarrow} f' \circ f \simeq g' \circ g,$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

B.5.5 Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων καλείται **μηδενοομοτοπική** όταν $f \simeq \mathrm{const}_{y_0}$, για κάποιο $y_0 \in Y$, όπου $\mathrm{const}_{y_0}(x) := y_0$ για κάθε $x \in X$. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται **συσταλτός** (contractible) όταν η ταυτοτική απεικόνιση id_X είναι μηδενοομοτοπική.

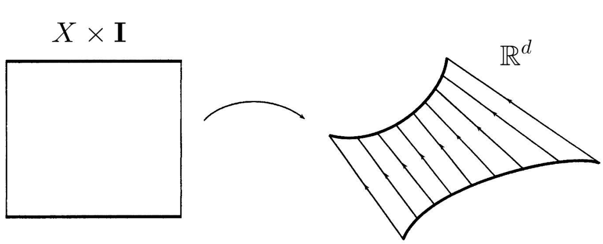
B.5.6 Παραδείγματα. (i) Εάν οι $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ είναι οι απεικονίσεις οι οριζόμενες από τους τύπους $f(x) := (x, x^2)$ και $g(x) := (x, x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η

$$H(x, t) := (x, x^2 - tx^2 + tx)$$

είναι μια ομοτοπία από την f στην g.

(ii) Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος. Τότε οιεσδήποτε συνεχείς απεικονίσεις $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^d$ είναι ομότοπες. Μια συγκεκριμένη ομοτοπία από την f στην g είναι η λεγομένη **ομοτοπία των ευθυγράμμων τμήματων**:

$$H(x, t) := (1 - t)f(x) + tg(x),\ \forall (x, t) \in X \times \mathbf{I}.$$

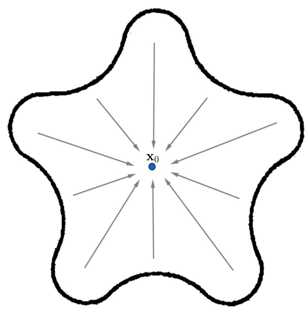


(iii) Εάν Y είναι ένας τοπολογικός χώρος και $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση, τότε η f είναι μηδενοομοτοπική. (Αρκεί προς τούτο να θεωρηθεί η ομοτοπία $H(\mathbf{x}, t) := f((1-t)\mathbf{x})$, $\forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbf{I}$.)

(iv) Η σύνθεση μιας μηδενοομοτοπικής απεικονίσεως με μια τυχούσα συνεχή απεικόνιση είναι μηδενοομοτοπική. (Βλ. πρόταση B.5.4.)

(v) Οι συσταλτοί τοπολογικοί χώροι είναι δρομοσυνεκτικοί (και, κατ' επέκταση, συνεκτικοί). Το να είναι ένας χώρος συσταλτός αποτελεί μια *τοπολογική ιδιότητα*. (Εάν ο X είναι συσταλτός, τότε και κάθε τοπολογικός χώρος ομοιομορφικός τού X είναι συσταλτός). Επί παραδείγματι, μέσω τής ομοτοπίας $H(\mathbf{x}, t) := (1-t)\mathbf{x}$ διαπιστώνουμε ότι οι χώροι $\mathbb{R}^d$ και $\mathbb{B}^d$ είναι συσταλτοί. Ως εκ τούτου, *όλα τα κύτταρα* και *όλες οι μπάλες* είναι χώροι *συσταλτοί*.

(vi) Ένας υπόχωρος X τού $\mathbb{R}^d$ καλείται **αστρόμορφος** όταν υπάρχει ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in X$, τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα το οριζόμενο από το $\mathbf{x}_0$ και το $\mathbf{x}$ ανήκει στον X, $\forall \mathbf{x} \in X$. Η ομοτοπία $H(\mathbf{x}, t) := (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{x}_0$, $\forall (\mathbf{x}, t) \in X \times \mathbf{I}$, δείχνει ότι οι αστρόμορφοι (και, ιδιαιτέρως, οι κυρτοί[46]) υπόχωροι τού $\mathbb{R}^d$ είναι συσταλτοί.



(vii) Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος. Κάθε συνεχής, μη επιρριπτική απεικόνιση $f : X \longrightarrow \mathbb{S}^d$ είναι μηδενοομοτοπική. Έστω $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{S}^d \setminus f(X)$.
Πρώτη απόδειξη: Κάθε f αυτού τού είδους είναι η σύνθεση τής

$$X \longrightarrow \mathbb{S}^d \setminus \{\mathbf{y}_0\}, \ \ x \longmapsto f(x),$$

με την ένθεση $\mathbb{S}^d \setminus \{\mathbf{y}_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^d$. Επειδή το κύτταρο $\mathbb{S}^d \setminus \{\mathbf{y}_0\}$ είναι συσταλτό, η f είναι μηδενοομοτοπική.
Δεύτερη απόδειξη: Το ευθύγραμμο τμήμα το συνδέον τα $f(x)$ και $-\mathbf{y}_0$ εντός τού $\mathbb{R}^{d+1}$ δεν περιέχει το $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{d+1}$ (διότι αλλιώς θα είχαμε $\mathbf{y}_0 = f(x) \in f(X)$). Επομένως η

$$X \times \mathbf{I} \ni (x, t) \longmapsto H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) - t\mathbf{y}_0}{||(1-t)f(x) - t\mathbf{y}_0||} \in \mathbb{S}^d$$

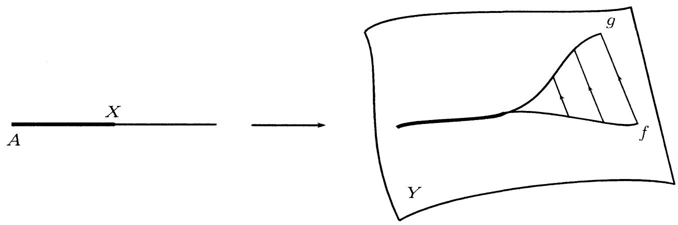
είναι μια ομοτοπία από την f στη σταθερή απεικόνιση $x \longmapsto -\mathbf{y}_0$, $\forall x \in X$.

[46] Ένας υπόχωρος τού $\mathbb{R}^d$ καλείται, ως γνωστόν, **κυρτός** (convex) όταν το ευθύγραμμο τμήμα το οριζόμενο από δύο *τυχόντα* σημεία του $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$ ανήκει πάντοτε σε αυτόν. Προφανώς, *κάθε* κυρτός υπόχωρος τού $\mathbb{R}^n$ *είναι* αστρόμορφος (star shaped). Ωστόσο, το αντίστροφο δεν είναι πάντοτε αληθές. (Επί παραδείγματι, το υποσύνολο τού $\mathbb{R}^2$ που δείχνεται στο άνωθι σχήμα είναι αστρόμορφο και *μη κυρτό*.)

B.5.7 Ορισμός. Εάν $f, g : X \longrightarrow Y$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών χώρων και ο A υπόχωρος τού X, τέτοιος ώστε να ισχύει $f|_A = g|_A$, τότε οι f και g ονομάζονται **ομότοπες σχετικώς προς τον υπόχωρο** A (συμβολικώς: $f \simeq g$ σχ. A) όταν υπάρχει μια ομοτοπία $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ από την f στην g *σχετικώς προς το* A, ήτοι με

$$H(a,t) = f(a) = g(a)$$

για κάθε $a \in A$. (Για όλα τα $a \in A$ τα σημεία $f(a) = g(a)$ δεν επηρεάζονται κατά την εφαρμογή τής H.)



B.5.8 Πρόταση. *Η "$\simeq$ σχ. A" αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας επί τής κλάσεως όλων των συνεχών απεικονίσεων $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X και Y, όπου A οιοσδήποτε παγιωμένος υπόχωρος τού X.*

Απόδειξη. Πανομοιότυπη εκείνης τής προτάσεως B.5.2. □

B.5.9 Συμβολισμός. Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ θα σημειώνουμε με το σύμβολο $[f]^{\text{ομ.}}_{(X,A),Y}$ την κλάση ισοδυναμίας της ως προς την "$\simeq$ σχ. A", όπου A κάποιος παγιωμένος υπόχωρος τού X, ήτοι

$$[f]^{\text{ομ.}}_{(X,A),Y} := \{h : X \longrightarrow Y \ \text{ συνεχής} |\ f \simeq h \ \text{σχ.} A\}$$

(που καλείται, ιδιαιτέρως, και **κλάση ομοτοπίας τής f σχετικώς προς τον** A).

B.5.10 Πρόταση. *Έστω $p : X \longrightarrow Y$ μια ταυτισμική απεικόνιση (υπό την έννοια τού ορισμού B.2.7) και έστω $H : Y \times \mathbf{I} \longrightarrow Z$ μια απεικόνιση, τέτοια ώστε η σύνθεση $H \circ (p \times \mathrm{id}_{\mathbf{I}}) : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Z$ να είναι μια ομοτοπία. Τότε και η H είναι μια ομοτοπία.*

Απόδειξη. Εξ υποθέσεως, η $H \circ (p \times \mathrm{id}_{\mathbf{I}})$ είναι συνεχής. Επειδή το $\mathbf{I}$ είναι συμπαγές, είναι εύκολο να δειχθεί ότι η $p \times \mathrm{id}_{\mathbf{I}}$ είναι ταυτισμική, οπότε η H οφείλει να είναι συνεχής (επί τη βάσει τού B.2.7 (iii)). □

B.5.11 Πόρισμα. *Εάν οι X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι, επί των οποίων έχουν ορισθεί σχέσεις ισοδυναμίας $\mathfrak{R}$ και $\mathfrak{S}$, αντιστοίχως, και η $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ μια ομοτοπία συμβατή με αυτές (δηλ. $x \sim_{\mathfrak{R}} x' \Longrightarrow H(x,t) \sim_{\mathfrak{S}} H(x',t)$, $\forall t \in \mathbf{I}$), τότε* *μέσω τής H επάγεται μια ομοτοπία*

$$\overline{H} : X/\mathfrak{R} \times \mathbf{I} \longrightarrow Y/\mathfrak{S},\ \ ([x]_{\sim_{\mathfrak{R}}}, t) \longmapsto [H(x,t)]_{\sim_{\mathfrak{S}}}.$$

B.5.12 Παράδειγμα. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω $\mathrm{cone}(X)$ ο κώνος υπεράνω τού X (ο ορισθείς στο εδ. B.2.11 (ii)). Η απεικόνιση

$$H : (X \times \mathbf{I}) \times \mathbf{I} \longrightarrow X \times \mathbf{I},\ \ ((x,s),t) \longmapsto (x, (1-t)s + t),$$

είναι μια ομοτοπία με $H(X \times \mathbf{I}, t) = X \times \{1\}$, $\forall t \in \mathbf{I}$. Κατά συνέπειαν, επάγεται μια ομοτοπία

$$\overline{H} : \mathrm{cone}(X) \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathrm{cone}(X).$$

Επειδή $\overline{H}_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{cone}(X)}$ και $\overline{H}_1(\mathrm{cone}(X)) = [X \times \{1\}]_{\sim}$, ο κώνος $\mathrm{cone}(X)$ είναι χώρος συσταλτός.

Ένα πλήθος προβλημάτων τής Τοπολογίας αποτελούν ειδικές περιπτώσεις τού λεγομένου *προβλήματος τής επεκτάσεως*: Εάν δοθεί ένας τοπολογικός χώρος X, ένας υπόχωρος $A \subseteq X$, καθώς και μια συνεχής απεικόνιση $f : A \longrightarrow Y$, υφίσταται κάποια συνεχής απεικόνιση $g : X \longrightarrow Y$, ούτως ώστε $f = g|_A$;

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr, dashed, "\exists g;"] & \\ A \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "f"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowright"] & & Y \end{tikzcd}$$

Επί παραδείγματι, δυο συνεχείς απεικονίσεις $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ είναι ομοτοπικές εάν και μόνον εάν η απεικόνιση

$$(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \longrightarrow Y,\ \ (x,0) \longmapsto f_0(x),\ (x,1) \longmapsto f_1(x)$$

είναι (συνεχώς) επεκτάσιμη επί τού κυλίνδρου $X \times \mathbf{I}$. (Ως εκ τούτου, το πρόβλημα (υπάρξεως) ομοτοπίας αποτελεί ειδική περίπτωση τού *προβλήματος τής επεκτάσεως*, το οποίο είναι επιλύσιμο μόνον *υπό συγκεκριμένους περιορισμούς*.)

B.5.13 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένας υπόχωρος $A \subseteq X$ καλείται **σύμπτυξη τού** X (retract of X) όταν υπάρχει μια **απεικόνιση συμπτύξεως** (retraction map) $r : X \longrightarrow A$, ήτοι μια συνεχής απεικόνιση με $r|_A = \mathrm{id}_A$.

B.5.14 Παραδείγματα. (i) Κάθε τοπολογικός X είναι σύμπτυξη τού εαυτού του. Επίσης, κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ αποτελούμενο από ένα σημείο x ενός τοπολογικού χώρου X είναι σύμπτυξη τού X.

(ii) Εάν B είναι σύμπτυξη τού A και A σύμπτυξη τού X, τότε και ο B είναι σύμπτυξη τού X.

(iii) Εάν δοθούν δυο τοπολογικοί χώροι X, Y, τότε ο υπόχωρος X (ή ο υπόχωρος Y) τής μονοσημειακής ενώσεως $X \vee Y$ είναι σύμπτυξη τής $X \vee Y$. Επίσης, εάν $y_0 \in Y$, τότε ο $X \times \{y_0\}$ είναι σύμπτυξη τού $X \times Y$.

(iv) Οι συμπτύξεις χώρων Hausdorff είναι πάντοτε κλειστοί υπόχωροι.

K. Borsuk

Οι όροι *σύμπτυξη* και *ομοτοπία* εισήχθησαν στην Τοπολογία περί το έτος 1931 από τον K. Borsuk[47]. Για μια πρώτη επαφή με τη γενική θεωρία των συμπτύξεων (ANE's, AR, ANR , LC spaces κ.ά.), βλ. το σύγγραμμα [71] τού Hu.

B.5.15 Πρόταση. *Δοθέντων δυο τοπολογικών χώρων X, Y και ενός κλειστού υπόχωρου $A \subseteq X$, μια συνεχής απεικόνιση $f : A \longrightarrow Y$ είναι (συνεχώς) επεκτάσιμη επί τού X εάν και μόνον εάν ο Y είναι σύμπτυξη τού $Y \cup_f X$.* (Βλ. ορισμό B.2.12.)

Απόδειξη. Έστω $p : X + Y \longrightarrow Y \cup_f X$ η φυσική επίρριψη. Εάν $g : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής επέκταση τής f, τότε η σύνθεση $(g + \mathrm{id}_Y) \circ p^{-1} : Y \cup_f X \longrightarrow Y$ είναι μια απεικόνιση συμπτύξεως. (Πρβλ. πρόταση B.2.5.) Και αντιστρόφως· εάν η $r : Y \cup_f X \longrightarrow Y$ είναι μια απεικόνιση συμπτύξεως, τότε η σύνθεση $g := r \circ (p|_X)$ είναι μια συνεχής επέκταση τής f. □

B.5.16 Πρόταση. *Έστω Y τυχών τοπολογικός χώρος. Τότε μια συνεχής απεικόνιση $f : \mathbb{S}^d \longrightarrow Y$ είναι μηδενοομοτοπική εάν και μόνον εάν είναι (συνεχώς) επεκτάσιμη επί τής μπάλας $\mathbb{B}^{d+1}$ (δηλαδή εάν και μόνον εάν ο Y είναι σύμπτυξη τού $Y \cup_f e^{n+1}$).*

Απόδειξη. Έστω $g : \mathbb{B}^{d+1} \longrightarrow Y$ μια συνεχής επέκταση τής f. Τότε η

$$H : \mathbb{S}^d \times \mathbf{I} \longrightarrow Y,\ (\mathbf{x}, t) \longmapsto H(\mathbf{x}, t) := g(t\mathbf{x}),$$

είναι ομοτοπία με H_0 = σταθερά και $H_1 = f$. Εάν η $H : \mathbb{S}^d \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ είναι, αντιστρόφως, μια ομοτοπία με $H(\mathbb{S}^d \times \{0\}) = y_0 \in Y$ και $H(\mathbf{x}, 1) = f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}^d$, τότε η απεικόνιση $p : \mathbb{S}^d \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{B}^{d+1}$, $p(\mathbf{x}, t) := t\mathbf{x}$, $\forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{S}^d \times \mathbf{I}$, είναι ταυτισμική, οπότε η $g := H \circ p^{-1}$ είναι συνεχής (βλ. B.2.5) και $g|_{\mathbb{S}^d} = f$. □

Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ τοπολογικών χώρων είναι ομοιομορφισμός όταν υπάρχει συνεχής $g : Y \longrightarrow X$ με $g \circ f = \mathrm{id}_X$ και $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Εάν κανείς αντικαταστήσει τις ισότητες με "$\simeq$", τότε προκύπτει η ακόλουθη σημαντική έννοια (τής *ομοτοπικής ισοδυναμίας*):

B.5.17 Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X και Y καλείται **ομοτοπική ισοδυναμία** όταν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $g : Y \longrightarrow X$ με $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ και $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Χρησιμοποιούμενος συμβολισμός:

$$\boxed{X \simeq Y \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\exists \text{ κάποια ομοτοπική ισοδυναμία } f : X \longrightarrow Y].}$$

(Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι οι X και Y είναι **ομοτοπικώς ισοδύναμοι** ή ότι **διαθέτουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο**[48].)

[47] Borsuk, *Karol* (8/5/1905-24/1/1982). Πολωνός μαθηματικός. Καθηγητής τού Πανεπιστημίου τής Βαρσοβίας από το 1938. Έγραψε αξιόλογες εργασίες επί τής Τοπολογίας και των θεμελίων τής πολυδιάστατης Αναλυτικής Γεωμετρίας. Είναι αυτός που εισήγαγε τις έννοιες «σύμπτυξη», «απόλυτη σύμπτυξη» και «ομοτοπία», όπως τις γνωρίζουμε σήμερα. Ο Borsuk διακρίθηκε ιδιαιτέρως για τα άρθρα του επί τής θεωρίας των σταθερών σημείων.

[48] Κατ' αναλογίαν, ο συμβολισμός $X \not\simeq Y$ θα δηλοί ότι οι X και Y δεν είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι.

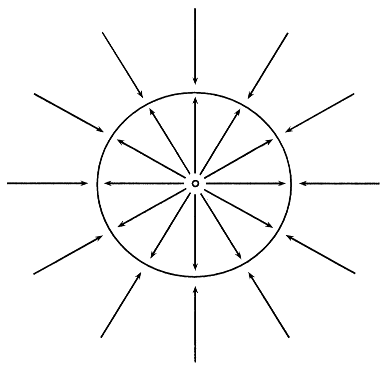
B.5.18 Παράδειγμα. Ο $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ έχει τον ομοτοπικό τύπο τής $\mathbb{S}^{d-1}$. Πράγματι· εάν $i : \mathbb{S}^{d-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ είναι η συνήθης ένθεση και

$$g : \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{S}^{d-1},\ \mathbf{x} \longmapsto g(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||},$$

τότε $g \circ i \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{d-1}}$ και $i \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ μέσω τής

$$H(\mathbf{x}, t) := (1-t)\mathbf{x} + tg(\mathbf{x}).$$

Η περίπτωση, κατά την οποία $d = 2$, εικογραφείται στο επόμενο σχήμα. Τα βέλη υποδεικνύουν το πώς τα σημεία κινούνται κατά τη σταδιακή εφαρμογή τής H.



Φυσικά, ομοιομορφικοί χώροι διαθέτουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο. Ωστόσο, υπάρχουν πάμπολλα παραδείγματα συνεκτικών (ακόμη και συμπαγών) τοπολογικών χώρων, οι οποίοι είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι αλλά όχι ομοιομορφικοί[49]. Κάποια απλά παραδείγματα αυτού τού είδους προκύπτουν άμεσα εάν κανείς ανακαλέσει το θεώρημα τής ταξινομήσεως των χώρων φακού *μέχρις ομοτοπικής ισοδυναμίας*[50].

B.5.19 Θεώρημα (Ταξινόμηση χώρων φακού μέχρις "$\simeq$", J.H.C. Whitehead, 1941.). *Δυο χώροι φακού $\mathbb{L}(p, q)$ και $\mathbb{L}(p', q')$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι εάν και μόνον εάν*[51]

$$p = p' \ \ \textit{και} \ \ q \equiv \pm k^2 q' (\mathrm{mod} p)$$

για κάποιον $k \in \{1, ..., p-1\}$.

B.5.20 Παράδειγμα. Για τους χώρους φακού $\mathbb{L}(7, 1)$ και $\mathbb{L}(7, 2)$ έχουμε

$$\mathbb{L}(7,1) \simeq \mathbb{L}(7,2) \ \ \text{αλλά} \ \ \mathbb{L}(7,1) \not\approx \mathbb{L}(7,2),$$

διότι $2 \equiv 3^2 (\mathrm{mod}\ 7)$ & $2 \not\equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\ 7)$ (βάσει των θεωρημάτων B.5.19 και B.4.11).

[49]Στο παράδειγμα B.5.18 οι $\mathbb{S}^{d-1}$ και $\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο αλλά δεν μπορεί να είναι ομοιομορφικοί χώροι, διότι ο πρώτος εξ αυτών είναι συμπαγής, ενώ ο δεύτερος δεν είναι. Αντιθέτως, στο παράδειγμα B.5.20, τα θεωρούμενα πολυπτύγματα είναι ισοδιάστατα και (αμφότερα) συμπαγή.

[50]Βλ. J.H.C. Whitehead: *On incidence matrices, nuclei and homotopy types*, Annals of Math. (2) **42** (1941), 1197-1239.

[51]Εάν υποτεθεί ότι $\mathbb{L}(p, q) \simeq \mathbb{L}(p', q')$, για μια απλή απόδειξη τού ότι ικανοποιούνται κατ' ανάγκην αυτές οι αριθμητικές συνθήκες, βλ. Hilton & Wylie [69], σελ. 223-225.

B.5.21 Πρόταση. *Ένας τοπολογικός χώρος X είναι συσταλτός εάν και μόνον εάν έχει τον ομοτοπικό τύπο ενός σημείου.*

Απόδειξη. Δοθέντος ενός σημείου $x_0 \in X$, σημειώνουμε ως $c_{x_0} : X \longrightarrow \{x_0\}$ τη σταθερή απεικόνιση και ως $i : \{x_0\} \hookrightarrow X$ τη συνήθη ένθεση. Εάν $\mathrm{id}_X \simeq c_{x_0}$, τότε οι προηγούμενες απεικονίσεις δείχνουν ότι $X \simeq \{x_0\}$. Και αντιστρόφως· εάν μας δοθούν συνεχείς απεικονίσεις $f : X \longrightarrow \{x_0\}$ και $g : \{x_0\} \hookrightarrow X$, με $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ και $f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\{x_0\}}$, τότε η id_X είναι ομότοπη τής $x \longmapsto g(x_0)$. □

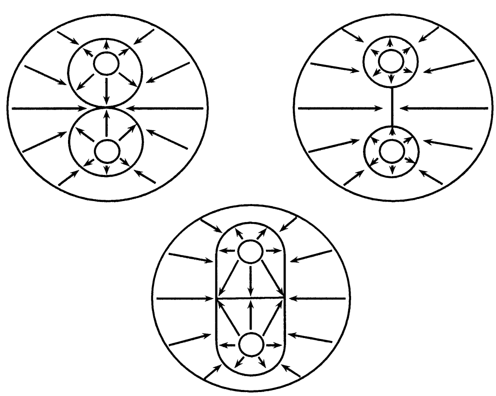
B.5.22 Ορισμός. Έστω A ένας υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου X και έστω $i : A \hookrightarrow X$ η συνήθης ένθεση. Ο A καλείται **παραμορφωτική σύμπτυξη τού** X (deformation retract of X) όταν υπάρχει απεικόνιση συμπτύξεως[52] $r : X \to A$ (βλ. B.5.13) για την οποία ισχύει $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$. Εάν, επιπροσθέτως, $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ σχ. A (βλ. εδ. B.5.7), τότε ο A καλείται **ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού** X (strong deformation retract of X).

B.5.23 Σημείωση. Εάν ο A είναι παραμορφωτική σύμπτυξη τού X, τότε $A \simeq X$.

B.5.24 Παραδείγματα. (i) Η μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^{d-1}$ είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη των $\mathbb{B}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ (ή ακόμα και τού $\mathbb{B}^d \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\}$, όπου $\mathbf{x}_0 \in \mathring{\mathbb{B}}^d$). Η απόδειξη κάνει χρήση τής ομοτοπίας τής ορισθείσας στο παράδειγμα B.5.18.

(ii) Εάν B είναι παραμορφωτική (και αντιστοίχως, ισχυρή παραμορφωτική) σύμπτυξη τού A και A παραμορφωτική (και αντιστοίχως, ισχυρή παραμορφωτική) σύμπτυξη τού X, τότε και ο B είναι παραμορφωτική (και αντιστοίχως, ισχυρή παραμορφωτική) σύμπτυξη τού X.

(iii) Το κάτωθι σχήμα δείχνει (κατά σειράν) τις ακόλουθες παραμορφωτικές συμπτύξεις ενός δίσκου ($\approx \mathbb{B}^2$) που φέρει δύο τρύπες: τη μονοσημειακή ένωση δύο κύκλων (γνωστή και ως *περίγραμμα τού αριθμού* 8), δύο κύκλους συνδεδεμένους μέσω ενός ευθυγράμμου τμήματος και έναν χώρο που ομοιάζει με το γράμμα Θ.



[52] Προφανώς, $r \circ i = \mathrm{id}_A$.

(iv) Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, τότε τόσον το «δάπεδο» $X \times \{0\}$ όσον και η «οροφή» $X \times \{1\}$ τού (μοναδιαίου) κυλίνδρου $X \times \mathbf{I}$ (βλ. B.2.11 (ii)) είναι ισχυρές παραμορφωτικές συμπτύξεις τού $X \times \mathbf{I}$. Επίσης, η κορυφή τού $\mathrm{cone}(X)$ είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη αυτού.

(v) Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι και $\{y_0\}$ ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού Y (όπου $y_0 \in Y$), τότε ο $X \times \{y_0\}$ είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $X \times Y$ και ο X ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $X \vee Y$.

B.5.25 Πρόταση. *Έστω A ένας κλειστός υπόχωρος ενός τοπολογικού χώρου X και έστω $f : A \longrightarrow Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Εάν ο A είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού X, τότε ο Y είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $Y \cup_f X$.*

Απόδειξη. Έστω $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow X$ μια ομοτοπία σχετική προς το A (βλ. B.5.7) με $H_0 = \mathrm{id}_X$ και $H_1(X) = A$. Τότε η επαγομένη ομοτοπία:

$$(X \times Y) \times \mathbf{I} \longrightarrow X + Y$$

είναι συμβατή με τη σχέση ισοδυναμίας $a \sim f(a)$, $a \in A$, και (λόγω τού B.5.11) η ομοτοπία

$$\overline{H} : (Y \cup_f X) \times \mathbf{I} \longrightarrow Y \cup_f X$$

για την οποία ισχύει $\overline{H}_0 = \mathrm{id}_{Y \cup_f X}$ και $\overline{H}_1(Y \cup_f X) = Y$ μας οδηγεί στην επαλήθευση τού ισχυρισμού. □

B.6 ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΟΜΑΔΑ


H. Poincaré

Η έννοια τής *θεμελιώδους ομάδας* εισήχθη το 1895 (και, σε κάπως ακριβέστερη διατύπωση, το 1904) από τον Poincaré[53] (ως προϊόν των μελετών του περί τού συσχετισμού κλειστών δρόμων σε επιφάνειες και συστημάτων υποκαταστάσεως πλειότιμων συναρτήσεων επ' αυτών, στο πλαίσιο τής Θεωρίας Συναρτήσεων τού Fuchs), ενώ η αλγεβρική της υπόσταση ξεκίνησε να κεντρίζει το ενδιαφέρον των ερευνητών αργότερα, ιδίως περί τη δεύτερη και την τρίτη δεκαετία τού 20ου αιώνα. (Πρβλ. Scholz [125], σελ. 311-315, και Stillwell [127], σελ. 110-116.)

[53] Poincaré, *Henri* (29/4/1854-17/7/1912). Γάλλος μαθηματικός, φυσικός, αστρονόμος και φιλόσοφος. Εξάδελφος τού ενάτου προέδρου (1913-1920) τής Γαλλικής Δημοκρατίας, Raymond Poincaré. Σπούδασε μηχανολογία στο Πολυτεχνείο των Παρισίων, αλλά σύντομα ανακάλυψε την κλίση του στα Μαθηματικά. Το 1879 εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό τον G. Darboux επί ορισμένων διαφορικών εξισώσεων. Έκτοτε η σταδιοδρομία του υπήρξε υποδειγματική. Διετέλεσε μάλιστα καθηγητής τής Sorbonne (από το 1885), όπου δίδαξε Μαθηματική Φυσική, Ουράνιο Μηχανική και Ανάλυση. Ο μέγας γεωμέτρης F. Klein τον χαρακτήρισε στις αρχές τού εικοστού αιώνα ως τον «πλέον αναγνωρισμένο εκπρόσωπο των Γαλλικών Μαθηματικών». Πράγματι· την εποχή που έζησε πιθανώς να μην υπήρχε άλλος τόσο «καθολικός μαθηματικός» με τέτοια φαντασία και αποδοτικό έργο. Ο Poincaré ήταν ιδιαίτερα παραγωγικός. (250 ερευνητικές εργασίες και άλλες τόσες εκλαϊκευμένες δημοσιεύσεις, λόγοι και άρθρα φιλοσοφικού περιεχομένου κοσμούν το πνευματικό του κληροδότημα). Οι κύριες περιοχές τής έρευνάς του περιλαμβάνουν τη Θεωρία των Μιγαδικών Συναρτήσεων, τη Θεωρία Δυναμικού, τη Θερμοδυναμική, την Υδρομηχανική, τη Θεωρία Ελαστικότητας, την Οπτική, την Ηλεκτροδυναμική, τον Ηλεκτρομαγνητισμό, την Κοσμολογία κ.α. Εξάλλου δίκαια θεωρείται ως ο πατέρας τής σύγχρονης Αλγεβρικής Τοπολογίας (που τότε ονομαζόταν «Analysis Situs»). Για μια σύγχρονη εισαγωγή στο τοπολογικό του έργο οι αναγνώστες παραπέμπονται στα δύο πρώτα κεφάλαια τού βιβλίου [116] τού J. Dieudonné. Για περισσότερα βιογραφικά στοιχεία βλ. E. T. Bell: *Οι μαθηματικοί. Τόμος* II. (*Από τον Lobatchewsky έως τον Cantor*), σε μετάφραση Ν. Σταματάκη, Π. Ε. Κ., 1993, κεφ. 28, σελ. 389-436.

B.6.1 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Εάν

$$\alpha, \beta : \mathbf{I} \longrightarrow X$$

είναι δρόμοι εντός τού X (υπό την έννοια τού ορισμού B.1.10, όπου $\mathbf{I} := [0,1]$), για τους οποίους ισχύει $\alpha(1) = \beta(0)$, τότε ως **γινόμενο** των α, β ορίζεται ο δρόμος[54]

$$\boxed{\mathbf{I} \ni t \longmapsto (\alpha \circledast \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t-1), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}}$$

Εξάλλου, για κάθε δρόμο $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow X$ εντός τού X θέτουμε

$$\boxed{\overline{\alpha} : \mathbf{I} \longrightarrow X, \;\; t \longmapsto \overline{\alpha}(t) := \alpha(1-t)\,.}$$

B.6.2 Πρόταση. *Εάν $\alpha, \beta : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι δυο δρόμοι εντός ενός τοπολογικού χώρου X, για τους οποίους ισχύει $\alpha(1) = \beta(0)$, τότε*

$$\overline{\alpha \circledast \beta} = \overline{\beta} \circledast \overline{\alpha}. \tag{B.6}$$

Απόδειξη. Για κάθε $t \in \mathbf{I}$ έχουμε προφανώς

$$(\overline{\alpha \circledast \beta})(t) = (\alpha \circledast \beta)(1-t) = \begin{cases} \alpha(2-2t), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \\ \beta(1-2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}]. \end{cases}$$

Από την άλλη μεριά, $\left(\overline{\beta} \circledast \overline{\alpha}\right)(t) = (\alpha \circledast \beta)(1-t)$, οπότε η ισότητα (B.6) είναι όντως αληθής. □

B.6.3 Πρόταση. *Ας υποθέσουμε ότι $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ είναι δρόμοι εντός ενός τοπολογικού χώρου X, όπου*

$$\alpha(0) = \alpha'(0)\,,\; \alpha(1) = \alpha'(1) = \beta(0) = \beta'(0)\,,\; \beta(1) = \beta'(1)$$

και $\alpha \simeq \alpha'$ σχ.$\{0,1\}$, $\beta \simeq \beta'$ σχ.$\{0,1\}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $\alpha \circledast \beta \simeq \alpha' \circledast \beta'$ σχ.$\{0,1\}$.

(ii) $\overline{\alpha} \simeq \overline{\alpha'}$ σχ.$\{0,1\}$.

Απόδειξη. (i) Εάν $H' : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον δρόμο α στον δρόμο α' και $H'' : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X$ μια ομοτοπία σχετικώς προς το

[54] Επειδή οι περιορισμοί $(\alpha \circledast \beta)|_{[0,\frac{1}{2}]}$ και $(\alpha \circledast \beta)|_{[\frac{1}{2},1]}$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, η απεικόνιση $\alpha \circledast \beta$ είναι καθ' ολοκληρίαν (ήτοι επί ολοκλήρου τού $\mathbf{I}$) συνεχής επί τη βάσει τού *λήμματος τής συγκολλήσεως* (gluing lemma). Βλ. Dugundji [38], Chapter III, Theorem 9.4, σελ. 83, και Munkres [41], Chapter 2, Theorem 18.3, σελ. 108-109. (Το εν λόγω λήμμα χρησιμοποιείται κατ' επανάληψη -αλλ' ενίοτε σιωπηρώς- σε αρκετές από τις αποδείξεις που ακολουθούν προκειμένου να εξασφαλίζεται η συνέχεια απεικονίσεων με *διαφορετικούς* τύπους ορισμού σε διαφορετικά, πεπερασμένου πλήθους κλειστά υποδιαστήματα που διαμελίζουν το $\mathbf{I}$.)

$\{0,1\}$ από τον δρόμο β στον δρόμο β', τότε ορίζεται μια ομοτοπία

$$H(t,s) := \begin{cases} H'(2t,s), & \text{όταν } t \in [0,\frac{1}{2}], \\ H''(2t-1,s), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2},1], \end{cases}$$

με $H(0,s) = \alpha(0) = \alpha'(0)$, $H(1,s) = \beta(1) = \beta'(1)$ και

$$H(t,0) = (\alpha \circledast \beta)(t), \;\; H(t,1) = (\alpha' \circledast \beta')(t),$$

απ' όπου έπεται ότι $\alpha \circledast \beta \simeq \alpha' \circledast \beta'$ σχ.$\{0,1\}$.

(ii) Εάν $H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον δρόμο α στον δρόμο α', τότε ορίζεται μια ομοτοπία

$$\overline{H} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X, \;\; (t,s) \longmapsto \overline{H}(t,s) := H(1-t,s),$$

με $\overline{H}(0,s) = H(1,s) = \alpha(1) = \overline{\alpha}(0) = \alpha'(1) = \overline{\alpha'}(0)$,

$$\overline{H}(1,s) = H(0,s) = \alpha(0) = \overline{\alpha}(1) = \alpha'(0) = \overline{\alpha'}(1)$$

και $\overline{H}(t,0) = \overline{\alpha}(t)$, $\overline{H}(t,1) = \overline{\alpha'}(t)$, οπότε $\overline{\alpha} \simeq \overline{\alpha'}$ σχ.$\{0,1\}$. □

B.6.4 Λήμμα. *Εάν α, α' είναι δρόμοι εντός ενός τοπολογικού χώρου X και $f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ μια συνεχής απεικόνιση με $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ και $\alpha' = \alpha \circ f$, τότε $\alpha \simeq \alpha'$* σχ.$\{0,1\}$.

Απόδειξη. Επειδή $sf(t) + (1-s)t \in [0,1]$ για κάθε ζεύγος $(t,s) \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}$, ορίζεται καλώς η απεικόνιση

$$H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X, \;\; (t,s) \longmapsto H(t,s) := \alpha(sf(t) + (1-s)t),$$

η οποία είναι συνεχής. Προφανώς, $H_0 = \alpha$, $H_1 = \alpha \circ f = \alpha'$ και για κάθε $s \in \mathbf{I}$,

$$H(0,s) = \alpha(0) \;\; \text{και} \;\; H(1,s) = \alpha(1).$$

Άρα η H είναι μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον α στον α'. □

B.6.5 Ορισμός (Παραμετρικό γινόμενο δρόμων). Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Εάν $\alpha, \alpha' : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι δυο δρόμοι εντός τού X με $\alpha(1) = \alpha'(0)$, τότε για κάθε $\xi \in (0,1)$ ορίζεται ως **γινόμενο των** α, α' **με παράμετρο** ξ ο δρόμος

$$\boxed{\mathbf{I} \ni t \longmapsto (\alpha \circledast_\xi \alpha')(t) := \begin{cases} \alpha(\frac{1}{\xi}t), & \text{όταν } t \in [0,\xi], \\ \alpha'(\frac{1}{1-\xi}(t-\xi)), & \text{όταν } t \in [\xi,1]. \end{cases}}$$

(Το *σύνηθες* γινόμενο B.6.1 είναι αυτό που έχει ως παράμετρό του το $\xi = \frac{1}{2}$, ήτοι το μέσον τού $\mathbf{I}$. Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι το γινόμενο δυο διαδοχικών δρόμων που έχει παράμετρο $\xi \in (0,1)$ είναι ομότοπο τού *συνήθους σχετικώς προς το δισύνολο* $\{0,1\}$.)

B.6.6 Λήμμα. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Εάν $\alpha, \alpha' : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι δυο δρόμοι εντός τού X με $\alpha(1) = \alpha'(0)$ και $\xi \in (0,1)$, τότε*

$$(\alpha \circledast_\xi \alpha') \simeq (\alpha \circledast \alpha') \text{ σχ. } \{0,1\}.$$

Απόδειξη. Έστω $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}$ ο δρόμος εντός τού $\mathbf{I}$ ο οριζόμενος από τον τύπο:

$$f(t) := \begin{cases} 2\xi t, & \text{όταν } t \in [0,\xi], \\ \xi + (2t-1)(1-\xi), & \text{όταν } t \in [\xi, 1]. \end{cases}$$

Τότε $(\alpha \circledast_\xi \alpha') \circ f = \alpha \circledast \alpha'$ και ο ισχυρισμός είναι αληθής βάσει τού B.6.4. □

B.6.7 Πρόταση. *Εάν α, β, γ είναι δρόμοι εντός ενός τοπολογικού χώρου X με $\alpha(1) = \beta(0)$ και $\beta(1) = \gamma(0)$, τότε*

$$(\alpha \circledast \beta) \circledast \gamma \simeq \alpha \circledast (\beta \circledast \gamma) \text{ σχ. } \{0,1\}. \tag{B.7}$$

Απόδειξη. Από το λήμμα B.6.6 λαμβάνουμε

$$\alpha \circledast (\beta \circledast \gamma) \simeq \alpha \circledast_{\frac{1}{3}} (\beta \circledast \gamma) \text{ σχ. } \{0,1\}$$

και $(\alpha \circledast \beta) \circledast \gamma \simeq (\alpha \circledast \beta) \circledast_{\frac{2}{3}} \gamma$ σχ. $\{0,1\}$. Είναι άμεσος ο έλεγχος τής ισχύος τής ισότητας $\alpha \circledast_{\frac{1}{3}} (\beta \circledast \gamma) = (\alpha \circledast \beta) \circledast_{\frac{2}{3}} \gamma$. Αρκεί λοιπόν να εφαρμοσθεί το (i) τής προτάσεως B.6.3. □

B.6.8 Πρόταση (Περί συρμού διαδοχικών δρόμων σχ. $\{0,1\}$). *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Εάν οι $\alpha_1, ..., \alpha_k : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι k δρόμοι εντός τού X με $\alpha_\nu(1) = \alpha_{\nu+1}(0)$ για κάθε $\nu \in \{1, ..., k-1\}$, τότε*

$$\boxed{(((\alpha_1 \circledast \alpha_2) \circledast \alpha_3) \circledast \cdots \circledast \alpha_k) \simeq \beta_k \text{ σχ. } \{0,1\},}$$

όπου ο $\beta_k : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι δρόμος εντός τού X οριζόμενος από τον πολλαπλό τύπο

$$\boxed{\beta_k(t) := \alpha_\nu\left(k\left(t - \tfrac{\nu-1}{k}\right)\right),}$$

για κάθε $t \in [\frac{\nu-1}{k}, \frac{\nu}{k}]$ και για κάθε $\nu \in \{1, ..., k\}$.

Απόδειξη. Θα γίνει χρήση μαθηματικής επαγωγής επί τού k. Για $k = 2$ ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής, διότι (εξ ορισμού) $\beta_2 = \alpha_1 \circledast \alpha_2$. Ας υποθέσουμε ότι $k \geqslant 3$ και ότι αυτός είναι αληθής και για τον συρμό των $k-1$ διαδοχικών δρόμων $\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$. Από το (i) τής προτάσεως B.6.3 και την επαγωγική μας υπόθεση λαμβάνουμε

$$(((\alpha_1 \circledast \alpha_2) \circledast \alpha_3) \circledast \cdots \circledast \alpha_{k-1}) \circledast \alpha_k) \simeq (\beta_{k-1} \circledast \alpha_k) \text{ σχ. } \{0,1\}$$

και (μέσω τού λήμματος B.6.6) $(\beta_{k-1} \circledast \alpha_k) \simeq (\beta_{k-1} \circledast_{\frac{k-1}{k}} \alpha_k)$ σχ. $\{0,1\}$, οπότε

$$(((\alpha_1 \circledast \alpha_2) \circledast \alpha_3) \circledast \cdots \circledast \alpha_{k-1}) \circledast \alpha_k) \simeq (\beta_{k-1} \circledast_{\frac{k-1}{k}} \alpha_k) \text{ σχ. } \{0,1\},$$

όπου για κάθε $t \in \mathbf{I}$ έχουμε

$$(\beta_{k-1} \circledast_{\frac{k-1}{k}} \alpha_k)(t) := \begin{cases} \beta_{k-1}(\frac{k}{k-1}t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{k-1}{k}], \\ \alpha_k(k(t - \frac{k-1}{k})), & \text{όταν } t \in [\frac{k-1}{k}, 1]. \end{cases}$$

Όμως

$$\beta_{k-1}(\tfrac{k}{k-1}t) = \alpha_\nu((k-1)(\tfrac{k}{k-1}t - \tfrac{\nu-1}{k-1})) = \alpha_\nu(kt - (\nu - 1))$$

όταν $\frac{\nu-1}{k-1} \leqslant \frac{k}{k-1}t \leqslant \frac{\nu}{k-1}$, οπότε

$$\beta_{k-1}(\tfrac{k}{k-1}t) = \alpha_\nu(k(t - \tfrac{\nu-1}{k})), \ \ \forall t \in [\tfrac{\nu-1}{k}, \tfrac{\nu}{k}],$$

και για κάθε $\nu \in \{1, ..., k\}$, απ' όπου έπεται ότι $\beta_{k-1} \circledast_{\frac{k-1}{k}} \alpha_k = \beta_k$. □

B.6.9 Συμβολισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω $x \in X$. Ως

$$\mathrm{const}_x : \mathbf{I} \longrightarrow X, \ t \longmapsto \mathrm{const}_x(t) := x,$$

θα συμβολίζεται ο **σταθερός δρόμος** (που στέλνει όλο το $\mathbf{I}$ να απεικονισθεί στο x).

B.6.10 Πρόταση. *Για κάθε δρόμο α εντός ενός τοπολογικού χώρου X έχουμε*

$$\mathrm{const}_{\alpha(0)} \circledast \alpha \simeq \alpha \text{ σχ. } \{0,1\} \ \ \textit{και} \ \ \alpha \circledast \mathrm{const}_{\alpha(1)} \simeq \alpha \text{ σχ. } \{0,1\}\,. \tag{B.8}$$

Απόδειξη. Ορίζοντας τις συνεχείς απεικονίσεις

$$f(t) := \begin{cases} 0, & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2t-1, & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad \text{και} \ \ g(t) := \begin{cases} 2t, & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ και

$$\mathrm{const}_{\alpha(0)} \circledast \alpha = \alpha \circ f, \ \ \alpha \circledast \mathrm{const}_{\alpha(1)} = \alpha \circ g.$$

Μέσω διπλής εφαρμογής τού B.6.4 διαπιστώνουμε ότι οι (B.8) είναι αληθείς. □

B.6.11 Πρόταση. *Για κάθε δρόμο α εντός ενός τοπολογικού χώρου X έχουμε*

$$\alpha \circledast \overline{\alpha} \simeq \mathrm{const}_{\alpha(0)} \text{ σχ. } \{0,1\} \ \ \textit{και} \ \ \overline{\alpha} \circledast \alpha \simeq \mathrm{const}_{\alpha(1)} \text{ σχ. } \{0,1\}\,. \tag{B.9}$$

Απόδειξη. Προφανώς, $\alpha \circledast \overline{\alpha} = \alpha \circ f$, όπου

$$(\alpha \circledast \overline{\alpha})\,(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \overline{\alpha}(2t-1), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad \text{και} \ \ f(t) := \begin{cases} 2t, & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2-2t, & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

με $\overline{\alpha}(2t-1) = \alpha(2-2t)$, $\forall t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Θέτοντας

$$H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X, \ \ (t,s) \longmapsto H(t,s) := \alpha(sf(t)),$$

λαμβάνουμε $H(t,0) = \alpha(0)$, $H(t,1) = \alpha\,(f(t)) = (\alpha \circledast \overline{\alpha})(t)$ και

$$H(0,s) = \alpha(0) = \alpha(sf(1)) = H(1,s).$$

Εξ αυτών έπεται ότι η H αποτελεί μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον $\mathrm{const}_{\alpha(0)}$ στον $\alpha \circledast \overline{\alpha}$, οπότε η πρώτη εκ των (B.9) είναι αληθής. Για την επαλήθευση τής δεύτερης αρκεί κανείς να επαναλάβει την προηγηθείσα επιχειρηματολογία με τον δρόμο $\overline{\alpha}$ στη θέση τού δρόμου α, δεδομένου ότι $\overline{\overline{\alpha}} = \alpha$. □

B.6.12 Ορισμός. Ένας δρόμος $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow X$ εντός ενός τοπολογικού χώρου X καλείται **βρόχος** (ή **κλειστός δρόμος**) έχων το $x_0 \in X$ ως **βασικό του σημείο** (ή **σημείο αναφοράς**) όταν $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. Το σύνολο όλων των βρόχων εντός τού X των εχόντων ως βασικό τους σημείο το x_0 θα σημειώνεται εφεξής ως $\Omega(X, x_0)$. Σημειωτέον ότι για οιουσδήποτε βρόχους $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$ έχουμε $\alpha \circledast \beta \in \Omega(X, x_0)$.

B.6.13 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω x_0 ένα σημείο αυτού. Για κάθε $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ συμβολίζουμε εν συντομία ως $[\alpha]^{\text{ομ.}}$ την κλάση ομοτοπίας $[\alpha]^{\text{ομ.}}_{(\mathbf{I},\{0,1\}),X}$ τού α σχετικώς προς το $\{0,1\}$ (βλ. εδ. B.5.9) και θέτουμε

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) := \{\, [\alpha]^{\text{ομ.}} \,|\, \alpha \in \Omega(X, x_0)\} .}$$

Βάσει των προτάσεων B.6.7, B.6.10 και B.6.11, το $\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)$, εφοδιαζόμενο με την εσωτερική πράξη[55]

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) \times \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) \ni ([\alpha]^{\text{ομ.}}, [\beta]^{\text{ομ.}}) \longmapsto [\alpha]^{\text{ομ.}} \odot [\beta]^{\text{ομ.}} := [\alpha \circledast \beta]^{\text{ομ.}} \in \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0),}$$

καθίσταται ομάδα έχουσα ως ουδέτερό της στοιχείο την κλάση $[\mathrm{const}_{x_0}]^{\text{ομ.}}$ και ως αντίστροφο οιασδήποτε κλάσεως $[\alpha]^{\text{ομ.}} \in \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)$ (ως προς την "$\odot$") την $[\overline{\alpha}]^{\text{ομ.}}$. Η $(\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0), \odot)$ καλείται **θεμελιώδης ομάδα** (ή **πρώτη ομάδα ομοτοπίας**) **τού** X **στο σημείο** x_0.

B.6.14 Πρόταση. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Εάν $x_0, x_0' \in X$ και $\beta : \mathbf{I} \to X$ είναι ένας δρόμος εντός τού X με*

$$\beta(0) = x_0' \ \textit{και} \ \beta(1) = x_0,$$

τότε η απεικόνιση

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0) \ni [\alpha]^{\text{ομ.}} \overset{\vartheta_\beta}{\longmapsto} [\beta \circledast \alpha \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}} \in \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0')} \tag{B.10}$$

αποτελεί έναν ομομορφισμό ομάδων. Επιπροσθέτως, ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) *Εάν $\beta_1, \beta_2 : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι δρόμοι εντός τού X με $\beta_1(1) = \beta_2(0)$, τότε*

$$\vartheta_{\beta_1 \circledast \beta_2} = \vartheta_{\beta_1} \circ \vartheta_{\beta_2}.$$

(ii) *Ο (B.10) είναι ισομορφισμός ομάδων εξαρτώμενος μόνον από την κλάση $[\beta]^{\text{ομ.}}$.*
(iii) *Εάν $\gamma : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι ένας δεύτερος δρόμος εντός τού X με $\gamma(0) = x_0'$ και $\gamma(1) = x_0$, τότε οι ϑ_β και ϑ_γ διαφέρουν μόνον μέχρις ενός εσωτερικού αυτομορφισμού τής ομάδας $\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0')$. Ιδιαιτέρως, όταν η $\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή, ο εν λόγω ισομορφισμός ϑ_β είναι μονοσημάντως ορισμένος.*

[55] Το ότι η απεικόνιση $([\alpha]^{\text{ομ.}}, [\beta]^{\text{ομ.}}) \longmapsto [\alpha]^{\text{ομ.}} \odot [\beta]^{\text{ομ.}}$ είναι *καλώς ορισμένη* έπεται από το (i) τής προτάσεως B.6.3.

Αποδειξη. Εάν $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega(X, x_0)$, τότε

$$\begin{aligned}
&\vartheta_\beta([\alpha_1]^{\text{ομ.}} \odot [\alpha_2]^{\text{ομ.}}) = \vartheta_\beta([\alpha_1 \circledast \alpha_2]^{\text{ομ.}}) \\
&= [\beta \circledast \alpha_1 \circledast \alpha_2 \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}} \underset{(\text{B.9})}{=} [\beta \circledast \alpha_1 \circledast \overline{\beta} \circledast \beta \circledast \alpha_2 \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}} \\
&= [\beta \circledast \alpha_1 \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}} \odot [\beta \circledast \alpha_2 \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}} = \vartheta_\beta([\alpha_1]^{\text{ομ.}}) \odot \vartheta_\beta([\alpha_2]^{\text{ομ.}}).
\end{aligned}$$

(i) Εάν $\beta_1, \beta_2 : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι δρόμοι εντός τού X με $\beta_1(1) = \beta_2(0)$, τότε για κάθε $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\vartheta_{\beta_1 \circledast \beta_2}([\alpha]^{\text{ομ.}}) = [(\beta_1 \circledast \beta_2) \circledast \alpha \circledast (\overline{\beta_1 \circledast \beta_2})]^{\text{ομ.}} \\
&\underset{(\text{B.6})}{=} [(\beta_1 \circledast \beta_2) \circledast \alpha \circledast (\overline{\beta_2} \circledast \overline{\beta_1})]^{\text{ομ.}} = [\beta_1 \circledast (\beta_2 \circledast \alpha \circledast \overline{\beta_2}) \circledast \overline{\beta_1}]^{\text{ομ.}} \\
&= [\beta_1]^{\text{ομ.}} \odot [\beta_2 \circledast \alpha \circledast \overline{\beta_2}]^{\text{ομ.}} \odot [\overline{\beta_1}]^{\text{ομ.}} = [\beta_1]^{\text{ομ.}} \odot \vartheta_{\beta_2}([\alpha]^{\text{ομ.}}) \odot [\overline{\beta_1}]^{\text{ομ.}} \\
&= [\beta_1 \circledast \vartheta_{\beta_2}([\alpha]^{\text{ομ.}}) \circledast \overline{\beta_1}]^{\text{ομ.}} = \vartheta_{\beta_1}(\vartheta_{\beta_2}([\alpha]^{\text{ομ.}})) = (\vartheta_{\beta_1} \circ \vartheta_{\beta_2})([\alpha]^{\text{ομ.}}).
\end{aligned}$$

(ii) Ο ομομορφισμός (B.10) είναι *ισομορφισμός* έχων ως αντίστροφό του τον

$$\vartheta_{\overline{\beta}} : \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0') \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(X, x_0),$$

διότι (σύμφωνα με το (i) και την πρόταση B.6.11)

$$\vartheta_\beta \circ \vartheta_{\overline{\beta}} = \vartheta_{\beta \circledast \overline{\beta}} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0')}, \;\; \vartheta_{\overline{\beta}} \circ \vartheta_\beta = \vartheta_{\overline{\beta} \circledast \beta} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)}.$$

Το ότι αυτός εξαρτάται μόνον από την κλάση $[\beta]^{\text{ομ.}}$ έπεται από την πρόταση B.6.3.
(iii) Για κάθε $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\vartheta_\gamma([\alpha]^{\text{ομ.}}) = [\gamma \circledast \alpha \circledast \overline{\gamma}]^{\text{ομ.}} \underset{(\text{B.9})}{=} [\gamma \circledast (\overline{\beta} \circledast \beta) \circledast \alpha \circledast (\overline{\beta} \circledast \beta) \circledast \overline{\gamma}]^{\text{ομ.}} \\
&= [(\gamma \circledast \overline{\beta}) \circledast (\beta \circledast \alpha \circledast \overline{\beta}) \circledast (\beta \circledast \overline{\gamma})]^{\text{ομ.}} = [\gamma \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}} \odot \vartheta_\beta([\alpha]^{\text{ομ.}}) \odot ([\gamma \circledast \overline{\beta}]^{\text{ομ.}})^{-1},
\end{aligned}$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

B.6.15 Σημείωση. Στην περίπτωση κατά την οποία ο X είναι *δρομοσυνεκτικός*, οι θεμελιώδεις ομάδες του σε *διαφορετικά* βασικά σημεία του είναι *πάντοτε ισόμορφες*. Γι' αυτόν τον λόγο ενίοτε γράφουμε $\boldsymbol{\pi}_1(X)$ αντί $\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)$ (καλώντας τή μέχρις ισομορφισμού μονοσημάντως ορισμένη $\boldsymbol{\pi}_1(X)$ **θεμελιώδη ομάδα τού** X) χωρίς να κάνουμε μνεία τού σημείου αναφοράς.

▸ **Η θεμελιώδης ομάδα τού κύκλου.** Ο μοναδιαίος κύκλος $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ αποτελεί (ως προς τον συνήθη πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών) μια ομάδα, η δε εκθετική απεικόνιση

$$\boxed{\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1, \; t \longmapsto \Phi(t) := \exp(2\pi i t) = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t),}$$

έχει (ως γνωστόν) τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Η Φ είναι επιμορφισμός ομάδων από την προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}, +)$ επί τής πολλαπλασιαστικής ομάδας $(\mathbb{S}^1, \cdot)$.

(ii) $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{Z}$ και

(iii) για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ ο περιορισμός $\Phi|_{(\xi,\xi+1)}$ τής Φ επί τού ανοικτού διαστήματος $(\xi, \xi+1)$ καθορίζει έναν *ομοιομορφισμό* $(\xi, \xi+1) \xrightarrow{\approx} \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{\Phi(\xi)\}$.

Η αντίστροφος $\Psi : \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{-1\} \xrightarrow{\approx} \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ τού περιορισμού $\Phi|_{\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$ τής απεικονίσεως Φ επί τού ανοικτού διαστήματος $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ θα χρησιμοποιηθεί (στα λήμματα B.6.16 και B.6.17) κατά τρόπο ουσιαστικό[56], ούτως ώστε να καταστεί εφικτός ο προσδιορισμός τής θεμελιώδους ομάδας τού $\mathbb{S}^1$ μέχρις ισομορφισμού.

B.6.16 Λήμμα. *Εάν* $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ *είναι ένας δρόμος εντός τού* $\mathbb{S}^1$ *με* $\alpha(0) = 1$, *τότε υπάρχει ένας και μόνον δρόμος* $\widetilde{\alpha} : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *εντός τού* $\mathbb{R}$ *με* $\widetilde{\alpha}(0) = 0$ *και* $\Phi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$.

Αποδειξη. Ο α θα υποδιαιρεθεί σε μικρά κομμάτια, καθένα των οποίων μπορεί να «ανυψωθεί» μέσω τής Ψ κατά τρόπο *μοναδικό* στο $\mathbb{R}$. Οι «ανυψώσεις» αυτές (εντός τού $\mathbb{R}$) θα συντεθούν καταλλήλως παρέχοντάς μας τον ζητούμενο δρόμο $\widetilde{\alpha}$. Αλλά ας πάρουμε τα πράγματα από την αρχή: Η απεικόνιση $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ (ούσα συνεχής) είναι και *ομοιομόρφως συνεχής*[57], κάτι που σημαίνει ότι υπάρχει $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, ούτως ώστε για οιαδήποτε $t, t' \in \mathbf{I}$ να ισχύει[58] $|t - t'| < \delta \Longrightarrow |\alpha(t) - \alpha(t')| < 1$. Ιδιαιτέρως, $\alpha(t') \neq -\alpha(t)$ και ο $\Psi(\frac{\alpha(t')}{\alpha(t)})$ είναι καλώς ορισμένος. Επιλέγοντας έναν $n \in \mathbb{N}$ με $n\delta > 1$ (ή, ισοδυνάμως, με $\frac{1}{n} < \delta$) υποδιαιρούμε για κάθε $t \in \mathbf{I}$ το κλειστό διάστημα $[0, t]$ ως εξής:

$$[0, t] = [0, \tfrac{1}{n}t] \cup [\tfrac{1}{n}t, \tfrac{2}{n}t] \cup \cdots \cup [\tfrac{n-2}{n}t, \tfrac{n-1}{n}t] \cup [\tfrac{n-1}{n}t, t],$$

παρατηρούμε ότι $\left|\frac{j}{n}t - \frac{j-1}{n}t\right| = \frac{1}{n}|t| < \delta$ για κάθε $j \in \{1, ..., n\}$ και ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση

$$f_j : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{-1\},\ t \longmapsto f_j(t) := \frac{\alpha(\frac{j}{n}t)}{\alpha(\frac{j-1}{n}t)},$$

όπου $f_j(0) = 1, \forall j \in \{1, ..., n\}$. Προφανώς, για κάθε $t \in \mathbf{I}$,

$$\alpha(t) = \underbrace{\alpha(0)}_{=1} \left(\frac{\alpha(\frac{1}{n}t)}{\alpha(0)}\right)\left(\frac{\alpha(\frac{2}{n}t)}{\alpha(\frac{1}{n}t)}\right) \cdots \left(\frac{\alpha(\frac{n-1}{n}t)}{\alpha(\frac{n-2}{n}t)}\right)\left(\frac{\alpha(t)}{\alpha(\frac{n-1}{n}t)}\right) = f_1(t) f_2(t) \cdots f_n(t).$$

Επειδή $\mathrm{Im}(f_j) \subseteq \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{-1\}$ για κάθε $j \in \{1, ..., n\}$, οι συνθέσεις $\Psi \circ f_j$ είναι καλώς ορισμένες και συνεχείς. Κατόπιν τούτου, ορίζουμε τον δρόμο $\widetilde{\alpha} : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ μέσω τού τύπου

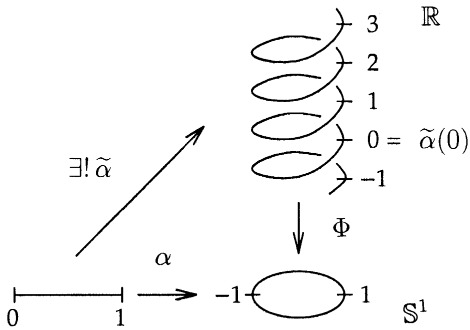
$$\widetilde{\alpha}(t) := \Psi(f_1(t)) + \Psi(f_2(t)) + \cdots + \Psi(f_n(t)),\ \forall t \in \mathbf{I}.$$

[56] Προφανώς, $\Psi(z) := \frac{1}{2\pi i}\lambda o\gamma\kappa(z)$, $\forall z \in \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{-1\}$, όπου για $z = r\exp(i\theta)$ με $r \in \mathbb{R}_{>0}$ και $-\pi < \theta < \pi$, ο *κύριος κλάδος* $\lambda o\gamma\kappa(z)$ *τής μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως* ισούται με $\ln(z) + i\theta$.

[57] Βλ. το θεώρημα τής ομοιόμορφης συνέχειας (Uniform continuity theorem), π.χ., στον Munkres [41], Chapter 3, Theorem 27.6, σελ. 176.

[58] Το $1 < 2 = \mathrm{diam}(\mathbb{S}^1) := \max\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in \mathbb{S}^1\}$ επελέχθη έτσι προκειμένου τα σημεία $\alpha(t')$ και $\alpha(t)$ να μην είναι αντιποδικά, δηλαδή να ισχύει $\alpha(t') \neq -\alpha(t)$.

(Η $\widetilde{\alpha}$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών απεικονίσεων.) Σημειωτέον ότι $\widetilde{\alpha}(0) = 0$ (καθώς έχουμε $f_j(0) = 1, \forall j \in \{1, ..., n\}$, και $\Psi(1) = 0$) και $\Phi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ (καθώς η Φ είναι ομομορφισμός ομάδων).



Υπολείπεται να δειχθεί ότι ο εν λόγω δρόμος $\widetilde{\alpha}$ είναι και ο *μοναδικός* με αυτήν την ιδιότητα. Ας υποθέσουμε, προς τούτο, ότι υπάρχει δρόμος $\widetilde{\widetilde{\alpha}} : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ εντός τού $\mathbb{R}$ με $\widetilde{\widetilde{\alpha}}(0) = 0$ και $\Phi \circ \widetilde{\widetilde{\alpha}} = \alpha$. Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση

$$h : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto h(t) := \widetilde{\alpha}(t) - \widetilde{\widetilde{\alpha}}(t).$$

Επειδή $\Phi\,(h(t)) = \dfrac{\exp(\widetilde{\alpha}(t))}{\exp(\widetilde{\widetilde{\alpha}}(t))} = 1 \Rightarrow h(t) \in \mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{Z},\ \forall t \in \mathbf{I}$, η h λαμβάνει μόνον ακέραιες τιμές. Από την άλλη μεριά, επειδή το $\mathbf{I}$ είναι συνεκτικό και ο υπόχωρος $\mathrm{Im}(h)$ τού $\mathbb{R}$ διακριτός, η h οφείλει να είναι *σταθερή απεικόνιση*[59]. Επομένως, $h(0) = 0 \Rightarrow 0 = h(t) = \widetilde{\alpha}(t) - \widetilde{\widetilde{\alpha}}(t),\ \forall t \in \mathbf{I}$. □

B.6.17 Λήμμα. *Εάν $\alpha, \beta : \mathbf{I} \to \mathbb{S}^1$ είναι δυο δρόμοι εντός τού $\mathbb{S}^1$ με $\alpha(0) = \beta(0) = 1$ που είναι ομότοποι σχετικώς προς το $\{0, 1\}$ μέσω μιας ομοτοπίας $H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, τότε υπάρχει μία και μόνον απεικόνιση $\widetilde{H} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ με $\Phi \circ \widetilde{H} = H$, η οποία αποτελεί ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0, 1\}$ από τον δρόμο $\widetilde{\alpha}$ στον δρόμο $\widetilde{\beta}$.*

Απόδειξη. Αρκεί κανείς να μιμηθεί την αποδεικτική μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για το λήμμα B.6.16. Επειδή η H είναι συνεχής, θα είναι και *ομοιομόρφως συνεχής*[60], πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$, ούτως ώστε για οιαδήποτε ζεύγη $(t, s), (t', s') \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ να ισχύει η συνεπαγωγή

$$\sqrt{(t - t')^2 + (s - s')^2} < \delta \Longrightarrow \left|H(t, s) - H(t', s')\right| < 1.$$

Ιδιαιτέρως, $H(t', s') \neq -H(t, s)$ και ο $\Psi(\frac{H(t',s')}{H(t,s)})$ είναι καλώς ορισμένος. Επιλέγοντας έναν $n \in \mathbb{N}$ με $n\delta > \sqrt{2}$ (ή, ισοδυνάμως, με $\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$) υποδιαιρούμε για κάθε

[59] Ως γνωστόν, ένας τοπολογικός χώρος X είναι συνεκτικός *εάν και μόνον εάν* δεν υφίσταται επιρριπτική συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$, όπου ο Y είναι εφοδιασμένος με τη διακριτή τοπολογία και περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. (Βλ. [38], V.1.3, σελ. 108, ή [42], Πρόταση 7.3, σελ. 112-113.)

[60] Βλ. το θεώρημα τής ομοιόμορφης συνέχειας (Uniform continuity theorem), π.χ., στον Munkres [41], Chapter 3, Theorem 27.6, σελ. 176.

$(t,s) \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ τα κλειστά διαστήματα $[0,t]$ και $[0,s]$ ως εξής:

$$[0,t] = [0, \tfrac{1}{n}t] \cup [\tfrac{1}{n}t, \tfrac{2}{n}t] \cup \cdots \cup [\tfrac{n-2}{n}t, \tfrac{n-1}{n}t] \cup [\tfrac{n-1}{n}t, t],$$
$$[0,s] = [0, \tfrac{1}{n}s] \cup [\tfrac{1}{n}s, \tfrac{2}{n}s] \cup \cdots \cup [\tfrac{n-2}{n}s, \tfrac{n-1}{n}s] \cup [\tfrac{n-1}{n}s, s],$$

παρατηρούμε ότι $\sqrt{(\frac{j}{n}t - \frac{j-1}{n}t)^2 + (\frac{j}{n}s - \frac{j-1}{n}s)^2} = \frac{1}{n}\sqrt{t^2+s^2} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$ για κάθε $j \in \{1,...,n\}$ και ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση

$$F_j : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \smallsetminus \{-1\},\ t \longmapsto F_j(t,s) := \frac{H(\frac{j}{n}t, \frac{j}{n}s)}{H(\frac{j-1}{n}t, \frac{j-1}{n}s)},$$

όπου $F_j(0,0) = 1, \forall j \in \{1,...,n\}$. Προφανώς, για κάθε $(t,s) \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}$,

$$\begin{aligned} H(t,s) &= \underbrace{H(0,0)}_{=1} \left(\frac{H(\frac{1}{n}t, \frac{1}{n}s)}{H(0,0)}\right) \left(\frac{H(\frac{2}{n}t, \frac{2}{n}s)}{H(\frac{1}{n}t, \frac{1}{n}s)}\right) \cdots \left(\frac{H(t,s)}{H(\frac{n-1}{n}t, \frac{n-1}{n}s)}\right) \\ &= F_1(t,s)F_2(t,s)\cdots F_n(t,s). \end{aligned}$$

Κατόπιν τούτου, ορίζουμε την απεικόνιση $\widetilde{H} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ μέσω τού τύπου

$$\widetilde{H}(t,s) := \Psi(F_1(t,s)) + \Psi(F_2(t,s)) + \cdots + \Psi(F_n(t,s)),\ \forall (t,s) \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}.$$

(Η $\widetilde{H}$ είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών απεικονίσεων.) Σημειωτέον ότι έχουμε $\widetilde{H}(t,s) = 0$ (αφού $F_j(0,0) = 1, \forall j \in \{1,...,n\}$, και $\Psi(1) = 0$) και $\Phi \circ \widetilde{H} = H$ (καθώς η Φ είναι ομομορφισμός ομάδων). Επιπροσθέτως,

$$\widetilde{H}(t,0) = \sum_{j=1}^{n} \Psi(F_j(t,0)) = \sum_{j=1}^{n} \Psi\left(\frac{\alpha(\frac{j}{n}t)}{\alpha(\frac{j-1}{n}t)}\right) = \widetilde{\alpha}(t),$$
$$\widetilde{H}(t,1) = \sum_{j=1}^{n} \Psi(F_j(t,1)) = \sum_{j=1}^{n} \Psi\left(\frac{\beta(\frac{j}{n}t)}{\beta(\frac{j-1}{n}t)}\right) = \widetilde{\beta}(t),$$

$\widetilde{H}(0,s) = 0$ και $\widetilde{H}(1,s) = \widetilde{\alpha}(1)$ για οιαδήποτε $t,s \in \mathbf{I}$. Η τελευταία ισότητα αποδεικνύεται ως ακολούθως: Θεωρούμε τη συνεχή απεικόνιση

$$h : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R},\ s \longmapsto h(s) := \widetilde{H}(1,s) - \widetilde{H}(1,0).$$

Επειδή $\Phi(h(s)) = \frac{H(1,s)}{H(1,0)} = \frac{\widetilde{\alpha}(1)}{\widetilde{\alpha}(1)} = 1 \Rightarrow h(s) \in \mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{Z},\ \forall s \in \mathbf{I}$, η h λαμβάνει μόνον ακέραιες τιμές. Από την άλλη μεριά, επειδή το $\mathbf{I}$ είναι συνεκτικό και ο υπόχωρος $\mathrm{Im}(h)$ τού $\mathbb{R}$ διακριτός, η h οφείλει να είναι *σταθερή απεικόνιση*[61]. Επομένως, $h(0) = 0 \Rightarrow 0 = h(s) = \widetilde{H}(1,s) - \widetilde{\alpha}(1),\ \forall s \in \mathbf{I}$. Άρα η $\widetilde{H}$ αποτελεί πράγματι μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον δρόμο $\widetilde{\alpha}$ στον δρόμο $\widetilde{\beta}$. Υπολείπεται να δειχθεί ότι η $\widetilde{H}$ είναι και η *μοναδική* ομοτοπία αυτού τού είδους με την εν λόγω ιδιότητα. Ας υποθέσουμε, προς τούτο, ότι υπάρχει ομοτοπία $\widetilde{\widetilde{H}} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$

[61] Χρησιμοποιούμε εκ νέου το ότι ένας τοπολογικός χώρος X είναι συνεκτικός *εάν και μόνον εάν* δεν υφίσταται επιρριπτική συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$, όπου ο Y είναι εφοδιασμένος με τη διακριτή τοπολογία και περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία.

σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον δρόμο $\widetilde{\alpha}$ στον δρόμο $\widetilde{\beta}$ με $\Phi \circ \widetilde{\widetilde{H}} = H$. Προφανώς, $\Phi(\widetilde{H}(t,s) - \widetilde{\widetilde{H}}(t,s)) = \frac{H(t,s)}{H(t,s)} = 1$, οπότε $\widetilde{H}(t,s) - \widetilde{\widetilde{H}}(t,s) \in \mathrm{Ker}(\Phi) = \mathbb{Z}$, για κάθε $\forall (t,s) \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}$. Επειδή η $\widetilde{H} - \widetilde{\widetilde{H}} : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \to \mathbb{Z}$ είναι συνεχής, θα είναι *σταθερή*. Επομένως,

$$\widetilde{H}(0,0) - \widetilde{\widetilde{H}}(0,0) = 0 \Longrightarrow [0 = \widetilde{H}(t,s) - \widetilde{\widetilde{H}}(t,s),\ \forall (t,s) \in \mathbf{I} \times \mathbf{I}].$$

Αυτό σημαίνει ότι $\widetilde{H} = \widetilde{\widetilde{H}}$. □

B.6.18 Θεώρημα. *Η $(\boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1), \odot)$ είναι ισόμορφη με την άπειρη κυκλική ομάδα $(\mathbb{Z}, +)$.*

Αποδειξη. Για κάθε $\alpha \in \Omega(\mathbb{S}^1, 1)$ θέτουμε

$$\boxed{\psi : \boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z},\ [\alpha]^{\text{ομ.}} \longmapsto \psi([\alpha]^{\text{ομ.}}) := \widetilde{\alpha}(1).} \tag{B.11}$$

Λόγω των προηγηθέντων λημμάτων B.6.16 και B.6.17 η ανωτέρω ψ είναι *καλώς ορισμένη* απεικόνιση. Θα δείξουμε διαδοχικώς τα εξής[62]:

(i) Η ψ αποτελεί έναν ομομορφισμό ομάδων.

(ii) Η ψ είναι επιρριπτική.

(iii) Η ψ είναι ενριπτική.

Απόδειξη τού (i). Για οιουσδήποτε βρόχους $\alpha, \beta \in \Omega(\mathbb{S}^1, 1)$ έχουμε

$$\widetilde{\alpha \circledast \beta} = \widetilde{\alpha} \circledast (\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}), \tag{B.12}$$

διότι[63] $\Phi \circ \widetilde{\alpha \circledast \beta} = \alpha \circledast \beta = \Phi \circ (\widetilde{\alpha} \circledast (\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}))$. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει άμεσα από το ότι

$$(\Phi \circ (\widetilde{\alpha} \circledast (\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta})))(t) = \begin{cases} \Phi(\widetilde{\alpha}(2t)) = \alpha(2t), & \text{όταν } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \Phi(\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(2t-1)) = \Phi(\widetilde{\beta}(2t-1)), & \text{όταν } t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

όπου $\Phi(\widetilde{\beta}(2t-1)) = \beta(2t-1), \forall t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Κατά συνέπειαν,

$$\begin{aligned} \psi([\alpha]^{\text{ομ.}} \odot [\beta]^{\text{ομ.}}) &= \psi([\alpha \circledast \beta]^{\text{ομ.}}) = \widetilde{\alpha \circledast \beta}(1) \underset{(\text{B.12})}{=} (\widetilde{\alpha} \circledast (\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}))(1) \\ &= (\widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta})(1) = \widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(1) = \psi([\alpha]^{\text{ομ.}}) + \psi([\beta]^{\text{ομ.}}). \end{aligned}$$

Απόδειξη τού (ii). Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ο βρόχος

$$\alpha_m : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1,\ t \longmapsto \alpha_m(t) := \Phi(mt).$$

Προφανώς, $\psi([\alpha_m]^{\text{ομ.}}) = \widetilde{\alpha_m}(1) = m$, και η ψ είναι επιρριπτική.

[62] Άπαξ και τα (i), (ii) και (iii) θα έχουν αποδειχθεί, ο ισχυρισμός θα είναι αληθής βάσει των προαναφερθέντων στο εδ. B.6.15 (αφού ο $\mathbb{S}^1$ είναι δρομοσυνεκτικός).

[63] Εν προκειμένω, αρκεί να χρησιμοποιηθεί η μοναδικότητα τής «ανυψώσεως» τού $\alpha \circledast \beta$ η εξασφαλισθείσα μέσω τού λήμματος B.6.16.

Απόδειξη τού (iii). Εάν $\alpha \in \Omega(\mathbb{S}^1, 1)$ με $[\alpha]^{\text{ομ.}} \in \mathrm{Ker}(\psi)$, ήτοι με

$$\psi([\alpha]^{\text{ομ.}}) = \widetilde{\alpha}(1) = 0,$$

τότε ο $\widetilde{\alpha}$ είναι ένας *βρόχος* εντός τού $\mathbb{R}$ (καθώς $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\alpha}(1) = 0$). Εντός τού $\mathbb{R}$ έχουμε $\widetilde{\alpha} \simeq \mathrm{const}_0$ σχ.$\{0,1\}$, διότι, π.χ., η

$$H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,s) \longmapsto H(t,s) := (1-s)\widetilde{\alpha}(t),$$

είναι μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον $\widetilde{\alpha}$ στον const_0. Αυτό σημαίνει ότι η σύνθεση $\Phi \circ H$ αποτελεί μια ομοτοπία σχετικώς προς το $\{0,1\}$ από τον α στον const_1. Επομένως, $[\alpha]^{\text{ομ.}} = [\mathrm{const}_1]^{\text{ομ.}}$, ήτοι το ουδέτερο στοιχείο τής $\boldsymbol{\pi}_1(\mathbb{S}^1, 1)$, και η ψ είναι ενριπτική. □

B.7 ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΑ ΖΕΥΓΗ

B.7.1 Ορισμός. Ένα **τοπολογικό ζεύγος** (X,A) είναι ένα (διατεταγμένο) ζεύγος αποτελούμενο από έναν τοπολογικό χώρο X και έναν υπόχωρό του A. (Σύμβαση: Όταν $A = \varnothing$, τότε το $(X,\varnothing)$ ταυτίζεται με τον ίδιον τον X.) Λέμε ότι ένα τοπολογικό ζεύγος (X,A) είναι **υποζεύγος** ενός τοπολογικού ζεύγους (X',A') όταν ο X είναι υπόχωρος τού X' και ο A υπόχωρος τού A' (Συμβολισμός: $(X,A) \subseteq (X',A')$.)

B.7.2 Ορισμός. Μια **συνεχής απεικόνιση** $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ μεταξύ τοπολογικών ζευγών είναι μια συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ για την οποία ισχύει ο εγκλεισμός $f(A) \subseteq B$. Όταν μια τέτοια απεικόνιση f συμβαίνει να είναι ομοιομορφισμός μεταξύ των X και Y, και $f(A) = B$, τότε η f καλείται **ομοιομορφισμός τοπολογικών ζευγών** (και χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $(X,A) \approx (Y,B)$).

B.7.3 Σημείωση. Η *κατηγορία* $\mathfrak{Top}$ *των τοπολογικών χώρων* (με τις συνεχείς απεικονίσεις ως μορφισμούς της και τους ομοιομορφισμούς ως τους $\mathfrak{Top}$-ισομορφισμούς) μπορεί να ιδωθεί ως πλήρης υποκατηγορία τής *κατηγορίας* $\mathfrak{Top}^{[2]}$ *των τοπολογικών ζευγών* (η οποία έχει ως αντικείμενά της τα τοπολογικά ζεύγη, ως μορφισμούς της τις συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών ζευγών και ως $\mathfrak{Top}^{[2]}$-ισομορφισμούς της τους ομοιομορφισμούς τοπολογικών ζευγών). Πρβλ. A.1.5 (v) και (vi).

B.7.4 Παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι X είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^d$ (όπου $n \geqslant 1$) με $\mathrm{int}_{\mathbb{R}^d}(X) \neq \varnothing$. Τότε υπάρχει ένας ομοιομορφισμός τοπολογικών ζευγών $(X, \mathrm{frnt}_{\mathbb{R}^d}(X)) \approx (\mathbb{B}^d, \mathbb{S}^{d-1})$. Πράγματι· θεωρώντας ένα $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}^d}(X)$, οιοδήποτε $\mathbf{x} \in \mathrm{frnt}_{\mathbb{R}^d}(X)$ αποτελεί το μοναδικό μεθοριακό σημείο τού X, το οποίο ανήκει στην ημιευθεία με αφετηρία το $\mathbf{x}_0$ και διέρχεται από το $\mathbf{x}$. (Αλλιώς είτε το X δεν θα ήταν κυρτό είτε το $\mathbf{x}_0$ δεν θα ήταν εσωτερικό σημείο τού X.) Κατά συνέπειαν, ορίζεται καλώς η $\mathrm{frnt}_{\mathbb{R}^d}(X) \ni \mathbf{x} \overset{\approx}{\longmapsto} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||} \in \mathbb{S}^{d-1}$ και, κατ' επέκταση, ο ομοιομορφισμός

$$f : X \xrightarrow{\approx} \mathbb{B}^d,\ \ f((1-t)\mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}) := t\tfrac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||},\ \forall t \in \mathbf{I},$$

με $f(\mathrm{frnt}_{\mathbb{R}^d}(X)) = \mathbb{S}^{d-1}$. Π.χ., $(\mathbf{I}^d, \mathrm{frnt}_{\mathbb{R}^d}(\mathbf{I}^d)) \approx (\mathbb{B}^d, \mathbb{S}^{d-1})$.

B.7.5 Πρόταση. *Μέσω οιασδήποτε απεικονίσεως μεταξύ τοπολογικών ζευγών*

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B),$$

όπου το A κλειστό $\subseteq X$ και το B κλειστό $\subseteq Y$, επάγεται μια συνεχής απεικόνιση $\overline{f} : X/A \longrightarrow Y/B$. Εάν, μάλιστα, η f είναι ομοιομορφισμός τοπολογικών ζευγών, τότε η $\overline{f}$ είναι ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την πρόταση B.2.5 και τον ορισμό B.2.10. □

B.7.6 Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ μεταξύ τοπολογικών ζευγών καλείται **σχετικός ομοιομορφισμός** όταν ο περιορισμός $f|_{X \setminus A}$ απεικονίζει το $X \setminus A$ ομοιομορφικώς επί τού $Y \setminus B$.

Από την B.2.2 (ii) έπεται η ακόλουθη:

B.7.7 Πρόταση. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω A ένας κλειστός υπόχωρός του. Εάν ως $p : X \longrightarrow X/A$ συμβολίσουμε τη φυσική επίρριψη επί τού X/A* (βλ. B.2.10), *τότε η $p : (X, A) \longrightarrow (X/A, p(A))$ είναι σχετικός ομοιομορφισμός.*

B.7.8 Πόρισμα. *Εάν ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος, ο A ένας κλειστός υπόχωρος του, $f : A \longrightarrow Y$ μια συνεχής απεικόνιση με πεδίο τιμών του έναν τοπολογικό χώρο Y, $Y \cup_f X$ ο πηλικόχωρος ο δημιουργούμενος μέσω τής f* (βλ. B.2.12), *$p : X + Y \longrightarrow Y \cup_f X$ η φυσική επίρριψη και $p|_X : X \longrightarrow Y \cup_f X$ ο περιορισμός της επί τού X, τότε η $p|_X : (X, A) \longrightarrow (Y \cup_f X, Y)$ είναι σχετικός ομοιομορφισμός.*

B.7.9 Παράδειγμα. Εάν X είναι ένας τοπολογικός χώρος, $f : \mathbb{S}^{d-1} \longrightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση και $p : \mathbb{B}^d + X \longrightarrow X \cup_f \mathbb{B}^d$, $\mathfrak{e}^d := p(\mathring{\mathbb{B}}^d) \subseteq X \cup_f \mathbb{B}^d$ (συμβολισμοί όπως στο εδάφιο B.2.17), τότε η $p|_{\mathbb{B}^d} : (\mathbb{B}^d, \mathbb{S}^{d-1}) \longrightarrow (X \cup_f e^d, X)$ είναι σχετικός ομοιομορφισμός.

Κατ' αναλογίαν ορίζεται και η *ομοτοπία* σε «επίπεδο τοπολογικών ζευγών».

B.7.10 Ορισμός. Το **καρτεσιανό γινόμενο** δυο τοπολογικών ζευγών (X, A) και (Y, B) ορίζεται ως εξής: $(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y))$. Ως εκ τούτου, ο (μοναδιαίος) **κύλινδρος** $(X, A) \times \mathbf{I}$ υπεράνω ενός τοπολογικού ζεύγους (X, A) είναι το τοπολογικό ζεύγος $(X \times \mathbf{I}, A \times \mathbf{I})$ (ταυτίζοντας το $\mathbf{I}$ με το $(\mathbf{I}, \varnothing)$).

B.7.11 Ορισμός. Εάν $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών ζευγών, τότε μια **ομοτοπία από την** f **στην** g είναι μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών $H : (X, A) \times \mathbf{I} \longrightarrow (Y, B)$, όπου η $H : X \times \mathbf{I} \longrightarrow Y$ είναι (συνήθης) ομοτοπία από την f στην g (υπό την έννοια τού ορισμού B.5.1) για την οποία ισχύει $H(A \times \mathbf{I}) \subseteq B$. (Σε αυτήν την περίπτωση οι f, g λέγονται **ομότοπες** και σημειώνονται ως $f \simeq g$. Η "$\simeq$" αποτελεί σχέση ισοδυναμίας.)

Μια σημαντική, ειδική περίπτωση τού B.7.11 είναι αυτή κατά την οποία καθένας εκ των A, B αποτελείται από ένα και μόνον σημείο.

B.7.12 Ορισμός. Ένα τοπολογικό ζεύγος τής μορφής $(X, \{x_0\})$, όπου $x_0 \in X$, ονομάζεται **τοπολογικός χώρος με σημείο αναφοράς** (ή **βασικό σημείο του**) **το** x_0. (Ενίοτε, ένας τέτοιος τοπολογικός χώρος καλείται **εστιγμένος χώρος**[64] (pointed space)). Λέμε ότι μια συνεχής απεικόνιση τής μορφής $f : (X, \{x_0\}) \longrightarrow (Y, \{y_0\})$ (ή μια ομοτοπία τής μορφής $H : (X, \{x_0\}) \times \mathbf{I} \longrightarrow (Y, \{y_0\})$) διατηρεί το σημείο αναφοράς. Επίσης, για δυο συνεχείς απεικονίσεις μεταξύ τοπολογικών ζευγών $f, g : (X, \{\mathbf{x}_0\}) \longrightarrow (Y, \{y_0\})$ έχουμε

$$f \simeq g : (X, \{x_0\}) \longrightarrow (Y, \{y_0\}) \Longleftrightarrow f \simeq g \text{ σχ. } \{x_0\}.$$

B.7.13 Σημείωση. Η *κατηγορία των εστιγμένων τοπολογικών χώρων* $\mathfrak{Top}^{\text{εστ.}}$ (έχουσα τις συνεχείς απεικονίσεις $f : (X, \{x_0\}) \longrightarrow (Y, \{y_0\})$ με $f(x_0) = y_0$ ως μορφισμούς της) αποτελεί μια πλήρη υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$. (Βλ. A.1.5 (vii).)

B.7.14 Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ μεταξύ τοπολογικών ζευγών καλείται **ομοτοπική ισοδυναμία τοπολογικών ζευγών** όταν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών ζευγών $g : (Y, B) \longrightarrow (X, A)$ με

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,A)} : (X, A) \longrightarrow (X, A) \;\text{ και }\; f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(Y,B)} : (Y, B) \longrightarrow (Y, B)$$

(υπό την έννοια τού ορισμού B.7.11). Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι τα τοπολογικά ζεύγη (X, A) και (Y, B) είναι **ομοτοπικώς ισοδύναμα**. (Συνήθης συμβολισμός: $f : (X, A) \xrightarrow{\simeq} (Y, B)$ ή απλώς $(X, A) \simeq (Y, B)$.)

B.7.15 Σημείωση. Εάν $f : (X, A) \xrightarrow{\simeq} (Y, B)$, τότε προφανώς $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ και $f|_A : A \xrightarrow{\simeq} B$. Ωστόσο, το αντίστροφο δεν είναι πάντοτε αληθές!

B.7.16 Παράδειγμα. Έστω $X := \mathbf{I} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbf{I} \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times \mathbf{I}) \subseteq \mathbb{R}^2$ ο λεγόμενος **χώρος τής χτένας** και έστω $P := (0, 1)$. Το $\{P\}$ είναι παραμορφωτική σύμπτυξη τού X. (Αρκεί κανείς να παραμορφώσει συνεχώς τον X αρχικώς επί τού $\mathbf{I} \times \{0\}$, κατόπιν το $\mathbf{I} \times \{0\}$ επί τού $\{Q\}$, όπου $Q := (0, 0)$, και τέλος το $\{Q\}$ κατά μήκος τού $\{0\} \times \mathbf{I}$ επί τού $\{P\}$.) Το $\{P\}$ *δεν είναι ισχυρή* παραμορφωτική σύμπτυξη τού X. (Τα σημεία τού X, τα οποία είναι γειτονικά τού P, οφείλουν σε κάθε παραμόρφωση τού X επί τού $\{P\}$ να διανύουν τον δρόμο τον διερχόμενον από το Q, οπότε το P δεν είναι δυνατόν (μέσω μια τέτοιας διαδικασίας) να παραμείνει σταθερό.) Έστω $\mathrm{const}_P : X \longrightarrow X$ η σταθερή απεικόνιση $\mathrm{const}_P(\mathbf{x}) := P$, $\forall \mathbf{x} \in X$. Τότε οι const_P και $\mathrm{const}_P|_{\{P\}}$ είναι ομοτοπικές ισοδυναμίες, ενώ η $\mathrm{const}_P : (X, \{P\}) \longrightarrow (X, \{P\})$ δεν είναι ομοτοπική ισοδυναμία τοπολογικών ζευγών (υπό την έννοια τού ορισμού B.7.14).

[64]Το *εστιγμένος* είναι η μετοχή παρακειμένου τού ρήματος *στίζω* που σημαίνει κεντώ/χαράσσω (συνήθως με κάποιο αιχμηρό όργανο τουλάχιστον ένα συγκεκριμένο) σημείο/στίγμα επί κάποιου αντικειμένου. (Πρβλ. *στιγματίζω* και *διαστίζω*.)

Παράρτημα C

Τα αξιώματα των Eilenberg και Steenrod

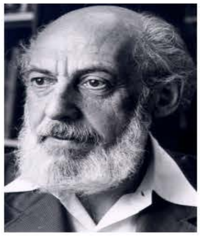
Μέχρι το τέλος τού Β′ Παγκοσμίου Πολέμου η ραγδαία εξέλιξη τής Αλγεβρικής Τοπολογίας, πέραν των επιτευγμάτων της, συνοδευόταν και από ορισμένα στοιχεία «συγχύσεως» και «κοπώσεως», όπως, π.χ., ήταν η έλλειψη ενός (έστω και υποτυπώδους) «κεντρικού σχεδιασμού» ή μιας «συστηματοποιήσεως» των κατακτώμενων νέων θεωριών. Το αξιωματικό σύστημα των Eilenberg και Steenrod (προαγγελθέν το[1] 1945 και παρουσιασθέν λεπτομερώς στο βιβλίο τους [62] το 1952) μετέτρεψε τις (μέχρι τότε διάσπαρτες) θεωρίες ομολογίας, από διαδικασίες υπολογισμών σε αυθύπαρκτες μαθηματικές οντότητες. Αυτό επρόκειτο για μια ριζική καινοτομία.

Ο J. Dieudonné (στη σελ. 107 τού [116]) γράφει σχετικώς τα ακόλουθα: «Οι διάφορες θεωρίες ομολογίας και συνομολογίας εμφανίζονται ως περίπλοκοι μηχανισμοί, το τελικό προϊόν των οποίων είναι η αντιστοίχιση μιας διαβαθμισμένης ομάδας σε κάθε τοπολογικό χώρο, μέσω μιας σειράς διαδικασιών, οι οποίες (εκ πρώτης όψεως) φαίνονται τόσον αυθαίρετες που κανείς δικαίως θα μπορούσε να διερωτάται για το κατά πόσον είναι σε θέση να τελεσφορήσουν. Σε ένα αξιοθαύμαστο βιβλίο [παραπέμπει στο [62]] οι Eilenberg και Steenrod πάσχισαν να αντιπαρατεθούν σε αυτόν τον λαβύρινθο δυσάρεστων Μαθηματικών υιοθετώντας μια θεώρηση από τελείως διαφορετική οπτική γωνία, εστιάζοντες στις *ιδιότητες* των εν λόγω τελικών προϊόντων παρά στις ποικίλες μεθόδους που έχουν επινοηθεί για την απόκτησή τους. *Πρόκειται για την αξιωματική θεωρία ομολογίας* (*και συνομολογίας*).»

Ο S. Mac Lane (σε ένα αφιέρωμα για τον S. Eilenberg, μετά τον θάνατό του, στα Notices of A.M.S., Vol. **45**, no. 10) αναφέρει τον Νοέμβριο τού 1998 τα εξής: «Η Αλγεβρική Τοπολογία επηρεάσθηκε κατά τρόπο αποφασιστικό από την κατάληξη τής πρώιμης συνεργασίας τού Eilenberg με τον Norman Steenrod (το 1952), έχουσας ως αποτέλεσμα το βιβλίο τους υπό τον τίτλο *Foundations of Algebraic Topology*. Εκείνην την εποχή υπήρχαν διαφορετικές και κατά τι συγκεχυμένες εκδοχές τής θεωρίας ομολογίας, άλλες ιδιάζουσες και άλλες κυτταρικές. Αυτό το βιβλίο χρησιμοποίησε τη γλώσσα των *κατηγοριών* προκειμένου να καταδείξει ότι όλες αυτές θα μπορούσαν να περιγραφούν εννοιολογικώς ως παραστάσεις *ομολογικών συναρ-*

[1] S. Eilenberg & N.E. Steenrod: *Axiomatic approach to homology theory*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. **31**, 1945, no. 4, 117-120.

τητών από την κατηγορία των τοπολογικών ζευγών σε εκείνην των ομάδων ή των δακτυλίων, οι οποίες υπόκεινται σε κατάλληλα αξιώματα, όπως αυτό τής εκτομής. Χάρις στη διορατικότητα και στον ενθουσιασμό τού Eilenberg αυτό το σύγγραμμα *άλλαξε δραστικώς τη μέθοδο διδασκαλίας τής Τοπολογίας*.»



S. Eilenberg

N. Steenrod

Στο παρόν (τρίτο) παράρτημα παρατίθενται τα αξιώματα των Eilenberg[2] και Steenrod[3] για την ομολογία και τη συνομολογία (βλ. §C.1 και §C.7) και διατυπώνεται το *θεώρημα τής μοναδικότητας*. Επιπροσθέτως, στην §C.2 δίδονται κάποιες άμεσες συνέπειες των αξιωμάτων, στην §C.3 ορίζονται οι *ανηγμένοι μόδιοι* ομολογίας και στην §C.4 υπολογίζονται (με αποκλειστική χρήση των αξιωμάτων) οι μόδιοι ομολογίας *των σφαιρών*. Με «δεδομένους» τους μοδίους ομολογίας των σφαιρών, εξασφαλίζεται, επί παραδείγματι, η δυνατότητα μιας άμεσης αποδείξεως τού θεωρήματος C.5.2 τού σταθερού σημείου τού Brouwer και μιας σχετικώς ανέξοδης[4] αποδείξεως τού «Θ.Θ.Α.» C.6.10. (Βλ. §C.5 και §C.6.) Εξάλλου, *οτιδήποτε* σχετίζεται με την κατασκευή *ακριβών ακολουθιών των Mayer και Vietoris* είναι *ανεξάρτητο* από τη θεωρία ομολογίας με την οποία εργαζόμαστε (υπό την προϋπόθεση ότι τα

[2]Eilenberg, *Samuel* (30/9/1913-30/1/1998). Πολωνός μαθηματικός (που έζησε από το 1939 μέχρι το τέλος τής ζωής του στις Η.Π.Α.). Σπούδασε στο Πανεπιστήμιο τής Βαρσοβίας και εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό τους K. Kuratowski και K. Borsuk (1936). Με παρότρυνση τού πατέρα του εγκατέλειψε (για ευνόητους λόγους) την Ευρώπη το 1939. Μετά τη μετάβασή του στις Η.Π.Α., οι O. Veblen και S. Lefschetz μεσολάβησαν (όπως είχαν πράξει και με άλλους πρόσφυγες) προκειμένου αυτός να βρει μια θέση στο Πανεπιστήμιο τού Michigan, όπου ο R. Wilder δημιουργούσε μια νέα ερευνητική ομάδα τοπολόγων. (N. Steenrod, R. Bott, H. Samelson κ.ά.) Εκεί, σε μια διάλεξη περί επεκτάσεων ομάδων, γνώρισε και τον S. Mac Lane. Έκτοτε η επικοινωνία μαζί του οδήγησε -συν τω χρόνω- σε μια μακρά και γόνιμη συνεργασία. Στο Michigan διέμεινε μέχρι το 1945. Το 1945-1946 έγινε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο τής Indiana, αλλά ένα χρόνο αργότερα μετακινήθηκε στο Columbia University τής Νέας Υόρκης, στο οποίο και παρέμεινε μέχρι το τέλος τής σταδιοδρομίας του. Οι συνεργασίες του επεκτάθηκαν και με αρκετούς Γάλλους μαθηματικούς, όπως με τον Claude Chevalley (1909-1984) και τον Henri Cartan (1904-2008), με τον οποίο συνέγραψε το άλλο πασίγνωστο βιβλίο (υπό τον τίτλο *Homological Algebra*, εκδοθέν το 1956). Υπήρξε, μάλιστα, και μέλος τής ομάδας των Bourbaki για μία δεκαπενταετία (έως το 1966). Ο Eilenberg ήταν δεσπόζουσα φυσιογνωμία για τουλάχιστον μία τριακονταετία στη διαμόρφωση τής προόδου τής Αλγεβρικής Τοπολογίας και τμημάτων τής Άλγεβρας και τής Λογικής (Θεωρία Κατηγοριών, Θεωρία Αυτομάτων κ.λπ.) Οι ερευνητικές του εργασίες υπερβαίνουν τις 100. Επί διδακτορία φοιτητές του υπήρξαν οι D. Buchsbaum, D. Kan, F.W. Lawvere κ.ά. Ετιμήθη, μεταξύ άλλων με το Wolf Prize (1986) και με το Steele Prize (1987).

[3]Steenrod, *Norman Earl* (22/4/1910-14/10/1971). Αμερικανός μαθηματικός. Σπούδασε στα Πανεπιστήμια τού Michigan (A.B. 1932) και τού Harvard (MSc 1934). Διδακτορική διατριβή το 1936 στο Princeton υπό τον S. Lefschetz (1884-1972). Επίκουρος καθηγητής στα Πανεπιστήμια τού Chicago (1939-1942) και τού Michigan (1942-1947). Από το 1947 παρέμεινε στο Princeton (αρχικώς ως αναπληρωτής καθηγητής, 1947-1952, και εν συνεχεία ως καθηγητής, 1952-1971). Επέβλεψε 17 διδακτορικές διατριβές. Μεταξύ αυτών που τις εξεπόνησαν συγκαταλέγοντο οι G.W. Whitehead Jr., E. Spanier, W. Massey, F. Peterson, J. Levine, W.-C. Hsiang κ.ά. Αξιομνημόνευτα τα αποτελέσματά του και τα ερευνητικά του συγγράμματα σε πολλούς υποκλάδους τής Αλγεβρικής Τοπολογίας: Αξιωματικές θεμελιώσεις, χαρακτηριστικές κλάσεις, ινικές δέσμες (fibre bundles), (συν)ομολογία με «τοπικούς συντελεστές», ειδικοί συνομολογιακοί τελεστές, ειδικές άλγεβρες κ.ά.

[4]«Σχετικώς ανέξοδης» υπό την έννοια τού ότι για αυτήν δεν θα χρειασθούμε ούτε το *θεώρημα τού Liouville*, ούτε το *θεώρημα τού Rouché*, ούτε το *θεώρημα τής ανοικτής συναρτήσεως*, ούτε το θεώρημα B.6.18, ούτε κάποιες *βαθύτερες* γνώσεις περί των αριθμών περιελίξεως (winding numbers) ή από τη Θεωρία Βαθμού.

μετέχοντα τοπολογικά ζεύγη (7.1) ανήκουν στα αντικείμενα τής αντίστοιχης ομολογικώς επιτρεπτής κατηγορίας), όπως βλέπουμε στις ενότητες 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 και 7.5 τού κεφαλαίου 7.

C.1 ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

C.1.1 Ορισμός. Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος (υπό την έννοια τού ορισμού B.7.1). Ως **σύνδεσμο τού** (X, A) ορίζουμε τα έξι τοπολογικά ζεύγη τού κάτωθι σχήματος, τις μεταξύ τους ταυτοτικές απεικονίσεις, καθώς και τις μέσω βελών υποδεικνυόμενες ενθετικές απεικονίσεις:

$$\begin{tikzcd}
 & & (X,\varnothing) \arrow[dr, hook] & & \\
(\varnothing,\varnothing) \arrow[r, hook] & (A,\varnothing) \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & (X,A) \arrow[r, hook] & (X,X) \\
 & & (A,A) \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

C.1.2 Ορισμός (Ομολογικώς επιτρεπτές κατηγορίες). Μια **ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία** $\mathscr{C}$ είναι μια υποκατηγορία τής κατηγορίας $\mathfrak{Top}^{[2]}$ όλων των τοπολογικών ζευγών (με τις συνεχείς απεικονίσεις τοπολογικών ζευγών ως μορφισμούς της, βλ. εδ. B.7.3 και A.1.5 (v)-(vi)), ούτως ώστε να ισχύουν τα εξής:

(i) Εάν $(X, A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, τότε η $\mathscr{C}$ περιέχει τον σύνδεσμο τού (X, A).

(ii) Εάν η $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ είναι ένας μορφισμός εντός τής $\mathscr{C}$, τότε η $\mathscr{C}$, πέραν των ιδίων των $(X, A), (Y, B)$, περιέχει *και* όλες τις απεικονίσεις που προσδιορίζει η f από τον σύνδεσμο τού (X, A) στον σύνδεσμο τού (Y, B).

(iii) Εάν $(X, A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, τότε η $\mathscr{C}$ περιέχει τον κύλινδρο $(X, A) \times \mathbf{I}$ ως αντικείμενό της (βλ. B.7.10) και τις δύο ενθετικές απεικονίσεις

$$j_0, j_1 : (X, A) \hookrightarrow (X, A) \times \mathbf{I}$$

ως μορφισμούς της (όπου $j_0(x) := (x, 0),\ j_1(x) := (x, 1),\ \forall x \in X$).

(iv) Υπάρχει (τουλάχιστον) ένας μονοσημειακός χώρος $\{\mathrm{pt}\}$ εντός τής κλάσεως των αντικειμένων τής $\mathscr{C}$ και κάθε συνεχής απεικόνιση $f : \{\mathrm{pt}\} \longrightarrow X$, όπου $X = (X, \varnothing) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, ανήκει στο σύνολο των μορφισμών τής $\mathscr{C}$.

C.1.3 Παραδείγματα. Οι ακόλουθες κατηγορίες είναι ομολογικώς επιτρεπτές:
(i) Η ίδια η $\mathscr{C} = \mathfrak{Top}^{[2]}$ αποτελεί την ευρύτερη δυνατή ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία.
(ii) Η κατηγορία $\mathscr{C} = \mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{comp.}}$ των τοπολογικών ζευγών (X, A), όπου X συμπαγής τοπολογικός χώρος και A κλειστός υπόχωρός του.
(iii) Η κατηγορία $\mathscr{C} = \mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}$ (αντ., $\mathscr{C} = \mathfrak{Top}^{[2],\,\text{abs.}}_{\text{triang.}}$) των ζευγών τριγωνίσιμων χώρων και υποχώρων, καθώς και η υποκατηγορία αυτής $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.triang.}}$ (αντ., $\mathfrak{Top}^{[2],\text{abs.}}_{\text{fin.triang.}}$) η αποτελούμενη από ζεύγη *πεπερασμένως* τριγωνίσιμων χώρων. (Βλ. εδ. D.1.54.)
(iv) Η κατηγορία $\mathscr{C} = \mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{CW}}$ των CW-ζευγών, καθώς και η υποκατηγορία αυτής $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.CW}}$ η αποτελούμενη από *πεπερασμένα* CW-ζεύγη. (Βλ. εδ. D.3.15.)

C.1.4 Σημείωση. Εάν η $\mathscr{C}$ είναι μια ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία, τότε καλούμε κάθε ζεύγος $(X, A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ **επιτρεπτό ζεύγος** (για την κατηγορία $\mathscr{C}$), κάθε μορφισμό $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}((X, A), (Y, B))$ **επιτρεπτό μορφισμό** (για την $\mathscr{C}$) κ.λπ.

C.1.5 Ορισμός. Από τούδε και στο εξής θα συμβολίζουμε ως $\mathfrak{Mod}_R^{\mathbb{Z}}$ **την κατηγορία των ακολουθιών R-μοδίων με το $\mathbb{Z}$ ως το σύνολο των δεικτών τους** (βλ. A.1.5 (iv)), όπου R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος.

C.1.6 Ορισμός (R-θεωρίες ομολογίας). Έστω R ένας μη τετρ. μεταθετικός δακτύλιος και έστω $\mathscr{C}$ μια ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία. Ως $\mathfrak{N} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}$ συμβολίζουμε τον συναρτητή, ο οποίος αντιστοιχεί σε κάθε $(X, A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ τον $A = (A, \varnothing) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ (με προφανή απεικόνιση μορφισμών). Μια **R-θεωρία ομολογίας $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ επί τής κατηγορίας** $\mathscr{C}$ είναι ένα ζεύγος απαρτιζόμενο από έναν συναλλοίωτο συναρτητή

$$\boxed{\mathscr{H}_\bullet : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R^{\mathbb{Z}}, \ \ (X, A) \longmapsto \mathscr{H}_\bullet(X, A; R) = (\mathscr{H}_n(X, A; R))_{n\in\mathbb{Z}}}$$

και έναν φυσικό μετασχηματισμό (βλ. εδ. A.3.1)

$$\boxed{\partial_\bullet : \mathscr{H}_\bullet \longrightarrow \mathscr{H}_{\bullet-1} \circ \mathfrak{N}}$$

(όπου ο $\mathscr{H}_{\bullet-1}$ προκύπτει από τον $\mathscr{H}_\bullet$ ύστερα από μείωση δεικτών κατά ένα), ούτως ώστε να πληρούνται τα εξής **αξιώματα των Eilenberg και Steenrod**:

ES-A1 **Αξίωμα τής ακριβείας.** Για κάθε $(X, A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ η (και προς τις δύο κατευθύνσεις απείρως εκτεινόμενη) μακρά ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathscr{H}_n(A; R) \arrow[r, "\mathscr{H}_n(i)"] & \mathscr{H}_n(X; R) \arrow[r, "\mathscr{H}_n(j)"] & \mathscr{H}_n(X, A; R) \arrow[dll, "\partial_n(X,A)"'] \\ & \mathscr{H}_{n-1}(A; R) \arrow[r, "\mathscr{H}_{n-1}(i)"] & \mathscr{H}_{n-1}(X; R) \arrow[r, "\mathscr{H}_{n-1}(j)"] & \mathscr{H}_{n-1}(X, A; R) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

είναι ακριβής (υπό την έννοια τού ορισμού 3.1.1), όπου

$$i : A \hookrightarrow X \;\; \text{και} \;\; j : X = (X, \varnothing) \hookrightarrow (X, A)$$

είναι οι συνήθεις ενθέσεις. Ο $\mathscr{H}_n(X, A; R)$ ονομάζεται n-**οστός μόδιος ομολογίας τού τοπολογικού ζεύγους** (X, A) **(ως προς την** $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$**)**, ο ομομορφισμός $\partial_n(X, A)$ **συνδετικός ομομορφισμός** και η ανωτέρω ακολουθία **μακρά ακριβής ακολουθία τού ζεύγους** (X, A).

$\boxed{\textbf{ES-A2}}$ **Αξίωμα τού ομοτοπικώς αναλλοιώτου.** Εάν οι $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ είναι ομότοπες εντός τής $\mathscr{C}$ (όπου $(X, A), (Y, B) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$), ήτοι εάν υπάρχει επιτρεπτός μορφισμός $h : (X, A) \times I \longrightarrow (Y, B)$ με $f = h \circ j_0$ και $g = h \circ j_1$ (όπου j_0, j_1 όπως ορίσθηκαν στο C.1.2 (iii)), τότε

$$\boxed{\mathscr{H}_n(f) = \mathscr{H}_n(g) : \mathscr{H}_n(X, A; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(Y, B; R), \; \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

$\boxed{\textbf{ES-A3}}$ **Αξίωμα τής εκτομής.** Εάν οι $U \subseteq A \subseteq X$ είναι δυο υπόχωροι ενός τοπολογικού χώρου $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, τέτοιοι ώστε να ισχύει $\mathrm{cl}_X(U) \subseteq \mathrm{int}_X(A)$, τότε μέσω τής ενθέσεως τοπολογικών ζευγών $i : (X \smallsetminus U, A \smallsetminus U) \hookrightarrow (X, A)$ επάγονται ισομορφισμοί R-μοδίων:

$$\boxed{\mathscr{H}_n(i) : \mathscr{H}_n(X \smallsetminus U, A \smallsetminus U; R) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}_n(X, A; R), \; \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

$\boxed{\textbf{ES-A4}}$ **Αξίωμα τής διαστάσεως.** Για τον μονοσημειακό χώρο $\{\mathrm{pt}\}$ ισχύει:

$$\boxed{\mathscr{H}_n(\{\mathrm{pt}\}; R) \cong \{0\}, \; \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}.}$$

$\boxed{\textbf{ES-A5}}$ **Αξίωμα τού αθροίσματος.** Έστω $(X_j, A_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια τοπολογικών ζευγών (που αποτελούν αντικείμενο τής $\mathscr{C}$) και έστω $i_j : (X_j, A_j) \hookrightarrow (X, A)$ η ένθεση τοπολογικών ζευγών όταν $X := \sum_{j \in J} X_j, \; A := \sum_{j \in J} A_j, \; \forall j \in J$. Τότε ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$\boxed{\bigoplus_{j \in J} \mathscr{H}_n(i_j) : \bigoplus_{j \in J} \mathscr{H}_n(X_j, A_j; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(X, A; R)}$$

είναι *ισομορφισμός* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

C.1.7 Παρατήρηση. (i) Ήδη από τον ορισμό ενός συναλλοιώτου συναρτητή (βλ. εδ. A.2.1) είναι σαφές ότι (μέσω τού $\mathscr{H}_\bullet$) σε κάθε τοπολογικό ζεύγος $(X, A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ αντιστοιχούμε μια ακολουθία R-μοδίων $\{\mathscr{H}_n(X, A; R) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ και σε κάθε μορφισμό (τής $\mathscr{C}$) $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}((X, A), (Y, B))$ έναν μορφισμό

$$\{\mathscr{H}_n(f) : \mathscr{H}_n(X, A; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(Y, B; R) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

τής $\mathfrak{Mod}_R^{\mathbb{Z}}$, ούτως ώστε να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}((Y, B), (Z, C))$:

$$\mathscr{H}_n(\mathrm{id}_{(X,A)}) = \mathrm{id}_{H_n(X,A;R)} \;\; \text{και} \;\; \mathscr{H}_n(g) \circ \mathscr{H}_n(f) = \mathscr{H}_n(g \circ f).$$

(ii) Ο φυσικός μετασχηματισμός $\partial_\bullet$ αντιστοιχεί σε κάθε $(X, A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ και σε κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$\partial_n(X, A) : \mathscr{H}_n(X, A; R) \longrightarrow \mathscr{H}_{n-1}(A; R),$$

ούτως ώστε για κάθε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}((X, A), (Y, B))$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}_n(X, A; R) \arrow[r, "\partial_n(X,A)"] \arrow[d, "\mathscr{H}_n(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathscr{H}_{n-1}(A; R) \arrow[d, "\mathscr{H}_{n-1}(f|_A)"] \\ \mathscr{H}_n(Y, B; R) \arrow[r, "\partial_n(Y,B)"'] & \mathscr{H}_{n-1}(B; R) \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

(iii) Για τις δύο «πιο οικείες» R-θεωρίες ομολογίας (μονοπλεκτική και ιδιάζουσα) έχουμε (εκ κατασκευής) $\mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\}; R) \cong R$.

C.1.8 Σημείωση. Οι R-θεωρίες ομολογίας $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$, όπως ορίζονται στο εδ. C.1.6, είναι οι *συνήθεις θεωρίες ομολογίας*. Αντίστοιχοι συναλλοίωτοι συναρτητές $\mathscr{H}_\bullet$, οι οποίοι δεν πληρούν κατ' ανάγκην κάποιο εκ των αξιωμάτων $\boxed{\textbf{ES-A1}}$, $\boxed{\textbf{ES-A4}}$ ή $\boxed{\textbf{ES-A5}}$, οδηγούν στη θέσπιση *γενικευμένων θεωριών ομολογίας*. Π.χ., η *θεωρία ομολογίας τού Čech* δεν πληροί το $\boxed{\textbf{ES-A1}}$ (βλ. Eilenberg & Steenrod [62], Chapter IX, Theorem 7.6, σελ. 248), η *θεωρία ομορισμού* (bordism theory) και κάποιες K-*θεωρίες* δεν πληρούν το $\boxed{\textbf{ES-A4}}$ κ.λπ.

C.1.9 Ορισμός. Έστω ότι R είναι ένας μη τετρ. μεταθετικός δακτύλιος και ότι $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ (και αντιστοίχως, $(\mathscr{H}'_\bullet, \partial'_\bullet)$) είναι μια R-θεωρία ομολογίας επί μιας ομολογικώς επιτρεπτής κατηγορίας $\mathscr{C}$ (και αντιστοίχως, επί μιας ομολογικώς επιτρεπτής κατηγορίας $\mathscr{C}'$). Εάν υποτεθεί ότι αμφότερες οι $\mathscr{C}$ και $\mathscr{C}'$ περιέχουν την $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.CW}}$ ως υποκατηγορία τους, τότε ένας **φυσικός μετασχηματισμός από την** $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ **στην** $(\mathscr{H}'_\bullet, \partial'_\bullet)$ αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος $(X, A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ έναν μορφισμό

$$\omega_\bullet(X, A) \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Mod}_R^{\mathbb{Z}}}(\mathscr{H}_\bullet(X, A; R), \mathscr{H}'_\bullet(X, A; R)),$$

ούτως ώστε η οικογένεια $\{\omega_\bullet(X, A) | (X, A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\}$ να αποτελεί έναν φυσικό μετασχηματισμό (υπό την έννοια τού ορισμού A.3.1 (i)) από τον συναρτητή $\mathscr{H}_\bullet$ στον συναρτητή $\mathscr{H}'_\bullet$ *και ταυτοχρόνως* να υπάρχει συμβατότητα με τους $\partial_\bullet$ και $\partial'_\bullet$, ήτοι τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}_n(X, A; R) \arrow[r, "\partial_n(X,A)"] \arrow[d, "\omega_n(X,A)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathscr{H}_{n-1}(A; R) \arrow[d, "\omega_{n-1}(A)"] \\ \mathscr{H}'_n(X, A; R) \arrow[r, "\partial'_n(X,A)"'] & \mathscr{H}'_{n-1}(A; R) \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικά για οιονδήποτε $n \in \mathbb{Z}$. Ένας τέτοιος φυσικός μετασχηματισμός από την $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ στην $(\mathscr{H}'_\bullet, \partial'_\bullet)$ καλείται **φυσική ισοδυναμία μεταξύ των** $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ **και** $(\mathscr{H}'_\bullet, \partial'_\bullet)$ όταν η

$$\{\omega_\bullet(X,A) \,|\, (X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})\}$$

αποτελεί μια φυσική ισοδυναμία (υπό την έννοια τού ορισμού A.3.1 (ii)) μεταξύ των $\mathscr{H}_\bullet$ και $\mathscr{H}'_\bullet$ (δηλαδή όταν οι $\omega_n(X,A)$ είναι ισομορφισμοί R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$). Εν τοιαύτη περιπτώσει, λέμε ότι οι R-θεωρίες ομολογίας $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ και $(\mathscr{H}'_\bullet, \partial'_\bullet)$ είναι **φυσικώς ισοδύναμες**.

C.1.10 Θεώρημα («Θεώρημα τής μοναδικότητας»). *Έστω ότι R είναι ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος και ότι $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ (και αντιστοίχως, $(\mathscr{H}'_\bullet, \partial'_\bullet)$) είναι μια R-θεωρία ομολογίας επί μιας ομολογικώς επιτρεπτής κατηγορίας $\mathscr{C}$ (και αντιστοίχως, επί μιας ομολογικώς επιτρεπτής κατηγορίας $\mathscr{C}'$). Εάν υποτεθεί ότι αμφότερες οι $\mathscr{C}$ και $\mathscr{C}'$ περιέχουν την $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.CW}}$ ως υποκατηγορία τους και*

$$f : \mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\}; R) \longrightarrow \mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\}; R)$$

είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων, τότε υφίσταται ένας φυσικός μετασχηματισμός (R-θεωριών ομολογίας, υπό την έννοια τού ορισμού C.1.9)

$$\omega^f_\bullet : \mathscr{H}_\bullet|_{\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.CW}}} \longrightarrow \mathscr{H}'_\bullet|_{\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.CW}}}$$

από τον περιορισμό τής πρώτης στον περιορισμό τής δεύτερης επί τής $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.CW}}$, ούτως ώστε να ισχύει $\omega^f_0 = f$. Μάλιστα, στην περίπτωση κατά την οποία ο f είναι ισομορφισμός, ο $\omega^f_\bullet$ αποτελεί φυσική ισοδυναμία μεταξύ των $(\mathscr{H}_\bullet|_{\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.CW}}}, \partial_\bullet)$ και $(\mathscr{H}'_\bullet|_{\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.CW}}}, \partial'_\bullet)$ (υπό την έννοια τού ορισμού C.1.9).

C.1.11 Σημείωση. (i) Βάσει τού θεωρήματος C.1.10, επί τής $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.CW}}$ υφίσταται (μέχρι φυσικής ισοδυναμίας) *μόνον μία* R-θεωρία ομολογίας $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ με παγιωμένον (μέχρις ισομορφισμού) τον $\mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\}; R)$.

(ii) Για μια απόδειξη τού θεωρήματος C.1.10, βλ. Hu [72], Chapter I, §9, σελ. 51-62. (Το θεώρημα C.1.10 είχε αποδειχθεί εν πρώτοις από τους Eilenberg και Steenrod στο [62], Chapter III, §10, σελ. 100-105, με την $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.triang.}}$ στη θέση τής $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.CW}}$.) Για παραλλαγές και γενικεύσεις του *υπό όρους* επί ολόκληρης τής $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{CW}}$ βλ. May [78], Chapter 15, §2, σελ. 117-118, και Lück [76], §3.5, σελ. 56-60. (Τούτες οι γενικεύσεις *επέβαλαν* και τη συμπερίληψη τού πέμπτου «αξιώματος τού αθροίσματος», το οποίο *δεν* περιείχετο στο [62], διότι τα θεωρήματα μοναδικότητας επί τής $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.triang.}}$ και -αργότερα- επί τής $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.CW}}$ μπορούσαν να αποδειχθούν *χωρίς αυτό*, ενώ αυτό ίσχυε αυτομάτως *επί των εν λόγω* κατηγοριών. Φυσικά, το πέμπτο αξίωμα ισχύει για την ιδιάζουσα θεωρία ομολογίας επί τής *ευρύτερης δυνατής* ομολογικής κατηγορίας *όλων* των τοπολογικών ζευγών.)

C.2 ΑΜΕΣΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ

Έστω $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ *τυχούσα* R-θεωρία ομολογίας επί μιας (ομολογικώς επιτρεπτής) κατηγορίας $\mathscr{C}$. Εάν υποτεθεί ότι όσοι τοπολογικοί χώροι και όσα τοπολογικά ζεύγη θα αναφέρονται στις διατυπώσεις των αποτελεσμάτων τής παρούσας ενότητας αποτελούν αντικείμενα τής $\mathscr{C}$, τότε από τα αξιώματα **ES-A1** – **ES-A5** των Eilenberg και Steenrod έπονται τα ακόλουθα:

C.2.1 Πρόταση. *Εάν* $(X, A) \simeq (Y, B)$, *τότε* $\mathscr{H}_n(X, A; R) \cong \mathscr{H}_n(Y, B; R)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Αποδειξη. Εάν υποτεθεί ότι $(X, A) \simeq (Y, B)$, τότε υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις

$$f : (X, A) \to (Y, B), \;\; g : (Y, B) \to (X, A)$$

με

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,A)} \;\text{ και }\; f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(Y,B)}.$$

Από το αξίωμα **ES-A2** και το C.1.7 (i) έπεται ότι

$$\begin{cases} \mathscr{H}_n(g \circ f) = \mathscr{H}_n(g) \circ \mathscr{H}_n(f) = \mathscr{H}_n(\mathrm{id}_{(X,A)}) = \mathrm{id}_{\mathscr{H}_n(X,A;R)}, \\ \mathscr{H}_n(f \circ g) = \mathscr{H}_n(f) \circ \mathscr{H}_n(g) = \mathscr{H}_n(\mathrm{id}_{(B,Y)}) = \mathrm{id}_{\mathscr{H}_n(B,Y;R)}, \; \forall n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

οπότε ο ομομορφισμός R-μοδίων $\mathscr{H}_n(f)$ είναι ισομορφισμός (με την $\mathscr{H}_n(g)$ ως αντίστροφό του) για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

C.2.2 Σημείωση. Για $A = B = \varnothing$ η πρόταση C.2.1 μας πληροφορεί ότι

$$[X \simeq Y \Longrightarrow \mathscr{H}_n(X; R) \cong \mathscr{H}_n(Y; R), \; \forall n \in \mathbb{Z}].$$

C.2.3 Πόρισμα. *Εάν ο* X *είναι ένας συσταλτός τοπολογικός χώρος* (βλ. εδ. B.5.5), *τότε*

$$\mathscr{H}_n(X; R) \cong \{0\}, \;\; \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}.$$

Αποδειξη. Άμεση από τις προτάσεις B.5.21, C.2.1 και το αξίωμα **ES-A4**. □

C.2.4 Πρόταση. *Έστω* (X, A) *ένα τοπολογικό ζεύγος. Εάν ως* $i : A \hookrightarrow X$ *και ως* $j : X \hookrightarrow (X, A)$ *συμβολίσουμε τις συνήθεις ενθέσεις και υποθέσουμε ότι ο* A *είναι μια σύμπτυξη τού* X (υπό την έννοια τού ορισμού B.5.13), *τότε ισχύουν τα ακόλουθα*:

(i) *Ο* $\mathscr{H}_n(i) : \mathscr{H}_n(A; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(X; R)$ *είναι μονομορφισμός,* $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(ii) *Ο* $\mathscr{H}_n(j) : \mathscr{H}_n(X; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(X, A; R)$ *είναι επιμορφισμός,* $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(iii) *Οι συνδετικοί ομομορφισμοί* $\partial_n(X, A)$ *είναι μηδενικοί,* $\forall n \in \mathbb{Z}$.

(iv) $\mathscr{H}_n(X; R) \cong \mathscr{H}_n(A; R) \oplus \mathscr{H}_n(X, A; R)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Αποδειξη. Εξ υποθέσεως υπάρχει συνεχής απεικόνιση $r : X \longrightarrow A$ με $r \circ i = \mathrm{id}_A$. Άρα

$$\mathscr{H}_n(r \circ i) = \mathscr{H}_n(r) \circ \mathscr{H}_n(i) = \mathscr{H}_n(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathscr{H}_n(A;R)}$$

$$\Rightarrow [\mathscr{H}_n(r) \text{ επιμορφισμός και } \mathscr{H}_n(i) \text{ μονομορφισμός}, \forall n \in \mathbb{Z}],$$

απ' όπου προκύπτει το (i) και η βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\{0\} \longrightarrow \mathscr{H}_n(A;R) \xrightarrow{\mathscr{H}_n(i)} \mathscr{H}_n(X;R) \xrightarrow{\mathscr{H}_n(r)} \mathscr{H}_n(A;R) \longrightarrow \{0\}.$$

Από τη συνεπαγωγή (ii)⇒(iii) τού θεωρήματος 3.1.29 λαμβάνουμε

$$\mathscr{H}_n(X;R) \cong \mathrm{Im}(\mathscr{H}_n(i)) \oplus \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_n(r)),\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{C.1}$$

Εν συνεχεία θεωρούμε τη μακρά ακριβή ακολουθία τού $\boxed{\textbf{ES-A1}}$,

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{H}_n(A;R) \xrightarrow{\mathscr{H}_n(i)} \mathscr{H}_n(X;R) \xrightarrow{\mathscr{H}_n(j)} \mathscr{H}_n(X,A;R) \xrightarrow{\partial_n(X,A)} \mathscr{H}_{n-1}(A;R) \xrightarrow{\mathscr{H}_{n-1}(i)} \mathscr{H}_{n-1}(X;R) \xrightarrow{\mathscr{H}_{n-1}(j)} \mathscr{H}_{n-1}(X,A;R) \longrightarrow \cdots$$

Εξ αυτής συνάγεται ότι

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Im}(\partial_n(X,A)) = \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_{n-1}(i)) \overset{\text{(i)}}{=} \{0\} \Longrightarrow \text{το (iii) είναι αληθές.} \\ \mathrm{Im}(\mathscr{H}_n(j)) = \mathrm{Ker}(\partial_n(X,A)) = \mathscr{H}_n(X,A;R) \Longrightarrow \text{το (ii) είναι αληθές.} \end{array}\right\}$$

Τέλος, από την (C.1) έχουμε

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{H}_n(r)) \underset{2.4.20}{\cong} \mathscr{H}_n(X;R)/\mathrm{Im}(\mathscr{H}_n(i)) \cong \mathscr{H}_n(X;R)/\mathrm{Ker}(\mathscr{H}_n(j))$$
$$\underset{2.3.7}{\cong} \mathrm{Im}(\mathscr{H}_n(j)) \overset{\text{(ii)}}{=} \mathscr{H}_n(X,A;R).$$

Κι επειδή $\mathrm{Im}(\mathscr{H}_n(i)) \overset{\text{(i)}}{\cong} \mathscr{H}_n(A;R)$, το (iv) είναι ωσαύτως αληθές. □

C.2.5 Πόρισμα. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω $x_0 \in X$. Τότε*

$$\mathscr{H}_n(X;R) \cong \begin{cases} \mathscr{H}_0(\{x_0\};R) \oplus \mathscr{H}_0(X,\{x_0\};R), & \text{όταν } n = 0, \\ \mathscr{H}_n(X,\{x_0\};R), & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}. \end{cases}$$

Απόδειξη. Άμεση από το (iv) τής προτάσεως C.2.4 (για $A := \{x_0\}$) και από το πόρισμα C.2.3. (Εν προκειμένω, $r(x) := x_0$, $\forall x \in X$.) □

C.2.6 Πόρισμα. *Έστω (X,A) ένα τοπολογικό ζεύγος. Εάν το A είναι μια παραμορφωτική σύμπτυξη τού X* (βλ. ορισμό B.5.22) *τότε*

$$\mathscr{H}_n(X,A;R) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z}. \qquad (\text{Π.χ., } \mathscr{H}_n(X,X;R) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z}.)$$

Απόδειξη. Άμεση από το (iv) τής προτάσεως C.2.4 και από τη σημείωση B.5.23, καθότι $X \simeq A \overset{\text{C.2.2}}{\Longrightarrow} \mathscr{H}_n(X;R) \cong \mathscr{H}_n(A;R)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. □

C.2.7 Πρόταση. *Το αξίωμα τής εκτομής* $\boxed{\textbf{ES-A3}}$ *είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:*

$\boxed{\textbf{ES-A3}}^{\star}$: *Εάν οι* A, B *είναι δυο υπόχωροι ενός τοπολογικού χώρου* X, *τέτοιοι ώστε να ισχύει* $X = \mathrm{int}_X(A) \cup \mathrm{int}_X(B)$, *τότε μέσω τής ενθέσεως τοπολογικών ζευγών* $j : (A, A \cap B) \hookrightarrow (A \cup B, B) = (X, B)$ *επάγονται ισομορφισμοί* R*-μοδίων*

$$\boxed{\mathscr{H}_n(j) : \mathscr{H}_n(A, A \cap B; R) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}_n(X, B; R), \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Αποδειξη. $\boxed{\textbf{ES-A3}} \Rightarrow \boxed{\textbf{ES-A3}}^{\star}$: Εάν $X = \mathrm{int}_X(A) \cup \mathrm{int}_X(B)$, θέτουμε $U' := X \smallsetminus A$ και $A' := B$. Προφανώς,

$$\mathrm{cl}_X(U') = X \smallsetminus \mathrm{int}_X(A) \subseteq \mathrm{int}_X(B) = \mathrm{int}_X(A')$$

και $(X \smallsetminus U', A' \smallsetminus U') = (A, A \cap B)$, οπότε το $\boxed{\textbf{ES-A3}}^{\star}$ είναι αληθές.

$\boxed{\textbf{ES-A3}}^{\star} \Longrightarrow \boxed{\textbf{ES-A3}}$: Ας προϋποθέσουμε ότι $U \subseteq A \subseteq X$ με $\mathrm{cl}_X(U) \subseteq \mathrm{int}_X(A)$. Θέτοντας $A' := X \smallsetminus U$ και $B' := A$ έχουμε

$$\mathrm{int}_X(A') \cup \mathrm{int}_X(B') = (X \smallsetminus \mathrm{cl}_X(U)) \cup \mathrm{int}_X(A) = X$$

και επειδή $(X \smallsetminus U, A \smallsetminus U) = (A', A' \cap B')$ μέσω τής $i : (X \smallsetminus U, A \smallsetminus U) \hookrightarrow (X, A)$ επάγονται ισομορφισμοί R-μοδίων

$$\mathscr{H}_n(i) : \mathscr{H}_n(X \smallsetminus U, A \smallsetminus U; R) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}_n(X, A; R)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

C.3 ΑΝΗΓΜΕΝΟΙ ΜΟΔΙΟΙ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

Έστω $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ μια R-θεωρία ομολογίας (επί μιας ομολογικώς επιτρεπτής κατηγορίας $\mathscr{C}$) με $\mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\}; R) \cong R$. Οι μόδιοι ομολογίας $\mathscr{H}_n(\{\mathrm{pt}\}; R)$ εντάσσονται στα απαραίτητα δεδομένα αυτής αλλά δεν εμπεριέχουν καμιά *ειδική* γεωμετρική πληροφορία. Ως εκ τούτου, για την απλούστευση ορισμένων τύπων είθισται να ορίζονται οι *ανηγμένοι* μόδιοι ομολογίας[5].

C.3.1 Ορισμός. Έστω $X \neq \varnothing$ ένας τοπολογικός χώρος. Τότε υπάρχει ακριβώς μία συνεχής απεικόνιση $\mu = \mu_X : X \longrightarrow \{\mathrm{pt}\}$. Θέτουμε

$$\boxed{\tilde{\mathscr{H}}_n(X; R) := \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_n(\mu) : \mathscr{H}_n(X; R) \longrightarrow \mathscr{H}_n(\{\mathrm{pt}\}; R))}$$

και για $\varnothing \neq A \subseteq X$: $\tilde{\mathscr{H}}_n(X, A; R) := \mathscr{H}_n(X, A; R)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Αυτοί οι R-μόδιοι καλούνται **ανηγμένοι μόδιοι ομολογίας** τού X (και αντιστοίχως, τού ζεύγους (X, A)).

[5] *Και σε αυτήν την ενότητα* θα υποτεθεί ότι όσοι τοπολογικοί χώροι και όσα τοπολογικά ζεύγη συναντώνται στα εδάφιά της είναι αντικείμενα τής $\mathscr{C}$.

C.3.2 Σημείωση. (i) Εάν $\nu = \nu_X : \{\mathrm{pt}\} \hookrightarrow X$ είναι η συνήθης ένθεση, τότε έχουμε $\mu \circ \nu = \mathrm{id}_{\{\mathrm{pt}\}}$, οπότε

$$\mathscr{H}_0(\mu) \circ \mathscr{H}_0(\nu) = \mathrm{id}_{\mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\};R)} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{H}_0(\mu) \text{ επιμορφισμός} \\ \mathscr{H}_0(\nu) \text{ μονομορφισμός} \end{array} \right\},$$

απ' όπου προκύπτει η βραχεία ακριβής ακολουθία:

$$\{0\} \longrightarrow \mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\};R) \cong R \xrightarrow{\mathscr{H}_0(\nu)} \mathscr{H}_0(X;R) \xrightarrow{\mathscr{H}_0(\mu)} R \cong \mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\};R) \longrightarrow \{0\}$$

και ως εκ τούτου (λόγω τού πορίσματος 3.1.31 και τού θεωρήματος 3.1.29) ο ισομορφισμός R-μοδίων:

$$\mathscr{H}_0(X;R) \cong \mathrm{Im}(\mathscr{H}_0(\nu)) \oplus \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_0(\mu)).$$

(ii) Βάσει τού αξιώματος $\boxed{\textbf{ES-A4}}$, $\tilde{\mathscr{H}}_n(X;R) = \mathscr{H}_n(X;R)$, $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, και κατ' αναλογίαν,

$$\tilde{\mathscr{H}}_n(A;R) = \mathscr{H}_n(A;R), \ \ \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

(iii) Από τα θεωρήματα 2.3.7 και 2.5.46 λαμβάνουμε

$$\mathscr{H}_0(X;R)/\tilde{\mathscr{H}}_0(X;R) \cong \mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\};R) \Rightarrow \mathscr{H}_0(X;R) \cong \tilde{\mathscr{H}}_0(X;R) \oplus \mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\};R).$$

Επιπροσθέτως,

$$\mathscr{H}_n(A;R) = \tilde{\mathscr{H}}_0(A;R) \oplus \mathrm{Im}(\mathscr{H}_0(\nu)) = \tilde{\mathscr{H}}_0(A;R) \oplus \mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\};R).$$

C.3.3 Πρόταση. *Εάν το (X,A) είναι ένα τοπολογικό ζεύγος με $X \neq \varnothing$ και $A \neq \varnothing$, τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία*

$$\cdots \longrightarrow \tilde{\mathscr{H}}_n(A;R) \xrightarrow{\tilde{\mathscr{H}}_n(i)} \tilde{\mathscr{H}}_n(X;R) \xrightarrow{\tilde{\mathscr{H}}_n(j)} \mathscr{H}_n(X,A;R) \xrightarrow{\partial_n(X,A)} \tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(A;R) \longrightarrow \cdots$$

(η λεγομένη ***ανηγμένη μακρά ακριβής ακολουθία ομολογίας****), όπου*

$$i : A \hookrightarrow X, \quad j : X \hookrightarrow (X,A)$$

οι συνήθεις ενθέσεις με

$$\tilde{\mathscr{H}}_n(i) = \begin{cases} \mathscr{H}_0(i)|_{\tilde{\mathscr{H}}_0(A;R)}, & \text{όταν } n = 0, \\ \mathscr{H}_n(i), & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

και

$$\tilde{\mathscr{H}}_n(j) = \begin{cases} \mathscr{H}_0(j)|_{\tilde{\mathscr{H}}_0(X;R)}, & \text{όταν } n = 0, \\ \mathscr{H}_n(j), & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Αποδειξη. Η ανωτέρω μακρά ακολουθία διαφέρει τής *συνήθους* (τού αξιώματος $\boxed{\textbf{ES-A1}}$) μόνον για $n = 0$:

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{\mathscr{H}}_0(A;R) \arrow[r, "\tilde{\mathscr{H}}_0(i)"] \arrow[d, hook] & \tilde{\mathscr{H}}_0(X;R) \arrow[d, hook] \arrow[dr, "\tilde{\mathscr{H}}_0(j)"] & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathscr{H}_1(X,A;R) \arrow[r, "\partial_1(X,A)"'] \arrow[ur, "\partial_1(X,A)\breve{}"] & \mathscr{H}_0(A;R) \arrow[r, "\mathscr{H}_0(i)"'] \arrow[d, two heads] & \mathscr{H}_0(X;R) \arrow[r, "\mathscr{H}_0(j)"'] \arrow[d, two heads] & \mathscr{H}_0(X,A;R) \arrow[r, "\partial_0(X,A)"'] & \cdots \\
 & \underbrace{\mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\},\{\mathrm{pt}\};R)}_{\cong\{0\}} \arrow[r] & \underbrace{\mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\};R)}_{\cong R} \arrow[r, "\cong"] & \underbrace{\mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\};R)}_{\cong R} \arrow[r] & \underbrace{\mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\},\{\mathrm{pt}\};R)}_{\cong\{0\}} &
\end{tikzcd}$$

Επειδή η $\tilde{\mathscr{H}}_0(i)$ στέλνει τον R-μόδιο $\tilde{\mathscr{H}}_0(A;R)$ να απεικονισθεί στον R-μόδιο $\tilde{\mathscr{H}}_0(X;R)$ και την εικόνα $\mathrm{Im}(\mathscr{H}_0(\nu_A))$ να απεικονισθεί (ισομορφικώς) επί τής εικόνας $\mathrm{Im}(\mathscr{H}_0(\nu_X))$ έχουμε

$$\mathrm{Ker}(\tilde{\mathscr{H}}_0(i)) = \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_0(i))$$

και

$$\mathrm{Im}(\tilde{\mathscr{H}}_0(i)) = \mathrm{Im}(\mathscr{H}_0(i)) \cap \tilde{\mathscr{H}}_0(X;R).$$

Επιπροσθέτως, $\mathrm{Ker}(\tilde{\mathscr{H}}_0(j)) = \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_0(j)) \cap \tilde{\mathscr{H}}_0(X)$ (εξ ορισμού). Άρα

$$\mathrm{Im}(\partial_1(X,A)) = \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_0(i)) = \mathrm{Ker}(\tilde{\mathscr{H}}_0(i)),$$

$$\mathrm{Im}(\tilde{\mathscr{H}}_0(i)) = \mathrm{Im}(\mathscr{H}_0(i)) \cap \tilde{\mathscr{H}}_0(X;R) = \mathrm{Ker}(\mathscr{H}_0(j)) \cap \tilde{\mathscr{H}}_0(X) = \mathrm{Ker}(\tilde{\mathscr{H}}_0(j)),$$

οπότε και η ανωτέρω ακολουθία είναι ακριβής. □

C.3.4 Παρατήρηση. (i) Εάν $X \simeq Y$, τότε $\widetilde{\mathscr{H}}_n(X;R) \cong \widetilde{\mathscr{H}}_n(Y;R)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
(ii) Εάν ένας τοπολογικός χώρος $X \neq \varnothing$ είναι *συσταλτός* (βλ. εδ. B.5.5), τότε

$$\widetilde{\mathscr{H}}_n(X;R) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

διότι εν τοιαύτη περιπτώσει η $\mu : X \longrightarrow \{\mathrm{pt}\}$ είναι κατ' ανάγκην μια ομοτοπική ισοδυναμία, οπότε από τη σημείωση C.2.2 έπεται ότι ο ομομορφισμός $\mathscr{H}_n(\mu)$ είναι *ισομορφισμός* για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

C.3.5 Πόρισμα. *Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος με $X \neq \varnothing$ και $A \neq \varnothing$.*
(i) *Εάν ο X είναι συσταλτός, τότε ο συνδετικός ομομορφισμός $\partial_n(X,A)$ είναι ισομορφισμός*:

$$\mathscr{H}_n(X,A;R) = \widetilde{\mathscr{H}}_n(X,A;R) \underset{\partial_n(X,A)}{\xrightarrow{\cong}} \widetilde{\mathscr{H}}_{n-1}(A;R),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(ii) *Εάν ο A είναι συσταλτός, τότε ο ομομορφισμός $\tilde{\mathscr{H}}_n(j)$ είναι ισομορφισμός:*

$$\tilde{\mathscr{H}}_n(X;R) \underset{\tilde{\mathscr{H}}_n(j)}{\xrightarrow{\cong}} \tilde{\mathscr{H}}_n(X,A;R) = \mathscr{H}_n(X,A;R),\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη. Άμεσο επακολούθημα των C.3.3, C.3.4 (ii) και 3.1.3 (i). □

C.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΜΟΔΙΩΝ ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ ΣΦΑΙΡΩΝ

Εργαζόμενοι με μια R-θεωρία ομολογίας $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ επί μιας ομολογικώς επιτρεπτής κατηγορίας $\mathscr{C}$ με $\mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\};R) \cong R$ και προϋποθέτοντας ότι οι τοπολογικοί χώροι και τα τοπολογικά ζεύγη που θα θεωρούμε θα ανήκουν στην $\mathscr{C}$, θα υπολογίσουμε τους μοδίους ομολογίας σφαιρών οιασδήποτε διαστάσεως κάνοντας χρήση μόνον των αξιωμάτων των Eilenberg και Steenrod, και θα αποδείξουμε το *θεώρημα τού αναλλοιώτου τής διαστάσεως των σφαιρών μέσω ομοτοπικής ισοδυναμίας.*

Ας συμβολίσουμε, για οιονδήποτε $d \in \mathbb{N}_0$, ως $\mathbb{S}^d_+$ (και αντιστοίχως, ως $\mathbb{S}^d_-$) το βόρειο (και αντιστοίχως, το νότιο) ημισφαίριο τής $\mathbb{S}^d$ και ως $P_- = (0,...,0,-1)$ τον νότιο πόλο τής[6] $\mathbb{S}^d$.

C.4.1 Λήμμα. $\mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d_+, \mathbb{S}^{d-1}; R) \cong \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^d_-; R)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Η ένθεση τοπολογικών ζευγών

$$i : (\mathbb{S}^d_+, \mathbb{S}^{d-1}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^d_-)$$

γράφεται ως σύνθεση $i = j \circ j'$ των ενθέσεων

$$j : (\mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_-\}, \mathbb{S}^d_- \smallsetminus \{P_-\}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^d_-)$$

και

$$j' : (\mathbb{S}^d_+, \mathbb{S}^{d-1}) \hookrightarrow (\mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_-\}, \mathbb{S}^d_- \smallsetminus \{P_-\}).$$

Επειδή $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^{d+1}}(\{P_-\}) = \{P_-\} \subset \mathring{\mathbb{B}}^d_-$ (= νότιο ημισφαίριο χωρίς τον ισημερινό), το αξίωμα $\boxed{\textbf{ES-A3}}$ τής εκτομής μας πληροφορεί ότι

$$\mathscr{H}_n(j) : \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_-\}, \mathbb{S}^d_- \smallsetminus \{P_-\}; R) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^d_-; R) \tag{C.2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επίσης, ορίζοντας τη συνεχή απεικόνιση τοπολογικών ζευγών

$$g : (\mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_-\}, \mathbb{S}^d_- \smallsetminus \{P_-\}) \longrightarrow (\mathbb{S}^d_+, \mathbb{S}^{d-1})$$

μέσω τού τύπου

$$g(x_1,...,x_{d+1}) := \begin{cases} (x_1,...,x_{d+1}), & \text{όταν } x_{d+1} \geqslant 0, \\ \frac{1}{\sqrt{1-x_{d+1}^2}}(x_1,...,x_d,0), & \text{όταν } x_{d+1} \leqslant 0, \end{cases}$$

[6] Επίσης, υιοθετείται η *σύμβαση*: $\mathbb{S}^{-1} = \varnothing$.

διαπιστώνουμε ότι

$$g \circ j' = \mathrm{id}_{(\mathbb{S}^d_+, \mathbb{S}^{d-1})} \ \text{και} \ j' \circ g \simeq \mathrm{id}_{(\mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_-\}, \mathbb{S}^d_- \smallsetminus \{P_-\})}$$

μέσω τής $F(\mathbf{x}, t) := \frac{(1-t)\mathbf{x}+tg(\mathbf{x})}{||(1-t)\mathbf{x}+tg(\mathbf{x})||}$, $\forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{S}^d \times \mathbf{I}$. Επομένως,

$$(\mathbb{S}^d_+, \mathbb{S}^{d-1}) \simeq (\mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_-\}, \mathbb{S}^d_- \smallsetminus \{P_-\}),$$

και βάσει τής προτάσεως C.2.1,

$$\mathscr{H}_n(j^r) : \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d_+, \mathbb{S}^{d-1}; R) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d \smallsetminus \{P_-\}, \mathbb{S}^d_- \smallsetminus \{P_-\}; R) \tag{C.3}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Από τις (C.2) και (C.3) έπεται ότι *και* η σύνθεση

$$\mathscr{H}_n(i) = \mathscr{H}_n(j) \circ \mathscr{H}_n(j')$$

είναι ισομορφισμός R-μοδίων για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

C.4.2 Λήμμα. $\tilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{B}^d; R) \cong \tilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{S}^d_\pm; R) \cong \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Ο πρώτος ισομορφισμός είναι αληθής, διότι $\mathbb{B}^d \cong \mathbb{S}^d_\pm$. (Βλ. B.1.3 (iv) και C.3.4 (i).) Επειδή η μπάλα $\mathbb{B}^d$ είναι συσταλτή (βλ. B.5.6 (v)), έχουμε

$$\tilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{B}^d; R) \cong \{0\}, \ \forall n \in \mathbb{Z}\,.$$

(Βλ. C.3.4 (ii)). □

C.4.3 Θεώρημα. *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:*

$(\mathbf{I}_d)$ $$\tilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{S}^d; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = d, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{d\}. \end{cases}$$

$(\mathbf{II}_d)$ $$\mathscr{H}_n(\mathbb{B}^d, \mathbb{S}^{d-1}; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = d, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{d\}. \end{cases}$$

$(\mathbf{III}_d)$ $$\mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^d_-; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = d, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{d\}. \end{cases}$$

Απόδειξη. Οι ισομορφισμοί $(\mathbf{I}_d)$, $(\mathbf{II}_d)$ και $(\mathbf{III}_d)$ θα αποδειχθούν *υπαναλειπτικώς* (δηλαδή μέσω διαδοχικού προσδιορισμού των εν λόγω R-μοδίων μέχρις ισομορφισμού).

Βήμα 1ο. Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι ισχύει η $(\mathbf{III}_0)$: Από το λήμμα C.4.1 έχουμε

$$\mathscr{H}_n(\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^0_-; R) = \mathscr{H}_n(\{\pm 1\}, \{-1\}; R) \cong \mathscr{H}_n(\{1\}, \varnothing; R) \cong \mathscr{H}_n(\{\mathrm{pt}\}; R),$$

οπότε αρκεί η εφαρμογή τού αξιώματος $\boxed{\textbf{ES-A4}}$ τής διαστάσεως και το ότι εξ υποθέσεως $\mathscr{H}_n(\{\mathrm{pt}\}; R) \cong R$.

Βήμα 2ο. $(\mathbf{I}_d) \iff (\mathbf{III}_d)$. Τούτη η ισοδυναμία έπεται από την ανηγμένη μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας (την κατασκευασθείσα μέσω τής προτάσεως C.3.3) για το τοπολογικό ζεύγος $(\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^d_-)$:

$$\cdots \to \{0\} \cong \tilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{S}^d_-; R) \to \tilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{S}^d; R) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^d_-; R) \to \tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(\mathbb{S}^d_-; R) \cong \{0\} \to \cdots$$

Βήμα 3ο. $(\mathbf{II}_d) \iff (\mathbf{III}_d)$. Επειδή καθένα ημισφαίριο $\mathbb{S}^d_\pm$ είναι ομοιομορφικό με τη μοναδιαία μπάλα $\mathbb{B}^d$ (μέσω τής ορθογώνιας προβολής) έχουμε

$$\mathscr{H}_n(\mathbb{B}^d, \mathbb{S}^{d-1}; R) \cong \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d_+, \mathbb{S}^{d-1}; R) \cong \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d, \mathbb{S}^d_-; R), \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Βήμα 4ο. $(\mathbf{I}_{d-1}) \iff (\mathbf{II}_d)$ για $d \geqslant 1$. Τούτο έπεται από ανηγμένη μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας C.3.3 για το τοπολογικό ζεύγος $(\mathbb{B}^d, \mathbb{S}^{d-1})$:

$$\cdots \to \{0\} \cong \tilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{B}^d; R) \to \mathscr{H}_n(\mathbb{B}^d, \mathbb{S}^{d-1}; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(\mathbb{S}^{d-1}; R) \to \tilde{\mathscr{H}}_{n-1}(\mathbb{B}^d; R) \cong \{0\} \to \cdots$$

Βήμα 5ο. Από τα προηγούμενα βήματα διαπιστώνουμε επί τη βάσει τού κάτωθι διαγράμματος λογικών ισοδυναμιών

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{I}_0) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & (\mathbf{I}_1) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & (\mathbf{I}_2) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \cdots\cdots \\
(\mathbf{II}_0) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & (\mathbf{II}_1) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & (\mathbf{II}_2) \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \cdots\cdots \\
(\mathbf{III}_0) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathbf{III}_1) \arrow[r, Leftrightarrow] & (\mathbf{III}_2) \arrow[r, Leftrightarrow] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

ότι οι αποδειχθείσες αμφίπλευρες συνεπαγωγές (μαζί με την $(\mathbf{III}_0)$) αρκούν για την ολοκλήρωση τής αποδείξεως. $\square$

C.4.4 Πόρισμα. *Οι μόδιοι ομολογίας τής σφαίρας* $\mathbb{S}^d$, $d \geqslant 0$, *είναι οι εξής*:

$$\boxed{\mathscr{H}_n(\mathbb{S}^d; R) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, d\}, \\ R, & \text{όταν } n \in \{0, d\} \text{ και } d > 0, \\ R \oplus R, & \text{όταν } n = d = 0. \end{cases}}$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το $(\mathbf{I}_d)$ τού θεωρήματος, το (iii) τής σημειώσεως C.3.2, το αξίωμα τής διαστάσεως $\boxed{\textbf{ES-A4}}$ και το ότι $\mathscr{H}_n(\{\mathrm{pt}\}; R) \cong R$. $\square$

C.4.5 Πόρισμα. (i) *Για κάθε* $d \geqslant 1$ *έχουμε*

$$\tilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}; R) \cong \tilde{\mathscr{H}}_n(\mathbb{B}^d \setminus \{\mathbf{0}\}; R) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \setminus \{d-1\}, \\ R, & \text{όταν } n = d-1. \end{cases}$$

(ii) *Για κάθε $d \geqslant 0$ έχουμε*

$$\mathscr{H}_n(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}; R) \cong \mathscr{H}_n(\mathbb{B}^d, \mathbb{B}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}; R) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{d\}, \\ R, & \text{όταν } n = d. \end{cases}$$

Απόδειξη. (i) Επειδή η $\mathbb{S}^{d-1}$ είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τόσον τού $\mathbb{R}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ όσον και τού $\mathbb{B}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ (βλ. εδ. B.5.24 (i)), τούτοι οι ισομορφισμοί έπονται από τις σημειώσεις B.5.23, C.3.4 (i) και το $(\mathbf{I}_d)$ τού θεωρήματος C.4.3.

(ii) Κατ' αρχάς $(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}) \simeq (\mathbb{B}^d, \mathbb{B}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\})$. Πράγματι· εάν

$$i : (\mathbb{B}^d, \mathbb{B}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}) \hookrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\})$$

είναι η συνήθης ένθεση και

$$r : (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}) \longrightarrow (\mathbb{B}^d, \mathbb{B}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\})$$

η απεικόνιση η οριζόμενη μέσω τού τύπου

$$r(\mathbf{x}) := \begin{cases} \mathbf{x}, & \text{όταν } ||\mathbf{x}|| \leqslant 1, \\ \dfrac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}, & \text{όταν } ||\mathbf{x}|| \geqslant 1. \end{cases}$$

τότε η r είναι συνεχής, $r \circ i = \mathrm{id}_{(\mathbb{B}^d, \mathbb{B}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\})}$ και $i \circ r \underset{H}{\simeq} \mathrm{id}_{(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\})}$ μέσω τής ομοτοπίας

$$H : (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}) \times \mathbf{I} \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\})$$

$$(\mathbf{x}, t) \longmapsto H(\mathbf{x}, t) := (1 - t)(i \circ r)(\mathbf{x}) + t\mathbf{x}.$$

Ως εκ τούτου, οι πρώτοι ισομορφισμοί είναι αληθείς επί τη βάσει τής προτάσεως C.2.1. Εν συνεχεία, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η $\mathbb{S}^{d-1}$ είναι ισχυρή παραμορφωτική σύμπτυξη τού $\mathbb{B}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$, θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_n(\mathbb{S}^{d-1}; R) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathscr{H}_n(\mathbb{B}^d; R) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathscr{H}_n(\mathbb{B}^d, \mathbb{S}^{d-1}; R) \arrow[r] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathscr{H}_{n-1}(\mathbb{S}^{d-1}; R) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathscr{H}_{n-1}(\mathbb{B}^d; R) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathscr{H}_n(\mathbb{B}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}; R) \arrow[r] & \mathscr{H}_n(\mathbb{B}^d; R) \arrow[r] & \mathscr{H}_n(\mathbb{B}^d, \mathbb{B}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}; R) \arrow[r] & \mathscr{H}_{n-1}(\mathbb{B}^d \smallsetminus \{\mathbf{0}\}; R) \arrow[r] & \mathscr{H}_{n-1}(\mathbb{B}^d; R)
\end{tikzcd}$$

και παρατηρούμε ότι οι δύο αριστεροί και οι δύο δεξιοί ομομορφισμοί R-μοδίων (οι υποδηλούμενοι μέσω των κατακορύφων βελών) είναι ισομορφισμοί. Αρκεί λοιπόν η εφαρμογή τού (iii) τού «λήμματος των πέντε» 3.1.8 και τού $(\mathbf{II}_d)$ τού θεωρήματος C.4.3. □

C.4.6 Θεώρημα («Θεώρημα τού αναλλοιώτου τής διαστάσεως των σφαιρών μέσω ομοτοπικής ισοδυναμίας»). *Εάν $d_1, d_2 \in \mathbb{N}_0$ και $d_1 \neq d_2$, τότε $\mathbb{S}^{d_1} \not\simeq \mathbb{S}^{d_2}$.*

Απόδειξη. Εάν $d_1, d_2 \in \mathbb{N}_0$ και υποτεθεί ότι $\mathbb{S}^{d_1} \simeq \mathbb{S}^{d_2}$, τότε (κατά τη σημείωση C.2.2) έχουμε

$$\mathscr{H}_n(\mathbb{S}^{d_1}; R) \cong \mathscr{H}_n(\mathbb{S}^{d_2}; R)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, οπότε κατ' ανάγκην ισχύει η ισότητα $d_1 = d_2$ (λόγω τού πορίσματος C.4.4). □

C.5 ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ BROUWER

Εν συνεχεία, εργαζόμενοι με μια R-θεωρία ομολογίας $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ με $\mathscr{H}_0(\{\mathrm{pt}\}; R) \cong R$ και διατηρώντας και τις λοιπές προϋποθέσεις τής §C.4, θα αποδείξουμε το περίφημο *θεώρημα τού σταθερού σημείου*[7] το οφειλόμενο στον L.E.J. Brouwer[8].

C.5.1 Λήμμα. *Έστω $d \in \mathbb{N}_0$. Η ταυτοτική απεικόνιση $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^d} : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ δεν έχει καμία συνεχή επέκταση $h : \mathbb{B}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{S}^d$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει συνεχής απεικόνιση $h : \mathbb{B}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ με $h|_{\mathbb{S}^d} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^d}$. Τότε έχουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{S}^d & \\
\mathbb{S}^d \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathbb{S}^d}"] \arrow[rr, hook, "i"'] & \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{B}^{d+1} \arrow[ul, dashed, "h"']
\end{tikzcd}$$

όπου i η συνήθης ένθεση. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $d = 0$. Τότε $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$ και η $h : [-1, 1] \longrightarrow \{\pm 1\}$ είναι συνεχής και κατ' ανάγκην επιρριπτική (διότι αλλιώς $h|_{\mathbb{S}^0} \neq \mathrm{id}_{\mathbb{S}^0}$). Επειδή το $\mathbb{B}^1$ είναι συνεκτικό, ενώ η $\mathbb{S}^0$ δεν είναι συνεκτική, καταλήγουμε σε άτοπο. (Η εικόνα ενός συνεκτικού τοπολογικού χώρου μέσω οιασδήποτε συνεχούς απεικονίσεως οφείλει να είναι συνεκτική[9].) Κατά συνέπειαν, είναι αδύνατη η ύπαρξη μιας τέτοιας h.

(ii) $d \geqslant 1$. Σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα[10]

$$\begin{tikzcd}
R \cong \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d; R) \arrow[rr, "\mathscr{H}_d(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^d})"] \arrow[dr, "\mathscr{H}_d(i)"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d; R) \cong R \\
& \mathscr{H}_d(\mathbb{B}^{d+1}; R) \cong \{0\} \arrow[ur, "\mathscr{H}_d(h)"'] &
\end{tikzcd}$$

---

[7]Βλ. L.E.J. Brouwer: *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen **71** (1912), 97-115. (Εδώ το θεώρημα αποδεικνύεται για ευκλείδεια [κλειστά] μονόπλοκα. Όμως κάθε τέτοιο μονόπλοκο είναι ομοιομορφικό με μια μπάλα.)

[8]Brouwer, *Luitzen Egbertus Jan* (27/2/1881-2/12/1966). Ολλανδός μαθηματικός και φιλόσοφος. Υπήρξε ο ιδρυτής τής φιλοσοφικού κινήματος τού *ενορατισμού* (ή *ιντουισιονισμού* ή *διαισθησιαρχίας*), το οποίο αντιτάχθηκε τόσο στον φορμαλισμό τού Hilbert όσο και στον λογικισμό τού Russell. Η ακατάπαυστη ενασχόλησή του με τις Θεμελιώσεις των Μαθηματικών από μια εντελώς αμφιλεγόμενη θεώρηση τον οδήγησε σε αρκετές ακρότητες. Επί παραδείγματι, ενώ οι τοπολογικές του έρευνες (οι περισσότερες των οποίων εγράφησαν μεταξύ των ετών 1909 και 1913) ήταν πράγματι πολύ σημαντικές, ο ίδιος δεν δίδαξε (ως καθηγητής τού Πανεπιστημίου τού Amsterdam) ούτε μία φορά ένα τοπολογικό μάθημα. Έφτασε μάλιστα αργότερα στο σημείο να αμφιβάλει ακόμα και για την ορθότητά τους. Για κάποιες πρώτες αρχές τού ενορατισμού βλ. π.χ. Δ. Α. Αναπολιτάνου: *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, τρίτη έκδ., Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα, 1985, ενότητα 3.3, σελ. 272-299.

[9]Βλ. [38], Theorem V.1.4, σελ. 108, [41], Ch. 3., Theorem 23.5, σελ. 150, ή [42], Πρόταση 7.5, σελ. 113.

[10]Εδώ χρησιμοποιούνται οι ισομορφισμοί $\mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d; R) \underset{\text{C.4.4}}{\cong} R$ και $\mathscr{H}_d(\mathbb{B}^{d+1}; R) \underset{\text{C.2.3}}{\cong} \{0\}$.

το οποίο μας οδηγεί εκ νέου σε άτοπο ($\mathscr{H}_d(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^d}) = \mathrm{id}_{\mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d)} = \mathscr{H}_d(h) \circ \mathscr{H}_d(i) = 0$). Άρα είναι και πάλι αδύνατη η ύπαρξη μια τέτοιας h. □

L.E.J. Brouwer

C.5.2 Θεώρημα («Θεώρημα σταθερού σημείου τού Brouwer»). *Έστω* $d \in \mathbb{N}$. *Τότε κάθε συνεχής απεικόνιση* $f : \mathbb{B}^d \longrightarrow \mathbb{B}^d$ *διαθέτει κάποιο σταθερό σημείο* (*δηλαδή* $\exists \mathbf{x}_0 \in \mathbb{B}^d : f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$).

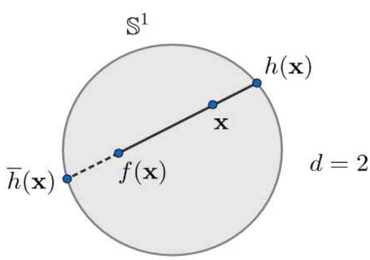
Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο ισχυρισμός είναι εσφαλμένος, ήτοι ότι υπάρχει $f : \mathbb{B}^d \longrightarrow \mathbb{B}^d$ συνεχής με $f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{B}^d$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : \mathbb{B}^d \longrightarrow \partial\mathbb{B}^d = \mathbb{S}^{d-1}$$

ως εξής:

$$h(x) := \left\{ \begin{array}{l} \text{το σημείο τομής τού συνόρου } \partial\mathbb{B}^d = \mathbb{S}^{d-1} \text{ τής μπάλας } \mathbb{B}^d \\ \text{και τής ημιευθείας που διέρχεται από τα } f(\mathbf{x}) \text{ και } \mathbf{x} \\ \text{και έχει ως αρχή της το σημείο } f(\mathbf{x}). \end{array} \right\}.$$

Επειδή $h|_{\mathbb{S}^{d-1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{d-1}}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η h είναι συνεχής και να εφαρμόσουμε το λήμμα C.5.1 για να καταλήξουμε σε άτοπο. Προς τούτο θα προσδιορίσουμε επακριβώς τον τύπο ορισμού τής h. (Βλ. το κάτωθι σχήμα για $d = 2$.)



Το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση από το $f(\mathbf{x})$ στο $\mathbf{x}$ (το οποίο αντιστοιχεί στο διάνυσμα $f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ από το $f(\mathbf{x})$ στο $\mathbf{x}$) είναι το

$$g(\mathbf{x}) := \frac{f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}}{||f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}||}.$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται μια συνεχής απεικόνιση $g : \mathbb{B}^d \longrightarrow \mathbb{S}^{d-1}$. Προφανώς, οι

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi : \mathbb{B}^d \longrightarrow \mathbb{R},\ \mathbf{x} \longmapsto \varphi(\mathbf{x}) :=< f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) > \\ \psi : \mathbb{B}^d \longrightarrow \mathbb{R},\ \mathbf{x} \longmapsto \psi(\mathbf{x}) := ||f(\mathbf{x})||^2 \end{array} \right\}$$

είναι ωσαύτως συνεχείς απεικονίσεις. (Εδώ το "$< \cdot, \cdot >$" συμβολίζει το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.)

Επειδή το σημείο $h(\mathbf{x})$ λαμβάνεται εάν κανείς εκκινήσει από το $f(\mathbf{x})$ και κινηθεί παραλλήλως προς το $g(\mathbf{x})$ έως ότου συναντήσει τη σφαίρα $\mathbb{S}^{d-1}$, η παραμετρική εξίσωση τής αντίστοιχης ημιευθείας (που ξεκινά από το $f(\mathbf{x})$) είναι τής μορφής

$$h(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) = tg(\mathbf{x}),$$

για κάποιον πραγματικό αριθμό $t \geqslant 0$. Για τον προσδιορισμό τού t παρατηρούμε ότι

$$1 = ||h(\mathbf{x})||^2 = ||f(\mathbf{x}) + tg(\mathbf{x})||^2 = ||f(\mathbf{x})||^2 + t^2||g(\mathbf{x})||^2 + 2t < f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) >= \psi(\mathbf{x}) + 2t\varphi(\mathbf{x}) + t^2$$

$$\Longleftrightarrow t^2 + (2\varphi(\mathbf{x}))t + (\psi(\mathbf{x}) - 1) = 0.$$

Επιλύοντας ως προς t λαμβάνουμε

$$t = -\varphi(\mathbf{x}) \pm \sqrt{\varphi(\mathbf{x})^2 + 1 - \psi(\mathbf{x})}.$$

(Επειδή $||f(\mathbf{x})|| \leqslant 1 \Longrightarrow 1 - ||f(\mathbf{x})||^2 = 1 - \psi(\mathbf{x}) \geqslant 0$, οι θέσεις μηδενισμού είναι κατ' ανάγκην πραγματικές.) Επιλέγουμε λοιπόν τη θέση μηδενισμού με το θετικό πρόσημο και συμπεραίνουμε ότι

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + (-\varphi(\mathbf{x}) + \sqrt{(\varphi(\mathbf{x})^2 + 1 - \psi(\mathbf{x})})g(\mathbf{x}).$$

(Η θέση μηδενισμού με το αρνητικό πρόσημο δίδει το $\overline{h}(\mathbf{x})$. Βλ. το άνωθι σχήμα για $d = 2$.) Η h είναι προφανώς συνεχής! □

C.5.3 Πόρισμα. *Εάν $f : \mathbb{B}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, τότε είτε $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ είτε $\exists \mathbf{x}_0 \in \mathbb{B}^d : \ f(\mathbf{x}_0) = \lambda \mathbf{x}_0$ για κάποιον πραγματικό αριθμό $\lambda > 1$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την

$$g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{B}^d,\ g(\mathbf{y}) := \frac{\mathbf{y}}{1 + ||\mathbf{y}||},\ \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d.$$

Τότε η σύνθεση $g \circ f : \mathbb{B}^d \longrightarrow \mathbb{B}^d$ είναι συνεχής. Κατά το θεώρημα C.5.2,

$$\exists \mathbf{x}_0 \in \mathbb{B}^d : \ g(f(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}_0 \Longrightarrow f(\mathbf{x}_0) = (1 + ||f(\mathbf{x}_0)||)\mathbf{x}_0,$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

C.6 ΜΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ Θ.Θ.Α. ΜΕΣΩ ΟΜΟΤΟΠΙΑΣ

Σε αυτήν την ενότητα, εργαζόμενοι με μια $\mathbb{Z}$-θεωρία ομολογίας $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ και διατηρώντας και τις λοιπές προϋποθέσεις τής §C.4, θα αποδείξουμε το «Θ.Θ.Α.» μέσω τού πορίσματος[11] C.6.9 και μιας κατάλληλης ομοτοπίας (που διευκολύνει την εφαρμογή τής απαιτούμενης «εις άτοπον απαγωγής»).

C.6.1 Ορισμός (Βαθμός συνεχούς απεικονίσεως μεταξύ ισοδιάστατων σφαιρών). Έστω $d \in \mathbb{N}$ και έστω $f : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ μια συνεχής απεικόνιση. Από το πόρισμα C.4.4 είναι γνωστό ότι η αβελιανή ομάδα $\mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z})$ είναι ισόμορφη τής $(\mathbb{Z}, +)$, δηλαδή ότι είναι *άπειρη κυκλική*. Θεωρούμε τον ομομορφισμό

$$\mathscr{H}_d(f) : \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z}).$$

Εάν ε είναι ένας γεννήτορας τής $\mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z})$, τότε ονομάζουμε **βαθμό** $\deg(f)$ **τής** f (degree of f) εκείνον τον ακέραιο αριθμό για τον οποίον ισχύει

$$\boxed{\mathscr{H}_d(f)(\varepsilon) = \deg(f)\varepsilon.}$$

Επειδή το σύνολο των γεννητόρων τής $\mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z})$ είναι το δισύνολο[12] $\{\varepsilon, -\varepsilon\}$, αυτός ο ορισμός δεν εξαρτάται από την *συγκεκριμένη* επιλογή τού ε (μεταξύ των εκάστοτε *δύο* υπαρχόντων γεννητόρων), καθόσον

$$\mathscr{H}_d(f)(-\varepsilon) = -\mathscr{H}_d(f)(\varepsilon) = \deg(f)(-\varepsilon).$$

Σημειωτέον ότι[13] $\mathscr{H}_d(f) = \deg(f)\cdot \mathrm{id}_{\mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z})}$.

C.6.2 Παραδείγματα. (i) Επειδή $\mathscr{H}_d(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^d}) = \mathrm{id}_{\mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z})}$, έχουμε $\deg(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^d}) = 1$.
(ii) Εάν $f, g : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ είναι συνεχείς απεικονίσεις, τότε

$$\mathscr{H}_d(g \circ f) = \mathscr{H}_d(g) \circ \mathscr{H}_d(f) \Longrightarrow \deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f).$$

C.6.3 Πρόταση. *Έστω $d \in \mathbb{N}$ και έστω $f : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ μια συνεχής απεικόνιση. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*
(i) *Εάν $\deg(f) \neq 0$, τότε η f είναι επιρριπτική.*
(ii) *Εάν η f είναι σταθερή απεικόνιση, τότε $\deg(f) = 0$.*

[11] Για την απόδειξή του ακολουθείται εδώ το *τέχνασμα* που παρουσιάζεται στο βιβλίο [61] τού Dold, IV.4.7, μέσω τού *δίβαθμου* τού πολλαπλασιασμού επί τής $\mathbb{S}^1$. Άλλες αποδείξεις του (βλ., π.χ., [72], II.7.3, ή [87], 2.2.2-2.2.4), είναι κατά κανόνα μακροσκελείς.

[12] Βλ., π.χ., [15], Chapter 2, §2.3, Proposition 6. (1), σελ. 57-58, ή [17], Chapter I, Theorem 3.6, σελ. 36.

[13] Κάθε $\xi \in \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z})$ γράφεται υπό τη μορφή $\xi = k\varepsilon$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$ (όπου εδώ χρησιμοποιείται ο αριθμητικός πολλαπλασιασμός 2.1.4 (i)). Επομένως, $\mathscr{H}_d(f)(\xi) = k\mathscr{H}_d(f)(\varepsilon) = k(\deg(f)\varepsilon) = \deg(f)(k\varepsilon) = \deg(f)(\xi)$.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι η f δεν είναι επιρριπτική. Τότε υπάρχει κάποιο στοιχείο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{S}^d \smallsetminus \mathrm{Im}(f)$. Εάν $\iota : \mathbb{S}^d \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^d$ είναι η συνήθης ένθεση, τότε (λόγω τής (B.1)) $\mathbb{S}^d \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\} \approx \mathbb{R}^d$ που είναι χώρος συσταλτός. (Βλ. B.5.6 (v).) Επομένως (ένεκα των πορισμάτων C.4.4 και C.2.3) λαμβάνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \cong \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z}) \arrow[rr, "\mathscr{H}_d(f)"] \arrow[dr, "\mathscr{H}_d(f)"'] & \circlearrowleft & \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \\
& \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d \smallsetminus \{\mathbf{x}_0\};\mathbb{Z}) \cong \{0\} \arrow[ur, "\mathscr{H}_d(\iota)"'] &
\end{tikzcd}$$

και από αυτό (και το C.6.2 (ii)) την ισότητα $\deg(f) = 0$. Άτοπο!

(ii) Εάν η f είναι σταθερή απεικόνιση, τότε δεν είναι επιρριπτική, οπότε $\deg(f) = 0$ μέσω τού (i). □

C.6.4 Λήμμα. *Έστω $d \in \mathbb{N}$. Εάν $f, g : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις, τότε ισχύει η συνεπαγωγή:* $f \simeq g \Longrightarrow \deg(f) = \deg(g)$.

Απόδειξη. Εάν $f \simeq g$, τότε από το αξίωμα $\boxed{\textbf{ES-A2}}$ λαμβάνουμε $\mathscr{H}_d(f) = \mathscr{H}_d(g)$, οπότε $\deg(f) \cdot \mathrm{id}_{\mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z})} = \deg(g) \cdot \mathrm{id}_{\mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z})}$, απ' όπου έπεται ότι οι βαθμοί τους είναι ίσοι. □

Σημειωτέον ότι ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή, η απόδειξη τής οποίας (δεν είναι διόλου απλή και) οφείλεται στον Heinz Hopf[14].

C.6.5 Θεώρημα (H. Hopf, 1927). *Έστω $d \in \mathbb{N}$. Εάν $f, g : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις, τότε ισχύει η αμφίπλευρη συνεπαγωγή:*

$$\boxed{f \simeq g \Longleftrightarrow \deg(f) = \deg(g).}$$

Απόδειξη. Βλ., π.χ., Dugundji [38], Chapter XVI, Theorem 7.4, σελ. 352. □

H. Hopf[15]

[14] Βλ. H. Hopf: *Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen **96** (1927), 209-224.

[15] Hopf, *Heinrich* (19/11/1894-3/6/1971). Γερμανός μαθηματικός. Διδάκτωρ (το 1925) και υφηγητής (το 1926) τού Πανεπιστημίου τού Βερολίνου. Διάδοχος τού H. Weyl (το 1935) στο Τεχνολογικό Ινστιτούτο τής Ζυρίχης (E.T.H.), όπου και διέμεινε έως τη συνταξιοδότησή του το 1965. Συγγραφέας (από κοινού με τον P. Alexandroff (1896-1982)) τού βιβλίου [44] υπό τον τίτλο *Topologie* I που απετέλεσε το θεμέλιο των ερευνητικών εργασιών επί τής Αλγεβρικής Τοπολογίας

C.6.6 Ορισμός. Έστω $d \in \mathbb{N}$ και έστω $\mu : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ μια συνεχής απεικόνιση. Εάν

$$\mathbb{S}^d \ni \mathbf{x} \longmapsto \iota_1(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d, \quad \mathbb{S}^d \ni \mathbf{x} \longmapsto \iota_2(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \in \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d$$

είναι οι συνήθεις ενθέσεις (για κάποιο παγιωμένο $\mathbf{x}_0$), τότε ορίζεται ένας ομομορφισμός αβελιανών ομάδων Ψ ως η σύνθεση:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z}) \oplus \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathscr{H}_d(\iota_1)+\mathscr{H}_d(\iota_2)"] \arrow[rr, bend right, "\Psi"'] & \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathscr{H}_d(\mu)"] & \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Εάν ε είναι ένας γεννήτορας τής άπειρης κυκλικής ομάδας $\mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, τότε $\Psi(\varepsilon, 0) = \lambda_1 \varepsilon$ και $\Psi(0, \varepsilon) = \lambda_2 \varepsilon$, για κάποιους ακεραίους αριθμούς λ_1 και λ_2. Το ζεύγος (λ_1, λ_2) καλείται **δίβαθμος**[16] (bidegree) τής μ.

C.6.7 Πρόταση. *Έστω ότι $d \in \mathbb{N}$ και ότι $f_1, f_2 : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις. Εάν $\mu : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ μια συνεχής απεικόνιση έχουσα δίβαθμο (λ_1, λ_2), τότε ο βαθμός τής συνθέσεως*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^d \arrow[r, "(f_1 \times f_2)\circ \mathrm{diag}_{\mathbb{S}^d}"] \arrow[rr, bend left] & \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{S}^d
\end{tikzcd}$$

(όπου $\mathrm{diag}_{\mathbb{S}^d} : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d$ η διαγώνιος απεικόνιση[17]) είναι ο εξής:

$$\deg(\mu \circ ((f_1 \times f_2) \circ \mathrm{diag}_{\mathbb{S}^d})) = \lambda_1 \deg(f_1) + \lambda_2 \deg(f_2). \tag{C.4}$$

Απόδειξη. Εάν $\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_2 : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ είναι οι προβολές (στον πρώτο και στον δεύτερο παράγοντα, αντιστοίχως), τότε η σύνθεση

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d;\mathbb{Z}) \arrow[r, "(\mathscr{H}_d(\mathrm{pr}_1),\mathscr{H}_d(\mathrm{pr}_2))"] \arrow[rr, bend left] & \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z}) \oplus \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathscr{H}_d(\iota_1)+\mathscr{H}_d(\iota_2)"] & \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d;\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

για πολλές γενεές. Αξιομνημόνευτη είναι επίσης η συνεργασία του με τον S. Lefschetz (1884-1972), απ' όπου εμπνεύσθηκε αρκετές ιδέες για τη συγγραφή τής περίφημής του εργασίας γύρω από τον ανάστροφο ομομορφισμό απεικονίσεων μεταξύ πολυπτυγμάτων. Ο Hopf εργάσθηκε επί των προβλημάτων τής ταξινομήσεως των ομοτοπιών μεταξύ σφαιρών και των ομοτοπικών κλάσεων απεικονίσεων πολυπτυγμάτων σε ισοδιάστατες σφαίρες. Εξάλλου, στο πλαίσιο τής «Θεωρίας Παρεμποδίσεως», ασχολήθηκε με το ερώτημα τού πόσα γραμμικώς ανεξάρτητα διανυσματικά πεδία υπάρχουν επί ενός δοθέντος n-διαστάτου πολυπτύγματος. Άλλα σημαντικά του επιτεύγματα υπήρξαν η «αναλλοίωτος Hopf» και οι «άλγεβρες Hopf». Για πιο λεπτομερή στοιχεία βλ. Jahresber. DMV **78**, (1976), 113-146, Bull. London Math. Soc. **4**, (1972), 202-217, και Math. Ann. **196**, (1972), 1-7.

[16]Σε αυτόν τον νεολογισμό, παρά το ότι το ουσιαστικό *βαθμός* τονίζεται στη λήγουσα, προτιμήθηκε να γίνει *αναβίβαση τού τόνου* μετά την πρόσθεση τού δι- (από το *δις*), κατά τους συνήθεις (ανάλογους) σχηματισμούς λέξεων: αυλός $\longrightarrow$ δίαυλος, λεπτό $\longrightarrow$ δίλεπτο, λοβός $\longrightarrow$ δίλοβος, γραμμή $\longrightarrow$ δίγραμμος, ζυγός $\longrightarrow$ δίζυγο(ς) κ.ά.

[17]$\mathrm{diag}_{\mathbb{S}^d} : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d, \quad \mathbf{x} \longmapsto \mathrm{diag}_{\mathbb{S}^d}(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}, \mathbf{x}).$

είναι η ταυτοτική απεικόνιση, οπότε για κάθε $\xi \in \mathscr{H}_d(\mathbb{S}^d;\mathbb{Z})$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\mathscr{H}_d(\mu \circ ((f_1 \times f_2) \circ \mathrm{diag}_{\mathbb{S}^d}))(\xi)\\
&= [\mathscr{H}_d(\mu) \circ (\mathscr{H}_d(\iota_1) + \mathscr{H}_d(\iota_2)) \circ (\mathscr{H}_d(\mathrm{pr}_1), \mathscr{H}_d(\mathrm{pr}_2)) \circ \mathscr{H}_d((f_1 \times f_2) \circ \mathrm{diag}_{\mathbb{S}^d})](\xi)\\
&= [\mathscr{H}_d(\mu) \circ (\mathscr{H}_d(\iota_1) + \mathscr{H}_d(\iota_2)) \circ (\mathscr{H}_d(f_1), \mathscr{H}_d(f_2))](\xi)\\
&= [\mathscr{H}_d(\mu) \circ (\mathscr{H}_d(\iota_1) + \mathscr{H}_d(\iota_2))](\deg(f_1)\xi, \deg(f_2)\xi) = \Psi(\deg(f_1)\xi, \deg(f_2)\xi)\\
&= \Psi(\deg(f_1)\xi, 0) + \Psi(0, \deg(f_2)\xi) = (\lambda_1 \deg(f_1) + \lambda_2 \deg(f_2))\xi.
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, η (C.4) είναι αληθής. □

C.6.8 Πρόταση. *Εάν $\mu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $(z,w) \longmapsto \mu(z,w) := zw$, είναι η πράξη τού πολλαπλασιασμού τής τοπολογικής ομάδας $(\mathbb{S}^1, \cdot)$, τότε ο δίβαθμός της ισούται με $(1,1)$.*

Απόδειξη. Εάν ορίσουμε τις ενθέσεις

$$\mathbb{S}^1 \ni z \longmapsto \iota_1(z) := (z,1) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \quad \mathbb{S}^1 \ni z \longmapsto \iota_2(z) := (1,z) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1,$$

και θεωρήσουμε ένα γεννήτορα ε τής άπειρης κυκλικής ομάδας $\mathscr{H}_1(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z})$, τότε έχουμε $\mu \circ \iota_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ και, αντιστοίχως, $\mu \circ \iota_2 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, οπότε[18]

$$\begin{aligned}
\Psi(\varepsilon, 0) &= \mathscr{H}_1(\mu)(\mathscr{H}_1(\iota_1) + \mathscr{H}_1(\iota_2))(\varepsilon, 0)\\
&= (\mathscr{H}_1(\mu) \circ \mathscr{H}_1(\iota_1))(\varepsilon) = \mathscr{H}_1(\mu \circ \iota_1)(\varepsilon) = \mathscr{H}_1(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1})(\varepsilon) = \varepsilon
\end{aligned}$$

και, κατ' αναλογίαν, $\Psi(0,\varepsilon) = \varepsilon$. Άρα ο δίβαθμος τής μ ισούται με $(1,1)$. □

C.6.9 Πόρισμα. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω ρ_n η συνεχής απεικόνιση*

$$\rho_n : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1, \quad z \longmapsto \rho_n(z) := z^n.$$

Τότε $\deg(\rho_n) = n$.

Απόδειξη. Έστω $\mu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ η πράξη τού πολλαπλασιασμού τής $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ όπως στην πρόταση C.6.8. Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή επί τού n. Για $n = 1$ έχουμε $\rho_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. (Βλ. C.6.2 (i).) Εάν $n \geqslant 2$ και εάν υποθέσουμε ότι αυτός είναι αληθής και για τον $n-1$, τότε

$$\rho_n(z) := z^n = z^{n-1}z = \mu(z^{n-1}, z) = \mu(\rho_{n-1}(z), \rho_1(z)) = \mu \circ ((\rho_{n-1} \times \rho_1) \circ \mathrm{diag}_{\mathbb{S}^1})(z)$$

για κάθε $z \in \mathbb{S}^1$, οπότε $\rho_n = \mu \circ ((\rho_{n-1} \times \rho_1) \circ \mathrm{diag}_{\mathbb{S}^1})$ και από τις προτάσεις C.6.7 και C.6.8,

$$\deg(\rho_n) = \deg(\mu \circ ((\rho_{n-1} \times \rho_1) \circ \mathrm{diag}_{\mathbb{S}^1})) \underset{(\mathrm{C.4})}{=} 1 \cdot \deg(\rho_{n-1}) + 1 \cdot \deg(\rho_1) = (n-1) + 1 = n.$$

Άρα όντως $\deg(\rho_n) = n$. □

[18] Εδώ Ψ είναι η σύνθεση η εισαχθείσα στο εδ. C.6.6, στην ειδική περίπτωση όπου $d = 1$ και μ είναι η πράξη τού πολλαπλασιασμού τής $(\mathbb{S}^1, \cdot)$.

▸ **«Θ.Θ.Α.»: Σύντομη απόδειξη μέσω χρήσεως ομοτοπίας**. Κάθε φοιτητής των Μαθηματικών θα έχει δει έστω και μία απόδειξη (τουλάχιστον στο πλαίσιο των παραδόσεων τού μαθήματος τής Μιγαδικής Αναλύσεως) τού περιώνυμου *Θεμελιώδους Θεωρήματος τής Άλγεβρας* (εν συντομία, «Θ.Θ.Α.»). Η ιστορία τού προβλήματος είναι μακρά και ξεκινά περί τη δεκαετία τού 1630 με τις προσπάθειες των A. Girard (1592-1632) και R. Descartes (1596-1650) για την κατανόηση των μηχανισμών επιλύσεως κάποιων εξισώσεων, συνεχίζεται με κριτήρια παραγοντοποιήσεως πολυωνύμων (μίας μεταβλητής) με πραγματικούς συντελεστές από τον G.W. Leibniz (1646-1716), με τους ποικίλους υπολογισμούς τού L. Euler (1707-1783) για τις λύσεις πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού $\leqslant 6$, με τις φιλότιμες προσπάθειες τού J. d' Alembert (1717-1783) για αντιμετώπιση τού γενικού προβλήματος (χωρίς αποτέλεσμα), με την πρώτη «ξεχασμένη απόδειξη» τού 1795 εκ μέρους τού P. Laplace (1749-1827), έως ότου φθάσουμε στον Carl-Friedrich Gauss (1777-1855), ο οποίος κυριολεκτικώς «διήνοιξε λεωφόρους», τόσον με τις *πολλές* προσωπικές του αποδείξεις όσον και με την προετοιμασία για ό,τι επρόκειτο να ακολουθήσει (με τους R. Argand (1768-1822), A.-L. Cauchy (1789-1857), K. Weierstrass (1815-1897) κ.ά.). Οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες έχουν τη δυνατότητα να εντοπίσουν μια συνοπτική ιστορική αναδρομή από τον R. Remmert στο *The Fundamental Theorem of Algebra*, Κεφ. 4, σελ. 97-122, εντός τού συγκεντρωτικού τόμου υπό τον τίτλο *Numbers*[19], καθώς και μια πολύ αναλυτικότερη (και πιο πρόσφατη) παρουσίαση από τον H. Schröder[20]. Για δειγματοληπτική παρουσίαση πολυειδών αποδείξεων τού «Θ.Θ.Α.» (από διαφόρους κλάδους των Μαθηματικών) και σχολιασμούς επί τής εργασίας τού Gauss επ' αυτού, κατάλληλο είναι και το σχετικό σύγγραμμα των B. Fine και G. Rosenberger[21].

C.-F. Gauss [22]

[19] Βλ. H.D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel & R. Remmert: *Numbers*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **123**, second edition, Springer-Verlag, 1991.

[20] Βλ. H. Schröder: *Der Fundamentalsatz der Algebra. 1746 bis heute. Eine andauernde Geschichte*, Dortmund, 2017. (Κείμενο ιστορικό, με ταυτόχρονη παράθεση πλήρων βιβλιογραφικών δεδομένων, *ελευθέρως προσβάσιμο* μέσω διαδικτύου.)

[21] B. Fine & G. Rosenberger: *Το Θεμελιώδες Θεώρημα τής Άλγεβρας*, σε μετάφραση (από το αγγλικό πρωτότυπο τού 1997) των Ν. Μαρμαρίδη και Φ. Λιούτση, Πανεπιστημιακά Μαθηματικά Κείμενα, τόμος **3**, εκδόσεις Leader Books, 2001.

Αλλ' ας έλθουμε στη σύντομη απόδειξη *μέσω ομοτοπίας* (η οποία δεν προϋποθέτει καμία γνώση Μιγαδικής Αναλύσεως, ούτε καν ευχέρεια στον χειρισμό αριθμών περιελίξεως καμπυλών στο μιγαδικό επίπεδο).

C.6.10 Θεώρημα («Θεμελιώδες Θεώρημα τής Άλγεβρας»). *Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο*

$$\varphi(\mathsf{X}) = a_n\mathsf{X}^n + a_{n-1}\mathsf{X}^{n-1} + \cdots a_1\mathsf{X} + a_0 \in \mathbb{C}[\mathsf{X}]$$

διαθέτει τουλάχιστον μία[23] *θέση μηδενισμού ανήκουσα στο* $\mathbb{C}$.

Απόδειξη. Εξ υποθέσεως, $n \geqslant 1$. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι[24] $a_n \neq 0$, και μάλιστα ότι[25] $a_n = 1$, καθώς και ότι[26] $a_0 \neq 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε «εις άτοπον απαγωγή»: Υποθέτουμε ότι $\varphi(z) \neq 0$ *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$. Εάν επιλέξουμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό $M > \max\{1, n\,|a_{n-1}|\,, n\,|a_{n-2}|\,, ..., n\,|a_0|\}$, τότε *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$ *με απόλυτη τιμή* $|z| \geqslant M$ έχουμε $|z^j| < |z^{n-1}|$ για κάθε εκθέτη $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ (διότι $|z| > 1$) και, κατ' επέκταση,

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j\right| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|\,|z^j| < \left(\sum_{j=0}^{n-1} |a_j|\right) |z^{n-1}| < M\,|z^{n-1}| \leqslant |z^n|\,. \tag{C.5}$$

Επειδή $\varphi(z) \neq 0$ *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$, ορίζεται (καλώς) η ομοτοπία

$$F : \mathbb{S}^1 \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1,\ \ (z,t) \longmapsto F(z,t) := \frac{\varphi(Mtz)}{|\varphi(Mtz)|}. \tag{C.6}$$

Εν συνεχεία, θεωρώντας τή συνεχή απεικόνιση

$$H : \mathbb{C} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{C},\ \ (z,t) \longmapsto H(z,t) := z^n + t\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j\right),$$

παρατηρούμε ότι[27] $H(z,t) \neq 0$ *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$ *με* $|z| \geqslant M$ και κάθε $t \in \mathbf{I}$, οπότε ορίζεται (καλώς) *και* η ομοτοπία

$$G : \mathbb{S}^1 \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1,\ \ (z,t) \longmapsto G(z,t) := \frac{H(Mtz)}{|H(Mtz)|}. \tag{C.7}$$

---

[22] Δείγμα υψηλής χαρακτικής τέχνης στο χαρτονόμισμα των 10 μάρκων. (Η Deutsche Bundesbank άρχισε να κυκλοφορεί αυτά τα τραπεζογραμμάτια το 1991. Τα απέσυρε το 2002 ένεκα τής εισαγωγής τού *ευρώ*.)

[23] Φυσικά, άπαξ και έχει διασφαλισθεί η ύπαρξη μίας μιγαδικής θέσεως μηδενισμού, είναι εύκολο να δειχθεί ότι όλες οι θέσεις μηδενισμού τού $\varphi(\mathsf{X})$ ανήκουν στο $\mathbb{C}$ (και ότι το πλήθος αυτών είναι το πολύ n). Επίσης, εξ αυτού έπεται ότι το σώμα $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικώς κλειστό.

[24] Επειδή $n \geqslant 1$, κάποιο a_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, οφείλει να είναι $\neq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο μέγιστος δείκτης με αυτήν την ιδιότητα είναι ο n. (Αλλιώς αντικαθιστούμε το n με τον $\max\{j : a_j \neq 0\}$.)

[25] Επειδή $a_n \neq 0$, το $\varphi(\mathsf{X})$ έχει θέση μηδενισμού ανήκουσα στο $\mathbb{C}$ *εάν και μόνον εάν* το $\frac{1}{a_n}\varphi(\mathsf{X})$ έχει θέση μηδενισμού ανήκουσα στο $\mathbb{C}$.

[26] Εάν $a_0 = 0$, τότε το 0 αποτελεί μια θέση μηδενισμού τού $\varphi(\mathsf{X})$.

[27] Εάν υπήρχε $z_0 \in \mathbb{C}$ *με* $|z_0| \geqslant M$ και κάποιο $t_0 \in \mathbf{I}$, ούτως ώστε να ισχύει $H(z_0, t_0) = 0$, τότε θα είχαμε

$$|z_0^n| = |t_0|\left|\sum_{j=0}^{n-1} a_j z_0^j\right| \leqslant \left|\sum_{j=0}^{n-1} a_j z_0^j\right|,$$

ήτοι κάτι το οποίο θα αντέκειτο στην (C.5).

Από την (C.6) έχουμε $f_0 \simeq f_1$, όπου

$$f_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1,\ \ z \longmapsto f_0(z) := F(z,0) = \frac{\varphi(0)}{|\varphi(0)|} = \frac{a_0}{|a_0|},$$

είναι μια *σταθερή απεικόνιση* και

$$f_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1,\ \ z \longmapsto f_1(z) := F(z,1) = \frac{\varphi(Mz)}{|\varphi(Mz)|}.$$

Από την άλλη μεριά, από την (C.7) έχουμε $g_0 \simeq g_1$, όπου

$$g_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1,\ \ z \longmapsto g_0(z) := G(z,0) = \frac{H(0)}{|H(0)|} = \frac{z^n}{|z^n|} = z^n,$$

διότι $|z| = 1$ και

$$g_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1,\ \ z \longmapsto g_1(z) := G(z,1) = \frac{H(Mz)}{|H(Mz)|} = \frac{\varphi(Mz)}{|\varphi(Mz)|} = f_1(z).$$

Κατά συνέπειαν, $[f_0 \simeq f_1 = g_1,\ g_1 \simeq g_0] \Longrightarrow f_0 \simeq g_0 \underset{\text{C.6.4}}{\Longrightarrow} \deg(f_0) = \deg(g_0)$. Ως σταθερή απεικόνιση η f_0 έχει βαθμό $\deg(f_0) = 0$. (Βλ. C.6.3 (ii).) Όμως $g_0 = \rho_n$ έχουσα (κατά το πόρισμα C.6.9) βαθμό $\deg(g_0) = n$. Άρα $n = 0$. Άτοπο! □

C.7 ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΣΥΝΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

Οι συνήθεις θεωρίες συνομολογίας ορίζονται (κατά τρόπο δυϊκό) ως ακολούθως:

C.7.1 Ορισμός (R-θεωρίες συνομολογίας). Έστω R ένας μη τετρ. μεταθετικός δακτύλιος και έστω $\mathscr{C}$ μια ομολογικώς επιτρεπτή κατηγορία. Ως $\mathfrak{N} : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathscr{C}$ συμβολίζουμε τον συναρτητή, ο οποίος αντιστοιχεί σε κάθε $(X,A) \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C})$ τον $A = (A, \varnothing) \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C})$ (με προφανή απεικόνιση μορφισμών). Μια **R-θεωρία συνομολογίας** $(\mathscr{H}^\bullet, \partial^\bullet)$ **επί τής κατηγορίας** $\mathscr{C}$ είναι ένα ζεύγος απαρτιζόμενο από έναν ανταλλοίωτο συναρτητή

$$\boxed{\mathscr{H}^\bullet : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R^{\mathbb{Z}},\ \ (X,A) \longmapsto \mathscr{H}^\bullet(X,A;R) = (\mathscr{H}^n(X,A;R))_{n\in\mathbb{Z}}}$$

και έναν φυσικό μετασχηματισμό (βλ. εδ. A.3.1)

$$\boxed{\partial^\bullet : \mathscr{H}^\bullet \circ \mathfrak{N} \longrightarrow \mathscr{H}^{\bullet+1}}$$

(όπου ο $\mathscr{H}^{\bullet+1}$ προκύπτει από τον $\mathscr{H}^\bullet$ ύστερα από αύξηση δεικτών κατά ένα), ούτως ώστε να πληρούνται τα εξής **αξιώματα των Eilenberg και Steenrod**:

ES-A1′ **Αξίωμα τής ακριβείας**. Για κάθε $(X,A) \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C})$ η (και προς τις δύο κατευθύνσεις απείρως εκτεινόμενη) μακρά ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{H}^n(X,A;R) \xrightarrow{\mathscr{H}^n(j)} \mathscr{H}^n(X;R) \xrightarrow{\mathscr{H}^n(i)} \mathscr{H}^n(A;R) \xrightarrow{\partial^n(X,A)} \mathscr{H}^{n+1}(X,A;R) \xrightarrow{\mathscr{H}^{n+1}(j)} \mathscr{H}^{n+1}(X;R) \xrightarrow{\mathscr{H}^{n+1}(i)} \mathscr{H}^{n+1}(A;R) \longrightarrow \cdots$$

είναι ακριβής, όπου

$$i : A \hookrightarrow X \quad j : X = (X, \varnothing) \hookrightarrow (X, A)$$

είναι οι συνήθεις ενθέσεις. Ο $\mathscr{H}^n(X,A;R)$ ονομάζεται n-**οστός μόδιος συνομολογίας τού ζεύγους** (X,A) (ως προς την $(\mathscr{H}^\bullet, \partial^\bullet)$), ο ομομορφισμός $\partial^n(X,A)$ **συνδετικός ομομορφισμός** και η ανωτέρω ακολουθία **μακρά ακριβής ακολουθία τού ζεύγους** (X,A).

ES-A2′ **Αξίωμα τού ομοτοπικώς αναλλοιώτου**. Εάν οι $f, g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ είναι ομότοπες εντός τής $\mathscr{C}$ (όπου $(X,A), (Y,B) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$), ήτοι εάν υπάρχει επιτρεπτός μορφισμός

$$h : (X,A) \times I \longrightarrow (Y,B)$$

με $f = h \circ j_0$ και $g = h \circ j_1$ (όπου j_0, j_1 όπως ορίσθηκαν στο C.1.2 (iii)), τότε

$$\boxed{\mathscr{H}^n(f) = \mathscr{H}^n(g) : \mathscr{H}^n(Y,B;R) \longrightarrow \mathscr{H}^n(X,A;R),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

ES-A3′ **Αξίωμα τής εκτομής**. Εάν οι $U \subseteq A \subseteq X$ είναι δυο υπόχωροι ενός τοπολογικού χώρου $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, τέτοιοι ώστε να ισχύει $\mathrm{cl}_X(U) \subseteq \mathrm{int}_X(A)$, τότε μέσω τής ενθέσεως τοπολογικών ζευγών $i : (X \smallsetminus U, A \smallsetminus U) \hookrightarrow (X,A)$ επάγονται ισομορφισμοί R-μοδίων:

$$\boxed{\mathscr{H}^n(i) : \mathscr{H}^n(X,A;R) \xrightarrow{\cong} \mathscr{H}^n(X \smallsetminus U, A \smallsetminus U; R),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

ES-A4′ **Αξίωμα τής διαστάσεως**. Για τον μονοσημειακό χώρο $\{\mathrm{pt}\}$ ισχύει:

$$\boxed{\mathscr{H}^n(\{\mathrm{pt}\};R) \cong \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}.}$$

ES-A5′ **Αξίωμα τού αθροίσματος**. Έστω $(X_j, A_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια τοπολογικών ζευγών (που αποτελούν αντικείμενο τής $\mathscr{C}$) και έστω $i_j : (X_j, A_j) \hookrightarrow (X,A)$ η ένθεση τοπολογικών ζευγών όταν $X := \sum_{j \in J} X_j,\ A := \sum_{j \in J} A_j,\ \forall j \in J$. Τότε ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$\boxed{\prod_{j \in J} \mathscr{H}^n(i_j) : \mathscr{H}^n(X,A;R) \longrightarrow \prod_{j \in J} \mathscr{H}^n(X_j, A_j; R)}$$

είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

C.7.2 Παρατήρηση. (i) Ήδη από τον ορισμό ενός ανταλλοιώτου συναρτητή (βλ. εδ. A.2.1) είναι σαφές ότι (μέσω τού $\mathscr{H}^{\bullet}$) σε κάθε τοπολογικό ζεύγος $(X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ αντιστοιχούμε μια ακολουθία R-μοδίων $\{\mathscr{H}^n(X,A;R) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ και σε κάθε μορφισμό (τής $\mathscr{C}$) $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}((X,A),(Y,B))$ έναν μορφισμό

$$\{\mathscr{H}^n(f) : \mathscr{H}^n(Y,B;R) \longrightarrow \mathscr{H}^n(X,A;R) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

τής $\mathfrak{Mod}_R^{\mathbb{Z}}$, ούτως ώστε να ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}((Y,B),(Z,C))$:

$$\mathscr{H}^n(\mathrm{id}_{(X,A)}) = \mathrm{id}_{H^n(X,A;R)} \;\text{ και }\; \mathscr{H}^n(f) \circ \mathscr{H}^n(g) = \mathscr{H}^n(g \circ f).$$

(ii) Ο φυσικός μετασχηματισμός $\partial^{\bullet}$ αντιστοιχεί σε κάθε $(X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ και σε κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$\partial^n(X,A) : \mathscr{H}^n(A;R) \longrightarrow \mathscr{H}^{n+1}(X,A;R),$$

ούτως ώστε για κάθε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}((X,A),(Y,B))$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}^n(B;R) \arrow[r, "\partial^n(Y,B)"] \arrow[d, "\mathscr{H}^n(f|_A)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathscr{H}^{n+1}(Y,B;R) \arrow[d, "\mathscr{H}^{n+1}(f)"] \\
\mathscr{H}^n(A;R) \arrow[r, "\partial^n(X,A)"'] & \mathscr{H}^{n+1}(X,A;R)
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

(iii) Για τις δύο «πιο οικείες» R-θεωρίες συνομολογίας (μονοπλεκτική και ιδιάζουσα) έχουμε (εκ κατασκευής) $\mathscr{H}^0(\{\mathrm{pt}\};R) \cong R$.

C.7.3 Σημείωση. (i) Οι R-θεωρίες συνομολογίας $(\mathscr{H}^{\bullet}, \partial^{\bullet})$, όπως ορίζονται στο εδ. C.7.1, είναι οι *συνήθεις θεωρίες συνομολογίας*. Αντίστοιχοι ανταλλοίωτοι συναρτητές $\mathscr{H}^{\bullet}$, οι οποίοι δεν πληρούν κατ' ανάγκην κάποιο εκ των αξιωμάτων $\boxed{\textbf{ES-A1}'}$, $\boxed{\textbf{ES-A4}'}$ ή $\boxed{\textbf{ES-A5}'}$, οδηγούν στη θέσπιση *γενικευμένων θεωριών συνομολογίας*.

(ii) Κατ' αναλογίαν προς τον ορισμό τού εδ. C.1.9, ορίζονται **φυσικοί μετασχηματισμοί** και **φυσικές ισοδυναμίες** μεταξύ δυο R-θεωριών συνομολογίας και αποδεικνύεται το (αντίστοιχο) *θεώρημα τής μοναδικότητας*. Βάσει αυτού (επί τής $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\mathrm{fin.CW}}$) υφίσταται *μόνον μία R-θεωρία συνομολογίας* $(\mathscr{H}^{\bullet}, \partial^{\bullet})$ με παγιωμένον (μέχρις ισομορφισμού) τον $\mathscr{H}^0(\{\mathrm{pt}\};R)$. (Βλ. Hu [73], Theorem 3.7 & Corollary 3.8, σελ. 20-21.)

(iii) Άμεσες συνέπειες των αξιωμάτων $\boxed{\textbf{ES-A1}'}$ – $\boxed{\textbf{ES-A5}'}$ των Eilenberg και Steenrod είναι οι δυϊκές εκείνων τής §C.2. Παρομοίως ορίζονται, εάν συμβολίσουμε εκ νέου ως

$$\mu = \mu_X : X \longrightarrow \{\mathrm{pt}\}$$

τη σταθερή απεικόνιση, *και* οι **ανηγμένοι μόδιοι συνομολογίας** ενός μη κενού τοπολογικού χώρου X:

$$\boxed{\widetilde{\mathscr{H}}^n(X;R) := \mathrm{Coker}(\mathscr{H}^n(\mu) : \mathscr{H}^n(\{\mathrm{pt}\};R) \longrightarrow \mathscr{H}^n(X;R))}$$

και για $\varnothing \neq A \subseteq X$: $\widetilde{\mathscr{H}}^n(X,A;R) := \mathscr{H}^n(X,A;R)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Προφανώς,

$$\mathscr{H}^0(X;R) = \mathscr{H}^0(\{\mathrm{pt}\};R) \oplus \widetilde{\mathscr{H}}^0(X;R)$$

και για κάθε τοπολογικό ζεύγος (X,A) με $X \neq \varnothing$ και $A \neq \varnothing$ επάγεται η λεγομένη **ανηγμένη μακρά ακριβής ακολουθία συνομολογίας**

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{\mathscr{H}}^{n-1}(A;R) \overset{\partial^{n-1}(X,A)}{\longrightarrow} \widetilde{\mathscr{H}}^n(X,A;R) \overset{\tilde{\mathscr{H}}^n(j)}{\longrightarrow} \widetilde{\mathscr{H}}^n(X;R) \overset{\tilde{\mathscr{H}}^n(i)}{\longrightarrow} \widetilde{\mathscr{H}}^n(A;R) \longrightarrow \cdots$$

όπου $i : A \hookrightarrow X,\ j : X \hookrightarrow (X,A)$ οι συνήθεις ενθέσεις με

$$\tilde{\mathscr{H}}^n(i) = \begin{cases} \mathscr{H}^0(i)|_{\tilde{\mathscr{H}}^0(X;R)}, & \text{όταν } n = 0, \\ \mathscr{H}^n(i), & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}, \end{cases}$$

και

$$\tilde{\mathscr{H}}^n(j) = \begin{cases} \mathscr{H}^0(j)|_{\tilde{\mathscr{H}}^0(X,A;R)}, & \text{όταν } n = 0, \\ \mathscr{H}^n(j), & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}. \end{cases}$$

Επιπροσθέτως, οι μόδιοι συνομολογίας τής σφαίρας $\mathbb{S}^d$, $d \geqslant 0$, είναι οι εξής:

$$\mathscr{H}^n(\mathbb{S}^d;R) \cong \begin{cases} \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,d\}, \\ R, & \text{όταν } n \in \{0,d\} \text{ και } d > 0, \\ R \oplus R, & \text{όταν } n = d = 0. \end{cases}$$

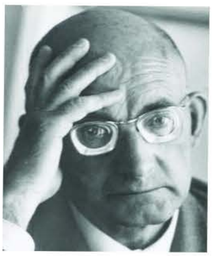
(iv) Τέλος, *οτιδήποτε* έχει παρουσιασθεί για μια R-θεωρία ομολογίας $(\mathscr{H}_\bullet, \partial_\bullet)$ στις ενότητες 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 και 7.5 εξακολουθεί να ισχύει σε δυϊκή εκδοχή για μια R-θεωρία συνομολογίας $(\mathscr{H}^\bullet, \partial^\bullet)$.

Παράρτημα D

Οι συνηθέστερες θεωρίες (συν)ομολογίας

Οι τρεις συνηθέστερες Θεωρίες Ομολογίας (και, αντιστοίχως, Συνομολογίας), ήτοι η *μονοπλεκτική* (simplicial), η *ιδιάζουσα* (singular) και η *κυτταρική* (cellular), δεν εμφανίσθηκαν διαμιάς στο προσκήνιο. Υπήρξαν αποτελέσματα πολυετών ζυμώσεων και αναθεωρήσεων κατά την αναζήτηση ακλόνητων θεωρητικών βάσεων για την Αλγεβρική Τοπολογία: Η πρώτη εξ αυτών (μονοπλεκτική), παρότι έχει τις ρίζες της στα μέσα τού 19ου αιώνα, βρήκε την πλέον ενδεδειγμένη εκδοχή της μόλις το 1926. Η δεύτερη (ιδιάζουσα) έλαβε την οριστική της μορφή το 1944, ενώ η τρίτη είναι προϊόν των αρχών τής δεκαετίας τού 1950.

Στον σχολιασμό τού κεφαλαίου 7 τού βιβλίου [87] των Stöcker & Zieschang διαβάζουμε τα εξής: «Ένα ευρύ πεδίο για τοπολογικές έρευνες κατά τον 19ο αιώνα προσεφέρθη από τον *πολυεδρικό τύπο τού Euler*: Εάν το σύνορο ενός κυρτού σώματος εντός τού $\mathbb{R}^3$ κατατμηθεί σε α_0 κορυφές, α_1 ακμές και α_2 έδρες, τότε ισχύει πάντοτε $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$. Οι προσπάθειες, οι οποίες κατεβλήθησαν για να τον γενικεύσουν ακόμη και για μη κυρτά σώματα ή και σε υψηλότερες διαστάσεις, οδήγησαν τελικώς στη Θεωρία Ομολογίας αλλά ύστερα από τη διάνυση μιας μακράς και κοπιαστικής πορείας. (Schläfli 1852, Riemann 1857, Betti 1871, von Dyck 1888 και -προ πάντων- Poincaré 1895.) Αντί των ακόμη μη γνωστών πολυέδρων κανείς θεωρούσε κάποια μέσω αναλυτικών εξισώσεων καθοριζόμενα υποπολυπτύγματα τού $\mathbb{R}^d$, τα οποία τρόπον τινά τεμαχίζοντο εκ νέου σε τμήματα καθοριζόμενα μέσω εξισώσεων και ανισώσεων: Ορισμένα εξ αυτών (ή ένας «γραμμικός συνδυασμός» τέτοιων τμημάτων) είναι «κλειστά», ενώ κάποια άλλα μπορεί να μην είναι. Επίσης, κάποια ενδέχεται να «ακουμπούν» ή να «γειτνιάζουν» σε ένα υψηλοδιάστατο τμήμα και κάποια άλλα όχι. Ο ουσιαστικός πυρήνας τής Θεωρίας Ομολογίας είχε αρχίσει κατ' αυτόν τον τρόπο να σχηματοποιείται. Εντούτοις, μόνον βαθμιαίως καθίστατο ευκρινές το πώς όλες αυτές οι έννοιες θα έπρεπε να ορισθούν με τη δέουσα αυστηρότητα, τη στιγμή, μάλιστα, που *διαφορετικές ερμηνείες* τους οδηγούν σε Θεωρία Ομολογίας με *διαφορετικούς συντελεστές* (από το $\mathbb{Z}$, από το $\mathbb{Z}_2$, από το $\mathbb{Q}$ κ.λπ.). Ο Poincaré εισήγαγε το 1899 ένα είδος τοπολογικού πολυέδρου (διαφορετικού τού σημερινού τού εδ. D.1.21), μέσω τού οποίου έγινε ένα αποφασιστικό βήμα προς την *πρότερη* αλγεβροποίηση: Μπόρεσε να ορίσει αριθμούς συμπτώσεως (incidence numbers) και να προσδιορίσει μέσω αυτών μια ακριβή περιγραφή των κυκλημάτων και των συνόρων. Εκ παραλλήλου, ενετόπισε για πρώτη φορά την ύπαρξη συντελεστών στρέψεως. Η αρχική (συνδυαστική) προσέγγισή του έτυχε περαιτέρω επεξεργασίας από τους Dehn, Heegaard (1907) και Tietze (1908). Τέλος, οι Alexander και Veblen έδειξαν το 1913 ότι κανείς, έχοντας ως βοηθητικά μέσα τα μονόπλοκα (simplices) και τα μονοπλεκτικά συμπλέγματα (simplicial complexes), διασφαλίζει στέρεα θεμέλια για την (αναμενόμενη) δόμηση τής Θεωρίας (Ομολογίας).»



P. Alexandroff

M. H. A. Newman

Κατά τον J. Dieudonné [116], σελ. 39-40, εκείνοι οι οποίοι συνέτειναν με τις εργασίες τους[1] (το 1926) στην καθιέρωση τού ορισμού D.1.55 (μέσω των προσανατολισμένων μονοπλόκων) ήταν οι J.W. Alexander, P. Alexandroff[2] και M.H.A. Newman[3].

[1] Βλ. J.W. Alexander: *Combinatorial Analysis Situs*, Transactions of A.M.S. **28** (1926), 301-329,

P. Alexandroff: *Über kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven*, Math. Annalen **96** (1926), 512-554, και

M.H.A. Newman: *On the foundations of combinatory Analysis Situs*, Proc. Akad. Wet. Amsterdam **29** (1926), 611-641.

[2] Alexandroff, *Pavel Sergeevich* (7/5/1896-16/11/1982). Ρώσος μαθηματικός. Εισήχθη το 1913 στο Πανεπιστήμιο Lomonossov τής Μόσχας και ήδη από το 1915 είχε αποδείξει κάποια σημαντικά θεωρήματα που αφορούσαν στα σύνολα Borel. Οι καθηγητές του Stepanov και Luzin, έχοντας αναγνωρίσει τις ιδιαίτερες μαθηματικές του ικανότητες, τού παρείχαν πολύπλευρη υποστήριξη. Έχοντας θέσει «τον πήχη πολύ υψηλά», προσπάθησε να αντιπαρατεθεί με το πρόβλημα που έθετε η λεγόμενη «Εικασία τού Συνεχούς» (που γνωρίζουμε το τι συνέβη με αυτήν εκ των υστέρων, κατά τη δεκαετία τού 1960, μέσω των εργασιών τού Cohen). Επειδή δεν μπόρεσε να το λύσει, πίστεψε ότι δεν διέθετε τα προσόντα για να σταδιοδρομήσει στα Μαθηματικά. Εγκατέλειψε τον πανεπιστημιακό χώρο, μετέβη στο Novgorod-Severskii και ασχολήθηκε με τις τέχνες, ιδιαιτέρως δε με το θέατρο. Ύστερα από βραχυπρόθεσμη φυλάκισή του το 1919 (ένεκα τής ρωσικής επαναστάσεως), ο Alexandroff επέστρεψε στη Μόσχα το 1920 . Ο Luzin και ο Egorov είχαν στο μεσοδιάστημα δημιουργήσει μια εντυπωσιακή ερευνητική ομάδα στο Πανεπιστήμιο της Μόσχας, η οποία τον υποδέχθηκε με αξιοσημείωτη θέρμη. Κατόπιν ειδικών εξετάσεων έγινε δεκτός ως λέκτορας στο Lomonossov το 1921. (Το 1929 εξελέγη εκεί καθηγητής και αργότερα και μέλος τού Ινστιτούτου Steklov.) Συχνές επισκέψεις στους D. Hilbert, R. Courant, E. Noether (Göttingen) και Hausdorff (Βόννη), καθώς και στον Brouwer (Παρίσι και Άμστερνταμ) κατά τα έτη 1924-1932, είχαν ως συνέπεια γόνιμες επιστημονικές συνεργασίες και τη διεύρυνση τής επικοινωνίας μεταξύ των τοπολόγων τής Μόσχας και εκείνων τής Κεντρικής Ευρώπης. Αξιομνημόνευτη η στενή του φιλία και συνεργασία με τον H. Hopf που οδήγησε, μεταξύ άλλων, και στη συγγραφή τού περιώνυμου βιβλίου [44]. Ο Alexandroff συνέγραψε περίπου 300 ερευνητικές εργασίες. Υπήρξε ο επιφανέστερος τοπολόγος τής ρωσικής σχολής και υποδειγματικός δάσκαλος. (Μεταξύ των μαθητών του συγκαταλέγοντο οι A. Kurosh, L. Pontrjagin και A. Tichonow.) Υπήρξε μέλος πολλών Ακαδημιών (σε πολλές χώρες), ετιμήθη δε με όλα τα βραβεία που εδίδοντο σε επιστήμονες τής τότε Σοβιετικής Ενώσεως.

[3] Newman, *Maxwell Hermann Alexander* (7/2/1897-22/2/1984). Γεννήθηκε στο Λονδίνο. Ο πατέρας του Γερμανός εβραϊκής καταγωγής (που μετακόμισε από το Bromberg στο Λονδίνο στην εφηβεία του) και η μητέρα του αγγλίδα εκπαιδευτικός. Ξεκίνησε τις σπουδές του στα Μαθηματικά το 1914 στο St. John's College, Cambridge, αλλά αυτές διεκόπησαν λόγω τού Α Παγκοσμίου Πολέμου, συνεχίσθηκαν το 1919 και ολοκληρώθηκαν το 1921. Το κύριο ερευνητικό του έργο στην Τοπολογία τοποθετείται στις δεκαετίες 1920 και 1930. Αργότερα, έγινε πολύ γνωστός για τις εργασίες του στην Κρυπτανάλυση και ως ο άνθρωπος που ενέπνευσε τον Alan Turing (1912-1954) για να επιδιώξει τη δημιουργία «αυτόματων υπολογιστικών μηχανών».

D.1 ΜΟΝΟΠΛΕΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (ΣΥΝ)ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

D.1.1 Ορισμός. (i) Ένα υποσύνολο A ενός ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^d$ καλείται **συσχετικό** (affine) (και αντιστοίχως, **κυρτό** (convex)) όταν για οιαδήποτε $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$, η ευθεία η οποία προσδιορίζεται από τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ (και αντιστοίχως, το ευθύγραμμο τμήμα[4] το οποίο καθορίζεται από τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$) περιέχεται στο A.

(ii) Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^d$, τότε ορίζεται ως **συσχετική θήκη** (affine hull) **τού** A το σύνολο

$$\boxed{\text{aff}(A) := \bigcap \{B \subseteq \mathbb{R}^d \mid B \text{ συσχετικό και } A \subseteq B\}}$$

και ως **κυρτή θήκη** (convex hull) **τού** A το σύνολο

$$\boxed{\text{conv}(A) := \bigcap \{B \subseteq \mathbb{R}^d \mid B \text{ κυρτό και } A \subseteq B\}.}$$

(iii) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ καλείται **συσχετικός συνδυασμός** των ($m+1$ το πλήθος) σημείων $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^d$ όταν μπορεί να γραφεί υπό την μορφή

$$\mathbf{x} = t_0\mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{x}_1 + ... + t_m\mathbf{x}_m, \text{ όπου } t_j \in \mathbb{R}, \forall j \in \{0, ..., m\}, \text{ και } \sum_{j=0}^{m} t_j = 1. \tag{D.1}$$

(iv) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ καλείται **κυρτός συνδυασμός** των σημείων $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^d$ όταν μπορεί να γραφεί ως συσχετικός συνδυασμός (D.1) αυτών, όπου το t_j είναι *μη αρνητικός* πραγματικός αριθμός για κάθε $j \in \{0, 1, ..., m\}$.

D.1.2 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^d$, *τότε η* $\text{conv}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$ *ισούται με το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών τους.*

Απόδειξη. Έστω Ξ το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών τους.

▸ $\underline{\text{conv}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}) \subseteq \Xi}$: Προς τούτο αρκεί να δειχθεί ότι το Ξ είναι ένα κυρτό σύνολο περιέχον το $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}$. Προφανώς,

$$\mathbf{x}_j = 0 \cdot \mathbf{x}_0 + ... + 0 \cdot \mathbf{x}_{j-1} + 1 \cdot \mathbf{x}_j + 0 \cdot \mathbf{x}_{j+1} + ... + 0 \cdot \mathbf{x}_m,$$

οπότε $\mathbf{x}_j \in \Xi$, $\forall j \in \{0, ..., m\}$. Επιπροσθέτως, εάν

$$\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{m} t_j\mathbf{x}_j, \; \mathbf{x}' = \sum_{j=0}^{m} t'_j\mathbf{x}_j \in \Xi,$$

όπου $t_j, t'_j \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $\forall j \in \{0, ..., m\}$ και $\sum_{j=0}^{m} t_j = \sum_{j=0}^{m} t'_j = 1$, τότε για κάθε $s \in [0, 1]$ έχουμε

$$s\mathbf{x} + (1-s)\mathbf{x}' = \sum_{j=0}^{m} (st_j + (1-s)t'_j)\mathbf{x}_j$$

με

$$\sum_{j=0}^{m} (st_j + (1-s)t'_j) = s(\sum_{j=0}^{m} t_j) + (1-s)(\sum_{j=0}^{m} t'_j) = s + (1-s) = 1$$

[4] Προφανώς, κάθε συσχετικό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^d$ είναι κυρτό.

και $st_j + (1-s)t'_j \geqslant 0$, διότι καθένας εκ των προσθετέων είναι μη αρνητικός. Κάθε συνέπειαν, το $s\mathbf{x} + (1-s)\mathbf{x}'$ είναι ένας κυρτός συνδυασμός των $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m$ ανήκων στο Ξ.

▸ $\underline{\mathrm{conv}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}) \supseteq \Xi}$: Εάν X είναι οιοδήποτε κυρτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^d$ περιέχον το $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n\}$, τότε αρκεί να αποδειχθεί ότι $\Xi \subseteq X$. Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή επί τού $m \geqslant 0$. Για $m = 0$ έχουμε $\Xi = \{\mathbf{x}_0\}$, οπότε $\Xi \subseteq X$. Έστω $m > 0$. Θεωρώντας $m+1$ μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς $t_0, t_1, ..., t_m$, για τους οποίους ισχύει $\sum_{j=0}^m t_j = 1$, θα αποδείξουμε ότι το $\mathbf{x} = \sum_{j=0}^m t_j \mathbf{x}_j$ ανήκει στο X. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_0 \neq 1$ (διότι εν εναντία περιπτώσει θα ήταν $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \in X$). Επειδή το

$$\mathbf{y} := 0 \cdot \mathbf{x}_0 + \left(\tfrac{t_1}{1-t_0}\right)\mathbf{x}_1 + ... + \left(\tfrac{t_m}{1-t_0}\right)\mathbf{x}_m$$

είναι ένα κυρτός συνδυασμός των $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, \mathbf{y} \in X$, οπότε και το

$$\mathbf{x} = t_0\mathbf{x}_0 + (1-t_0)\mathbf{y}$$

ανήκει στο X (καθότι το X υπετέθη κυρτό $\subseteq \mathbb{R}^d$). □

Η απόδειξη τής κατωτέρω προτάσεως είναι παρόμοια εκείνης τής D.1.2.

D.1.3 Πρόταση. *Εάν* $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^d$, *τότε η* $\mathrm{aff}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$ *ισούται με το σύνολο όλων των συσχετικών συνδυασμών τους. (*Βλ. D.1.1 (iii)).

D.1.4 Ορισμός. Ένα (διατεταγμένο) σύνολο σημείων $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$ καλείται **συσχετικώς ανεξάρτητο** όταν το $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο[5] υποσύνολο τού (διανυσματικού χώρου) $\mathbb{R}^d$.

D.1.5 Πρόταση. *Για ένα (διατεταγμένο) σύνολο σημείων* $\{x_0, ..., x_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$ *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:

(i) *Το* $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}$ *είναι συσχετικώς ανεξάρτητο.*

(ii) *Εάν* $s_0, ..., s_m \in \mathbb{R}$ *με* $\sum\limits_{j=0}^m s_j\mathbf{x}_j = 0$ *και* $\sum\limits_{j=0}^m s_j = 0$, *τότε* $s_0 = \cdots = s_m = 0$.

(iii) *Κάθε σημείο* $\mathbf{x} \in \mathrm{aff}(\{x_0, ..., x_m\})$ *γράφεται* ***μονοσημάντως*** *ως συσχετικός συνδυασμός* $\mathbf{x} = \sum\limits_{j=0}^m t_j\mathbf{x}_j$ (με $\sum\limits_{j=0}^m t_j = 1$) *των* $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Υποθέτοντας ότι $\sum\limits_{j=0}^m s_j\mathbf{x}_j = 0$ και $\sum\limits_{j=0}^m s_j = 0$ λαμβάνουμε

$$\sum_{j=0}^m s_j\mathbf{x}_j = \sum_{j=0}^m s_j\mathbf{x}_j - \left(\sum_{j=0}^m s_j\right)\mathbf{x}_j = \sum_{j=0}^m s_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^m s_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0).$$

Επειδή το $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\}$ είναι (εξ υποθέσεως) $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητο, $s_1 = ... = s_m = 0$. Επιπροσθέτως, $s_0 = 0$, καθόσον $\sum_{j=0}^m s_j = 0$.

[5] Εν τοιαύτη περιπτώσει, λέμε ότι τα σημεία $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m$ είναι τοποθετημένα **σε γενική θέση** εντός τού $\mathbb{R}^d$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{x} \in \mathrm{aff}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$. Κατά την πρόταση D.1.3 το $\mathbf{x}$ γράφεται ως εξής: $\mathbf{x} = \sum_{j=0}^m t_j \mathbf{x}_j$, όπου $t_0, ..., t_m \in \mathbb{R}$ και $\sum_{j=0}^m t_j = 1$. Εάν το $\mathbf{x}$ εγράφετο υπό τη μορφή $\mathbf{x} = \sum_{j=0}^m t'_j \mathbf{x}_j$, για κάποια $t'_0, ..., t'_m \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $\sum_{j=0}^m t'_j = 1$, τότε

$$0 = \sum_{j=0}^m (t_j - t'_j)\mathbf{x}_j$$

και $\sum_{j=0}^m (t_j - t'_j) = 1 - 1 = 0$, οπότε $t_j - t'_j = 0 \Rightarrow t_j = t'_j$, $\forall j \in \{0, ..., m\}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Ας υποθέσουμε ότι κάθε $\mathbf{x} \in \mathrm{aff}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$ γράφεται μονοσημάντως ως συσχετικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m$ και ότι το $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\}$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένο. Τότε υπάρχουν $r_0, ..., r_m \in \mathbb{R}$, με τουλάχιστον ένα εξ αυτών διαφορετικό τού μηδενός, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$0 = \sum_{j=0}^m r_j(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0).$$

Έστω $b \in \{0, ..., m\}$ με $r_k \neq 0$. Πολλαπλασιάζοντας -εν ανάγκη- την ανωτέρω ισότητα με r_k^{-1} μπορούμε να υποθέσουμε ότι $r_k = 1$. Το $\mathbf{x}_k$ γράφεται ως εξής

$$\mathbf{x}_k = 1 \cdot \mathbf{x}_k = -\sum_{j \in \{0,...,m\} \smallsetminus \{k\}} r_j \mathbf{x}_j + (1 + \sum_{j \in \{0,...,m\} \smallsetminus \{k\}} r_j)\mathbf{x}_0,$$

δηλαδή κατά δύο διαφορετικούς τρόπους. Άτοπο! □

D.1.6 Πόρισμα. *Η συσχετική ανεξαρτησία είναι μια ιδιότητα τού συνόλου $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}$ που δεν εξαρτάται από την (όποια δοθείσα) διάταξη των $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m$.*

D.1.7 Ορισμός. Εάν το $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι ένα συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο, τότε, σύμφωνα με την πρόταση D.1.5, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathrm{aff}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$ υπάρχουν μονοσημάντως ορισμένα $t_0, ..., t_m \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν οι ισότητες $\sum_{j=0}^m t_j = 1$ και $\mathbf{x} = \sum_{j=0}^m t_j \mathbf{x}_j$. Αυτά τα $t_0, ..., t_m$ καλούνται **βαρυκεντρικές συντεταγμένες τού $\mathbf{x}$ (ως προς το διατεταγμένο σύνολο** $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}$**).**

D.1.8 Ορισμός. Εάν το $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι ένα συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο, τότε το

$$\boxed{[\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m] := \mathrm{conv}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})}$$

καλείται m-**διάστατο (κλειστό) μονόπλοκο** (ή -συντομότερα- m-**μονόπλοκο) με κορυφές τα σημεία** $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m$.

D.1.9 Πρόταση. *Κάθε σημείο $\mathbf{x}$ ενός (κλειστού) m-μονοπλόκου (με κορυφές του τα $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m$) γράφεται μονοσημάντως υπό την μορφή*

$$\mathbf{x} = \sum_{j=0}^m t_j \mathbf{x}_j, \textit{ όπου } t_j \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}, \ \forall j \in \{0, ..., m\}, \textit{ και } \sum_{j=0}^m t_j = 1.$$

Αποδειξη. Βάσει τής προτάσεως D.1.2 κάθε σημείο $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$ είναι κυρτός συνδυασμός αυτής τής μορφής. Εάν ένα $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$ εγράφετο κατά δύο διαφορετικούς τρόπους ως κυρτός συνδυασμός των $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m$, τότε οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του δεν θα ήταν μονοσημάντως ορισμένες, κάτι το οποίο θα αντέκειτο σε ό,τι απεδείχθη μέσω τής προτάσεως D.1.5. □

D.1.10 Σημείωση. Εάν το $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι ένα συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο και ως

$$\boxed{\mathfrak{s} := \mathfrak{s}_m := [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m] := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \mathbf{x} = \sum_{j=0}^{m} t_j \mathbf{x}_j \text{ με } \sum_{j=0}^{m} t_j = 1 \text{ και } t_0, .., t_m \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \right\},}$$

και -αντιστοίχως- ως

$$\boxed{\mathring{\mathfrak{s}} := \mathring{\mathfrak{s}}_m := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \mathbf{x} = \sum_{j=0}^{m} t_j \mathbf{x}_j \text{ με } \sum_{j=0}^{m} t_j = 1 \text{ και } t_0, ..., t_m \in \mathbb{R}_{>0} \right\},}$$

συμβολίσουμε το m-μονόπλοκο και -αντιστοίχως- το λεγόμενο **ανοικτό m-μονόπλοκο** με κορυφές τα $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m$, τότε το $\mathfrak{s}$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^d$, ενώ το $\mathring{\mathfrak{s}}$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^d$, με μόνη εξαίρεση την περίπτωση κατά την οποία $m = d$. Εάν αντί τού $\mathbb{R}^d$ χρησιμοποιήσουμε τον υπόχωρό του $\operatorname{aff}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$, τότε το $\mathfrak{s}$ είναι ένα συμπαγές, κυρτό υποσύνολο τού $\operatorname{aff}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$ έχον το $\mathring{\mathfrak{s}}$ ως εσωτερικό του (βλ. D.1.5) και το $\operatorname{frnt}_{\operatorname{aff}\{\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_m\}}(\mathfrak{s}) := \mathfrak{s} \setminus \mathring{\mathfrak{s}}$ ως μεθόριό του. Επειδή το $\operatorname{aff}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\})$, ως συσχετικός χώρος, είναι ισόμορφος τού $\mathbb{R}^m$, μπορεί κανείς να εφαρμόσει το B.7.4 προκειμένου να αποδείξει την ύπαρξη ενός ομοιομορφισμού τοπολογικών ζευγών:

$$\boxed{(\mathfrak{s}, \operatorname{frnt}_{\operatorname{aff}\{\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_m\}}(\mathfrak{s})) \approx (\mathbb{B}^m, \mathbb{S}^{m-1}).}$$

D.1.11 Ορισμός. Έστω $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\} \subsetneqq \mathbb{R}^d$ ένα συσχετικώς ανεξάρτητο σύνολο. Κάθε απεικόνιση $\Theta : \operatorname{aff}(\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $(k \neq 1)$ που πληροί τη συνθήκη

$$\Theta\left(\sum_{j=0}^{m} t_j \mathbf{x}_j\right) = \sum_{j=0}^{m} t_j \Theta(\mathbf{x}_j), \text{ για οιαδήποτε } t_0, ..., t_m \in \mathbb{R} \text{ με } \sum_{j=0}^{m} t_j = 1,$$

καλείται **συσχετική απεικόνιση**. (Ο περιορισμός $\Theta|_{[t_0,...,t_m]}$ μιας τέτοιας Θ καλείται ωσαύτως **συσχετική απεικόνιση**.)

Οι συσχετικές απεικονίσεις στέλνουν συσχετικούς (και αντιστοίχως, κυρτούς) συνδυασμούς να απεικονισθούν σε συσχετικούς (και αντιστοίχως, κυρτούς) συνδυασμούς· είναι, μάλιστα, προφανές ότι κάθε συσχετική απεικόνιση προσδιορίζεται πλήρως όταν είναι γνωστές οι τιμές της σε καθένα των στοιχείων ενός συσχετικώς ανεξαρτήτου συνόλου. Επιπροσθέτως, από τη μοναδικότητα των βαρυκεντρικών συντεταγμένων (βλ. D.1.5 και D.1.7) ως προς ένα (συσχετικώς ανεξάρτητο) σύνολο $\{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\} \subset \mathbb{R}^n$ έπεται άμεσα η ύπαρξη μιας συσχετικής απεικονίσεως Θ όπως στον ορισμό D.1.11.

D.1.12 Πρόταση. *Εάν το* $[\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m]$ *είναι ένα* m*-μονόπλοκο, το* $[\mathbf{y}_0, ..., \mathbf{y}_k]$ *ένα* k*-μονόπλοκο και η* $f : [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m] \longrightarrow [\mathbf{y}_0, ..., \mathbf{y}_k]$ *οιαδήποτε απεικόνιση, τότε υπάρχει μια μονοσημάντως ορισμένη συσχετική απεικόνιση* $\Theta : [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m] \longrightarrow [\mathbf{y}_0, ..., \mathbf{y}_k]$ *η οποία πληροί τη συνθήκη*

$$\Theta(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_j), \ \forall j \in \{0, 1, ..., m\}.$$

Απόδειξη. Κάθε $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m]$ γράφεται, σύμφωνα με την πρόταση D.1.9, μονοσημάντως υπό τη μορφή

$$\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{m} t_j \mathbf{x}_j, \text{ όπου } t_0, ..., t_m \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \text{ και } \sum_{j=0}^{m} t_j = 1.$$

Μέσω τού τύπου $\Theta(\mathbf{x}) = \Theta(\sum_{j=0}^{m} t_j \mathbf{x}_j) := \sum_{j=0}^{m} t_j f(\mathbf{x}_j)$ ορίζεται η ζητουμένη συσχετική απεικόνιση Θ. □

D.1.13 Ορισμός. Έστω $\mathfrak{s} = [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m]$ ένα m-μονόπλοκο. Συμβολίζουμε ως $\mathrm{Vert}(\mathfrak{s}) := \{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}$ **το σύνολο των κορυφών του**. Ονομάζουμε ***πλευρά*** τού $\mathfrak{s}$ κάθε μονόπλοκο $\mathfrak{s}'$ με $\mathrm{Vert}(\mathfrak{s}') \subseteq \mathrm{Vert}(\mathfrak{s})$. Συμβολισμός:

$$\mathfrak{s}' \preceq \mathfrak{s} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\text{το } \mathfrak{s}' \text{ είναι μια πλευρά τού } \mathfrak{s}]$$

$$\mathfrak{s}' \prec \mathfrak{s} \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} [\mathfrak{s}' \preceq \mathfrak{s} \text{ και } \mathfrak{s}' \neq \mathfrak{s}].$$

(Όταν $\mathfrak{s}' \prec \mathfrak{s}$, τότε λέμε ότι το $\mathfrak{s}'$ είναι μια ***γνήσια πλευρά*** τού $\mathfrak{s}$.)

D.1.14 Σημείωση. (i) Εάν το $\mathfrak{s}$ είναι ένα m-μονόπλοκο, τότε το πλήθος των k-μονοπλόκων, τα οποία αποτελούν πλευρές τού $\mathfrak{s}$, ισούται με $\binom{m+1}{k+1}$.

(ii) Εάν $\mathfrak{s}' \preceq \mathfrak{s}$ και $\mathfrak{s}'' \preceq \mathfrak{s}'$, τότε $\mathfrak{s}'' \preceq \mathfrak{s}$.

(iii) Η μεθόριος ενός μονοπλόκου $\mathfrak{s}$ ισούται με την αποσυνδετή ένωση $\coprod_{\mathfrak{s}' \prec \mathfrak{s}} \mathring{\mathfrak{s}}'$.

D.1.15 Ορισμός. Ένα **(ευκλείδειο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα** (simplicial complex) K είναι μια συλλογή μονοπλόκων εντός ενός ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^d$ με τις ακόλουθες ιδιότητες[6]:

(i) Εάν $\mathfrak{s} \in K$, τότε και κάθε πλευρά τού $\mathfrak{s}$ ανήκει στο K.

(ii) Εάν $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \in K$, τότε η τομή $\mathfrak{s}_1 \cap \mathfrak{s}_2$ είναι είτε κενή είτε κοινή πλευρά των $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$.

(iii) Κάθε σημείο ενός μονοπλόκου ανήκοντος στο K διαθέτει μια ανοικτή περιοχή η οποία έχει μη κενή τομή με *το πολύ πεπερασμένου πλήθους* μονόπλοκα τού K.

[6]Σε ορισμένα βιβλία απαιτείται από το K να απαρτίζεται από *πεπερασμένου πλήθους* μονόπλοκα (οπότε η (iii) ικανοποιείται αυτομάτως, αλλά ο εν λόγω περιορισμός αποκλείει πολλά χρήσιμα παραδείγματα). Από την άλλη μεριά, υπάρχουν και βιβλία (όπως εκείνο τού Munkres [80], σελ. 13-14) στα οποία η (iii) *παραλείπεται* στον αρχικό ορισμό και τα K που την πληρούν καλούνται, ιδιαιτέρως, *τοπικώς πεπερασμένα*.

D.1.16 Παράδειγμα. Εάν K είναι ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα εντός τού $\mathbb{R}^d$ και $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \mathbb{R}^d$, τότε ο **κώνος** $\text{cone}_{\mathbf{v}}(K)$ **υπεράνω τού** K (έχων ως κορυφή του το $\mathbf{v}$) είναι εκείνο το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (εντός τού $\mathbb{R}^{d+1}$) το οποίο αποτελείται από το 0-μονόπλοκο $\{\mathbf{v}\}$ και τα μονόπλοκα $[\mathbf{v}, \mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m]$ για κάθε $[\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m] \in K$.

D.1.17 Ορισμός. Έστω K ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Τα στοιχεία τού $\text{Vert}(K) := \bigcup_{\mathfrak{s} \in K} \text{Vert}(\mathfrak{s})$ καλούνται **κορυφές τού** K, ενώ η **διάσταση** $\dim(K)$ **τού** K ορίζεται ως εξής[7]: $\dim(K) := \max\{\dim(\mathfrak{s}) : \mathfrak{s} \in K\}$.

D.1.18 Ορισμός. Λέμε ότι ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα είναι **πεπερασμένο** όταν διαθέτει πεπερασμένου πλήθους μονόπλοκα.

D.1.19 Ορισμός. Έστω K ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (εντός τού $\mathbb{R}^d$). Λέμε ότι το

$$\boxed{|K| := \bigcup_{\mathfrak{s} \in K} \mathfrak{s} \subseteq \mathbb{R}^d,}$$

εφοδιαζόμενο με την *ασθενή τοπολογία*[8]:

$$[\text{το } A \text{ είναι ανοικτό} \subseteq |K|] \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c} \text{το } A \cap \mathfrak{s} \;\; \text{είναι ανοικτό} \\ \text{υποσύνολο τού } \mathfrak{s}, \; \forall \mathfrak{s} \in K \end{array} \right],$$

είναι **ο τοπολογικός χώρος ο υποκείμενος στο** K. Όταν το K είναι *πεπερασμένο*, αυτή η τοπολογία ταυτίζεται[9] με τη *σχετική* τοπολογία τού $|K|$ εντός τού $\mathbb{R}^d$.

D.1.20 Σημείωση. (i) Προσοχή! Το K είναι σύνολο, ενώ το $|K|$ είναι τοπολογικός χώρος.

(ii) Ο $|K|$ είναι χώρος Hausdorff.

(iii) Ο $|K|$ είναι τοπικώς συμπαγής· επίσης, είναι συμπαγής εάν και μόνον εάν το K είναι πεπερασμένο.

(iv) Ο $|K|$ είναι τοπικώς δρομοσυνεκτικός. Επομένως, ο $|K|$ είναι συνεκτικός εάν και μόνον εάν είναι δρομοσυνεκτικός.

(v) Εάν τα K, L είναι μονοπλεκτικά συμπλέγματα και $|K| \approx |L|$, τότε από το θεώρημα B.1.5 έπεται ότι $\dim(K) = \dim(L)$. (Βλ. [84], σελ. 136.)

D.1.21 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται **τριγωνίσιμος χώρος** (ή **τοπολογικό πολύεδρο**) όταν υπάρχει κάποιο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K και ένας ομοιομορφισμός

$$h : |K| \xrightarrow{\approx} X.$$

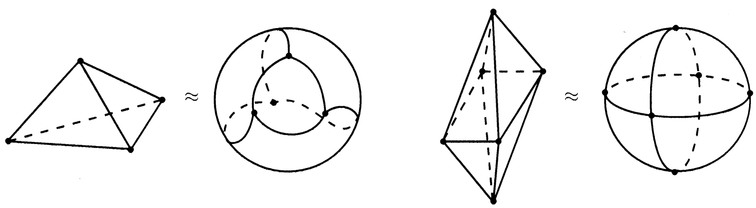
[7] Επειδή τα μονόπλοκα τού K ανήκουν σε κάποιον $\mathbb{R}^d$, η διάσταση καθενός εξ αυτών είναι προφανώς $\leqslant d$.

[8] Για περισσότερες πληροφορίες για την έννοια τής *ασθενούς τοπολογίας* βλ. Dugundji [38], Chapter VI, §8, σελ. 131-132.

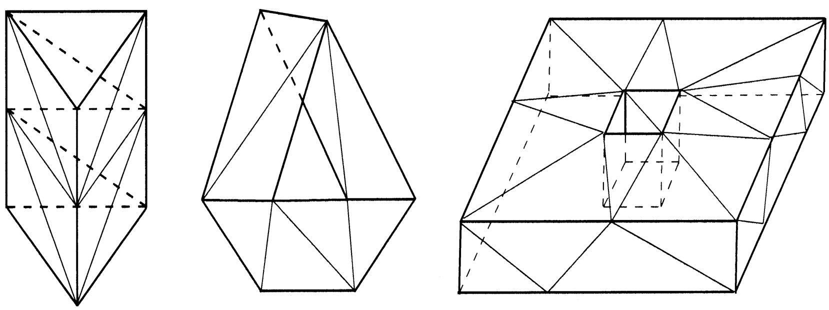
[9] Εάν το K δεν είναι πεπερασμένο, τότε αυτή η τοπολογία ενδέχεται να είναι λεπτότερη τής σχετικής τοπολογίας. Για δύο απτά παραδείγματα βλ. [80], Ex. 2 & 3, σελ. 9.

(Άρα οι «δομικοί λίθοι», από τους οποίους κατασκευάζονται τα τοπολογικά πολύεδρα, είναι εικόνες μονοπλόκων μέσω ομοιομορφισμών.) Ένα τέτοιο ζεύγος (K, h) καλείται **τριγωνισμός** (triangulation) τού X. (Μάλιστα, όταν το K είναι *πεπερασμένο*, αυτός λέγεται **πεπερασμένος τριγωνισμός** και ο X **πεπερασμένως τριγωνίσιμος** ή **τοπολογικό πολύτοπο**.)

D.1.22 Παραδείγματα. (i) Οι κορυφές, οι ακμές και οι έδρες ενός τετραέδρου ή ενός οκταέδρου αποτελούν ένα πεπερασμένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα, ο υποκείμενος χώρος τού οποίου είναι ομοιομορφικός τής σφαίρας $\mathbb{S}^2$. Ως εκ τούτου, η $\mathbb{S}^2$ είναι ένα τοπολογικό πολύτοπο. Επιπροσθέτως, τριγωνίσιμοι τοπολογικοί χώροι μπορούν να διαθέτουν διαφορετικούς τριγωνισμούς.



(ii) Στο κάτωθι σχήμα δίδονται (κατά σειράν) τριγωνισμοί τού (μοναδιαίου) κυλίνδρου τού οριζόμενου υπεράνω τού κύκλου $\mathbb{S}^1$, τής ταινίας τού Möbius (βλ. εδάφιο B.2.4 (iv)) και τού τόρου $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.



(iii) Το σύνολο $K(\mathfrak{s}_m)$ όλων των πλευρών ενός m-μονοπλόκου $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_m$ είναι αφ' εαυτού ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με $|K(\mathfrak{s}_m)| = \mathfrak{s}_m \approx \mathbb{B}^m$. Ως εκ τούτου, *όλες οι μπάλες* (οιασδήποτε διαστάσεως) *είναι τριγωνίσιμες.*

(iv) Το σύνολο όλων των γνήσιων πλευρών ενός m-μονοπλόκου $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_m$ είναι ωσαύτως ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα με την ιδιότητα: $|K(\mathfrak{s} \smallsetminus \mathring{\mathfrak{s}})| \approx \mathbb{S}^{m-1}$. Κατά συνέπειαν, *και όλες οι σφαίρες* (οιασδήποτε διαστάσεως) *είναι τριγωνίσιμες*.

(v) Ένας (κατ' ανάγκην *μη πεπερασμένος*) τριγωνισμός ολόκληρης τής πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$ δημιουργείται εάν κανείς θεωρήσει το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα το αποτελούμενο από όλα τα κλειστά διαστήματα $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}$ (με τους ακεραίους ως 0-μονόπλοκά του). Κατ' αναλογίαν, ένας τριγωνισμός τού διαστήματος $[0, \infty)$ δημιουργείται μέσω τού μονοπλεκτικού συμπλέγματος τού αποτελούμενου από τα κλειστά διαστήματα $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}_0$.

D.1.23 Σημείωση. Ενίοτε, μια *συγκεκριμένη κατασκευή* τριγωνισμών ορισμένων χώρων (με κάποια επιπρόσθετα χαρακτηριστικά) είναι πολύ δυσκολότερη από την απόδειξη τής υπάρξεώς τους. Ιδιαίτερα ενδιαφέρων είναι ο τρόπος προσδιορισμού (κατ' ανάγκην πεπερασμένων) τριγωνισμών *συμπαγών* επιφανειών με το *μικρότερο δυνατό πλήθος* τριγώνων (ή, ισοδυνάμως, με το *μικρότερο δυνατό πλήθος* κορυφών). Τέτοιοι τριγωνισμοί ονομάζονται **ελαχιστικοί τριγωνισμοί**.

(i) Εάν X είναι μια συμπαγής επιφάνεια, $|K| \approx X$ ένας τριγωνισμός [10],

$$a_j := \text{card}(\{j\text{-μονόπλοκα τού } K\}), \;\; j \in \{0,1,2\},$$

και $\chi(K) := a_0 - a_1 + a_2$ η **συνδυαστική χαρακτηριστική Euler τού** K, τότε

$$\begin{cases} 3a_2 = 2a_1, \\ a_1 = 3(a_0 - \chi(K)), \\ a_0 \geqslant \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi(K)}). \end{cases}$$

Επί παραδείγματι, επειδή

X	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$	$\mathbb{T}^2$	Φιάλη τού Klein
$\chi(K)$	2	1	0	0

έχουμε

$$\begin{cases} a_0 \geqslant 4, \; a_1 \geqslant 6, a_2 \geqslant 4 & \text{για } X = \mathbb{S}^2, \\ a_0 \geqslant 6, \; a_1 \geqslant 15, a_2 \geqslant 10 & \text{για } X = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, \\ a_0 \geqslant 7, \; a_1 \geqslant 21, a_2 \geqslant 14 & \text{για } X = \mathbb{T}^2 \text{ ή τη φιάλη τού Klein.} \end{cases}$$

(Βλ. Croom [53], σελ. 32-33, και Giblin [96], σελ. 61-62.)

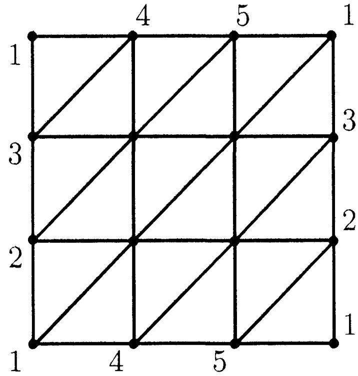
(ii) *Ελαχιστικός* τριγωνισμός τής $\mathbb{S}^2$ επιτυγχάνεται ύστερα από τη θεώρηση τού συνοριακού συμπλέγματος ενός τετραέδρου (βλ. D.1.22 (i)).

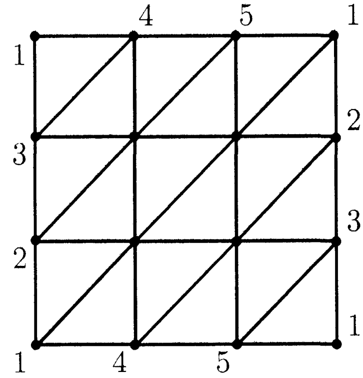
(iii) Ένας *ελαχιστικός* τριγωνισμός για το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ δίδεται στο εδάφιο D.1.28.

(iv) Στο κάτωθι σχήμα δίδονται (οι συνήθεις αλλά *μη ελαχιστικοί*) τριγωνισμοί τού τόρου $\mathbb{T}^2$ και τής φιάλης τού Klein, αντιστοίχως, ιδωμένων ως *ταυτισμικών χώρων*, με[11] $a_0 = 9$.

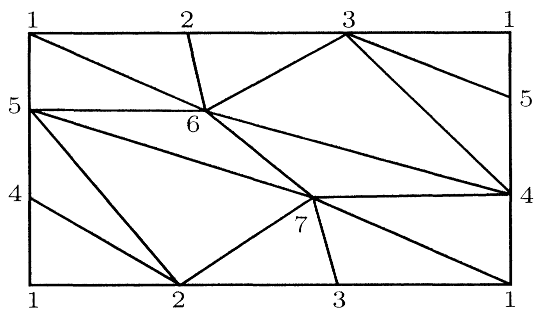
[10] Η *ύπαρξη* ενός τέτοιου K έπεται από ένα γενικό θεώρημα τού Radó (1925), βάσει τού οποίου *κάθε διδιάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα είναι τριγωνίσιμο*.

[11] Προφανώς, $3 \cdot 18 = 3a_2 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = 27$ και $a_0 = \frac{a_1}{3} = 9$.





Αντιθέτως, το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα τού επομένου σχήματος οδηγεί σε *ελαχιστικό* τριγωνισμό τού $\mathbb{T}^2$ με $a_0 = 7$, $a_1 = 21$ και $a_2 = 14$. Τέτοιου είδους τριγωνισμοί (με 7 κορυφές) δεν υφίστανται για τη φιάλη τού Klein! (Στην πραγματικότητα, *κάθε* ελαχιστικός τριγωνισμός τής φιάλης τού Klein οφείλει να έχει 8 κορυφές. Πρβλ. Ringel[12] και Giblin [96], σελ. 62.)



Για την περιγραφή μιας κατηγορίας έχουσας τα μονοπλεκτικά συμπλέγματα ως αντικείμενα απαιτείται η εισαγωγή τής έννοιας που θα παίξει τον ρόλο τού μορφισμού.

D.1.24 Ορισμός. Έστω ότι K, L είναι δυο μονοπλεκτικά συμπλέγματα. Μια **μονοπλεκτική απεικόνιση** $\varphi : K \longrightarrow L$ είναι μια απεικόνιση που στέλνει κάθε κορυφή (ήτοι κάθε 0-μονόπλοκο) τού K να απεικονισθεί σε μια κορυφή (ήτοι σε ένα 0-μονόπλοκο) τού L και έχει την εξής ιδιότητα: Για κάθε $\mathfrak{s} = [\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m] \in K$, η εικόνα $\varphi(\mathfrak{s}) \in L$ τού $\mathfrak{s}$ μέσω τής φ ισούται με $\varphi(\mathfrak{s}) = [\varphi(\mathbf{x}_0), ..., \varphi(\mathbf{x}_m)]$.

D.1.25 Σημείωση. (i) Μέσω οιασδήποτε μονοπλεκτικής απεικονίσεως $\varphi : K \rightarrow L$ επάγεται μια συνεχής απεικόνιση $|\varphi| : |K| \longrightarrow |L|$ η οποία ορίζεται ως ακολούθως: Για κάθε $\mathfrak{s} \in K$ έστω $f_{\mathfrak{s}} : \mathfrak{s} \longrightarrow |L|$ η συσχετική απεικόνιση η προσδιοριζόμενη μέσω τής $\varphi|_{\mathrm{Vert}(\mathfrak{s})}$. (Βλ. πρόταση D.1.12.) Βάσει τής συνθήκης D.1.15 (ii) οι απεικονίσεις $f_{\mathfrak{s}}$ ταυτίζονται στο κοινό τμήμα τού πεδίου ορισμού τους, οπότε μπορούν να

[12] G. Ringel: *Wie man die geschlossenen nichtorientierbaren Flächen in möglichst wenig Dreiecke zerlegen kann*, Mathematische Annalen **130** (1955), 317-326.

συγκολληθούν παρέχοντάς μας την $|\varphi|$.

(ii) Για κάθε μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K έχουμε $|\mathrm{id}_K| = \mathrm{id}_{|K|}$. Επιπροσθέτως, εάν $\varphi : K_1 \longrightarrow K_2$ και $\psi : K_2 \longrightarrow K_3$ είναι μονοπλεκτικές απεικονίσεις, τότε $|\psi \circ \varphi| = |\psi| \circ |\varphi|$.

(iii) Εάν υπάρχει μια μονοπλεκτική και αμφιρριπτική απεικόνιση $\varphi : K \longrightarrow L$, τότε τα K και L καλούνται **γραμμικώς ισόμορφα**. Εν τοιαύτη περιπτώσει, η αντίστροφός της $\varphi^{-1} : L \longrightarrow K$ είναι ωσαύτως μονοπλεκτική και η επαγόμενη συνεχής απεικόνιση $|\varphi| : |K| \longrightarrow |L|$ ομοιομορφισμός.

(iv) Εάν συμβολίσουμε ως $\mathfrak{SComp}$ την κατηγορία των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων (με τις μονοπλεκτικές απεικονίσεις ως μορφισμούς της), τότε με τη βοήθεια των (i), (ii) και (iii) ορίζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής

$$| \ | : \mathfrak{SComp} \rightsquigarrow \mathfrak{Top}, \quad K \longmapsto |K|, \quad (\varphi : K \longrightarrow L) \longmapsto (|\varphi| : |K| \longrightarrow |L|).$$

Η έννοια τού *τοπολογικού πολυέδρου* γενικεύεται για τοπολογικά ζεύγη ως εξής:

D.1.26 Ορισμός. Έστω K ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Ένα $K' \subseteq K$ καλείται **υποσύμπλεγμα τού** K όταν ισχύει η συνεπαγωγή:

$$(\mathfrak{s} \in K' \text{ και } \mathfrak{s}' \preceq \mathfrak{s} \Longrightarrow \mathfrak{s}' \in K').$$

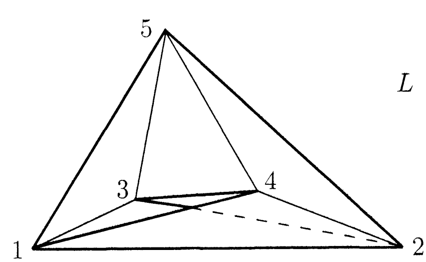
Ένας υπόχωρος X' ένος τοπολογικού πολυέδρου X καλείται **τοπολογικό υποπολύεδρο τού** X όταν υπάρχει ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K, καθώς και ένα υποσύμπλεγμα τού K', ούτως ώστε να ισχύει $(|K|, |K'|) \approx (X, X')$ (υπό την έννοια τού ορισμού B.7.2). Εν τοιαύτη περιπτώσει το (X, X') καλείται **πολυεδρικό τοπολογικό ζεύγος**.

D.1.27 Σημείωση. Αναλόγως προς το D.1.25 (iv) μπορεί κανείς να ορίσει έναν συναλλοίωτο συναρτητή

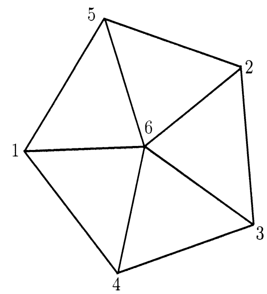
$$| \ | : \mathfrak{SComp}^{[2]} \rightsquigarrow \mathfrak{Top}^{[2]}, \quad (K, K') \longmapsto (|K|, |K'|),$$
$$(\varphi : (K, K') \longrightarrow (L, L')) \longmapsto (|\varphi| : (|K|, |K'|) \longrightarrow (|L|, |L'|))$$

από την κατηγορία των ζευγών μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων στην κατηγορία των τοπολογικών ζευγών.

D.1.28 Παράδειγμα. Έστω $L \subsetneq \mathbb{R}^3$ το μονοπλεκτικό σύμπλεγμα που εικονογραφείται στο εξής σχήμα:

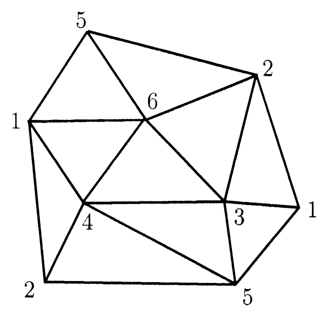


Το L απαρτίζεται από 5 κορυφές, 10 ακμές και τα 5 τρίγωνα (:έδρες) 123, 124, 135, 245 και 345. Έστω $L' \subsetneqq L$ το υποσύμπλεγμα τού L το αποτελούμενο από τις 5 κορυφές και τις ακμές $15, 52, 23, 34$ και 41. Προφανώς, ο $|L|$ είναι μια ταινία τού Möbius και ο $|L'|$ το σύνορό της. Θεωρούμε ένα $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^4 \smallsetminus \mathbb{R}^3$ και τον κώνο $\mathrm{cone}_{\mathbf{x}_0}(L') = \{$μονόπλοκα $\mathfrak{s}$ με $\mathrm{Vert}(\mathfrak{s}) = \{\mathbf{x}_0\} \cup \mathrm{Vert}(L')\}$. Ο $\mathrm{cone}_{\mathbf{x}_0}(L')$ διαθέτει έναν τριγωνισμό L'', με το $\mathbf{x}_0$ να αντιστοιχεί στην κορυφή 6. Τα L, L'' έχουν το υποσύμπλεγμα L' κοινό (εντός τού $\mathbb{R}^4$).



L''

Έστω $K := L \cup L''$. Το K είναι μονοπλεκτικό σύμπλεγμα (εντός τού $\mathbb{R}^4$) με 6 κορυφές, 15 ακμές και 10 τρίγωνα, και $|K| \approx \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$. Βάσει των όσων προαναφέρθησαν στη σημείωση D.1.23, αυτός ο τριγωνισμός είναι ελαχιστικός.



K

▸ **Αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα**. Για την τήρηση ενός απαραίτητου βαθμού γενικότητας αλλά και σε διάφορες εφαρμογές είναι προτιμότερο από τεχνικής πλευράς να εργαζόμαστε με *αφηρημένα* μονοπλεκτικά συμπλέγματα (παρά να εμμένουμε σε κατατριβή με τις αρκούντως περιοριστικές γεωμετρικές ιδιότητες των ευκλειδείων μονοπλόκων).

D.1.29 Ορισμός. Ένα **αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα** $\mathscr{K} = (\mathscr{V}, \mathscr{S})$ αποτελείται από ένα σύνολο $\mathscr{V}$ και ένα σύνολο $\mathscr{S}$ πεπερασμένων υποσυνόλων τού $\mathscr{V}$, ούτως ώστε να ισχύουν τα εξής:

(i) $\{v\} \in \mathscr{S}$, $\forall v \in \mathscr{V}$.

(ii) Εάν $s \in \mathscr{S}$ και $\varnothing \neq s' \subseteq s$, τότε $s' \in \mathscr{S}$.

Τα στοιχεία τού $\mathscr{V}$ καλούνται **κορυφές** τού $\mathscr{K}$ και τα στοιχεία τού $\mathscr{S}$ **αφηρη-**

μένα μονόπλοκα τού $\mathscr{K}$. Ένα $s \in \mathscr{S}$ περιέχον ακριβώς $m+1$ κορυφές (όπου $m \in \mathbb{N}_0$) καλείται m-**διάστατο αφηρημένο μονόπλοκο** (ή απλώς **αφηρημένο** m-**μονόπλοκο**). Εάν $s \in \mathscr{S}$ και $\varnothing \neq s' \subseteq s$, τότε το s' είναι ένα αφηρημένο μονόπλοκο (λόγω τού (ii)) και καλείται **πλευρά** τού s. (Όταν $s' \subsetneqq s$, το s' καλείται **γνήσια πλευρά** τού s.) Η διάσταση ενός τέτοιου $\mathscr{K}$ ορίζεται ως εξής: $\dim(\mathscr{K}) := \sup\{\dim(s) : s \in \mathscr{S}\}$. Λέμε ότι ένα τέτοιο $\mathscr{K}$ είναι **πεπερασμένο** (και αντιστοίχως, **αριθμήσιμο**) όταν το $\mathscr{V}$ είναι πεπερασμένο (και αντιστοίχως, αριθμήσιμο) και **τοπικώς πεπερασμένο** (και αντιστοίχως, **τοπικώς αριθμήσιμο**) όταν κάθε $v \in \mathscr{V}$ ανήκει σε πεπερασμένου πλήθους (αριθμησίμου πλήθους) στοιχεία τού $\mathscr{S}$. (Όταν το $\mathscr{K}$ είναι πεπερασμένο ή τοπικώς πεπερασμένο, τότε $\dim(\mathscr{K}) < \infty$. Ωστόσο, όταν $\dim(\mathscr{K}) < \infty$, το $\mathscr{K}$ ενδέχεται να μην είναι πεπερασμένο. Βλ. D.1.30 (v).)

D.1.30 Παραδείγματα. (i) Εάν $\mathscr{V} \neq \varnothing$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, τότε το $\mathscr{K} = (\mathscr{V}, \mathfrak{P}(\mathscr{V}) \smallsetminus \varnothing)$ είναι ένα πεπερασμένο αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα.
(ii) Εάν $\mathscr{K}_1 = (\mathscr{V}_1, \mathscr{S}_1)$, $\mathscr{K}_2 = (\mathscr{V}_2, \mathscr{S}_2)$ είναι δυο αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα, τότε η **συναρμογή** (join) αυτών $\mathscr{K}_1 * \mathscr{K}_2 = (\mathscr{V}_1 \cup \mathscr{V}_2, \mathscr{S}_1 * \mathscr{S}_2)$, όπου

$$\{v_0, \ldots, v_{m_1}, u_0, \ldots, u_{m_2}\} \in \mathscr{S}_1 * \mathscr{S}_2 \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c} \{v_0, \ldots, v_{m_1}\} \in \mathscr{S}_1 \cup \{\varnothing\} \\ \text{και } \{u_0, \ldots, u_{m_2}\} \in \{\varnothing\} \cup \mathscr{S}_2 \end{array} \right],$$

αποτελεί ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα έχον ως σύνολο κορυφών του την ένωση των συνόλων κορυφών των $\mathscr{K}_1$ και $\mathscr{K}_2$. (Εάν το $\mathscr{V}_1$ είναι ένα *μονοσύνολο*, ας πούμε το $\{v_0\}$, τότε το $\mathscr{K}_1 * \mathscr{K}_2$ είναι ο **αφηρημένος κώνος** υπεράνω τού $\mathscr{K}_2$ έχων ως κορυφή του το v_0.)
(iii) Έστω $\mathscr{K} = (\mathscr{V}, \mathscr{S})$ ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Οιοδήποτε αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\mathscr{K}' = (\mathscr{V}', \mathscr{S}')$ με $\mathscr{V}' \subseteq \mathscr{V}$ και $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ καλείται (**αφηρημένο**) **υποσύμπλεγμα τού** $\mathscr{K}$. Εάν τα $\mathscr{K}' = (\mathscr{V}', \mathscr{S}')$ και $\mathscr{K}'' = (\mathscr{V}'', \mathscr{S}'')$ είναι υποσυμπλέγματα τού $\mathscr{K} = (\mathscr{V}, \mathscr{S})$, τότε *και* τα

$$\mathscr{K}' \cup \mathscr{K}'' = (\mathscr{V}' \cup \mathscr{V}'', \mathscr{S}' \cup \mathscr{S}'') \text{ και } \mathscr{K}' \cap \mathscr{K}'' = (\mathscr{V}' \cap \mathscr{V}'', \mathscr{S}' \cap \mathscr{S}'')$$

είναι υποσυμπλέγματα τού $\mathscr{K} = (\mathscr{V}, \mathscr{S})$.
(iv) Δοθέντος ενός (ευκλειδείου) μονοπλεκτικού συμπλέγματος K (εντός ενός ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^n$), συμβολίζουμε ως $\mathscr{K}_{\mathrm{Vert}(K)} = (\mathrm{Vert}(K), \mathscr{S}_K)$ το αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα που έχει ως σύνολο κορυφών του το σύνολο κορυφών τού K και

$$\mathscr{S}_K := \left\{ \{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m\} \;\middle|\; \begin{array}{c} m \in \mathbb{N}_0,\ m \leqslant n,\ \text{και } [\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m] = \mathfrak{s} \\ \text{για κάποιο } m\text{-μονόπλοκο } \mathfrak{s} \text{ τού } K \end{array} \right\}.$$

Τούτο καλείται, ιδιαιτέρως, **διάσχημα κορυφών** (vertex scheme) **τού** K.
(v) Το (μη πεπερασμένο, αριθμήσιμο) αφηρημένο *μονοδιάστατο* μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\mathscr{K} = (\mathscr{V}, \mathscr{S})$, όπου $\mathscr{V} = \mathbb{Z}$ και $\mathscr{S} = \{\{n\} | n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\{n, n+1\} | n \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι τίποτα άλλο παρά το διάσχημα κορυφών τού ευκλειδείου μονοπλεκτικού συμπλέγματος, μέσω τού οποίου είχαμε τριγωνίσει ολόκληρη την πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ στο εδάφιο D.1.22 (v).

D.1.31 Ορισμός. Έστω $\mathscr{K} = (\mathscr{V}, \mathscr{S})$ τυχόν αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα και έστω $\mathbf{I}^{(\mathscr{V})} := \left\{ f \in \mathbf{I}^{\mathscr{V}} \middle| \operatorname{card}(\operatorname{supp}(f)) < \infty \right\}$ $(\mathbf{I} := [0,1])$, όπου $\mathbf{I}^{\mathscr{V}}$ το σύνολο των απεικονίσεων $f : \mathscr{V} \to \mathbf{I}$ και $\operatorname{supp}(f) := \{v \in \mathscr{V} \,|\, f(v) \neq 0\}$. Εάν για κάθε $v \in \mathscr{V}$ ορίσουμε την $\widetilde{v} \in \mathbf{I}^{(\mathscr{V})}$ μέσω τού τύπου

$$\mathscr{V} \ni u \longmapsto \widetilde{v}(u) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } u = v, \\ 0, & \text{όταν } u \neq v, \end{cases}$$

και για κάθε αφηρημένο m-μονόπλοκο $s = \{v_0, ..., v_m\} \in \mathscr{S}$ ορίσουμε το (ευκλείδειο) m-μονόπλοκο[13] $\mathfrak{s} := |s| := [\widetilde{v}_0, ..., \widetilde{v}_m] \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$, τότε λέμε ότι το $\mathfrak{s} := |s|$ είναι η **γεωμετρική υλοποίηση** (geometric realization) **τού** s. Η ένωση

$$\boxed{|\mathscr{K}| := \bigcup_{s \in \mathscr{S}} |s|\,,}$$

εφοδιαζόμενη με την *ασθενή τοπολογία*:

$$[\text{το } A \text{ είναι ανοικτό} \subseteq |\mathscr{K}|] \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c} \text{το } A \cap |s| \ \text{ είναι ανοικτό} \\ \text{υποσύνολο τού } |s|\,, \ \forall s \in \mathscr{S} \end{array} \right],$$

καλείται **γεωμετρική υλοποίηση**[14] **τού** $\mathscr{K}$.

D.1.32 Σημείωση. (i) Ο $|\mathscr{K}|$ είναι χώρος Hausdorff.

(ii) Ο $|\mathscr{K}|$ είναι τοπικώς συμπαγής· επίσης, είναι συμπαγής εάν και μόνον εάν το $\mathscr{K}$ είναι πεπερασμένο.

(iii) Ο $|\mathscr{K}|$ είναι τοπικώς δρομοσυνεκτικός. Επομένως, ο $|\mathscr{K}|$ είναι συνεκτικός εάν και μόνον εάν είναι δρομοσυνεκτικός.

D.1.33 Λήμμα. *Έστω K ένα (ευκλείδειο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K (εντός ενός ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^d$) και έστω $\mathscr{K}_{\mathrm{Vert}(K)} = (\mathrm{Vert}(K), \mathscr{S}_K)$ το διάσχημα κορυφών του το ορισθέν στο εδάφιο* D.1.30 (iv). *Τότε $|\mathscr{K}_{\mathrm{Vert}(K)}| \approx |K|$.*

D.1.34 Θεώρημα. *Έστω $\mathscr{K}$ ένα αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν υπάρχει (ευκλείδειο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα K εντός ενός ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^d$, τέτοιο ώστε να ισχύει $|\mathscr{K}| \approx |K|$, τότε το $\mathscr{K}$ είναι κατ' ανάγκην αριθμήσιμο, τοπικώς πεπερασμένο και διαστάσεως $\dim(\mathscr{K}) \leqslant n$.*

(ii) *Αντιστρόφως τώρα· εάν το $\mathscr{K}$ είναι αριθμήσιμο, τοπικώς πεπερασμένο και δια-*

---

[13] Εν προκειμένω, ταυτίζουμε τον διανυσματικό υπόχωρο τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbf{I}^{(\mathscr{V})}$ τον παραγόμενο από το $\{v_0, ..., v_m\}$ με τον $\mathbb{R}^{m+1}$.

[14] Εν γένει, το $|\mathscr{K}|$ ενδέχεται να μην μπορεί να θεωρηθεί ως ο υποκείμενος χώρος ενός *ευκλειδείου* μονοπλεκτικού συμπλέγματος, καθώς «ζει» στον αφηρημένο $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο $\mathbf{I}^{(\mathscr{V})}$ και όταν το $\mathscr{V}$ είναι άπειρο δεν είναι *τοπολογικός υπόχωρος* τού $\mathbf{I}^{(\mathscr{V})}$. (Πρβλ. [99], §3.3, Example 3, σελ. 114.)

στάσεως $\dim(\mathscr{K}) \leqslant n$, *τότε υφίσταται πάντοτε κάποιο (ευκλείδειο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα* K *εντός τού ευκλειδείου χώρου* $\mathbb{R}^{2d+1}$, *τέτοιο ώστε να ισχύει* $|\mathscr{K}| \approx |K|$.

Απόδειξη. Βλ. Spanier [86], Ch. 3, §2, Theorem 9, σελ. 120, και Ferrario & Piccinini [63], Theorem II.2.14, σελ. 57. □

D.1.35 Ορισμός. Έστω ότι $\mathscr{K} = (\mathscr{V}, \mathscr{S})$ και $\mathscr{L} = (\mathscr{W}, \mathscr{U})$ είναι δυο αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα. Μια **αφηρημένη μονοπλεκτική απεικόνιση** $\varphi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{L}$ από το $\mathscr{K}$ στο $\mathscr{L}$ είναι μια απεικόνιση $\varphi : \mathscr{V} \longrightarrow \mathscr{W}$, τέτοια ώστε[15] $\{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_m)\} \in \mathscr{U}$ για κάθε $\{v_0, \dots, v_m\} \in \mathscr{S}$. Λέμε ότι τα $\mathscr{K}$ και $\mathscr{L}$ είναι **ισόμορφα** (ως αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα) όταν υπάρχει μια *αμφιρριπτική* μονοπλεκτική απεικόνιση από το $\mathscr{K}$ στο $\mathscr{L}$, τέτοια ώστε η αντίστροφός της (από το $\mathscr{L}$ στο $\mathscr{K}$) να είναι ωσαύτως αφηρημένη μονοπλεκτική.

D.1.36 Σημείωση. (i) Μέσω οιασδήποτε αφηρημένης μονοπλεκτικής απεικονίσεως $\varphi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{L}$ επάγεται μια συνεχής απεικόνιση $|\varphi| : |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ η οποία ορίζεται ως ακολούθως: Για κάθε $s \in \mathscr{S}$ έστω $|f_s| : |s| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ η συσχετική απεικόνιση η προσδιοριζόμενη μέσω τής φ επί τού συνόλου των κορυφών τού s. Βάσει τής συνθήκης D.1.29 (ii) οι απεικονίσεις $|f_s|$ ταυτίζονται στο κοινό τμήμα τού πεδίου ορισμού τους, οπότε μπορούν να συγκολληθούν παρέχοντάς μας την $|\varphi|$.

(ii) Για κάθε αφηρημένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\mathscr{K}$ έχουμε $|\mathrm{id}_{\mathscr{K}}| = \mathrm{id}_{|\mathscr{K}|}$. Επιπροσθέτως, εάν $\varphi : \mathscr{K}_1 \longrightarrow \mathscr{K}_2$ και $\psi : \mathscr{K}_2 \longrightarrow \mathscr{K}_3$ είναι αφηρημένες μονοπλεκτικές απρεικονίσεις, τότε $|\psi \circ \varphi| = |\psi| \circ |\varphi|$.

(iii) Εάν συμβολίσουμε ως $\mathfrak{SComp}^{\text{abs.}}$ την *κατηγορία των αφηρημένων μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων* (με τις αφηρημένες μονοπλεκτικές απεικονίσεις ως μορφισμούς της), τότε με τη βοήθεια τού ορισμού D.1.35 και των (i) και (ii) ορίζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής

$$\begin{gathered} |\ | : \mathfrak{SComp}^{\text{abs.}} \rightsquigarrow \mathfrak{Top}, \quad \mathscr{K} \longmapsto |\mathscr{K}|, \\ (\varphi : \mathscr{K} \longrightarrow \mathscr{L}) \longmapsto (|\varphi| : |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|). \end{gathered}$$

Κατ' αναλογίαν ορίζεται συναλλοίωτος συναρτητής

$$\begin{gathered} |\ | : \mathfrak{SComp}^{[2],\,\text{abs.}} \rightsquigarrow \mathfrak{Top}^{[2]}, \quad (\mathscr{K}, \mathscr{K}') \longmapsto (|\mathscr{K}|, |\mathscr{K}'|), \\ (\varphi : (\mathscr{K}, \mathscr{K}') \longrightarrow (\mathscr{L}, \mathscr{L}')) \longmapsto (|\varphi| : (|\mathscr{K}|, |\mathscr{K}'|) \longrightarrow (|\mathscr{L}|, |\mathscr{L}'|)) \end{gathered}$$

από την κατηγορία των ζευγών αφηρημένων μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων στην κατηγορία των τοπολογικών ζευγών.

(iv) Μέσω τού λήμματος D.1.33 καθορίζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής $\mathfrak{SComp} \rightsquigarrow \mathfrak{SComp}^{\text{abs.}}$ (που στέλνει κάθε ευκλείδειο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα να απεικονισθεί στο διάσχημα κορυφών του). Ωστόσο, *δεν είναι όλα* τα *αφηρημένα* μονοπλεκτικά συμπλέγματα παραστάσιμα ως διασχήματα κορυφών *ευκλειδείων* μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων. Το θεώρημα D.1.34 μας πληροφορεί ότι για την «αντιστροφή τού (ανωτέρω) βέλους» απαιτείται ο περιορισμός μας *στην υποκατηγορία*

[15] Φυσικά, δεν αποκλείεται a priori μεταξύ των $\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_m)$ να υφίστανται *επαναλήψεις*.

των αριθμήσιμων, τοπικώς πεπερασμένων αφηρημένων μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων πεπερασμένης διαστάσεως. (Εν τοιαύτη περιπτώσει, προκύπτει μια ισοδυναμία[16], υπό την έννοια τού ορισμού A.3.2 (ii), τής κατηγορίας των αριθμήσιμων *ευκλειδείων* μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων πεπερασμένης διαστάσεως και τής κατηγορίας των αριθμήσιμων, τοπικώς πεπερασμένων *αφηρημένων* μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων πεπερασμένης διαστάσεως.)

(v) Δυο ευκλείδεια μονοπλεκτικά συμπλέγματα είναι γραμμικώς ισόμορφα εάν και μόνον εάν τα διασχήματα των κορυφών τους είναι ισόμορφα (ως αφηρημένα μονοπλεκτικά συμπλέγματα). Βλ. εδάφια D.1.25 (iii), D.1.30 (iv) και D.1.35.

D.1.37 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος X καλείται **τριγωνίσιμος χώρος** (*υπό την ευρεία έννοια*[17]) όταν υπάρχει κάποιο *αφηρημένο* μονοπλεκτικό σύμπλεγμα $\mathscr{K}$ και ένας ομοιομορφισμός $h : |\mathscr{K}| \xrightarrow{\approx} X$. Ένα τέτοιο ζεύγος $(\mathscr{K}, h)$ καλείται **τριγωνισμός** τού X (*υπό την ευρεία έννοια*).

D.1.38 Ορισμός. Έστω $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_m$ (και αντιστοίχως, s) ένα ευκλείδειο (και αντιστοίχως, ένα αφηρημένο) m-μονόπλοκο έχον τα $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m$ (και αντιστοίχως, τα $v_0, ..., v_m$) ως κορυφές του. Υπάρχουν $(m+1)!$ τρόποι (ανα)διατάξεων αυτών των κορυφών. Δύο διατάξεις των κορυφών καλούνται **ισοδύναμες** όταν η μία προκύπτει από την άλλη ύστερα από κάποια άρτια μετάταξη υποδεικτών[18]. Ως προς την κατ' αυτόν τον τρόπο δημιουργούμενη σχέση ισοδυναμίας (επί τού συνόλου των διατάξεων των εν λόγω κορυφών) υφίσταται *μόνον μία* κλάση ισοδυναμίας όταν $m = 0$ και *ακριβώς δύο* όταν $m \geqslant 1$. Ένας **προσανατολισμός** τού $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_m$ (και αντιστοίχως, τού s) είναι μια επιλογή μιας κλάσεως ισοδυναμίας. Ένα **προσανατολισμένο μονόπλοκο** (ευκλείδειο ή αφηρημένο) είναι ένα μονόπλοκο στο οποίο έχει παγιωθεί ένας *συγκεκριμένος* προσανατολισμός.

D.1.39 Συμβολισμός. Εάν το $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_m$ (και αντιστοίχως, το s) είναι προσανατολισμένο, τότε το συμβολίζουμε ως

$$\mathfrak{s} = [\![\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m]\!] \text{ (και αντιστοίχως, ως } s = [\![v_0, ..., v_m]\!])$$

όταν $\mathrm{Vert}(\mathfrak{s}) = \{\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_m\}$ (αντιστοίχως, $\mathrm{Vert}(s) = \{v_0, ..., v_m\}$) και -ταυτοχρόνως- η διάταξη αυτή των κορυφών ανήκει στον προκαθορισμένο προσανατολισμό. (Στην

[16]Για αυτήν την ισοδυναμία για τις υποκατηγορίες των *πεπερασμένων* (*ευκλειδείων* και, αντιστοίχως, *αφηρημένων*) μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων βλ. Rotman [84], Theorem 7.8, σελ. 142.

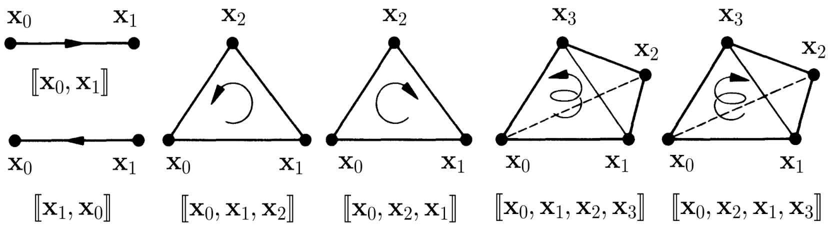
[17]Απλώς για να διαφοροποιούμεθα κατά τι εν σχέσει προς τον ορισμό D.1.21, λαμβάνοντας υπ' όψιν το λήμμα D.1.33 και το θεώρημα D.1.34.

[18]Εάν $\mathfrak{S}_{m+1} := \{$ αμφιρρίψεις $\{0, \ldots, m\} \longrightarrow \{0, \ldots, m\}\}$ είναι η αντίστοιχη συμμετρική ομάδα των μετατάξεων (permutations) σε $m+1$ σύμβολα και $\mathfrak{A}_{m+1}$ η εναλλάσσουσα υποομάδα της (alternating subgroup), τότε δύο διατάξεις $\mathbf{x}_{j_0}, \ldots, \mathbf{x}_{j_m}$ και $\mathbf{x}_{j'_0}, \ldots, \mathbf{x}_{j'_m}$ των κορυφών $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m$ (και αναλόγως για τα $v_0, \ldots, v_m$) είναι ισοδύναμες όταν υπάρχει $\tau \in \mathfrak{A}_{m+1}$ με $\tau(j_\rho) = j'_\rho$ για κάθε $\rho \in \{0, \ldots, m\}$. Σημειωτέον ότι, εάν $m \geqslant 1$, τότε για μια μετάταξη $\tau \in \mathfrak{S}_{m+1}$ έχουμε $\tau \in \mathfrak{A}_{m+1}$ *εάν και μόνον εάν* οι διατεταγμένες βάσεις

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{\tau(0)}) \text{ και } (\mathbf{x}_{\tau(1)} - \mathbf{x}_{\tau(0)}, \mathbf{x}_{\tau(2)} - \mathbf{x}_{\tau(0)}, \ldots, \mathbf{x}_{\tau(m)} - \mathbf{x}_{\tau(0)})$$

τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^m$ *καθορίζουν τον ίδιον προσανατολισμό* επί τού $\mathbb{R}^m$ (ήτοι ο $(m \times m)$-πίνακας παραστάσεως τού αυτομορφισμού f τού $\mathbb{R}^m$ με $f(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_{\tau(k)} - \mathbf{x}_{\tau(0)}, \forall k \in \{1, \ldots, m\}$, *ως προς αυτές* έχει ορίζουσα *θετική*).

ειδική περίπτωση όπου $m = 0$, υφίσταται μόνον ένας προσανατολισμός, και γράφουμε απλώς $\mathbf{x}_0$ (και αντιστοίχως, v_0) αντί τού $\llbracket \mathbf{x}_0 \rrbracket$ (και αντιστοίχως, αντί τού $\llbracket v_0 \rrbracket$).) Εάν $m \geqslant 1$ και $\mathfrak{s} = \llbracket \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \rrbracket$ (και αντιστοίχως, $s = \llbracket v_0, v_1, ..., v_m \rrbracket$), τότε το $\mathfrak{s}^{-1} := \llbracket \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m \rrbracket$ (και αντιστοίχως, το $s^{-1} = \llbracket v_1, v_0, v_2, ..., v_m \rrbracket$) ονομάζεται **το αντιθέτως προς το** $\mathfrak{s}$ (αντιστοίχως, **το αντιθέτως προς το** s) **προσανατολισμένο** m-**μονόπλοκο.** Σχηματικώς, σε ό,τι αφορά στα ευκλείδεια μονόπλοκα (ή στις γεωμετρικές υλοποιήσεις αφηρημένων), ένα προσανατολισμένο 1-μονόπλοκο είναι ένα *κατευθυνόμενο* ευθύγραμμο τμήμα, με μία εκ των δύο διαθέσιμων κατευθύνσεων προεπιλεγμένη. Ένα προσανατολισμένο 2-μονόπλοκο είναι ένα τρίγωνο εφοδιασμένο είτε με την *ωρολογιακή* είτε με την *αντιωρολογιακή φορά* (διατάξεως των τριών κορυφών του). Οι προσανατολισμοί ενός 3-μονοπλόκου καθορίζονται από τον *κανόνα τής κοχλιώσεως*.

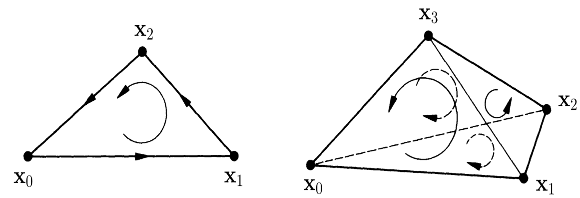


Σύμβαση: Για να αποφευχθούν επαναλήψεις και άκομψες διατυπώσεις, θα περιορισθούμε μεν στο τι συμβαίνει στην κατηγορία των *ευκλείδειων* μονοπλόκων και μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων, τονίζοντας δε, εκ παραλλήλου, ότι τα λήμματα, οι προτάσεις κ.λπ. σε ό,τι ακολουθήσει ισχύουν (χωρίς καμία ουσιαστική διαφοροποίηση) *και* εντός τής κατηγορίας των *αφηρημένων*.

Συμβολισμοί για	**ευκλείδεια εκδοχή**	**αφηρημένη εκδοχή**
Κορυφές μονοπλόκων	$\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_m$	$v_0, \ldots, v_m$
Σύνολα κορυφών	$\mathrm{Vert}(\mathfrak{s})$	$\mathrm{Vert}(s)$
Προσανατολισμένα μονόπλοκα	$\mathfrak{s}_m = \llbracket \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \rrbracket$	$s = \llbracket v_0, \ldots, v_m \rrbracket$
Κατηγορία μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων	$\mathfrak{SComp}$	$\mathfrak{SComp}^{\text{abs.}}$
Κατηγορία ζευγών μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων	$\mathfrak{SComp}^{[2]}$	$\mathfrak{SComp}^{[2]\,,\,\text{abs.}}$

D.1.40 Ορισμός. Εάν το $\mathfrak{s}_m$ είναι ένα m-μονόπλοκο με $m \geqslant 1$, το $\mathfrak{s}_{m-1} \prec \mathfrak{s}_m$ μια $(m-1)$-διάστατη πλευρά τού $\mathfrak{s}_m$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathfrak{s}_m$ η κορυφή *που δεν ανήκει* στο $\mathfrak{s}_{m-1}$, τότε ένας προσανατολισμός τού $\mathfrak{s}_m$ επάγει έναν προσανατολισμό τού $\mathfrak{s}_{m-1}$: Δοθείσας μιας διατάξεως $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$ των κορυφών τού $\mathfrak{s}_m$ (στην οποία συναντούμε το $\mathbf{x}_0$ *στην πρώτη θέση*), ήτοι για $\mathfrak{s}_m = \llbracket \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \rrbracket$, ορίζουμε **τον επαγόμενο προσανατολισμό επί τού** $\mathfrak{s}_{m-1}$ ως εξής: $\mathfrak{s}_{m-1} = \llbracket \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m \rrbracket$.

Μια άρτια μετάταξη των $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$, η οποία *δεν μετακινεί* το $\mathbf{x}_0$ από την πρώτη θέση, επάγει μια άρτια μετάταξη των δεικτών των κορυφών $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m$. Ως εκ τούτου, ο ανωτέρω προσανατολισμός τού $\mathfrak{s}_{m-1}$ είναι *μονοσημάντως ορισμένος*. Τα κάτωθι σχήματα αποσαφηνίζουν το ποιοι είναι οι επαγόμενοι προσανατολισμοί επί των πλευρών των μονοπλόκων στις περιπτώσεις όπου $m = 2$ και $m = 3$, αντιστοίχως.



D.1.41 Λήμμα. *Έστω* $\mathfrak{s}_m = [\![\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m]\!]$ *ένα προσανατολισμένο* m*-μονόπλοκο με* $m \geqslant 2$*. Τότε το πλευρικό του* $(m-1)$*-μονόπλοκο* $\mathfrak{s}_{m-1}^{(j)}$ *το οποίο αντίκειται στην κορυφή* $\mathbf{x}_j$, $j \in \{0, 1, ..., m\}$*, εφοδιασμένο με τον επαγόμενο προσανατολισμό, ισούται με το*[19] $[\![\mathbf{x}_0, ..., \widehat{\mathbf{x}_j}, ..., \mathbf{x}_m]\!]^{(-1)^j}$.

Απόδειξη. Κατόπιν j εναλλαγών δεικτών κορυφών στο δοθέν μονόπλοκο λαμβάνουμε τελικώς $\mathfrak{s}_{m-1}^{(j)} = [\![\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_{j+1}, ..., \mathbf{x}_m]\!]^{(-1)^j}$. □

D.1.42 Ορισμός. Έστω R τυχών μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος και έστω K ένα (ευκλείδειο ή αφηρημένο) μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον R-μόδιο $C_n(K; R)$ ως ακολούθως:

(i) Για $n < 0$ και $n > \dim(K)$ ο $C_n(K; R)$ είναι τετριμμένος.

(ii) $C_0(K; R) := \mathbf{Fr}_R(\{\mathrm{Vert}(\mathfrak{s}) | \mathfrak{s} \in K\})$ ο ελεύθερος R-μόδιος (βλ. (A.181)) ο παραγόμενος από το σύνολο των κορυφών των μονοπλόκων τού K.

(iii) Εάν $\dim(K) \geqslant 1$, τότε για $n \geqslant 1$ θέτουμε[20]

$$\boxed{C_n(K; R) := \bigoplus \left\{ R\mathfrak{s}/R(\mathfrak{s} + \mathfrak{s}^{-1}) \middle| \, \mathfrak{s} \text{ προσανατολισμένο } n\text{-μονόπλοκο τού } K \right\},}$$

Κάθε στοιχείο τού ελεύθερου R-μοδίου $C_n(K; R)$ καλείται **μονοπλεκτική** n**-αλυσίδα τού** K **με συντελεστές ειλημμένους από τον** R (και ο ίδιος ο $C_n(K; R)$ **μόδιος των** n**-αλυσίδων τού** K **με συντελεστές από τον** R). Σημειωτέον ότι για $n \in \mathbb{N}_0$ κάθε n-αλυσίδα ανήκουσα στον $C_n(K; R)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός n-μονοπλόκων $\mathfrak{s}$ τού K υποκειμένων στη σχέση $-\mathfrak{s} = \mathfrak{s}^{-1}$. Τέλος, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον ομομορφισμό R-μοδίων

$$\boxed{d_n^{\text{simpl.}} = d_{K,n}^{\text{simpl.}} : C_n(K; R) \longrightarrow C_{n-1}(K; R)}$$

μέσω τού τύπου

$$\boxed{[\![\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n]\!] = \mathfrak{s} \longmapsto d_n^{\text{simpl.}}(\mathfrak{s}) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, [\![\mathbf{x}_0, ..., \widehat{\mathbf{x}_i}, ..., \mathbf{x}_n]\!].}$$

επί των γεννητόρων τού $C_n(K; R)$ και μέσω *γραμμικής επεκτάσεως* επί ολοκλήρου τού $C_n(K; R)$ όταν $n \geqslant 1$, ενώ θέτουμε $d_n^{\text{simpl.}} := 0$ όταν $n \leqslant 0$.

---

[19] Το σύμβολο $\widehat{\mathbf{x}_j}$ δηλοί την *παράλειψη* τού $\mathbf{x}_j$.

[20] Η σχέση "$\mathfrak{s} + \mathfrak{s}^{-1} = 0_{C_n(K;R)}$" σημαίνει ότι μονόπλοκα με διαφορετικούς προσανατολισμούς είναι *αντίθετα* εντός τής προσθετικής ομάδας τού R-μοδίου $C_n(K; R)$, ήτοι $-\mathfrak{s} = \mathfrak{s}^{-1}$. Εάν το K είναι πεπερασμένο μονοπλεκτικό σύμπλεγμα και $\alpha_n := \mathrm{card}(\{\mathfrak{s} \in K | \dim(\mathfrak{s}) = n\})$, τότε για κάθε $n \geqslant 1$ το πλήθος των προσανατολισμένων n-μονοπλόκων τού K ισούται με $2\alpha_n$.

D.1.43 Πρόταση. *Η ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}^{\text{simpl.}}} C_n(K;R) \xrightarrow{d_n^{\text{simpl.}}} C_{n-1}(K;R) \xrightarrow{d_{n-1}^{\text{simpl.}}} C_{n-2}(K;R) \xrightarrow{d_{n-2}^{\text{simpl.}}} \cdots$$

αποτελεί αλυσωτό σύμπλοκο με τους $d_n^{\text{simpl.}}$ ως συνοριακούς τελεστές του.

Απόδειξη. Προς τούτο αρκεί να δειχθεί ότι $(d_{n-1}^{\text{simpl.}} \circ d_n^{\text{simpl.}})(\mathfrak{s}) = 0_{C_{n-2}(K;R)}$ για $n \geqslant 2$ και για κάθε προσανατολισμένο n-μονόπλοκο $\mathfrak{s} = [\![\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n]\!] \in C_n(K;R)$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
(d_{n-1}^{\text{simpl.}} \circ d_n^{\text{simpl.}})(\mathfrak{s}) &= d_{n-1}^{\text{simpl.}} \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i [\![\mathbf{x}_0, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_i, \ldots, \mathbf{x}_n]\!] \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, d_{n-1}^{\text{simpl.}} \left([\![\mathbf{x}_0, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_i, \ldots, \mathbf{x}_n]\!] \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [\![\mathbf{x}_0, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_j, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_i, \ldots, \mathbf{x}_n]\!] + \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{j-1} [\![\mathbf{x}_0, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_i, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_j, \ldots, \mathbf{x}_n]\!] \right) \\
&= \sum_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (-1)^{i+j} [\![\mathbf{x}_0, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_j, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_i, \ldots, \mathbf{x}_n]\!] + \sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{i+j-1} [\![\mathbf{x}_0, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_i, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_j, \ldots, \mathbf{x}_n]\!].
\end{aligned}$$

Ύστερα από εναλλαγή των i και j στο δεύτερο άθροισμα, βλέπουμε ότι το (συνολικό) τελικό αποτέλεσμα είναι ίσο με το μηδέν. □

D.1.44 Ορισμός. Έστω $\varphi : K \longrightarrow L$ μια μονοπλεκτική απεικόνιση (υπό την έννοια τού ορισμού D.1.24) μεταξύ δυο μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$\boxed{C_n(\varphi) = C_n(\varphi;R) : C_n(K;R) \longrightarrow C_n(L;R)}$$

ως ακολούθως: (i) Για $n < 0$ και $n > \dim(K)$ θέτουμε $C_n(\varphi) := 0$.

(ii) Εάν $\dim(K) \geqslant 1$, τότε για $n \in \{1, \ldots, \dim(K)\}$ και για κάθε προσανατολισμένο n-μονόπλοκο $\mathfrak{s} = [\![\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n]\!]$ θέτουμε

$$\boxed{C_n(\varphi)(\mathfrak{s}) := \begin{cases} [\![\varphi(\mathbf{x}_0), \ldots, \varphi(\mathbf{x}_n)]\!], & \text{όταν } \varphi(\mathbf{x}_i) \neq \varphi(\mathbf{x}_j) \text{ για } i \neq j, \\ 0_{C_n(L;R)}, & \text{αλλιώς,} \end{cases}}$$

και επεκτείνουμε την $C_n(\varphi)$ *γραμμικώς* επί ολοκλήρου τού $C_n(K;R)$.

D.1.45 Λήμμα. *Εάν $\varphi : K \longrightarrow L$ μια μονοπλεκτική απεικόνιση μεταξύ δυο μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ (ως προς παγιωμένον μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R) ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{d_{L,n}^{\text{simpl.}} \circ C_n(\varphi) = C_{n-1}(\varphi) \circ d_{K,n}^{\text{simpl.}}.}$$

Απόδειξη. Είναι αρκετό να δειχθεί η ισότητα για $n \geqslant 1$ και μόνον για τα προσανατολισμένα n-μονόπλοκα $[\![\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n]\!] \in C_n(K;R)$. Εάν οι κορυφές $\varphi(\mathbf{x}_0), ..., \varphi(\mathbf{x}_n)$ είναι σαφώς διακεκριμένες ή εάν τουλάχιστον τρεις εξ αυτών ταυτίζονται, τότε η ισότητα είναι εξ ορισμού αληθής. Στην περίπτωση κατά την οποία μόνον δύο εξ αυτών ταυτίζονται, μπορούμε δίχως βλάβη τής γενικότητας (δηλαδή, εν ανάγκη, ύστερα από αναδιάταξη δεικτών) να υποθέσουμε ότι $\varphi(\mathbf{x}_0) = \varphi(\mathbf{x}_1)$. Είναι πρόδηλο ότι

$$C_n(\varphi)([\![\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n]\!]) = 0_{C_n(L;R)} \Longrightarrow d_{L,n}^{\text{simpl.}}(C_n(\varphi)([\![\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n]\!])) = 0_{C_{n-1}(L;R)}$$

και

$$d_{K,n}^{\text{simpl.}}([\![\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n]\!]) = [\![\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n]\!] - [\![\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n]\!] + \sum_{i=2}^{n} [\![\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, .., \widehat{\mathbf{x}}_i, ..., \mathbf{x}_n]\!].$$

Οι εικόνες των δύο πρώτων μονοπλόκων μέσω τού $C_{n-1}(\varphi)$ είναι ίσες, ενώ η εικόνα καθενός εκ των μονοπλόκων τού αθροίσματος μέσω τού $C_{n-1}(\varphi)$ είναι μηδέν. Συνεπώς, $C_{n-1}(\varphi)\left(d_{K,n}^{\text{simpl.}}([\![\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n]\!])\right) = 0_{C_{n-1}(L;R)}$. □

D.1.46 Λήμμα. *Έστω ότι K, L, M είναι τρία μονοπλεκτικά συμπλέγματα.*
(i) *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{C_n(\mathrm{id}_K) = \mathrm{id}_{C_n(K;R)}.}$$

(ii) *Εάν οι $\varphi : K \longrightarrow L$ και $\psi : L \longrightarrow M$ είναι δυο μονοπλεκτικές απεικονίσεις, τότε*

$$\boxed{C_n(\psi \circ \varphi) = C_n(\psi) \circ C_n(\varphi), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τον ορισμό D.1.44. □

D.1.47 Ορισμός. Έστω K' ένα υποσύμπλεγμα ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος K (υπό την έννοια τού ορισμού D.1.26). Το αλυσωτό σύμπλοκο

$$C_\bullet(K';R) = (C_n(K';R), d_n^{\text{simpl.}}\big|_{C_n(K';R)})_{n\in\mathbb{Z}}$$

είναι υποσύμπλοκο τού αλυσωτού συμπλόκου

$$C_\bullet(K;R) = (C_n(K;R), d_n^{\text{simpl.}})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Ως εκ τούτου, ορίζεται το πηλικοσύμπλοκο

$$\boxed{C_\bullet(K,K';R) = (C_n(K;R)/C_n(K';R), \overline{d}_n^{\text{simpl.}})_{n\in\mathbb{Z}},}$$

όπου ο $\overline{d}_n^{\text{simpl.}} = \overline{d}_{X,n}^{\text{simpl.}}$ είναι ο μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} C_n(K;R) \arrow[r, "d_n^{\text{simpl.}}"] \arrow[d, two heads, "\pi^{C_n(K;R)}_{C_n(K';R)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_{n-1}(K;R) \arrow[d, two heads, "\pi^{C_{n-1}(X;R)}_{C_{n-1}(K';R)}"] \\ C_n(K,K';R) \arrow[r, dashed, "\overline{d}_n^{\text{simpl.}}"'] & C_{n-1}(K,K';R) \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. (Βλ. εδ. 3.2.15.) Το εν λόγω πηλικοσύμπλοκο καλείται **(σχετικό) μονοπλεκτικό αλυσωτό σύμπλοκο τού ζεύγους** (K, K') **με συντελεστές ειλημμένους από τον** R.

D.1.48 Ορισμός. Έστω K' ένα υποσύμπλεγμα ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος K και έστω L' ένα υποσύμπλεγμα ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος L. Εάν $\varphi : K \longrightarrow L$ είναι μια μονοπλεκτική απεικόνιση με $\varphi(K') \subseteq L'$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$\boxed{\overline{C_n(\varphi)} = \overline{C_n(\varphi; R)} : C_n(K, K'; R) \longrightarrow C_n(L, L'; R)}$$

μέσω τού τύπου $\overline{C_n(\varphi)}(\mathfrak{s} + C_n(K'; R)) := \varphi(\mathfrak{s}) + C_n(L'; R)$ επί των γεννητόρων $\mathfrak{s} + C_n(K'; R)$ τού $C_n(K, K'; R)$ και μέσω *γραμμικής επεκτάσεως* επί ολοκλήρου τού $C_n(K, K'; R)$ όταν $n \geqslant 1$, ενώ θέτουμε $\overline{C_n(\varphi)} := 0$ όταν $n \leqslant 0$.

D.1.49 Λήμμα. *Έστω K' ένα υποσύμπλεγμα ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος K και έστω L' ένα υποσύμπλεγμα ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος L. Εάν υποτεθεί ότι η $\varphi : K \longrightarrow L$ είναι μια μονοπλεκτική απεικόνιση με $\varphi(K') \subseteq L'$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{\overline{d}_{Y,n}^{\text{simpl.}} \circ \overline{C_n(\varphi)} = \overline{C_{n-1}(\varphi)} \circ \overline{d}_{X,n}^{\text{simpl.}}.}$$

Αποδειξη. Παρόμοια εκείνης τού λήμματος D.1.45. □

D.1.50 Πρόταση. *Έστω ότι τα K, L είναι δυο μονοπλεκτικά συμπλέγματα και ότι η $\varphi : K \longrightarrow L$ είναι μια μονοπλεκτική απεικόνιση. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Η*

$$C_\bullet(\varphi) = C_\bullet(\varphi; R) : C_\bullet(X; R) \longrightarrow C_\bullet(Y; R)$$

αποτελεί έναν αλυσωτό μετασχηματισμό.

(ii) *Εάν K' (και αντιστοίχως, L') είναι ένα υποσύμπλεγμα τού K (και αντιστοίχως, τού L) με $\varphi(K') \subseteq L'$, τότε η*

$$\overline{C_\bullet(\varphi)} = \overline{C_\bullet(\varphi; R)} : C_\bullet(K, K'; R) \longrightarrow C_\bullet(L, L'; R)$$

αποτελεί ωσαύτως έναν αλυσωτό μετασχηματισμό.

Απόδειξη. Άμεση από τα λήμματα D.1.45 και D.1.49. □

D.1.51 Λήμμα. *Εάν τα K', L', M' είναι υποσυμπλέγματα των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων K, L, M, αντιστοίχως, τότε ισχύουν τα εξής:*
(i) *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{\overline{C_n(\mathrm{id}_{(K,K')})} = \mathrm{id}_{C_n(K,K';R)}.}$$

(ii) *Εάν $\varphi : K \longrightarrow L$ και $\psi : L \longrightarrow M$ είναι δυο μονοπλεκτικές απεικονίσεις με $\varphi(K') \subseteq L'$ και $\psi(L') \subseteq M'$, τότε*

$$\boxed{\overline{C_n(\psi \circ \varphi)} = \overline{C_n(\psi)} \circ \overline{C_n(\varphi)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Παρόμοια εκείνης τού λήμματος D.1.46. □

D.1.52 Πρόταση. (i) *Αμφότεροι οι*

$$C_n(-) : \mathfrak{SComp} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{SComp}) \ni K \longmapsto C_n(K;R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{SComp}}(K,L) \ni \varphi \longmapsto C_n(\varphi) \in \mathrm{Hom}_R(C_n(K;R), C_n(L;R)),$$

(για παγιωμένον $n \in \mathbb{Z}$) και

$$C_\bullet(-) : \mathfrak{SComp} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{SComp}) \ni K \longmapsto C_\bullet(K;R) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{SComp}}(K,L) \ni \varphi \longmapsto C_\bullet(\varphi) \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(C_\bullet(K;R), C_\bullet(L;R)),$$

είναι συναλλοίωτοι συναρτητές.
(ii) *Αμφότεροι οι*

$$C_n(-) : \mathfrak{SComp}^{[2]} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{SComp}^{[2]}) \ni (K,K') \longmapsto C_n(K,K';R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{SComp}^{[2]}}((K,K'),(L,L')) \ni \varphi \longmapsto \overline{C_n(\varphi)} \in \mathrm{Hom}_R(C_n(K,K';R), C_n(L,L';R)),$$

(για παγιωμένον $n \in \mathbb{Z}$) και

$$C_\bullet(-) : \mathfrak{SComp}^{[2]} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{SComp}^{[2]}) \ni (K,K') \longmapsto C_\bullet(K,K';R) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{SComp}^{[2]}}((K,K'),(L,L')) \ni \varphi \longmapsto \overline{C_\bullet(\varphi)} \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(C_\bullet(K,K';R), C_\bullet(L,L';R)),$$

είναι συναλλοίωτοι συναρτητές.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τα λήμματα D.1.46 και D.1.51. □

D.1.53 Παρατήρηση. Όπως έχει ήδη προαναφερθεί, οι ορισμοί D.1.42, D.1.44, D.1.47 και D.1.48, τα λήμματα D.1.45, D.1.46, D.1.49 και D.1.51, και οι προτάσεις

D.1.43, D.1.50 και D.1.52, εξακολουθούν να ισχύουν *και* για *αφηρημένα* μονοπλεκτικά συμπλέγματα, ήτοι *και* εντός των κατηγοριών $\mathfrak{SComp}^{[2]}$ και $\mathfrak{SComp}^{[2],\text{ abs.}}$.

D.1.54 Συμβολισμός. Η υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}$ (και αντιστοίχως, τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$) η έχουσα ως αντικείμενά της τους τοπολογικούς χώρους που είναι τριγωνίσιμοι (ήτοι τα τοπολογικά πολύεδρα) υπό την έννοια τού ορισμού D.1.21 (και αντιστοίχως, τα πολυεδρικά τοπολογικά ζεύγη υπό την έννοια τού ορισμού D.1.26) θα συμβολίζεται ως $\mathfrak{Top}_{\text{triang.}}$ (και αντιστοίχως, ως $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}$). Π.χ.,

$$\text{Ob}(\mathfrak{Top}_{\text{triang.}}) := \{ X \in \text{Ob}(\mathfrak{Top}) |\, \exists K \in \text{Ob}(\mathfrak{SComp}) : |K| \approx X \} .$$

Η υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}_{\text{triang.}}$ (και αντιστοίχως, τής $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}$) η έχουσα ως αντικείμενά της τους τοπολογικούς χώρους που είναι πεπερασμένως τριγωνίσιμοι (ήτοι τοπολογικά πολύτοπα) υπό την έννοια τού ορισμού D.1.21 (και αντιστοίχως, τα πολυεδρικά τοπολογικά ζεύγη τα έχοντα ως μέλη τους πεπερασμένως τριγωνίσιμους χώρους) θα συμβολίζεται ως $\mathfrak{Top}_{\text{fin.triang.}}$ (και αντιστοίχως, ως $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.triang.}}$). Κατ' αναλογίαν, ορίζονται οι κατηγορίες $\mathfrak{Top}^{\text{abs.}}_{\text{triang.}}$, $\mathfrak{Top}^{[2],\text{abs.}}_{\text{triang.}}$, $\mathfrak{Top}^{\text{abs.}}_{\text{fin.triang.}}$ και $\mathfrak{Top}^{[2],\text{abs.}}_{\text{fin.triang.}}$ των τοπολογικών χώρων (και των ζευγών τοπολογικών χώρων) που είναι τριγωνίσιμοι υπό την έννοια τού ορισμού D.1.37 (μέσω *αφηρημένων* μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων). Επειδή (λόγω των προαναφερθέντων στο εδ. D.1.36 (iv)) οι $\mathfrak{Top}_{\text{fin.triang.}}$ και $\mathfrak{Top}^{\text{abs.}}_{\text{fin.triang.}}$ (και αντιστοίχως, οι $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{fin.triang.}}$ και $\mathfrak{Top}^{[2],\text{abs.}}_{\text{fin.triang.}}$) είναι *ισοδύναμες* κατηγορίες, θα παραλείπουμε (σε αυτές τις περιπτώσεις) το "abs.".

D.1.55 Ορισμός. Έστω X ένας τριγωνίσιμος τοπολογικός χώρος (τοπολογικό πολύεδρο) και έστω $n \in \mathbb{Z}$. Εάν $h : |K| \xrightarrow{\approx} X$ είναι τυχών τριγωνισμός τού X, τότε ως **n-οστός μόδιος μονοπλεκτικής ομολογίας τού X με συντελεστές ειλημμένους από τον R** ορίζεται ο R-μόδιος[21]

$$\boxed{H^{\text{simpl.}}_n(X;R) := H_n(C_\bullet(K;R)),}$$

ήτοι ο n-οστός μόδιος ομολογίας τού $C_\bullet(K;R) = (C_n(K;R), d^{\text{simpl.}}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. (Βλ. D.1.43.) Εξ ορισμού,

$$\boxed{H^{\text{simpl.}}_n(X;R) := Z^{\text{simpl.}}_n(X;R)/B^{\text{simpl.}}_n(X;R),}$$

όπου

$$\boxed{Z^{\text{simpl.}}_n(X;R) := Z_n(C_\bullet(K;R)) = \text{Ker}(d^{\text{simpl.}}_n)}$$

ο R-μόδιος των μονοπλεκτικών n-κυκλημάτων τού X και

$$\boxed{B^{\text{simpl.}}_n(X;R) := B_n(C_\bullet(K;R)) = \text{Im}(d^{\text{simpl.}}_{n+1})}$$

ο R-μόδιος των μονοπλεκτικών n-συνόρων τού X.

[21] Ο ορισμός αυτός είναι *ανεξάρτητος τής επιλογής τού* h, διότι εάν $h_1 : |K_1| \xrightarrow{\approx} X$ και $h_2 : |K_2| \xrightarrow{\approx} X$ είναι

D.1.56 Ορισμός. Εάν $(X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}})$ και $(K,K') \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{SComp}^{[2]})$, τέτοια ώστε $|K| \approx X$ και $|K'| \approx A$, τότε για $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται κατ' αναλογίαν ο **n-οστός μόδιος μονοπλεκτικής ομολογίας τού (X,A) με συντελεστές ειλημμένους από τον R** ορίζεται ο R-μόδιος

$$\boxed{H_n^{\text{simpl.}}(X,A;R) := H_n(C_\bullet(K,K';R)),}$$

ήτοι ο n-οστός μόδιος ομολογίας τού $C_\bullet(K,K';R) = (C_n(K,K';R), \overline{d}_n^{\text{simpl.}})_{n\in\mathbb{Z}}$. Εξ ορισμού,

$$\boxed{H_n^{\text{simpl.}}(X,A;R) := Z_n^{\text{simpl.}}(X,A;R)/B_n^{\text{simpl.}}(X,A;R),}$$

όπου

$$\boxed{Z_n^{\text{simpl.}}(X,A;R) := Z_n(C_\bullet(K,K';R)) = \mathrm{Ker}(\overline{d}_n^{\text{simpl.}})}$$

ο R-μόδιος των μονοπλεκτικών n-κυκλημάτων τού (X,A) και

$$\boxed{B_n^{\text{simpl.}}(X,A;R) := B_n(C_\bullet(K,K';R)) = \mathrm{Im}(\overline{d}_{n+1}^{\text{simpl.}})}$$

ο R-μόδιος των μονοπλεκτικών n-συνόρων τού (X,A).

D.1.57 Σημείωση. Εάν $(X,A),(Y,B) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}})$ και

$$(K,K'),(L,L') \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{SComp}^{[2]}),$$

τέτοια ώστε $|K| \xrightarrow[h]{\approx} X$, $|K'| \xrightarrow[h']{\approx} A$, $|L| \xrightarrow[k]{\approx} Y$, και $|L'| \xrightarrow[k']{\approx} B$, (με $h' := h|_{|K'|}$ και $k' := k|_{|L'|}$), και εάν $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{SComp}^{[2]}}((K,K'),(L,L'))$, τότε επάγεται αφ' ενός μεν

$$|\varphi| \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}}((|K|,|K'|),(|L|,|L'|))$$

αφ' ετέρου δε μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών

$$f(|\varphi|) : (X,A) \longrightarrow (Y,B), \quad f(|\varphi|) := k \circ |\varphi| \circ h^{-1}.$$

Επιπλέον, μέσω τού αλυσωτού μετασχηματισμού

$$\overline{C_\bullet(\varphi)} : C_\bullet(K,K';R) \longrightarrow C_\bullet(L,L';R)$$

επάγεται μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων

$$\boxed{H_n^{\text{simpl.}}(f(|\varphi|)) := H_n(\overline{C_\bullet(\varphi)}) : H_n^{\text{simpl.}}(X,A;R) \longrightarrow H_n^{\text{simpl.}}(Y,B;R)}$$

δύο τριγωνισμοί τού X, τότε $H_n(C_\bullet(K_1;R)) \cong H_n(C_\bullet(K_2;R))$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. Munkres [80], Corollary 18.2, σελ. 102, ή Rotman [84], Corollary 7.23, σελ. 152. Γι' αυτό δεν ονομάζουμε αρχικώς τον $H_n(C_\bullet(K;R))$ n-οστό μόδιο "$H_n^{\text{simpl.}}(K;R)$" αλλά απευθείας "$H_n^{\text{simpl.}}(X;R)$".)

που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Z_n(C_\bullet(K,K';R)) \arrow[d, equal] & & Z_n(C_\bullet(L,L';R)) \arrow[d, equal] \\
Z_n^{\text{simpl.}}(X,A;R) \arrow[rr, "\overline{C_n(\varphi)}\big|_{Z_n^{\text{simpl.}}(X,A;R)}"] \arrow[d, "\pi^{Z_n^{\text{simpl.}}(X,A;R)}_{B_n^{\text{simpl.}}(X,A;R)}"'] & \circlearrowright & Z_n^{\text{simpl.}}(Y,B;R) \arrow[d, "\pi^{Z_n^{\text{simpl.}}(Y,B;R)}_{B_n^{\text{simpl.}}(Y,B;R)}"] \\
H_n^{\text{simpl.}}(X,A;R) \arrow[rr, dashed, "H_n^{\text{simpl.}}((f(|\varphi|)))"'] & & H_n^{\text{simpl.}}(Y,B;R)
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. πρόταση 3.2.5.)

D.1.58 Θεώρημα. *Εάν $(X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}})$ και $(K,K') \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{SComp}^{[2]})$ είναι τέτοια, ώστε $|K| \approx X$ και $|K'| \approx A$, και εάν υποτεθεί ότι οι $i : K' \hookrightarrow K$ και $j : K = (K,\varnothing) \hookrightarrow (K,K')$ είναι οι συνήθεις ενθέσεις, τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n^{\text{simpl.}}(A;R) \arrow[r, "H_n^{\text{simpl.}}(f(|i|))"] & H_n^{\text{simpl.}}(X;R) \arrow[r, "H_n^{\text{simpl.}}(f(|j|))"] & H_n^{\text{simpl.}}(X,A;R) \arrow[dll, rounded corners, "\partial_n^{\text{simpl.}}(X,A)"] \\
& H_{n-1}^{\text{simpl.}}(A;R) \arrow[r, "H_{n-1}^{\text{simpl.}}(f(|i|))"] & H_{n-1}^{\text{simpl.}}(X;R) \arrow[r, "H_{n-1}^{\text{simpl.}}(f(|j|))"] & H_{n-1}^{\text{simpl.}}(X,A;R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Αρκεί κανείς να θεωρήσει τη μακρά ακριβή ακολουθία την επαγόμενη μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας αλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow C_\bullet(K';R) \overset{C_\bullet(i)}{\hookrightarrow} C_\bullet(K;R) \overset{\overline{C_\bullet(j)}}{\twoheadrightarrow} C_\bullet(K,K';R) \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

(που κατασκευάζεται μέσω τού θεωρήματος 3.2.13) και να θέσει ως $\partial_n^{\text{simpl.}}(X,A)$ τον συνδετικό ομομορφισμό $\partial_n(C_\bullet(K,K';R))$ αυτής. □

D.1.59 Παρατήρηση. Μέσω των συναλλοίωτων συναρτητών

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{SComp}^{[2]} \arrow[r, squiggly, "C_\bullet(-)"] \arrow[d, squiggly, "|\ |"'] & \mathrm{Comp}^{\text{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[r, squiggly, "H_n(-)"] & \mathfrak{Mod}_R \\
\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}} \arrow[urr, squiggly, "H_n^{\text{simpl.}}(-)"] & &
\end{tikzcd}$$

κατασκευάζεται ο συναλλοίωτος συναρτητής[22]

$$H_\bullet^{\text{simpl.}} : \mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\text{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}) \ni (X,A) \longmapsto H_\bullet^{\text{simpl.}}(X,A;R) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\text{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}}((X,A),(Y,B)) \ni f \longmapsto H_\bullet^{\text{sing.}}(f(|\varphi|)) \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\text{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(H_\bullet^{\text{sing.}}(X,A;R), H_\bullet^{\text{sing.}}(Y,B;R)),$$

[22]Φυσικά, το ίδιο εξακολουθεί να ισχύει όταν κανείς αντικαταστήσει την $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}$ με την $\mathfrak{Top}^{[2],\text{abs.}}_{\text{triang.}}$.

όπου $f(|\varphi|)$ όπως ορίσθηκε στο εδ. D.1.57.

D.1.60 Πρόταση. *Έστω $\mathfrak{J} : \mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}} \rightsquigarrow \mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}$ ο συναρτητής που αντιστοιχεί σε κάθε $(X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}})$ τον $A = (A, \varnothing)$ (με προφανή απεικόνιση μορφισμών). Τότε μέσω των συνδετικών ομομορφισμών $\partial_n^{\text{simpl.}}(X,A)$ τής μακράς ακριβούς ακολουθίας τής κατασκευασθείσας στο θεώρημα D.1.58 ορίζεται ένας φυσικός μετασχηματισμός*

$$\boxed{\partial_\bullet^{\text{simpl.}} : H_\bullet^{\text{simpl.}} \longrightarrow H_{\bullet-1}^{\text{simpl.}} \circ \mathfrak{J}}$$

(όπου ο $H_{\bullet-1}^{\text{simpl.}}$ προκύπτει από τον $H_\bullet^{\text{simpl.}}$ ύστερα από μείωση δεικτών κατά ένα).

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την πρόταση 3.2.17. □

D.1.61 Θεώρημα («Θεώρημα εγκαθιδρύσεως θεωρίας ομολογίας I»). *Το ζεύγος $(H_\bullet^{\text{simpl.}}, \partial_\bullet^{\text{simpl.}})$ αποτελεί μια R-θεωρία ομολογίας (υπό την έννοια τού ορισμού C.1.6) επί τής κατηγορίας $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}$ (και επί τής κατηγορίας $\mathfrak{Top}^{[2],\text{abs.}}_{\text{triang.}}$) και $H_0^{\text{simpl.}}(\{\text{pt}\}; R) \cong R$, ονομάζεται δε **μονοπλεκτική θεωρία ομολογίας**.*

Απόδειξη. Βλ. Munkres [80], Chapter 3, Theorem 27.1, σελ. 151-153. □

▸ **Μειονεκτήματα τής μονοπλεκτικής θεωρίας ομολογίας.** Τα κυριότερα εξ αυτών είναι τα ακόλουθα:

(i) Υπάρχουν τοπολογικοί χώροι (και μάλιστα, ανήκοντες *και* στην οικογένεια *των τοπολογικών πολυπτυγμάτων*, βλ. E.1.7 (ii)) *που δεν είναι* τριγωνίσιμοι: Επί παραδείγματι, ο A. Casson απέδειξε (περί το 1985) ότι υπάρχουν τετραδιάστατα τοπολογικά πολυπτύγματα (όπως, π.χ., το λεγόμενο «E_8-πολύπτυγμα» τού Freedman) που δεν είναι τριγωνίσιμα[23]. Πιο πρόσφατα, ο C. Manolescu απέδειξε ότι για κάθε $d \geqslant 5$ υφίσταται κάποιο d-διάστατο κλειστό τοπολογικό πολύπτυγμα το οποίο δεν είναι τριγωνίσιμο[24].

(ii) Η θεώρηση *μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων* αποσκοπούσε (ήδη από τις απαρχές τής Analysis Situs[25]) στην αναγωγή τής μελέτης *τοπολογικών* προβλημάτων στη μελέτη *συνδυαστικών* προβλημάτων. Τούτο όμως, όπως ανεφάνη, είναι εφικτό μόνον σε *πολύ ειδικές περιπτώσεις*, καθώς μια σειρά εικασιών (με την πάροδο *πολλών* ετών) «κατερρίφθησαν» στη γενικότητά τους. Η γνωστότερη εξ αυτών ήταν η Hauptvermutung[26] (η οποία απεδείχθη το 1961 ότι ήταν εσφαλμένη μέσω κατασκευής ειδικού αντιπαραδείγματος εκ μέρους τού J. Milnor[27]).

[23] Για μια απλούστερη απόδειξη, βλ. N. Saveliev: *Lectures on the Topology of 3-Manifolds*, second edition, de Gruyter, 2012, Theorem 18.3, σελ. 182.

[24] C. Manolescu: *Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture*, Journal of the American Mathematical Society **29** (2016), 147-176. [Βλ., ιδιαιτέρως, Corollary 1.3., σελ. 148.]

[25] Προπομπός τής σύγχρονης Αλγεβρικής Τοπολογίας κατά τον 19ο αιώνα.

[26] Hauptvermutung, ήτοι κύρια εικασία τής Συνδυαστικής Τοπολογίας: *Έστω ότι X, Y είναι δυο τριγωνίσιμοι τοπολογικοί χώροι με $X \approx |\mathscr{K}|$ και $Y \approx |\mathscr{L}|$. Εάν υφίσταται ομοιομορφισμός $|\mathscr{K}| \xrightarrow{\approx} |\mathscr{L}|$, τότε τα $\mathscr{K}$ και $\mathscr{L}$ είναι συνδυαστικώς ισοδύναμα.*

[27] Βλ. J. Milnor: *Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct*, Annals of Mathematics (2) **74** (1961), 575-590.

(iii) Ο υπολογισμός των ομάδων μονοπλεκτικής ομολογίας $H_j^{\text{simpl.}}(X;\mathbb{Z})$ ενός πεπερασμένως τριγωνίσιμου τοπολογικού χώρου X ανάγεται σε έναν αλγόριθμο που αποτελεί ελαφρά τροποποίηση τού τρόπου προσδιορισμού τής διευθετημένης μορφής τού Smith (Smith normal form). (Βλ. Munkres [80], Chapter 1, §11, σελ. 53-61, για μια λεπτομερή περιγραφή του.) Όσο μεγαλύτερες γίνονται οι βαθμίδες των $C_j(X;\mathbb{Z})$, τόσο μεγαλύτερων μεγεθών πίνακες εμφανίζονται και τόσο πιο δυσχερής καθίσταται, ως εκ τούτου, η υπολογισιμότητα των $H_j^{\text{simpl.}}(X;\mathbb{Z})$. Και εδώ έγκειται το πρόβλημα: Κατά κανόνα, οι τριγωνισμοί, όσο «κομψά» και αν επιλεγούν, διαθέτουν *πολλά μονόπλοκα*. Γι' αυτόν τον λόγο, εάν κριθεί αναγκαία η κατάτμηση δοθέντος τοπολογικού χώρου X, προτιμάται (αντί τής θεωρήσεως κάποιου τριγωνισμού $|K| \xrightarrow{\approx} X$) η χρήση μιας διασπάσεως $\mathfrak{X}$ σε κύτταρα. (Βλ. §D.3.) Ας δώσουμε στο σημείο αυτό κάποια απλά παραδείγματα κατατμήσεως συμπαγών επιφανειών X συγκρίνοντας τα δεδομένα: αφ' ενός μεν ενός *ελαχιστικού* τριγωνισμού $|K| \xrightarrow{\approx} X$ (βλ. D.1.23), αφ' ετέρου δε μιας (κατάλληλης, γνωστής) κυτταρικής διασπάσεως $\mathfrak{X}$. Θέτουμε

$$a_j := \text{card}(\{j\text{-μονόπλοκα τού } K\}),\ \ j \in \{0,1,2\},$$

$$c_j := \text{card}(\{j\text{-κύτταρα τού } \mathfrak{X}\}),\ \ j \in \{0,1,2\},$$

και (λαμβάνοντας υπ' όψιν τα προαναφερθέντα στα εδάφια D.1.23 και D.1.28) δημιουργούμε για αυτά δύο[28] καταλόγους[29]:

X	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$	Φιάλη τού Klein
α_0	4	7	6	8
α_1	6	21	15	24
α_2	4	14	10	16

X	$\mathbb{S}^2$	$\mathbb{T}^2$	$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$	Φιάλη τού Klein
c_0	1	1	1	1
c_1	0	2	1	2
c_2	1	1	1	1

Το συμπέρασμα είναι πρόδηλο. Στη σελ. 119 τού [61] ο A. Dold γράφει τα ακόλουθα: «Η μονοπλεκτική ομολογία είναι πιο κοντά στη διαίσθηση από τις άλλες: οι μονοπλεκτικές αλυσίδες μπορούν να θεωρηθούν ως (ευμεγέθη) κομμάτια τού χώρου (μετρούμενα ενδεχομένως και με πολλαπλές εμφανίσεις) και τα κυκλήματα ως κομμάτια χωρίς σύνορα. Ωστόσο, για μια πραγματική υπολογιστική διαδικασία, οι κυτταρικές διασπάσεις (ή άλλα μέσα) είναι καταλληλότερες: Ένας τριγωνισμός παραείναι πλούσιος ως δομή (για τον σκοπό αυτό), πέραν τού ότι είναι και δύσκολα κατασκευάσιμος. Το να προσπαθεί κανείς να υπολογίσει ομάδες ομολογίας μέσω μονοπλεκτικών αλυσίδων είναι σαν να προσπαθεί να υπολογίσει ολοκληρώματα $\int_a^b f(x)dx$ χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις [τού εμβαδού που περικλείεται από το γράφημα τής f] μέσω αθροισμάτων Riemann.»

▸ **Μονοπλεκτική θεωρία συνομολογίας**. Αυτή δομείται *δυϊκώς*.

D.1.62 Ορισμός. Έστω X ένας τριγωνίσιμος τοπολογικός χώρος (τοπολογικό πολύεδρο) και έστω $n \in \mathbb{Z}$. Εάν $h : |K| \xrightarrow{\approx} X$ είναι τυχών τριγωνισμός τού X, τότε ως n-**οστός μόδιος μονοπλεκτικής συνομολογίας τού** X **με συντελεστές**

[28] Για τη φιάλη τού Klein χρησιμοποιήθηκε (στον 1ο κατάλογο) η εργασία τού D.P. Cervone: *Vertex-minimal simplicial immersions of the Klein bottle in three space*, Geometriae Dedicata **50** (1994), 117-141.

[29] Σημειωτέον ότι $\chi(X) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = c_0 - c_1 + c_2$.

ειλημμένους από τον R ορίζεται ο R-μόδιος

$$\boxed{H^n_{\text{simpl.}}(X;R) := H^n(C^\bullet(K;R)),}$$

ήτοι ο n-οστός μόδιος συνομολογίας τού συναλυσωτού συμπλόκου

$$C^\bullet(K;R) = (C^n(K;R), d^n_{\text{simpl.}})_{n\in\mathbb{Z}},$$

όπου $C^n(K;R) := \mathrm{Hom}_R(C_n(K;R),R)$ και

$$d^n_{\text{simpl.}} := \mathrm{Hom}_R(d^{\text{simpl.}}_{n+1}, \mathrm{id}_R) : C^n(K;R) \longrightarrow C^{n+1}(K;R).$$

D.1.63 Ορισμός. Εάν $(X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}})$ και $(K,K') \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{SComp}^{[2]})$, τέτοια ώστε $|K| \approx X$ και $|K'| \approx A$, τότε για $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται κατ' αναλογίαν ο n-**οστός μόδιος μονοπλεκτικής συνομολογίας τού** (X,A) **με συντελεστές ειλημμένους από τον** R ως ο R-μόδιος

$$\boxed{H^n_{\text{simpl.}}(X,A;R) := H^n(C^\bullet(K,K';R)),}$$

ήτοι ως ο n-οστός μόδιος συνομολογίας τού συναλυσωτού συμπλόκου

$$C^\bullet(K,K';R) = (C^n(K,K';R), \overline{d}^n_{\text{simpl.}})_{n\in\mathbb{Z}},$$

όπου $C^n(K,K';R) := \mathrm{Hom}_R(C_n(K,K';R),R)$ και

$$\overline{d}^n_{\text{simpl.}} := \mathrm{Hom}_R(\overline{d}^{\text{simpl.}}_{n+1}, \mathrm{id}_R) : C^n(K,K';R) \longrightarrow C^{n+1}(K,K';R).$$

Κάνοντας χρήση τού θεωρήματος 3.2.30, θέτοντας

$$\partial^n_{\text{simpl.}}(X,A) := \partial^n(C^\bullet(K,K';R))$$

και μεταβαίνοντας στον αντίστοιχο *ανταλλοίωτο* συναρτητή

$$\boxed{H^\bullet_{\text{simpl.}} : \mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\text{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)}$$

και στον *φυσικό μετασχηματισμό*

$$\boxed{\partial^\bullet_{\text{simpl.}} : H^\bullet_{\text{simpl.}} \circ \mathfrak{J} \rightsquigarrow H^{\bullet+1}_{\text{simpl.}},}$$

καταλήγει κανείς στο ακόλουθο ανάλογο τού θεωρήματος D.1.61:

D.1.64 Θεώρημα («Θεώρημα εγκαθιδρύσεως θεωρίας συνομολογίας Ι»). *Το ζεύγος $(H^\bullet_{\text{simpl.}}, \partial^\bullet_{\text{simpl.}})$ αποτελεί μια R-θεωρία συνομολογίας (υπό την έννοια τού ορισμού C.7.1) επί τής κατηγορίας $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}$ (και επί τής κατηγορίας $\mathfrak{Top}^{[2],\text{abs.}}_{\text{triang.}}$) και $H^0_{\text{simpl.}}(\{\mathrm{pt}\};R) \cong R$, ονομάζεται δε **μονοπλεκτική θεωρία συνομολογίας**.*

Απόδειξη. Βλ. Munkres [80], Chapter 5, §44, σελ. 267-268. □

D.2 ΙΔΙΑΖΟΥΣΑ ΘΕΩΡΙΑ (ΣΥΝ)ΟΜΟΛΟΓΙΑΣ

Εντός τού πλαισίου τής *ιδιάζουσας θεωρίας ομολογίας*[30] σε κάθε τοπολογικό ζεύγος αντιστοιχίζεται ένα ειδικό *αλυσωτό σύμπλοκο*, στον ορισμό τού οποίου υπεισέρχονται κατά τρόπο ουσιαστικό οι γεωμετρικές ιδιότητες των *θεμελιακών μονοπλόκων*.

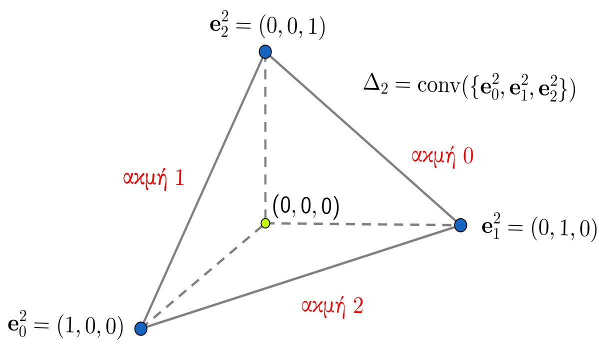
D.2.1 Ορισμός. Έστω $q \in \mathbb{N}_0$. Εντός τού $\mathbb{R}^{q+1}$ ορίζουμε τα διανύσματα

$$\mathbf{e}_0^q := (1,0,...,0), \mathbf{e}_1^q := (0,1,0,...,0), ..., \mathbf{e}_q^q := (0,0,...,0,1)$$

και ονομάζουμε το

$$\boxed{\Delta_q := \operatorname{conv}(\{\mathbf{e}_0^q, \mathbf{e}_1^q, ..., \mathbf{e}_q^q\}) = \left\{ \sum_{j=0}^{q} t_j \mathbf{e}_j^q \;\middle|\; \sum_{j=0}^{q} t_j = 1,\ t_0, .., t_q \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \right\}}$$

θεμελιακό q-μονόπλοκο. Για οιονδήποτε δείκτη $i \in \{0, ..., q\}$ το υποσύνολο[31] $\operatorname{conv}(\{\mathbf{e}_0^q, \mathbf{e}_1^q, ..., \widehat{\mathbf{e}_i^q}, ..., \mathbf{e}_q^q\})$ τού Δ_q είναι **η i-οστή του έδρα** (ήτοι η έδρα η αντικείμενη τής κορυφής $\mathbf{e}_i^q$). Βλ. κάτωθι σχήμα (για το Δ_2 στην περίπτωση όπου $q = 2$, και όπου έδρες του είναι οι *ακμές του* [οι πλευρές τού τριγώνου]).



D.2.2 Ορισμός. Έστω $q \in \mathbb{N}$. Για κάθε $j \in \{0,1,...,q\}$ ορίζουμε τις απεικονίσεις $\delta_q^j : \Delta_{q-1} \longrightarrow \Delta_q$ μέσω τού τύπου

$$\delta_q^j(x_0, x_1, ..., x_{q-1}) := \begin{cases} (0, x_0, x_1, ..., x_{q-1}), & \text{όταν } j = 0, \\ (x_0, ..., x_{j-1}, 0, x_j, ..., x_{q-1}), & \text{όταν } j \in \{1, ..., q-1\}, \\ (x_0, x_1, ..., x_{q-1}, 0), & \text{όταν } j = q. \end{cases}$$

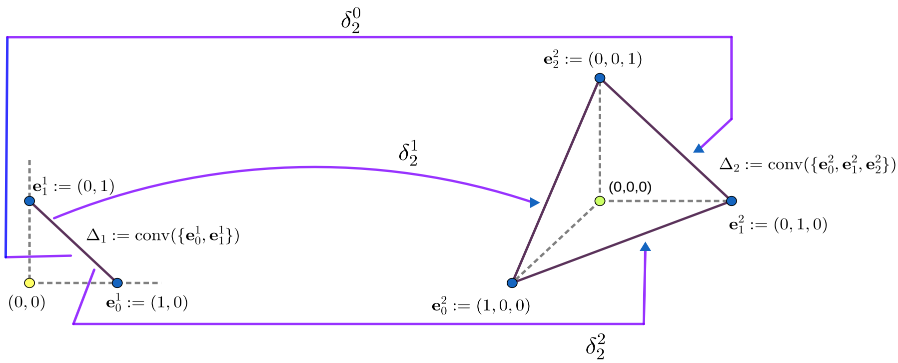
[30]Ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας πρωτοορίσθηκαν το 1933 από τον Lefschetz. Ωστόσο, οι ορισμοί του παρουσίαζαν κάποια σοβαρά προβλήματα συμβατότητας. Αυτά επιδιορθώθηκαν καταλλήλως στο άρθρο τού S. Eilenberg: *Singular Homology Theory*, Annals of Mathematics **45** (1944), no. 3, 407-447.

[31]Το σύμβολο $\widehat{\mathbf{e}_i^q}$ δηλοί την *παράλειψη* τού $\mathbf{e}_i^q$.

Σημειωτέον ότι για κάθε ζεύγος $(i,j) \in \{0,1,...,q-1\} \times \{0,1,...,q\}$,

$$\delta_q^j(\mathbf{e}_i^{q-1}) = \begin{cases} \mathbf{e}_i^q, & \text{όταν } i \in \{0,...,j-1\}, \\ \mathbf{e}_{i+1}^q, & \text{όταν } i \in \{j,...,q-1\}, \end{cases}$$

και ότι η εικόνα $\mathrm{Im}(\delta_q^j)$ είναι η j-οστή έδρα τού θεμελιακού q-μονοπλόκου Δ_q.



D.2.3 Λήμμα. *Για $0 \leqslant k < j \leqslant q+1$ ισχύει η ακόλουθη ισότητα*:

$$\delta_{q+1}^j \circ \delta_q^k = \delta_{q+1}^k \circ \delta_q^{j-1}.$$

Αποδειξη. Προφανής, αφού για κάθε $\mathbf{e}_i^{q-1}$, $i \in \{0,1,...,q-1\}$ έχουμε

$$\mathbf{e}_i^{q-1} \overset{\delta_q^k}{\longmapsto} \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{e}_i^q, & \text{όταν } 0 \leqslant i < k \\ \mathbf{e}_{i+1}^q, & \text{όταν } k \leqslant i \leqslant q-1 \end{array} \right\} \overset{\delta_{q+1}^j}{\longmapsto} \begin{cases} \mathbf{e}_i^{q+1}, & \text{όταν } 0 \leqslant i < k, \\ \mathbf{e}_{i+1}^{q+1}, & \text{όταν } k \leqslant i < j-1, \\ \mathbf{e}_{i+2}^{q+1}, & \text{όταν } j-1 \leqslant i \leqslant q-1, \end{cases}$$

και

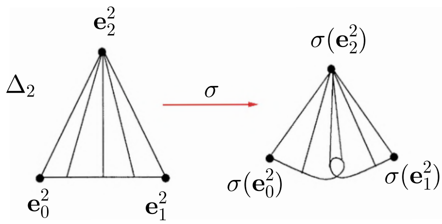
$$\mathbf{e}_i^{q-1} \overset{\delta_q^{j-1}}{\longmapsto} \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{e}_i^q, & \text{όταν } 0 \leqslant i < j-1 \\ \mathbf{e}_{i+1}^q, & \text{όταν } j-1 \leqslant i \leqslant q-1 \end{array} \right\} \overset{\delta_{q+1}^k}{\longmapsto} \begin{cases} \mathbf{e}_i^{q+1}, & \text{όταν } 0 \leqslant i < k, \\ \mathbf{e}_{i+1}^{q+1}, & \text{όταν } k \leqslant i < j-1, \\ \mathbf{e}_{i+2}^{q+1}, & \text{όταν } j-1 \leqslant i \leqslant q-1, \end{cases}$$

οπότε

$$\begin{aligned} (\delta_{q+1}^j \circ \delta_q^k)(x_0,x_1,...,x_{q-1}) &= (\delta_{q+1}^j \circ \delta_q^k)\left(\sum_{i=0}^{q-1} x_i \mathbf{e}_i^{q-1}\right) \\ &= \delta_{q+1}^j \left(\sum_{i=0}^{j-2} x_i \mathbf{e}_i^q + \sum_{i=j-1}^{q-1} x_i \mathbf{e}_{i+1}^q\right) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i \mathbf{e}_i^{q+1} + \sum_{i=k}^{j-2} x_i \mathbf{e}_{i+1}^{q+1} + \sum_{i=j-1}^{q-1} x_i \mathbf{e}_{i+2}^{q+1} \\ &= \delta_{q+1}^k \left(\sum_{i=0}^{j-2} x_i \mathbf{e}_i^q + \sum_{i=j-1}^{q-1} x_i \mathbf{e}_{i+1}^q\right) = (\delta_{q+1}^k \circ \delta_q^{j-1})\left(\sum_{i=0}^{q-1} x_i \mathbf{e}_i^{q-1}\right) \\ &= (\delta_{q+1}^k \circ \delta_q^{j-1})(x_0,x_1,...,x_{q-1}), \end{aligned}$$

για κάθε $(x_0, x_1, ..., x_{q-1}) \in \Delta_{q-1}$. □

D.2.4 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και έστω $n \in \mathbb{N}_0$. Κάθε συνεχής απεικόνιση $\sigma : \Delta_n \longrightarrow X$ καλείται **ιδιάζον** n-**μονόπλοκο εντός τού** X. (Βλ. επόμενο σχήμα[32] για $n = 2$.)



D.2.5 Ορισμός. Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος και έστω X τυχών τοπολογικός χώρος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ θέτουμε

$$\mathfrak{V}_n(X) := \{\sigma : \Delta_n \longrightarrow X \,|\, \sigma \text{ ιδιάζον } n\text{-μονόπλοκο εντός τού } X\}$$

και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον R-μόδιο

$$\boxed{S_n(X;R) := \begin{cases} \mathbf{Fr}_R(\mathfrak{V}_n(X)), & \text{όταν } n \in \mathbb{N}_0, \\ \text{τετριμμένος μόδιος}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \mathbb{N}_0, \end{cases}}$$

όπου $\mathbf{Fr}_R(\mathfrak{V}_n(X))$ είναι ο ελεύθερος R-μόδιος ο παραγόμενος από τα στοιχεία τού συνόλου $\mathfrak{V}_n(X)$. (Βλ. (A.181).) Κάθε στοιχείο τού $S_n(X;R)$ καλείται n-**αλυσίδα εντός τού** X **με συντελεστές ειλημμένους από τον** R (και ο ίδιος ο $S_n(X;R)$ **μόδιος των** n-**αλυσίδων εντός τού** X **με συντελεστές ειλημμένους από τον** R). Σημειωτέον ότι για $n \in \mathbb{N}_0$ κάθε n-αλυσίδα $s \in S_n(X;R)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τού $\mathfrak{V}_n(X)$. (Βλ. θεώρημα 2.5.9.) Τέλος, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον ομομορφισμό R-μοδίων

$$\boxed{d_n^{\text{sing.}} = d_{X,n}^{\text{sing.}} : S_n(X;R) \longrightarrow S_{n-1}(X;R)}$$

μέσω τού τύπου

$$\boxed{\mathfrak{V}_n(X) \ni \sigma \longmapsto d_n^{\text{sing.}}(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ \delta_n^i)}$$

[32] Η συνέχεια είναι μια σχετικώς ασθενής συνθήκη, η οποία *δεν αποκλείει* την ύπαρξη *αυτοδιατομών* και άλλων *ιδιαζόντων* σημείων εντός τής $\mathrm{Im}(\sigma)$.

$$\begin{tikzcd} & \Delta_q \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ \Delta_{q-1} \arrow[ur, "\delta_n^i"] \arrow[rr, dashed, "\sigma\circ\delta_n^i"'] & & X \end{tikzcd}$$

επί των γεννητόρων $\sigma \in \mathfrak{V}_n(X)$ τού $S_n(X;R)$ και μέσω *γραμμικής επεκτάσεως* επί ολοκλήρου τού $S_n(X;R)$ όταν $n \geqslant 1$, ενώ θέτουμε $d_n^{\text{sing.}} := 0$ όταν $n \leqslant 0$.

D.2.6 Πρόταση. *Η ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}^{\text{sing.}}} S_n(X;R) \xrightarrow{d_n^{\text{sing.}}} S_{n-1}(X;R) \xrightarrow{d_{n-1}^{\text{sing.}}} S_{n-2}(X;R) \xrightarrow{d_{n-2}^{\text{sing.}}} \cdots$$

αποτελεί αλυσωτό σύμπλοκο με τους $d_n^{\text{sing.}}$ ως συνοριακούς τελεστές του.

Απόδειξη. Προς τούτο αρκεί να δειχθεί ότι $\left.(d_{n-1}^{\text{sing.}} \circ d_n^{\text{sing.}})\right|_{\mathfrak{V}_n(X)} = 0$ για κάθε ακέραιο αριθμό $n \geqslant 1$. Για οιοδήποτε $\sigma \in \mathfrak{V}_n(X)$, όπου $n \geqslant 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} d_{n-1}^{\text{sing.}}(d_n^{\text{sing.}}(\sigma)) &= d_{n-1}^{\text{sing.}}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\sigma\circ\delta_n^i)\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{i+j}(\sigma\circ\delta_n^i\circ\delta_{n-1}^j) \\ &= \sum_{0\leqslant j<i\leqslant q}(-1)^{i+j}(\sigma\circ\delta_n^i\circ\delta_{n-1}^j) + \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant q-1}(-1)^{i+j}(\sigma\circ\delta_n^i\circ\delta_{n-1}^j) \\ &= \sum_{0\leqslant j<i\leqslant q}(-1)^{i+j}(\sigma\circ\delta_n^j\circ\delta_{n-1}^{i-1}) + \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant q-1}(-1)^{i+j}(\sigma\circ\delta_n^i\circ\delta_{n-1}^j) \\ &= -\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant q-1}(-1)^{i+j}(\sigma\circ\delta_n^i\circ\delta_{n-1}^j) + \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant q-1}(-1)^{i+j}(\sigma\circ\delta_n^i\circ\delta_{n-1}^j) = 0, \end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα προκύπτει ύστερα από εφαρμογή τού λήμματος D.2.3 για το πρώτο άθροισμα (με $k = j$, το i αντί τού j και τον n αντί τού q) και η πέμπτη ισότητα ύστερα από αντικατάσταση (στο πρώτο άθροισμα) τού j με το i και τού i με το $j+1$. □

D.2.7 Ορισμός. Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X και Y και $n \in \mathbb{Z}$, τότε ορίζουμε έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$\boxed{S_n(f) = S_n(f;R) : S_n(X;R) \longrightarrow S_n(Y;R)}$$

μέσω τού τύπου

$$\boxed{\mathfrak{V}_n(X) \ni \sigma \longmapsto S_n(f)(\sigma) := f\circ\sigma}$$

επί των γεννητόρων $\sigma \in \mathfrak{V}_n(X)$ τού $S_n(X;R)$ και μέσω *γραμμικής επεκτάσεως* επί ολοκλήρου τού $S_n(X;R)$ όταν $n \geqslant 1$, ενώ θέτουμε $S_n(f) := 0$ όταν $n \leqslant 0$.

D.2.8 Λήμμα. *Εάν $f : X \longrightarrow Y$ είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων X και Y, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ (ως προς παγιωμένον μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R) ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{d^{\text{sing.}}_{Y,n} \circ S_n(f) = S_{n-1}(f) \circ d^{\text{sing.}}_{X,n}.}$$

Απόδειξη. Είναι αρκετό να δειχθεί η ισότητα για $n \geqslant 1$ και για τα στοιχεία τού $\mathfrak{B}_n(X)$. Προφανώς,

$$\begin{aligned} d^{\text{sing.}}_{Y,n}(S_n(f)(\sigma)) &= d^{\text{sing.}}_{Y,n}(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f \circ \sigma \circ \delta^i_n) \\ &= f \circ \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ \delta^i_n) \right) = S_{n-1}(f) \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\sigma \circ \delta^i_n) \right) \\ &= S_{n-1}(f)(d^{\text{sing.}}_{X,n}(\sigma)) \end{aligned}$$

για κάθε $\sigma \in \mathfrak{B}_n(X)$. □

D.2.9 Λήμμα. *Έστω ότι X, Y, W είναι τρεις τοπολογικοί χώροι.*
(i) *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{S_n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{S_n(X;R)}.}$$

(ii) *Εάν οι $f : X \longrightarrow Y$ και $g : Y \longrightarrow W$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις, τότε*

$$\boxed{S_n(g \circ f) = S_n(g) \circ S_n(f), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. (i) Για κάθε $n \geqslant 0$ και για κάθε $\sigma \in \mathfrak{B}_n(X)$ έχουμε

$$[S_n(\mathrm{id}_X)(\sigma) = \mathrm{id}_X \circ \sigma = \sigma = \mathrm{id}_{S_n(X;R)}] \Longrightarrow S_n(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{S_n(X;R)}.$$

(ii) Για κάθε $n \geqslant 0$ και για κάθε $\sigma \in \mathfrak{B}_n(X)$ έχουμε

$$S_n(g \circ f)(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g \circ S_n(f)(\sigma) = (S_n(g) \circ S_n(f))(\sigma),$$

οπότε $S_n(g \circ f) = S_n(g) \circ S_n(f)$. □

D.2.10 Ορισμός. Έστω (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος (υπό την έννοια τού ορισμού B.7.1). Τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\mathfrak{B}_n(A) \subseteq \mathfrak{B}_n(X) \Longrightarrow S_n(A; R) \subseteq S_n(X; R),$$

οπότε το αλυσωτό σύμπλοκο $S_\bullet(A; R) = (S_n(A; R), d^{\text{sing.}}_n\big|_{S_n(A;R)})_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι υποσύμπλοκο τού αλυσωτού συμπλόκου $S_\bullet(X; R) = (S_n(X; R), d^{\text{sing.}}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ως εκ τούτου, ορίζεται το πηλικοσύμπλοκο

$$\boxed{S_\bullet(X,A;R) = (S_n(X;R)/S_n(A;R), \overline{d}_n^{\text{sing.}})_{n\in\mathbb{Z}},}$$

όπου ο $\overline{d}_n^{\text{sing.}} = \overline{d}_{X,n}^{\text{sing.}}$ είναι ο μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} S_n(X;R) \arrow[r, "d_n^{\text{sing.}}"] \arrow[d, two heads, "\pi^{S_n(X;R)}_{S_n(A;R)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S_{n-1}(X;R) \arrow[d, two heads, "\pi^{S_{n-1}(X;R)}_{S_{n-1}(A;R)}"] \\ S_n(X,A;R) \arrow[r, dashed, "\overline{d}_n^{\text{sing.}}"'] & S_{n-1}(X,A;R) \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. (Βλ. εδ. 3.2.15.) Το εν λόγω πηλικοσύμπλοκο καλείται **(σχετικό) ιδιάζον αλυσωτό σύμπλοκο τού τοπολογικού ζεύγους** (X,A) **με συντελεστές ειλημμένους από τον** R.

D.2.11 Ορισμός. Εάν $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ είναι μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών (υπό την έννοια τού ορισμού B.7.2) και $n\in\mathbb{Z}$, τότε ορίζουμε έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$\boxed{\overline{S_n(f)} = \overline{S_n(f;R)} : S_n(X,A;R) \longrightarrow S_n(Y,B;R)}$$

μέσω τού τύπου

$$\boxed{\overline{S_n(f)}(\sigma + S_n(A;R)) := (f\circ\sigma) + S_n(B;R)}$$

επί των γεννητόρων $\{\sigma + S_n(A;R) \,|\, \sigma\in\mathfrak{V}_n(X)\}$ τού $S_n(X,A;R)$ και μέσω *γραμμικής επεκτάσεως* επί ολοκλήρου τού $S_n(X,A;R)$ όταν $n\geqslant 1$, ενώ θέτουμε $\overline{S_n(f)} := 0$ όταν $n\leqslant 0$.

D.2.12 Λήμμα. *Εάν $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$ είναι μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών, τότε για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{\overline{d}_{Y,n}^{\text{sing.}} \circ \overline{S_n(f)} = \overline{S_{n-1}(f)} \circ \overline{d}_{X,n}^{\text{sing.}}.}$$

Αποδειξη. Παρόμοια εκείνης τού λήμματος D.2.8. □

D.2.13 Πρόταση. *Εάν $f:X\longrightarrow Y$ (και αντιστοίχως, $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$) είναι μια συνεχής απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών χώρων (και αντιστοίχως, μεταξύ τοπολογικών ζευγών), τότε η*

$$S_\bullet(f) = S_\bullet(f;R) : S_\bullet(X;R) \longrightarrow S_\bullet(Y;R)$$

(και αντιστοίχως, η

$$\overline{S_\bullet(f)} = \overline{S_\bullet(f;R)} : S_\bullet(X,A;R) \longrightarrow S_\bullet(Y,B;R))$$

αποτελεί αλυσωτό μετασχηματισμό.

Απόδειξη. Άμεση από τα λήμματα D.2.8 και D.2.12. □

D.2.14 Λήμμα. *Έστω ότι τα $(X,A),(Y,B),(W,C)$ είναι τρία τοπολογικά ζεύγη.*
(i) *Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{\overline{S_n(\mathrm{id}_{(X,A)})} = \mathrm{id}_{S_n(X,A;R)}.}$$

(ii) *Εάν οι $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ και $g : (Y,B) \longrightarrow (W,C)$ είναι δυο συνεχείς απεικονίσεις τοπολογικών ζευγών, τότε*

$$\boxed{\overline{S_n(g\circ f)} = \overline{S_n(g)} \circ \overline{S_n(f)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Παρόμοια εκείνης τού λήμματος D.2.9. □

D.2.15 Πρόταση. (i) *Αμφότεροι οι*

$$\begin{gathered} S_n(-) : \mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R, \\ \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}) \ni X \longmapsto S_n(X;R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R), \\ \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X,Y) \ni f \longmapsto S_n(f) \in \mathrm{Hom}_R(S_n(X;R), S_n(Y;R)), \end{gathered}$$

(για παγιωμένον $n \in \mathbb{Z}$) και

$$\begin{gathered} S_\bullet(-) : \mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R), \\ \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}) \ni X \longmapsto S_\bullet(X;R) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)), \\ \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X,Y) \ni f \longmapsto S_\bullet(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(S_\bullet(X;R), S_\bullet(Y;R)), \end{gathered}$$

είναι συναλλοίωτοι συναρτητές.
(ii) *Αμφότεροι οι*

$$\begin{gathered} S_n(-) : \mathfrak{Top}^{[2]} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R, \\ \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}^{[2]}) \ni (X,A) \longmapsto S_n(X,A;R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R), \\ \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}^{[2]}}((X,A),(Y,B)) \ni f \longmapsto \overline{S_n(f)} \in \mathrm{Hom}_R(S_n(X,A;R), S_n(Y,B;R)), \end{gathered}$$

(για παγιωμένον $n \in \mathbb{Z}$) και

$$S_\bullet(-) : \mathfrak{Top}^{[2]} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$
$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}^{[2]}) \ni (X, A) \longmapsto S_\bullet(X, A; R) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}^{[2]}}((X, A), (Y, B)) \ni f \longmapsto \overline{S_\bullet(f)} \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(S_\bullet(X, A; R), S_\bullet(Y, B; R)),$$

είναι συναλλοίωτοι συναρτητές.

Αποδειξη. Έπεται άμεσα από τα λήμματα D.2.9 και D.2.14. □

D.2.16 Ορισμός. Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος και έστω $n \in \mathbb{Z}$. Ως **n-οστός μόδιος ιδιάζουσας ομολογίας τού X με συντελεστές ειλημμένους από τον** R ορίζεται ο R-μόδιος

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X; R) := H_n(S_\bullet(X; R)),}$$

ήτοι ο n-οστός μόδιος ομολογίας τού $S_\bullet(X; R) = (S_n(X; R), d_n^{\text{sing.}})_{n\in\mathbb{Z}}$. (Βλ. εδ. 3.2.2.) Εξ ορισμού,

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X; R) := Z_n^{\text{sing.}}(X; R)/B_n^{\text{sing.}}(X; R),}$$

όπου

$$\boxed{Z_n^{\text{sing.}}(X; R) := Z_n(S_\bullet(X; R)) = \mathrm{Ker}(d_n^{\text{sing.}})}$$

ο R-μόδιος των ιδιαζόντων n-κυκλημάτων τού X και

$$\boxed{B_n^{\text{sing.}}(X; R) := B_n(S_\bullet(X; R)) = \mathrm{Im}(d_{n+1}^{\text{sing.}})}$$

ο R-μόδιος των ιδιαζόντων n-συνόρων τού X.

D.2.17 Ορισμός. Έστω (X, A) τυχόν τοπολογικό ζεύγος και έστω $n \in \mathbb{Z}$. Ως **n-οστός μόδιος ιδιάζουσας ομολογίας τού (X, A) με συντελεστές ειλημμένους από τον** R ορίζεται ο R-μόδιος

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X, A; R) := H_n(S_\bullet(X, A; R)),}$$

ήτοι ο n-οστός μόδιος ομολογίας τού

$$S_\bullet(X, A; R) = (S_n(X, A; R), \overline{d}_n^{\text{sing.}})_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Εξ ορισμού[33],

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X, A; R) := Z_n^{\text{sing.}}(X, A; R)/B_n^{\text{sing.}}(X, A; R),}$$

όπου

$$\boxed{Z_n^{\text{sing.}}(X,A;R) := Z_n(S_\bullet(X,A;R)) = \operatorname{Ker}(\overline{d}_n^{\,\text{sing.}})}$$

ο R**-μόδιος των ιδιαζόντων** n**-κυκλημάτων τού** (X,A) και

$$\boxed{B_n^{\text{sing.}}(X,A;R) := B_n(S_\bullet(X,A;R)) = \operatorname{Im}(\overline{d}_{n+1}^{\,\text{sing.}})}$$

ο R**-μόδιος των ιδιαζόντων** n**-συνόρων τού** (X,A).

D.2.18 Σημείωση. Εάν υποτεθεί οτι η

$$f:(X,A)\longrightarrow (Y,B)$$

είναι μια συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών, τότε μέσω τού αλυσωτού μετασχηματισμού

$$\overline{S_\bullet(f)}: S_\bullet(X,A;R)\longrightarrow S_\bullet(Y,B;R)$$

επάγεται ένας μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(f) := H_n(\overline{S_\bullet(f)}) : H_n^{\text{sing.}}(X,A;R)\longrightarrow H_n^{\text{sing.}}(Y,B;R)}$$

που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Z_n(S_\bullet(X,A;R)) \arrow[d, equal] & Z_n(S_\bullet(Y,B;R)) \arrow[d, equal] \\
Z_n^{\text{sing.}}(X,A;R) \arrow[r, "\overline{S_n(f)}\big|_{Z_n^{\text{sing.}}(X,A;R)}"] \arrow[d, "\pi^{Z_n^{\text{sing.}}(X,A;R)}_{B_n^{\text{sing.}}(X,A;R)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_n^{\text{sing.}}(Y,B;R) \arrow[d, "\pi^{Z_n^{\text{sing.}}(Y,B;R)}_{B_n^{\text{sing.}}(Y,B;R)}"] \\
H_n^{\text{sing.}}(X,A;R) \arrow[r, dashed, "H_n^{\text{sing.}}(f)"'] & H_n^{\text{sing.}}(Y,B;R)
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό για κάθε $n\in\mathbb{Z}$. (Βλ. πρόταση 3.2.5.)

D.2.19 Θεώρημα. *Έστω (X,A) τυχόν τοπολογικό ζεύγος. Εάν οι $i:A\hookrightarrow X$ και $j:X=(X,\varnothing)\hookrightarrow (X,A)$ είναι οι συνήθεις ενθέσεις, τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n^{\text{sing.}}(A;R) \arrow[r, "H_n^{\text{sing.}}(i)"] & H_n^{\text{sing.}}(X;R) \arrow[r, "H_n^{\text{sing.}}(j)"] & H_n^{\text{sing.}}(X,A;R) \arrow[dll, "\partial_n^{\text{sing.}}(X,A)"] & \\
& H_{n-1}^{\text{sing.}}(A;R) \arrow[r, "H_{n-1}^{\text{sing.}}(i)"] & H_{n-1}^{\text{sing.}}(X;R) \arrow[r, "H_{n-1}^{\text{sing.}}(j)"] & H_{n-1}^{\text{sing.}}(X,A;R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

[33]Όταν $A=\varnothing$, επειδή ταυτίζουμε το $(X,\varnothing)$ με τον ίδιον τον X, έχουμε $H_n^{\text{sing.}}(X,\varnothing;R) = H_n^{\text{sing.}}(X;R)$ και επιστρέφουμε στον ορισμό D.2.16.

Αποδειξη. Αρκεί κανείς να θεωρήσει τη μακρά ακριβή ακολουθία την επαγόμενη μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας αλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow S_\bullet(A;R) \overset{S_\bullet(i)}{\hookrightarrow} S_\bullet(X;R) \overset{\overline{S_\bullet(j)}}{\twoheadrightarrow} S_\bullet(X,A;R) \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

(που κατασκευάζεται μέσω τού θεωρήματος 3.2.13) και να θέσει ως $\partial_n^{\text{sing.}}(X,A)$ τον συνδετικό ομομορφισμό αυτής. □

D.2.20 Θεώρημα. *Για οιονδήποτε μονοσημειακό χώρο* $\{\mathrm{pt}\}$ *έχουμε*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\{\mathrm{pt}\};R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n = 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}. \end{cases}}$$

Αποδειξη. Ο ανωτέρω ισομορφισμός αρκεί να αποδειχθεί για $n \geqslant 0$. Εν τοιαύτη περιπτώσει, υπάρχει *ακριβώς μία* συνεχής απεικόνιση $\tau_n : \Delta_n \longrightarrow \{\mathrm{pt}\}$ (που απεικονίζει κάθε στοιχείο τού Δ_n στο εν λόγω σημείο). Προφανώς,

$$S_n(\{\mathrm{pt}\};R) = \{r\tau_n \,|\, r \in R\} = R\{\tau_n\} \cong R.$$

Άρα ο $d_n^{\text{sing.}}$ απεικονίζει τον γεννήτορα τ_n τού $S_n(\{\mathrm{pt}\};R)$ στο

$$d_n^{\text{sing.}}(\tau_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \underbrace{(\tau_n \circ \delta_n^i)}_{=\tau_{n-1}} = \begin{cases} \tau_{n-1}, & \text{όταν } n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2), \\ 0_{S_{n-1}(\{\mathrm{pt}\};R)}, & \text{όταν } n \equiv 1 (\operatorname{mod} 2). \end{cases}$$

Τούτο σημαίνει ότι

$$Z_n^{\text{sing.}}(\{\mathrm{pt}\};R) = \operatorname{Ker}(d_n^{\text{sing.}}) = \begin{cases} S_n(\{\mathrm{pt}\};R) \cong R, & \text{όταν } n = 0 \text{ ή } n \equiv 1 (\operatorname{mod} 2), \\ \{0_{S_n(\{\mathrm{pt}\};R)}\}, & \text{όταν } n > 0 \text{ και } n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2), \end{cases}$$

και

$$B_n^{\text{sing.}}(\{\mathrm{pt}\};R) = \operatorname{Im}(d_{n+1}^{\text{sing.}}) = \begin{cases} S_n(\{\mathrm{pt}\};R) \cong R, & \text{όταν } n \equiv 1 (\operatorname{mod} 2), \\ \{0_{S_n(\{\mathrm{pt}\};R)}\}, & \text{όταν } n \equiv 0 (\operatorname{mod} 2). \end{cases}$$

Ως εκ τούτου, ο ισχυρισμός για τον$H_n^{\text{sing.}}(\{\mathrm{pt}\};R) := Z_n^{\text{sing.}}(\{\mathrm{pt}\};R)/B_n^{\text{sing.}}(\{\mathrm{pt}\};R)$ είναι αληθής. □

D.2.21 Θεώρημα. *Έστω* $(X_j, A_j)_{j \in J}$ *μια οικογένεια τοπολογικών ζευγών και έστω* $i_j : (X_j, A_j) \hookrightarrow (X, A)$ *η ένθεση, όπου* $X := \sum_{j \in J} X_j,\ A := \sum_{j \in J} A_j,\ \forall j \in J$. *Τότε ο ομομορφισμός* R*-μοδίων*

$$\boxed{\bigoplus_{j \in J} H_n^{\text{sing.}}(i_j) : \bigoplus_{j \in J} H_n^{\text{sing.}}(X_j, A_j; R) \longrightarrow H_n^{\text{sing.}}(X, A; R)}$$

είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Αποδειξη. Ο ανωτέρω ισομορφισμός αρκεί να αποδειχθεί για $n \geqslant 0$. Εν τοιαύτη περιπτώσει, θεωρούμε τυχόν $\sigma \in \mathfrak{V}_n(X)$. Επειδή το Δ_n είναι δρομοσυνεκτικό, η εικόνα $\sigma(\Delta_n)$ τού Δ_n μέσω τής συνεχούς απεικονίσεως σ οφείλει να είναι δρομοσυνεκτική. (Βλ. πρόταση B.1.19.) Κατά συνέπειαν, υπάρχει ένας και μόνον δείκτης $j \in J$ με $\sigma(\Delta_n) \subseteq X_j$ (διότι για $j_1, j_2 \in J$ με $j_1 \neq j_2$ έχουμε $X_{j_1} \cap X_{j_2} = \varnothing$). Επομένως,

$$S_n(X;R) = \bigoplus_{j\in J} S_n(X_j;R).$$

Κατ' αναλογίαν, $S_n(A;R) = \bigoplus_{j\in J} S_n(A_j;R)$. Ως εκ τούτου,

$$S_n(X,A;R) = S_n(X;R)/S_n(A;R) \cong \bigoplus_{j\in J} (S_n(X_j;R)/S_n(A_j;R)) = \bigoplus_{j\in J} S_n(X_j,A_j;R),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\bigoplus_{j\in J} H_n(S_\bullet(X_j,A_j;R)) \xrightarrow[3.2.10]{\cong} H_n\Big(\bigoplus_{j\in J} S_\bullet(X_j,A_j;R)\Big) \xrightarrow{\cong} H_n(S_\bullet(X,A;R))$$

και ότι, κατ' επέκταση, ο $\bigoplus_{j\in J} H_n^{\text{sing.}}(i_j)$ είναι όντως ισομορφισμός. □

D.2.22 Πόρισμα. *Έστω $X \neq \varnothing$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $(X_j)_{j\in J}$ η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του. Εάν A είναι ένας υπόχωρος τού X, $A_j := X_j \cap A$ για κάθε $j \in J$ και $i_j : (X_j, A_j) \hookrightarrow (X, A)$ οι ενθέσεις τοπολογικών ζευγών, τότε ο ομομορφισμός R-μοδίων*

$$\bigoplus_{j\in J} H_n^{\text{sing.}}(i_j) : \bigoplus_{j\in J} H_n^{\text{sing.}}(X_j,A_j;R) \longrightarrow H_n^{\text{sing.}}(X,A;R)$$

είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

D.2.23 Θεώρημα. *Εάν $X \neq \varnothing$ είναι ένας δρομοσυνεκτικός τοπολογικός χώρος, τότε*

$$\boxed{H_0^{\text{sing.}}(X;R) \cong R.}$$

Αποδειξη. Βλ. Rotman [84], Theorem 4.14, σελ. 70. □

D.2.24 Πόρισμα. *Έστω $X \neq \varnothing$ ένας τοπολογικός χώρος και έστω $(X_j)_{j\in J}$ η οικογένεια των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών του. Τότε*

$$\boxed{H_0^{\text{sing.}}(X;R) \cong \bigoplus_{j\in J} R = R^{(J)}}$$

και, εάν A είναι υπόχωρος τού X, $A_j := X_j \cap A, \forall j \in J$ και $J' := \{j \in J : A_j = \varnothing\}$,

$$\boxed{H_0^{\text{sing.}}(X,A;R) \cong \bigoplus_{j\in J'} R = R^{(J')}.}$$

D.2.25 Παρατήρηση. Η σύνθεση των συναλλοίωτων συναρτητών

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Top}^{[2]} \arrow[r, rightsquigarrow, "S_\bullet(-)"] \arrow[rr, rightsquigarrow, bend right, "H_n^{\text{sing.}}(-)"'] & \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \arrow[r, rightsquigarrow, "H_n(-)"] & \mathfrak{Mod}_R \end{tikzcd}$$

(που έχουν ορισθεί στα εδ. D.2.15 και A.2.4 (vii)) είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής, με τη βοήθεια τού οποίου κατασκευάζεται ο συναλλοίωτος συναρτητής[34]

$$H_\bullet^{\text{sing.}} : \mathfrak{Top}^{[2]} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}^{[2]}) \ni (X,A) \longmapsto H_\bullet^{\text{sing.}}(X,A;R) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}^{[2]}}((X,A),(Y,B)) \ni f \longmapsto H_\bullet^{\text{sing.}}(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(H_\bullet^{\text{sing.}}(X,A;R), H_\bullet^{\text{sing.}}(Y,B;R)).$$

D.2.26 Πρόταση. *Έστω $\Psi : \mathfrak{Top}^{[2]} \rightsquigarrow \mathfrak{Top}^{[2]}$ ο συναρτητής, ο οποίος αντιστοιχεί σε κάθε τοπολογικό ζεύγος (X,A) τον $A = (A,\varnothing)$ (με προφανή απεικόνιση μορφισμών). Τότε μέσω των συνδετικών ομομορφισμών $\partial_n^{\text{sing.}}(X,A)$ τής μακράς ακριβούς ακολουθίας τής κατασκευασθείσας στο θεώρημα D.2.19 ορίζεται ένας φυσικός μετασχηματισμός*

$$\boxed{\partial_\bullet^{\text{sing.}} : H_\bullet^{\text{sing.}} \longrightarrow H_{\bullet-1}^{\text{sing.}} \circ \Psi}$$

(όπου ο $H_{\bullet-1}^{\text{sing.}}$ προκύπτει από τον $H_\bullet^{\text{sing.}}$ ύστερα από μείωση δεικτών κατά ένα).

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την πρόταση 3.2.17. □

D.2.27 Θεώρημα («Θεώρημα εγκαθιδρύσεως θεωρίας ομολογίας ΙΙ»). *Το ζεύγος $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$ αποτελεί μια R-θεωρία ομολογίας (υπό την έννοια τού ορισμού C.1.6) επί τής κατηγορίας $\mathfrak{Top}^{[2]}$ όλων των τοπολογικών ζευγών και $H_0^{\text{sing.}}(\{\mathrm{pt}\};R) \cong R$, ονομάζεται δε* ***ιδιάζουσα θεωρία ομολογίας****.*

D.2.28 Σημείωση. Το ότι το ζεύγος $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$ πληροί τα αξιώματα *τής ακριβείας* ($\boxed{\textbf{ES-A1}}$), *τής διαστάσεως* ($\boxed{\textbf{ES-A4}}$) και *τού αθροίσματος* ($\boxed{\textbf{ES-A5}}$), καθώς και το ότι $H_0^{\text{sing.}}(\{\mathrm{pt}\};R) \cong R$, έπεται άμεσα από τα προηγηθέντα θεωρήματα D.2.19, D.2.20 και D.2.21. Ωστόσο, η απόδειξη τού ότι πληροί και τα υπόλοιπα δύο αξιώματα των Eilenberg και Steenrod είναι εξαιρετικά τεχνική και περίπλοκη[35]. Για το μεν αξίωμα $\boxed{\textbf{ES-A2}}$ *τού ομοτοπικώς αναλλοιώτου* απαιτείται η χρήση ειδικών *πρισματικών τελεστών*, ούτως ώστε, δοθεισών δυο ομοτόπων συνεχών απεικονίσεων $f,g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$, να *κατασκευάζεται* μια αλυσωτή ομοτοπία

$$\overline{S_\bullet(f)} \simeq \overline{S_\bullet(g)} : S_\bullet(X,A;R) \longrightarrow S_\bullet(Y,B;R)$$

[34]Η $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ είναι υποκατηγορία τής $\mathfrak{Mod}_R^{\mathbb{Z}}$. Μάλιστα, το πεδίο τιμών τού $H_\bullet^{\text{sing.}}(-)$ είναι κατ' ουσίαν μια «ακόμη μικρότερη» κατηγορία, ήτοι αυτή των *μη αρνητικών* αλυσωτών συμπλόκων. (Βλ. A.5.12 (ii).)

[35]Με κανονικό ρυθμό διδασκαλίας, αυτή καλύπτεται (στο σχετικό μεταπτυχιακό μάθημα τού Μ.Π.Σ. τού Τμήματός μας) σε διάστημα περίπου δύο εβδομάδων.

(υπό την έννοια τού ορισμού 3.5.1) για να εφαρμόζεται η πρόταση[36] 3.5.7. Για το δε *αξίωμα* $\boxed{\textbf{ES-A3}}$ *τής εκτομής* απαιτείται η εκτέλεση πολλών *βαρυκεντρικών υποδιαιρέσεων* γραμμικών μονοπλόκων και κατοπινή εργασία με τις λεγόμενες *μικρές αλυσίδες*. (Βλ. Dold [61], Chapter III, §5-§7, σελ. 37-46, Greenberg & Harper [67], Chapter 15, σελ. 82-93, Mayer [79], III, §4, σελ. 139-148, και §6, σελ. 157-172, Munkres [80], Chapter 4, §30-§31, σελ. 168-181, Rotman [84], σελ. 72-79 και 111-119, ή tom Dieck [91], §9.3-§9.4, σελ. 228-234.)

▸ **Συσχετισμός των π_1 και $H_1^{\text{sing.}}$.** Αυτός γεφυρώνει δύο διαφορετικούς «κόσμους» και είναι λίαν χρήσιμος.

D.2.29 Ορισμός. Μεταξύ τού θεμελιακού 1-μονοπλόκου Δ_1 και τού $\mathbf{I} := [0,1]$ υφίσταται ομοιομορφισμός $\boldsymbol{\eta} : \Delta_1 \xrightarrow{\approx} \mathbf{I}$,

$$\boxed{\boldsymbol{\eta}((1-t)\mathbf{e}_0^1 + t\mathbf{e}_1^1) := t, \quad \forall t \in \mathbf{I},} \tag{D.2}$$

έχων ως αντίστροφό του τον $\boldsymbol{\eta}^{-1} : \mathbf{I} \xrightarrow{\approx} \Delta_1$,

$$\boxed{\boldsymbol{\eta}^{-1}(t) := (1-t, t), \quad \forall t \in \mathbf{I}.} \tag{D.3}$$

D.2.30 Λήμμα. *Έστω X ένας μη κενός τοπολογικός χώρος και έστω $x_0 \in X$.*

(i) *Εάν $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι ένας βρόχος εντός τού X με αρχή και πέρας του το x_0, τότε υπάρχει συνεχής απεικόνιση $\alpha' : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ με $\alpha'(\exp(2\pi\sqrt{-1}t)) = \alpha(t)$ για κάθε $t \in \mathbf{I}$.*

(ii) *Εάν $\alpha, \beta : \mathbf{I} \longrightarrow X$ είναι δυο βρόχοι εντός τού X με αρχή και πέρας τους το x_0, και $\alpha', \beta' : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ οι συνεχείς συναρτήσεις οι οριζόμενες μέσω τού* (i), *τότε ισχύει η συνεπαγωγή:*

$$\alpha \simeq \beta \,\text{σχ.}\, \{0,1\} \Longrightarrow \alpha' \simeq \beta' \,\text{σχ.}\, \{1\}\,.$$

Απόδειξη. (i) Επειδή $\alpha(0) = x_0 = \alpha(1)$, θεωρώντας τή σχέση ισοδυναμίας $\mathfrak{R}$ επί τού $\mathbf{I}$ όπως στο εδ. B.2.4 (i) ή, ισοδυνάμως, τον πηλικόχωρο $\mathbf{I}/\{0,1\}$ τον δημιουργούμενο (σύμφωνα με τον ορισμό B.2.10) ύστερα από ταύτιση τού 0 και 1, παρατηρούμε ότι εφαρμόζεται το πόρισμα B.2.6 (για τον α) και ότι, ως εκ τούτου, η

$$\overline{\alpha} : \mathbf{I}/\mathfrak{R} = \mathbf{I}/\{0,1\} \longrightarrow X, \;\; [t]_{\mathfrak{R}} \longmapsto \overline{\alpha}([t]_{\mathfrak{R}}) := \alpha(t),$$

είναι συνεχής. Εάν συμβολίσουμε ως $\kappa : \mathbf{I}/\mathfrak{R} \xrightarrow{\approx} \mathbb{S}^1$ τον ομοιομορφισμό

$$\mathbf{I}/\mathfrak{R} \ni [t]_{\mathfrak{R}} \longmapsto \kappa([t]_{\mathfrak{R}}) := \exp(2\pi\sqrt{-1}t) \in \mathbb{S}^1,$$

τότε αρκεί να θέσουμε $\alpha' := \overline{\alpha} \circ \kappa^{-1}$.

[36] Παρεμπιπτόντως, είναι άξιο παρατηρήσεως το πώς συσχετίζεται η *τοπολογική* έννοια τής «ομοτοπικής ισοδυναμίας» (τοπολογικών ζευγών) τού ορισμού B.7.14 με την «αλυσωτή ομοτοπία» τού προηγηθέντος, αμιγώς *αλγεβρικού* ορισμού 3.5.1 (σε επίπεδο αλυσωτών συμπλόκων).

(ii) Εάν $H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X$ μια ομοτοπία από τον α στον β σχ.$\{0,1\}$, τότε έχουμε $H(t,0) = H(t,1) = x_0$ και θεωρώντας εκ νέου την $\mathfrak{R}$ όπως στο (i) μπορούμε να εφαρμόσουμε το πόρισμα[37] B.5.11 λαμβάνοντας την ομοτοπία

$$\overline{H} : (\mathbf{I}/\mathfrak{R}) \times \mathbf{I} \longrightarrow X, \ \ ([t]_{\mathfrak{R}}, s) \longmapsto \overline{H}([t]_{\mathfrak{R}}, s) := H(t,s).$$

Αρκεί λοιπόν να θέσουμε $H' := \overline{H} \circ (\kappa^{-1} \times \mathrm{id}_{\mathbf{I}})$. Μέσω αυτής, $\alpha' \simeq \beta'$ σχ.$\{1\}$. $\square$

D.2.31 Πρόταση. *Εάν $X \neq \varnothing$ είναι ένας μη κενός τοπολογικός χώρος, $x_0 \in X$ και $(\boldsymbol{\pi}_1(X,x_0), \odot)$ η θεμελιώδης ομάδα τού X στο σημείο x_0* (βλ. εδ. B.6.13), *τότε ορίζεται καλώς μια απεικόνιση*

$$\boxed{\begin{array}{c} \varphi^{\mathrm{Hur}}_{X,x_0} : \boldsymbol{\pi}_1(X,x_0) \longrightarrow H_1^{\mathrm{sing.}}(X;\mathbb{Z}) \\ [\alpha]^{\text{ομ.}} \longmapsto \varphi^{\mathrm{Hur}}_{X,x_0}([\alpha]^{\text{ομ.}}) := \alpha \circ \boldsymbol{\eta} + B_1^{\mathrm{sing.}}(X;\mathbb{Z}), \end{array}} \tag{D.4}$$

όπου $[\alpha]^{\text{ομ.}} (= [\alpha]^{\text{ομ.}}_{(\mathbf{I},\{0,1\}),X})$ είναι η κλάση ομοτοπίας ενός βρόχου $\alpha \in \Omega(X,x_0)$ σχετικώς προς το $\{0,1\}$ και $\boldsymbol{\eta}$ ο ομοιομορφισμός (D.2).

Απόδειξη. Κατ' αρχάς, η απεικόνιση

$$\alpha \circ \boldsymbol{\eta} : \Delta_1 \longrightarrow X$$

είναι προφανώς συνεχής, οπότε $\alpha \circ \boldsymbol{\eta} \in S_1(X;\mathbb{Z})$. Το ότι ο α είναι εξ ορισμού βρόχος έχει ως συνέπεια ότι

$$\alpha \circ \boldsymbol{\eta} \in Z_1^{\mathrm{sing.}}(X;\mathbb{Z}).$$

Πράγματι· επειδή

$$\begin{aligned} d_1^{\mathrm{sing.}}(\alpha \circ \boldsymbol{\eta}) &= \sum_{i=0}^{1} (-1)^i ((\alpha \circ \boldsymbol{\eta}) \circ \delta_1^i) = (\alpha \circ \boldsymbol{\eta}) \circ \delta_1^0 - (\alpha \circ \boldsymbol{\eta}) \circ \delta_1^1 \\ &= (\alpha \circ \boldsymbol{\eta})(\mathbf{e}_1^1) - (\alpha \circ \eta)(\mathbf{e}_0^1) = \alpha(1) - \alpha(0) = 0_{S_0(X;\mathbb{Z})}, \end{aligned}$$

έχουμε $\alpha \circ \boldsymbol{\eta} \in Z_1^{\mathrm{sing.}}(X;\mathbb{Z})$ και $\alpha \circ \boldsymbol{\eta} + B_1^{\mathrm{sing.}}(X;\mathbb{Z}) \in H_1^{\mathrm{sing.}}(X;\mathbb{Z})$. Ας υποθέσουμε ότι δίδονται $[\alpha]^{\text{ομ.}}, [\beta]^{\text{ομ.}} \in \boldsymbol{\pi}_1(X,x_0)$ με $[\alpha]^{\text{ομ.}} = [\beta]^{\text{ομ.}}$. Τότε $\alpha \simeq \beta$ σχ.$\{0,1\}$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι

$$\alpha \circ \boldsymbol{\eta} + B_1^{\mathrm{sing.}}(X;\mathbb{Z}) = \beta \circ \boldsymbol{\eta} + B_1^{\mathrm{sing.}}(X;\mathbb{Z}). \tag{D.5}$$

Προς τούτο θεωρούμε τον δρόμο $\gamma : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ εντός τού $\mathbb{S}^1$ με $\gamma(t) := \exp(2\pi\sqrt{-1}t)$ για κάθε $t \in \mathbf{I}$. Επειδή αυτός είναι βρόχος, έχουμε (και πάλι)

$$\gamma \circ \boldsymbol{\eta} \in Z_1^{\mathrm{sing.}}(X;\mathbb{Z}).$$

Σύμφωνα με το (i) τού λήμματος D.2.30 υπάρχουν συνεχείς $\alpha', \beta' : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$ με

$$\alpha'(\exp(2\pi\sqrt{-1}t)) = \alpha(t), \ \ \beta'(\exp(2\pi\sqrt{-1}t)) = \beta(t), \ \forall t \in \mathbf{I}.$$

[37] Εν προκειμένω, αρκεί αυτό να εφαρμοσθεί χρησιμοποιώντας ως $\mathfrak{S}$ την *τετριμμένη σχέση* (ήτοι την ισότητα).

Θεωρούμε τον ομομορφισμό αβελιανών ομάδων

$$H_1^{\text{sing.}}(\alpha') : H_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}),$$
$$\tau + B_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) \longmapsto S_1(\alpha')(\tau) + B_1^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})$$

(όπου $\tau \in Z_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z})$ και $S_1(\alpha')(\tau) := \alpha' \circ \tau$), τον επαγόμενον από τον δρόμο $\alpha' : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$. Κατά το (ii) τού λήμματος D.2.30 ισχύει η συνεπαγωγή:

$$[\alpha]^{\text{ομ.}} = [\beta]^{\text{ομ.}} \Longrightarrow \alpha' \simeq \beta' \text{ σχ. } \{1\}.$$

Από την εφαρμογή τού αξιώματος **ES-A2** τού ομοτοπικώς αναλλοιώτου για την $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$ (βλ. εδ. C.1.6 και D.2.27) λαμβάνουμε $H_1^{\text{sing.}}(\alpha') = H_1^{\text{sing.}}(\beta')$, οπότε

$$\begin{aligned}
&\alpha \circ \boldsymbol{\eta} + B_1^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) = (\alpha' \circ \gamma) \circ \boldsymbol{\eta} + B_1^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) = \alpha' \circ (\gamma \circ \boldsymbol{\eta}) + B_1^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) \\
&= H_1^{\text{sing.}}(\alpha')(\gamma \circ \boldsymbol{\eta} + B_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z})) = H_1^{\text{sing.}}(\beta')(\gamma \circ \boldsymbol{\eta} + B_1^{\text{sing.}}(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z})) \\
&= \beta' \circ (\gamma \circ \boldsymbol{\eta}) + B_1^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) = (\beta' \circ \gamma) \circ \boldsymbol{\eta} + B_1^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) = \beta \circ \boldsymbol{\eta} + B_1^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

και η (D.5) είναι αληθής. □

D.2.32 Θεώρημα (Hurewicz). (i) *Η απεικόνιση (D.4) αποτελεί ομομορφισμό ομάδων (που είθισται να λέγεται **ομομορφισμός Hurewicz**).*

(ii) *Εάν ο X είναι δρομοσυνεκτικός, τότε ο ομομορφισμός (D.4) είναι επιμορφισμός με πυρήνα του τη μεταθέτρια υποομάδα*[38] *τής $\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)$. Ως εκ τούτου, υφίσταται ένας ισομορφισμός ομάδων*

$$\boxed{\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)^{\text{ab}} \xrightarrow{\cong} H_1^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}),}$$

όπου $\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)^{\text{ab}}$ είναι η αβελιανοποίηση τής $\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)$. Ιδιαιτέρως δε, στην περίπτωση όπου η $\boldsymbol{\pi}_1(X, x_0)$ είναι αβελιανή, ο ομομορφισμός (D.4) είναι ισομορφισμός (ομάδων).

Απόδειξη. Βλ. Bredon [57], Chapter IV, §3, σελ. 172-175, Greenberg & Harper [67], Theorem 12.1, σελ. 63-66, Kosniowsky [54], Theorem 29.16, σελ. 249-253, Mayer [79], Kapitel III, §5, σελ. 149-156, Rotman [84], Chapter 4, σελ. 80-84, ή Weintraub [94], Theorem 5.2.4, σελ. 62-64. □

D.2.33 Σημείωση. Ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα θα μπορούσε να είχε εξαχθεί ήδη από την εποχή τού Poincaré. (Σημειωτέον ότι η τότε ορολογία ήταν διαφορετική και κάποιες έννοιες, όπως εκείνη των *ομάδων* ομολογίας, δεν είχαν ακόμη θεσπισθεί καταλλήλως. Πρβλ. Dieudonné [116], I.3.F, σελ. 304-305.) Όμως, εν προκειμένω, το όνομα τού W. Hurewicz *δικαίως* μνημονεύεται, καθόσον αναδιαμόρφωσε το D.2.32

[38] Έστω G μια ομάδα. Ως **μεταθέτρια υποομάδα** τής G ορίζεται η υποομάδα G' που παράγεται από όλους τους *μεταθέτες* $aba^{-1}b^{-1}$, όπου $a, b \in G$. Αυτή είναι ορθόθετη εντός τής G, οπότε ορίζεται η πηλικοομάδα $G/G' =: G^{\text{ab.}}$, η οποία καλείται, ιδιαιτέρως, **αβελιανοποίηση** τής G.

σε πιο σύγχρονη «γλώσσα». Επιπροσθέτως, παρά το γεγονός ότι εκείνος που πρωτοόρισε τις ομάδες ομοτοπίας $\boldsymbol{\pi}_n$ για $n \geqslant 2$, (με ορισμό ισοδύναμο αυτού που χρησιμοποιείται σήμερα[39]) ήταν ο E. Čech[40], ήταν και πάλι ο W. Hurewicz[41] που (έχοντάς τες ορίσει ανεξαρτήτως, με άλλον τρόπο) ασχολήθηκε *με την εις βάθος μελέτη τους*, καθώς και με τους αντίστοιχους «ομομορφισμούς Hurewicz» $\boldsymbol{\pi}_n \longrightarrow H_n^{\text{sing.}}$ *και* για $n \geqslant 2$, και έδωσε ικανές συνθήκες, ούτως ώστε αυτοί να είναι *ισομορφισμοί*.

E. Čech

W. Hurewicz

(Βλ. σχετικώς Bredon [57], Chapter VII, §10, σελ. 475-480, Davis & Kirk [59], §6.17, σελ. 160-163, Hatcher [68], σελ. 369-373, Prasolov [82], Theorem 3.2, σελ. 113-114, Spanier [86], Chapter 7, §4-§5, σελ. 387-400, Stöcker & Zieschang [87], §16.4, σελ. 416-420, Switzer [88], Theorems 10.25 & 10.27, σελ. 185-186, και tom Dieck [91], Chapter 20, σελ. 495-512.)

[39] Βλ. E. Čech: *Höherdimensionale Homotopiegruppen*, Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses, Zürich, 1932, Band II, Sektions-Vorträge, Ovell Füssli Verlag, Zürich und Leipzig, σελ. 203. Εξ όσων γνωρίζουμε, ο E. Čech, πέραν τής διατυπώσεως αυτού τού ορισμού, δεν ασχολήθηκε με αυτές τις αβελιανές ομάδες, διότι για μια (κατ' αυτόν καταλληλότερη) γενίκευση τής θεμελιώδους ομάδας ανέμενε κάποιες *εν γένει μη αβελιανές* ομάδες.

[40] Čech, *Eduard* (29/6/1893-15/3/1960). Τσέχος μαθηματικός. Ξεκίνησε να φοιτά το 1912 στη Σχολή Φιλοσοφίας τού Πανεπιστημίου τού Καρόλου στην Πράγα, έχοντας ως στόχο του να γίνει καθηγητής μέσης εκπαιδεύσεως. Ωστόσο, η έλξη που τού ασκούσε η μελέτη των Μαθηματικών (κυρίως δε τής Γεωμετρίας) τον οδήγησε στο να ασχοληθεί σοβαρά με αυτά. Οι σπουδές του διεκόπησαν από το 1915 έως το 1918 λόγω τού Α$'$ Παγκοσμίου Πολέμου (καθώς συμμετείχε ως στρατιώτης σε αυτόν). Μετά την ολοκλήρωσή τους εργάσθηκε ως καθηγητής Μαθηματικών σε σχολεία τής Πράγας και κατόρθωσε να εκπονήσει διδακτορική διατριβή (υπό τον Karel Petr) επί ερωτημάτων εντασσομένων στη Διαφορική Προβολική Γεωμετρία. Έχοντας λάβει μια ειδική υποτροφία τού Υπουργείου Παιδείας, μετέβη στο Τορίνο, όπου συνέχισε την εκπαίδευσή του υπό την επίβλεψη τού Guido Fubini (1879-1943) για μία διετία. Ο Fubini, εντυπωσιασμένος από τις επιδόσεις του, τού πρότεινε να συνεργασθεί μαζί του σε ένα κοινό έργο: Το αποτέλεσμα ήταν η έκδοση ενός δίτομου συγγράμματος επί τής Προβολικής Γεωμετρίας. Γυρνώντας στην Πράγα, ο Čech (παρότι κατέστη υφηγητής) συνέχισε να βιοπορίζεται από τη διδασκαλία στη μέση εκπαίδευση. Μόνον το 1923 κατάφερε να αποκτήσει μια μόνιμη θέση καθηγητή στο (τότε νέο) Πανεπιστήμιο τού Brno. Έκτοτε, η ερευνητική του παραγωγή, κυρίως στον κλάδο τής Συνδυαστικής Τοπολογίας, αυξήθηκε, οι διεθνείς συνεργασίες διαδέχοντο η μία την άλλη, και τα αποτελέσματά του προεκάλεσαν το ενδιαφέρον μεγάλου τμήματος τής κοινότητας των τοπολόγων τής εποχής. Μετά τη λήξη τού Β$'$ Παγκοσμίου Πολέμου γύρισε στο Πανεπιστήμιο τού Καρόλου στην Πράγα και από το 1947 έγινε διευθυντής τού Ινστιτούτου Μαθηματικών Ερευνών τής Τσεχικής Ακαδημίας Επιστημών. Μνημονεύεται, κατά κύριο λόγο, για τη λεγόμενη *συμπαγοποίηση κατά Stone και Čech*, καθώς και για την εισαγωγή των *θεωριών ομολογίας και συνομολογίας* (που φέρουν το όνομά του).

[41] Hurewicz, *Witold* (29/6/1904-6/9/1956). Πολωνός μαθηματικός εβραϊκής καταγωγής. Μετά τις σπουδές του (1921-1925) και τη διδακτορική του διατριβή (1926) υπό τον H. Hahn (1879-1934) στη Βιέννη, εδίδαξε μέχρι το 1936 στο Πανεπιστήμιο τού Amsterdam (από το 1928 ως βοηθός τού L.E.J Brouwer) και κατόπιν μετέβη στις Η.Π.Α. Εθήτευσε στο Πανεπιστήμιο τής North Carolina (at Chapel Hill) και από το 1945 μέχρι τον (αιφνίδιο) θάνατό του στο M.I.T. τής Μασαχουσέτης. Ο θάνατός του ήταν αποτέλεσμα δυστυχήματος (πτώσεως) όταν επεσκέφθη κάποια πυραμίδα των Μάγια στην Uxmal (κατά τη διάρκεια ενός διεθνούς συνεδρίου Τοπολογίας που ελάμβανε χώρα στο Μεξικό). Ο Hurewicz συνέγραψε περίπου 50 ερευνητικές εργασίες στην Τοπολογία, στην Αλγεβρική Τοπολογία, στις Διαφορικές Εξισώσεις και σε διάφορους κλάδους των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Πολλά είναι τα αξιομνημόνευτα αποτελέσματά του στη Θεωρία Διαστάσεως. Ήταν δε εκείνος που μελέτησε λεπτομερώς τις ομάδες ομοτοπίας $\boldsymbol{\pi}_n$ για $n \geqslant 2$ (1934-1935), τον ομοτοπικό τύπο (1936), τον τρόπο συσχετισμού ομάδων ομοτοπίας και ομολογίας, καθώς και τις μακρές ακριβείς ακολουθίες ομάδων ομοτοπίας ινημάτων (fibrations).

▸ **Σύγκριση μονοπλεκτικής και ιδιάζουσας θεωρίας ομολογίας.** Το αποτέλεσμα τής συγκρίσεως συνοψίζεται στο πόρισμα D.2.37.

D.2.34 Ορισμός. Έστω K ένα μονοπλεκτικό σύμπλεγμα. Μια **διάταξη** "$<$" **επί τού** K είναι μια μερική διάταξη των κορυφών τού K, τέτοια ώστε οι κορυφές καθενός μονοπλόκου τού K να είναι ολικώς διατεταγμένες ως προς αυτήν[42].

D.2.35 Ορισμός. Έστω "$<$" μια διάταξη επί ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος K. Διατάσσοντας τις κορυφές $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *καθενός* n-μονοπλόκου $\mathfrak{s}$ τού K ως ακολούθως:

$$\mathbf{x}_0 < \mathbf{x}_1 < \cdots < \mathbf{x}_n$$

επιτυγχάνεται ο προσανατολισμός *όλων* των μονοπλόκων τού K. Ορίζουμε έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$f_n^{(<)} : C_n(K;R) \longrightarrow S_n(|K|\,;R)$$

μέσω τού τύπου:

$$\mathfrak{s} = [\![\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]\!] \longmapsto (\sigma_{\mathfrak{s}} : \Delta_n \longrightarrow |\mathfrak{s}| \subseteq |K|)\,,$$

και μέσω γραμμικής επεκτάσεως, όπου, εν προκειμένω, η $\sigma_{\mathfrak{s}}$ είναι η γραμμική απεικόνιση που στέλνει τα $\mathbf{e}_i$ στα $\mathbf{x}_i$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, και είναι μονοσημάντως ορισμένη λόγω τής θεσπίσεως τής διατάξεως "$<$".

D.2.36 Θεώρημα. *Δίδεται διάταξη "$<$" επί ενός μονοπλεκτικού συμπλέγματος K.*
(i) *Οι επαγόμενοι ομομορφισμοί R-μοδίων*

$$\begin{tikzcd} H_n(C_\bullet(K;R)) \arrow[r, "H_n(f_\bullet^{(<)})"'] \arrow[d, equal] & H_n(S_\bullet(|K|\,;R)) \arrow[d, equal] \\ H_n^{\text{simpl.}}(|K|\,;R) & H_n^{\text{sing.}}(|K|\,;R) \end{tikzcd}$$

είναι ισομορφισμοί (και ανεξάρτητοι τής επιλογής τής "$<$") για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
(ii) *Εάν το K' είναι ένα υποσύμπλεγμα τού K, τότε οι ομομορφισμοί R-μοδίων*

$$\boxed{\overline{H_n(f_n^{(<)})} : H_n^{\text{simpl.}}(|K|\,, |K'|\,;R) \longrightarrow H_n^{\text{sing.}}(|K|\,, |K'|\,;R),}$$

είναι ωσαύτως ισομορφισμοί (και ανεξάρτητοι τής "$<$") για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Βλ. Munkres [80], Chapter 4, §34, σελ. 190-195. □

D.2.37 Πόρισμα. *Η μονοπλεκτική θεωρία ομολογίας είναι ισοδύναμη με τον περιο-*

[42] Για δοθέν K υπάρχουν πάντοτε τέτοιου είδους διατάξεις.

ρισμό τής ιδιάζουσας θεωρίας ομολογίας επί τής (ομολογικώς επιτρεπτής) κατηγορίας $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}$ (*και* $\mathfrak{Top}^{[2],\text{abs.}}_{\text{triang.}}$).

▸ **Περί τής χαρακτηριστικής τού Euler.** Μια σημαντική τοπολογική αναλλοίωτος είναι *η χαρακτηριστική τού Euler*.

D.2.38 Ορισμός. Έστω R μια Π.Κ.Ι. και έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Εάν οι R-μόδιοι $H_j^{\text{sing.}}(X;R)$ τής ιδιάζουσας ομολογίας είναι πεπερασμένως παραγόμενοι και εάν το πολύ πεπερασμένοι εξ αυτών είναι μη τετριμμένοι (ή, ισοδυνάμως, όταν το αλυσωτό σύμπλοκο

$$H_\bullet^{\text{sing.}}(X;R) := H_\bullet(S_\bullet(X;R))$$

με τετριμμένους συνοριακούς τελεστές είναι πεπερασμένο υπό την έννοια τού ορισμού 3.4.5), τότε ορίζεται η **χαρακτηριστική Euler τού** X **ως προς την** R:

$$\boxed{\chi(X;R) := \chi_R(H_\bullet^{\text{sing.}}(X;R)) = \textstyle\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \,\text{fr-rank}_R(H_j^{\text{sing.}}(X;R)).}$$

(Πρβλ. θεώρημα 3.4.7.) Στην ειδική περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$ θέτουμε

$$\boxed{\chi(X) := \chi(X;\mathbb{Z}) = \textstyle\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j\, b_j(X),}$$

καλώντας τήν $\chi(X)$ **(συνήθη) χαρακτηριστική Euler τού** X και τον

$$\boxed{b_j(X) := \text{fr-rank}_R(H_j^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})),}$$

j**-οστό αριθμό Betti**[43] **τού** X.

D.2.39 Πρόταση («Γενικευμένος πολυεδρικός τύπος τού Euler»). *Έστω R μια Π.Κ.Ι. και έστω X ένας πεπερασμένως τριγωνίσιμος τοπολογικός χώρος. Τότε ορίζεται η $\chi(X;R)$ και για οιονδήποτε τριγωνισμό $h : |K| \xrightarrow{\approx} X$ τού X λαμβάνουμε*[44]

$$\boxed{\chi(X;R) = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j\,\alpha_j,} \tag{D.6}$$

όπου $\alpha_j := \text{card}(\{j\text{-μονόπλοκα τού } K\})$.

Απόδειξη. Επειδή

$$\chi(X;R) := \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j\,\text{fr-rank}_R(H_j^{\text{sing.}}(X;R)) \underset{\text{D.2.36 (i)}}{=} \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j\,\text{fr-rank}_R(H_j^{\text{simpl.}}(|K|;R))$$

και $\text{fr-rank}_R(H_j^{\text{simpl.}}(|K|;R)) < \infty$ για κάθε $j \geqslant 0$ (βλ., π.χ., [74], 4.1.7, σελ. 110), η

[43] Betti, *Enrico* (21/10/1823-11/8/1892). Ιταλός μαθηματικός. Γνωστός για μια τοπολογική του εργασία (τού 1871), στην οποία εισήγαγε τους εν λόγω αριθμούς. (Σπούδασε στο Πανεπιστήμιο τής Pisa, όπου και εθήτευσε ως καθηγητής από το 1857. Εργάσθηκε κυρίως επί προβλημάτων τής Μαθηματικής Φυσικής.)

[44] Το δεξιό μέλος τής (D.6) ονομάζεται συνήθως **συνδυαστική χαρακτηριστική Euler τού** K.

$\chi(X;R)$ ορίζεται καλώς και από το θεώρημα 3.4.7 έπεται η (D.6), διότι

$$\chi(X;R) = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \operatorname{fr-rank}_R(C_j(K;R)) = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \operatorname{rank}_R(C_j(K;R)),$$

όπου ο $C_j(K;R)$ είναι ελεύθερος R-μόδιος βαθμίδας[45] α_j. □

D.2.40 Πρόταση. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. και έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Εάν το $H_\bullet^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})$ είναι πεπερασμένο, τότε και το $H_\bullet^{\text{sing.}}(X;R)$ είναι πεπερασμένο, και ισχύει*

$$\boxed{\chi(X) = \chi(X;R).}$$

Απόδειξη. Το $S_\bullet(X;\mathbb{Z})$ είναι εξ ορισμού ένα ελεύθερο αλυσωτό σύμπλοκο αβελιανών ομάδων. Εάν το $H_\bullet^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) := H_\bullet(S_\bullet(X;\mathbb{Z}))$ είναι *πεπερασμένο* (υπό την έννοια τού ορισμού 3.4.5), τότε είναι, ιδιαιτέρως, και *πεπερασμένου τύπου* (υπό την έννοια τού ορισμού 4.2.18). Σύμφωνα με το θεώρημα 4.2.19 το $S_\bullet(X;\mathbb{Z})$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμο με ένα ελεύθερο αλυσωτό σύμπλοκο αβελιανών ομάδων $\mathbf{D}_\bullet$ που είναι (αφ' εαυτού) *πεπερασμένου τύπου*. Κατά συνέπειαν,

$$\begin{aligned}
\chi(X;R) &= \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \operatorname{fr-rank}_R(H_j^{\text{sing.}}(X;R)) = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \operatorname{fr-rank}_R(H_j(S_\bullet(X;R)))\\
&= \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \operatorname{fr-rank}_R(H_j(S_\bullet(X;\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} R)) = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \operatorname{fr-rank}_R(H_j(\mathbf{D}_\bullet\otimes_{\mathbb{Z}} R))\\
&= \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \operatorname{fr-rank}_R(\mathbf{D}_j\otimes_{\mathbb{Z}} R) = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{D}_j)\\
&= \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \operatorname{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(H_j(\mathbf{D}_\bullet)) = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \operatorname{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(H_j(S_\bullet(X;\mathbb{Z})))\\
&= \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \operatorname{fr-rank}_{\mathbb{Z}}(H_j^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z})) = \chi(X),
\end{aligned}$$

όπου η τέταρτη και η όγδοη ισότητα έπονται από την πρόταση 3.5.11 και η πέμπτη και η έβδομη από το θεώρημα 3.4.7. □

Μια επιπρόσθετη εφαρμογή τής ακριβούς ακολουθίας των Mayer και Vietoris (βλ. [61], Chapter V, Proposition 5.8, σελ. 105) δίδει την ακόλουθη:

D.2.41 Πρόταση. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. και έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Εάν (X,A,B) είναι μια εκτμητική τριάδα για την $(H_\bullet^{\text{sing.}},\partial_\bullet^{\text{sing.}})$ (υπό την έννοια τού ορισμού 7.2.1) με $X = A\cup B$ και δύο εκ των χαρακτηριστικών Euler $\chi(A\cup B;R)$, $\chi(A\cap B;R)$, $\chi(A;R)+\chi(B;R)$ ορίζονται, τότε ορίζεται και η τρίτη και ισχύει:*

$$\boxed{\chi(A\cup B;R) = \chi(A;R)+\chi(B;R)-\chi(A\cap B;R).}$$

▸ **Ιδιάζουσα θεωρία συνομολογίας**. Αυτή δομείται *δυϊκώς*.

D.2.42 Ορισμός. Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος και έστω $n\in\mathbb{Z}$. Ως n-**οστός μόδιος ιδιάζουσας συνομολογίας τού X με συντελεστές ειλημμένους από τον R**

[45] Βλ. [87], Satz 7.1.5, σελ. 177.

ορίζεται ο R-μόδιος

$$\boxed{H^n_{\text{sing.}}(X;R) := H^n(S^\bullet(X;R)),}$$

ήτοι ο n-οστός μόδιος συνομολογίας τού συναλυσωτού συμπλόκου

$$S^\bullet(X;R) = (S^n(X;R), d^n_{\text{sing.}})_{n\in\mathbb{Z}},$$

όπου $S^n(X;R) := \mathrm{Hom}_R(S_n(X;R), R)$ και

$$d^n_{\text{sing.}} := \mathrm{Hom}_R(d^{\text{sing.}}_{n+1}, \mathrm{id}_R) : S^n(X;R) \longrightarrow S^{n+1}(X;R).$$

D.2.43 Ορισμός. Εάν $(X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}^{[2]})$, τότε για $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται κατ' αναλογίαν ο n-**οστός μόδιος ιδιάζουσας συνομολογίας τού** (X,A) **με συντελεστές ειλημμένους από τον** R ως ο R-μόδιος

$$\boxed{H^n_{\text{sing.}}(X,A;R) := H^n(S^\bullet(X,A;R)),}$$

ήτοι ως ο n-οστός μόδιος συνομολογίας τού συναλυσωτού συμπλόκου

$$S^\bullet(X,A;R) = (S^n(X,A;R), \overline{d}^n_{\text{sing.}})_{n\in\mathbb{Z}},$$

όπου $S^n(X,A;R) := \mathrm{Hom}_R(S_n(X,A;R), R)$ και

$$\overline{d}^n_{\text{sing.}} := \mathrm{Hom}_R(\overline{d}^{\text{sing.}}_{n+1}, \mathrm{id}_R) : S^n(X,A;R) \longrightarrow S^{n+1}(X,A;R).$$

Κάνοντας χρήση τού θεωρήματος 3.2.30, θέτοντας

$$\partial^n_{\text{sing.}}(X,A) := \partial^n(S^\bullet(X,A;R))$$

και μεταβαίνοντας στον αντίστοιχο *ανταλλοίωτο* συναρτητή

$$\boxed{H^\bullet_{\text{sing.}} : \mathfrak{Top}^{[2]} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\text{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)}$$

και στον *φυσικό μετασχηματισμό*

$$\boxed{\partial^\bullet_{\text{sing.}} : H^\bullet_{\text{sing.}} \circ \mathfrak{J} \rightsquigarrow H^{\bullet+1}_{\text{sing.}},}$$

καταλήγει κανείς στο ακόλουθο ανάλογο τού θεωρήματος D.2.27:

D.2.44 Θεώρημα («Θεώρημα εγκαθιδρύσεως θεωρίας συνομολογίας ΙΙ»). *Το ζεύγος* $(H^\bullet_{\text{sing.}}, \partial^\bullet_{\text{sing.}})$ *αποτελεί μια* R*-θεωρία συνομολογίας (υπό την έννοια τού ορισμού* C.7.1*) επί τής κατηγορίας* $\mathfrak{Top}^{[2]}$ *όλων των τοπολογικών ζευγών και* $H^0_{\text{sing.}}(\{\mathrm{pt}\};R) \cong R$*, ονομάζεται δε* ***ιδιάζουσα θεωρία συνομολογίας****.*

Απόδειξη. Βλ. Munkres [80], Chapter 5, §44, σελ. 265-266. □

▸ **Απόκτηση δομής δακτυλίου μέσω τού «κυαθώδους γινομένου».** Το *μέγα πλεονέκτημα* τής (ιδιάζουσας) συνομολογίας έναντι τής (ιδιάζουσας) ομολογίας είναι ότι το $H^*_{\text{sing.}}(X;R) := \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} H^j_{\text{sing.}}(X;R)$ μπορεί να καταστεί **διαβαθμισμένος δακτύλιος** μέσω τού *κυαθώδους γινομένου*. Δοθέντων δυο τοπολογικών χώρων X και Y και ενός μη τετριμμένου μεταθετικού δακτυλίου R, κατασκευάζουμε το εξής διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
H^p(\mathrm{Hom}_R(S_\bullet(X;R),R))\otimes_R H^q(\mathrm{Hom}_R(S_\bullet(Y;R),R)) \arrow[d, equal] & \\
H^p(S^\bullet(X;R))\otimes_R H^q(S^\bullet(Y;R)) \arrow[d, equal] & \\
H^p_{\text{sing.}}(X;R)\otimes_R H^q_{\text{sing.}}(Y;R) \arrow[r, "\times_{\text{συνομ.}}"] & H^{p+q}((S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet;R) \arrow[d, "\cong"] \\
 & H^{p+q}(S_\bullet(X\times Y;R);R) \arrow[d, equal] \\
 & H^{p+q}(\mathrm{Hom}_R(S_\bullet(X\times Y;R),R)) \arrow[d, equal] \\
H^{p+q}_{\text{sing.}}(X\times Y;R) \arrow[r, equal] & H^{p+q}(S^\bullet(X\times Y;R))
\end{tikzcd}
$$

όπου το “$\times_{\text{συνομ.}}$” (στο οριζόντιο βέλος) είναι το (αλγεβρικό) σταυρωτό συνομολογικό γινόμενο το ορισθέν στο εδάφιο 6.3.18, ενώ ο ισομορφισμός ο δηλούμενος μέσω τού κατακόρυφου βέλους είναι αυτός που έπεται ύστερα από εφαρμογή τής προτάσεως 3.5.13 για τη συναλυσωτή ισοδυναμία την επαγόμενη μέσω τής αλυσωτής ισοδυναμίας

$$(S_\bullet(X;R)\otimes_R S_\bullet(Y;R))_\bullet \longrightarrow S_\bullet(X\times Y;R)$$

τού θεωρήματος 8.2.5 των Eilenberg και Zilber. Έστω θ η σύνθεση αυτών των δύο. Για οιαδήποτε $\xi\in H^p_{\text{sing.}}(X;R)$ και $\eta\in H^q_{\text{sing.}}(Y;R)$ το

$$\boxed{\xi\times\eta := \theta(\xi\otimes\eta)\in H^{p+q}_{\text{sing.}}(X\times Y;R)} \tag{D.7}$$

καλείται[46] **τοπολογικό συνομολογικό σταυρωτό γινόμενο των ξ και** η.

D.2.45 Πρόταση. *Το γινόμενο* (D.7) *έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) Διγραμμικότητα:

$$(\xi+\xi')\times\eta=\xi\times\eta+\xi'\times\eta,\ \ \xi\times(\eta+\eta')=\xi\times\eta+\xi\times\eta'.$$

(ii) Ομογένεια:

$$(r\xi)\times\eta=\xi\times(r\eta)=r(\xi\times\eta),\ \forall r\in R.$$

(iii) Προσεταιριστικότητα:

$$(\xi\times\eta)\times\zeta=\xi\times(\eta\times\zeta).$$

[46] Για τις αποδείξεις τής προτάσεως D.2.45, τού θεωρήματος D.2.47 και τού πορίσματος D.2.48, βλ. Bredon [57], Chapter VI, §3-§4, σελ. 321-334, και Stöcker & Zieschang [87], §15.1-§15.2, σελ. 382-386.

(iv) Ουδέτερο στοιχείο[47]:

$$\xi \times 1_Y = H^p_{\text{sing.}}(\text{pr}_X) \in H^p_{\text{sing.}}(X \times Y; R), \;\; 1_X \times \eta = H^q_{\text{sing.}}(\text{pr}_Y) \in H^q_{\text{sing.}}(X \times Y; R).$$

(v) Φυσικότητα: *Για συνεχείς απεικονίσεις* $f : X' \longrightarrow X, \; g : Y' \longrightarrow Y,$

$$H^{p+q}_{\text{sing.}}(f \times g)(\xi \times \eta) = H^p_{\text{sing.}}(f)(\xi) \times H^q_{\text{sing.}}(g)(\eta).$$

D.2.46 Ορισμός. Για οιονδήποτε τοπολογικό χώρο X το **καθώδες γινόμενο** (cup product)

$$\boxed{H^p_{\text{sing.}}(X; R) \times H^q_{\text{sing.}}(X; R) \ni (\xi, \eta) \longmapsto \xi \smile \eta \in H^{p+q}_{\text{sing.}}(X; R)}$$

ορίζεται ως η σύνθεση

$$\begin{tikzcd} H^p_{\text{sing.}}(X;R) \otimes_R H^q_{\text{sing.}}(X;R) \arrow[r, "\times"] \arrow[rr, bend right] & H^{p+q}_{\text{sing.}}(X \times X; R) \arrow[r, "H^{p+q}_{\text{sing.}}(\text{diag}_X)"] & H^{p+q}_{\text{sing.}}(X;R) \end{tikzcd}$$

όπου $\text{diag}_X : X \longrightarrow X \times X, \; x \longmapsto (x, x)$, η διαγώνια απεικόνιση.

D.2.47 Θεώρημα. *Το καθώδες γινόμενο έχει τις εξής ιδιότητες*:

(i) Επιμεριστικότητα:

$$(\xi + \xi') \smile \eta = \xi \smile \eta + \xi' \smile \eta, \;\; \xi \smile (\eta + \eta') = \xi \smile \eta + \xi \smile \eta'.$$

(ii) Ομογένεια:

$$(r\xi) \smile \eta = \xi \smile (r\eta) = r(\xi \smile \eta), \; \forall r \in R.$$

(iii) Μεταθετικότητα (για pq άρτιο) και αντιμεταθετικότητα (για pq περιττό):

$$\xi \smile \eta = (-1)^{pq} \eta \smile \xi.$$

(iv) Προσεταιριστικότητα:

$$(\xi \smile \eta) \smile \zeta = \xi \smile (\eta \smile \zeta).$$

(v) Ουδέτερο στοιχείο:

$$1_X \smile \xi = \xi = \xi \smile 1_X.$$

(vi) Φυσικότητα: *Για κάθε συνεχή απεικόνιση* $f : X' \longrightarrow X,$

$$H^{p+q}_{\text{sing.}}(f)(\xi \smile \eta) = H^p_{\text{sing.}}(f)(\xi) \smile H^q_{\text{sing.}}(f)(\eta).$$

[47]Το $1_X \in H^0_{\text{sing.}}(X; R)$ (και αντιστοίχως, το $1_Y \in H^0_{\text{sing.}}(Y; R)$) συμβολίζει την κλάση συνομολογίας τού συγκυκλήματος που απεικονίζει κάθε 0-μονόπλοκο στο 1_R, και οι $\text{pr}_X : X \times Y \longrightarrow X$ και $\text{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ τις πρόδηλες προβολές.

D.2.48 Πόρισμα. *Θεωρούμε το ευθύ άθροισμα*

$$\boxed{H^*_{\text{sing.}}(X;R) = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} H^j_{\text{sing.}}(X;R).} \tag{D.8}$$

Τα στοιχεία του γράφονται ως επίτυπα αθροίσματα

$$\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \cdots = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, ...) \in H^*_{\text{sing.}}(X;R)$$

με $\xi_p \in H^p_{\text{sing.}}(X;R)$, *όπου το πολύ πεπερασμένου πλήθους προσθετέοι είναι μη μηδενικοί. Τα στοιχεία τού* $H^p_{\text{sing.}}(X;R)$ *ονομάζονται* ***ομογενή στοιχεία βαθμού*** p. *Το* ***κυαθώδες γινόμενο*** *επί τού* $H^*_{\text{sing.}}(X;R)$ *ορίζεται ως ακολούθως:*

$$(\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \cdots) \smile (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \cdots) = \xi_0 \smile \eta_0 + (\xi_0 \smile \eta_1 + \xi_1 \smile \eta_0) + \\ (\xi_0 \smile \eta_2 + \xi_1 \smile \eta_1 + \xi_2 \smile \eta_0) + \cdots ,$$

Με αυτό το γινόμενο το (D.8) *καθίσταται ένας (όχι κατ' ανάγκην μεταθετικός) διαβαθμισμένος δακτύλιος (και, μάλιστα, διαβαθμισμένη* R*-άλγεβρα*[48]*) με το* 1_X *ως το μοναδιαίο του στοιχείο. Πρόκειται για τον λεγόμενο* ***συνομολογικό δακτύλιο τού*** X ***με συντελεστές ειλημμένους από το*** R. *Τοπολογικοί χώροι με ίδιο ομοτοπικό τύπο διαθέτουν ισόμορφους συνομολογικούς δακτυλίους.*

D.2.49 Παραδείγματα. Για τους συνομολογικούς δακτυλίους των προβολικών χώρων $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} H^*_{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}};\mathbb{Z}_2) &\cong \mathbb{Z}_2[\mathsf{X}]/\left\langle \mathsf{X}^{d+1}\right\rangle, &&\text{όπου } \deg(\mathsf{X}) = 1,\\ H^*_{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{C}};\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[\mathsf{X}]/\left\langle \mathsf{X}^{d+1}\right\rangle, &&\text{όπου } \deg(\mathsf{X}) = 2,\\ H^*_{\text{sing.}}(\mathbb{P}^d_{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}};\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[\mathsf{X}]/\left\langle \mathsf{X}^{d+1}\right\rangle, &&\text{όπου } \deg(\mathsf{X}) = 4. \end{aligned}$$

(Βλ. Bredon [57], Chapter VI, Proposition 10.2, σελ. 359.)

▸ **Το «σκεπώδες γινόμενο».** Έστω X τυχών τοπολογικός χώρος και έστω $n \in \mathbb{N}_0$. Για κάθε δείκτη $q \in \{0, ..., n\}$ θέτουμε $q := n - p$ και ορίζουμε για κάθε q-συναλυσίδα $\varphi \in S^q(X;R)$ $(=: \mathrm{Hom}_R(S_\bullet(X;R), R))$ και κάθε ιδιάζον n-μονόπλοκο $\sigma : \Delta_n \to X$ το **σκεπώδες γινόμενο** (cap product)

$$\frown : S^q(X;R) \times S_n(X;R) \longrightarrow S_p(X;R)$$

μέσω τού τύπου

$$\boxed{\varphi \frown \sigma := \varphi(\sigma \circ b_q) \cdot (\sigma \circ a_p),}$$

(και *γραμμικής επεκτάσεως* επί ολοκλήρου τού $S_n(X;R)$), όπου

$$\sigma \circ a_p : \Delta_p \to X, \quad \sigma \circ b_q : \Delta_q \to X,$$

[48] Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος και έστω A ένας R-μόδιος, ο οποίος τυγχάνει να είναι (ταυτοχρόνως) και δακτύλιος. Λέμε ότι ο A είναι **μια** R**-άλγεβρα** όταν για οιαδήποτε $a, b \in A$ και $r, s \in R$ ισχύει $(ra)(sb) = (rs)(ab)$. Εάν, επιπροσθέτως, ισχύει $A = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} A_j$ (όπου τα A_j αποτελούν υπομοδίους τού A) και $A_p \cdot A_q \subseteq A_{p+q}$, τότε λέμε ότι η A είναι **μια διαβαθμισμένη** R**-άλγεβρα**.

είναι τα ιδιάζοντα p- και q-μονόπλοκα, αντιστοίχως, τα δημιουργούμενα μέσω των συσχετικών απεικονίσεων $a_p : \Delta_p \to \Delta_n$, $b_q : \Delta_q \to \Delta_n$, των ορισθέντων στη σημείωση[49] 8.2.6.

D.2.50 Ορισμός. Σε επίπεδο μοδίων συνομολογίας και ομολογίας,

$$\boxed{\frown : H^q_{\text{sing.}}(X;R) \times H^{\text{sing.}}_n(X;R) \longrightarrow H^{\text{sing.}}_p(X;R),} \tag{D.9}$$

ήτοι για $\xi = \varphi + B^q_{\text{sing.}}(X;R) \in H^q_{\text{sing.}}(X;R)$ και $\eta = c + B^{\text{sing.}}_n(X;R) \in H^{\text{sing.}}_n(X;R)$, **το σκεπώδες γινόμενο** ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\xi \frown \eta := \varphi \frown c + B^{\text{sing.}}_p(X;R).}$$

D.2.51 Θεώρημα. *Το σκεπώδες γινόμενο έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Για κάθε $\varphi \in S^q(X;R)$ και για κάθε $c \in S_n(X;R)$,*

$$d^{\text{sing.}}_p(\varphi \frown \sigma) = d^q_{\text{sing.}}(\varphi) \frown \eta + (-1)^q(\varphi \frown d^{\text{sing.}}_n(c)).$$

(ii) *Για κάθε $\eta \in H^{\text{sing.}}_n(X;R)$, $1_X \frown \eta = \eta$.*

(iii) *Για οιαδήποτε $\xi \in H^q_{\text{sing.}}(X;R)$, $\eta \in H^{\text{sing.}}_n(X;R)$ και $\zeta \in H^p_{\text{sing.}}(X;R)$,*

$$\zeta(\xi \frown \eta) = (\zeta \smile \xi)(\eta).$$

(iv) *Για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ και $\xi \in H^q_{\text{sing.}}(Y;R)$, $\eta \in H^{\text{sing.}}_n(X;R)$:*

$$H^{\text{sing.}}_p(H^q_{\text{sing.}}(f)(\xi) \frown \eta) = \xi \frown H^{\text{sing.}}_n(f)(\eta).$$

Απόδειξη. Βλ. [57], σελ. 334-337, [67], σελ. 205-206, ή [74], 16.3.1, σελ. 62-63. □

Το σκεπώδες γινόμενο (D.9), το οποίο συσχετίζει κατά τρόπο φυσικό μοδίους ιδιάζουσας συνομολογίας και ομολογίας ενός X (ή, κατ' αναλογίαν, ενός τοπολογικού ζεύγους (X,A), $\frown : H^q_{\text{sing.}}(X;R) \times H^{\text{sing.}}_n(X,A;R) \longrightarrow H^{\text{sing.}}_p(X,A;R)$, βλ. [57], σελ. 336), είναι (όπως θα δούμε) απαραίτητο για τη διατύπωση των θεωρημάτων E.3.1 και E.3.5 που αφορούν στον δυϊσμό.

▸ **Ομολογία και συνομολογία με αυθαίρετους συντελεστές.** Έστω (X,A) τυχόν τοπολογικό ζεύγος και έστω M τυχών R-μόδιος. Στην ενότητα 8.1 έχουν εισαχθεί μόδιοι ιδιάζουσας ομολογίας

$$\boxed{H^{\text{sing.}}_n(X,A;M) := H_n(S_\bullet(X,A;M)) = H_n(S_\bullet(X,A;R) \otimes_R M)}$$

και μόδιοι ιδιάζουσας συνομολογίας

$$\boxed{H^n_{\text{sing.}}(X,A;M) := H^n(S_\bullet(X,A;R);M) = H^n(S^\bullet(X,A;M))}$$

[49] Προσοχή! Έχουμε $\varphi(\sigma \circ b_q) \in R$ και το "$\cdot$" δηλοί εδώ τον συνήθη βαθμωτό πολλαπλασιασμό ενός στοιχείου τού R με ένα στοιχείο τού $S_p(X;R)$ (εν προκειμένω, το $\sigma \circ a_p$).

τού (X, A) **με συντελεστές ειλημμένους από τον** M, όπου

$$S^\bullet(X, A; M) := \mathrm{Hom}_R(S_\bullet(X, A; R), M).$$

Μέσω αυτών και μέσω των συνδετικών ομομορφισμών

$$\partial_n(X, A; M) : H_n^{\text{sing.}}(X, A; M) \longrightarrow H_{n-1}^{\text{sing.}}(A; M),$$
$$\partial^n(X, A; M) : H^n_{\text{sing.}}(A; M) \longrightarrow H^{n+1}_{\text{sing.}}(X, A; M),$$

(των προκυπτόντων από τους συνήθεις $\partial_n(X, A)$ και $\partial^n(X, A)$ ύστερα από παρεμβολή των $-\otimes_R \mathrm{id}_M$ και $\mathrm{Hom}_R(-, M)$) σχηματίζονται ζεύγη $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})_M$ και $(H^\bullet_{\text{sing.}}, \partial^\bullet_{\text{sing.}})_M$, τα οποία μπορούν να ιδωθούν ως **ιδιάζουσα** M**-θεωρία ομολογίας** και **ιδιάζουσα** M**-θεωρία συνομολογίας**, αντιστοίχως, επί τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$, καθώς είναι εύκολη η απόδειξη τού ότι τα αντίστοιχα αξιώματα των Eilenberg και Steenrod πληρούνται όταν κανείς αντικαταστήσει τον R με τον M. (Παρομοίως, είναι δυνατόν να ορισθεί και **μονοπλεκτική** M**-θεωρία ομολογίας** και **μονοπλεκτική** M**-θεωρία συνομολογίας** επί τής $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}$ ή τής $\mathfrak{Top}^{[2],\text{abs.}}_{\text{triang.}}$, και να αποδειχθεί «$M$-ανάλογο» τού θεωρήματος D.2.36.)

D.3 Η ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΟΜΟΛΟΓΙΚΩΣ ΕΠΙΤΡΕΠΤΗ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ

Μεταξύ των κατηγοριών $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{triang.}}$ και $\mathfrak{Top}^{[2]}$ παρεμβάλλεται η κατηγορία $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\text{CW}}$, τα αντικείμενα τής οποίας είναι οι CW-χώροι. Επειδή αυτοί επιδέχονται κυτταρικές διασπάσεις, η μελέτη των ιδιοτήτων τους, καθώς και ορισμενές υπολογιστικές διαδικασίες (για τον προσδιορισμό τής θεμελιώδους ομάδας, των μοδίων ομολογίας κ.ά.) γίνονται με μεθόδους συστηματικές και αρκούντως ευέλικτες.

D.3.1 Ορισμός. Λέμε ότι ένας τοπολογικός χώρος X **επιδέχεται μια κυτταρική διάσπαση** (ή **διάσπαση σε κύτταρα**) όταν υπάρχει ένα σύνολο $\mathfrak{X}$ υποχώρων τού X που πληροί την ακόλουθη συνθήκη: Κάθε στοιχείο $\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$ είναι ένα κύτταρο και $X = \bigcup\{\mathfrak{e} \mid \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}\}$. Ως n-**διάστατο σκελετό** ορίζουμε τον υπόχωρο

$$\boxed{X^{(n)} := \bigcup\{\mathfrak{e} \in \mathfrak{X} \mid \dim(\mathfrak{e}) \leqslant n\}}$$

(ενός τέτοιου X). Κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε μια ακολουθία

$$\varnothing = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq X^{(n-1)} \subseteq X^{(n)} \subseteq \cdots \subseteq X$$

υποχώρων με $\bigcup_{n\geqslant 0} X^{(n)} = X$. Για κάθε $\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$ συμβολίζουμε ως $\overline{\mathfrak{e}}$ την *κλειστή θήκη* τού $\mathfrak{e}$ εντός τού X και ως $\partial\mathfrak{e} := \overline{\mathfrak{e}} \smallsetminus \mathfrak{e}$ τη *μεθόριο* τού $\mathfrak{e}$. (Ενίοτε, για να δηλώσουμε μια κυτταρική διάσπαση, αντί τού X γράφουμε $(X, \mathfrak{X})$.)

D.3.2 Ορισμός. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος που επιδέχεται μια κυτταρική διάσπαση και έστω $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}^n$ ένα n-κύτταρο $\subseteq X$. Μια συνεχής απεικόνιση

$$\boxed{\phi = \phi_{\mathfrak{e}} : \mathbb{B}^n \longrightarrow X,}$$

για την οποία ισχύει $\phi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{(n-1)}$, με την $\phi|_{\mathring{\mathbb{B}}^n} : \mathring{\mathbb{B}}^n \longrightarrow X$ απεικονίζουσα το $\mathring{\mathbb{B}}^n$ ομοιομορφικώς επί τού $\mathfrak{e}$, καλείται **χαρακτηριστική απεικόνιση τού** $\mathfrak{e}$. Ο περιορισμός $\phi|_{\mathbb{S}^{n-1}} : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow X^{(n-1)}$ καλείται **απεικόνιση επικολλήσεως** (ή **προσαρτήσεως**) **τού** $\mathfrak{e}$.

D.3.3 Πρόταση. *Εάν ο* X (όπως στο εδ. D.3.2) *είναι χώρος Hausdorff, τότε έχουμε* $\overline{\mathfrak{e}} = \phi(\mathbb{B}^n) \subseteq X^{(n-1)} \cup \mathfrak{e}$ *και* $\partial\mathfrak{e} = \phi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{(n-1)}$. *Ιδιαιτέρως, τα* $\overline{\mathfrak{e}}$ *και* $\partial\mathfrak{e}$ *είναι συμπαγή, η* $\phi : \mathbb{B}^n \longrightarrow \overline{\mathfrak{e}}$ *ταυτισμική απεικόνιση* (βλ. B.2.7) *και η συνεχής απεικόνιση τοπολογικών ζευγών* $\phi : (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\overline{\mathfrak{e}}, \partial\mathfrak{e})$ *σχετικός ομοιομορφισμός* (βλ. B.7.6).

Απόδειξη. Λόγω τής συνεχείας τής ϕ έχουμε $\phi(\mathbb{B}^n) \subseteq \overline{\mathfrak{e}}$. Επειδή το $\phi(\mathbb{B}^n)$ είναι συμπαγές, εάν ο X είναι χώρος Hausdorff, το $\phi(\mathbb{B}^n)$ είναι κλειστό. Κατά συνέπειαν,

$$\mathfrak{e} \subseteq \phi(\mathbb{B}^n) \Longrightarrow \overline{\mathfrak{e}} \subseteq \phi(\mathbb{B}^n) \Longrightarrow \overline{\mathfrak{e}} = \phi(\mathbb{B}^n).$$

(Διεξοδικότερα, μπορούμε να γράψουμε $\phi(\mathring{\mathbb{B}}^n \cup \mathbb{S}^{n-1}) = \mathfrak{e} \cup \partial\mathfrak{e}$.) Επειδή $\phi(\mathring{\mathbb{B}}^n) = \mathfrak{e}$, έχουμε $\partial\mathfrak{e} \subseteq \phi(\mathbb{S}^{n-1})$. Επίσης, επειδή $\phi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq X^{(n-1)}$ και $\mathfrak{e} \cap X^{(n-1)} = \varnothing$, έχουμε $\phi(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq \partial\mathfrak{e}$. Άρα ισχύει η ισότητα $\phi(\mathbb{S}^{n-1}) = \partial\mathfrak{e}$. $\square$

D.3.4 Ορισμός. Ένας **CW-χώρος** ή ένα **CW-σύμπλεγμα** (CW complex) είναι ένας τοπολογικός χώρος X επιδεχόμενος κυτταρική διάσπαση ($X = \bigcup\{\mathfrak{e} \mid \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}\}$) και εφοδιασμένος με μια οικογένεια $\{\phi_{\mathfrak{e}} \mid \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}\}$ χαρακτηριστικών απεικονίσεων (και, κατ' επέκταση, με σχετικούς ομοιομορφισμούς $\phi_{\mathfrak{e}} : (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\overline{\mathfrak{e}}, \partial\mathfrak{e})$ για κάθε n-κύτταρο $\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$), ούτως ώστε να πληρούνται οι εξής συνθήκες:

(C) [= closure finiteness]: Για κάθε $\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$, το $\overline{\mathfrak{e}}$ έχει μη κενή τομή με πεπερασμένου πλήθους κύτταρα τού $\mathfrak{X}$.

(W) [= weak topology]: Κάθε υπόχωρος A τού X, για τον οποίον η τομή $A \cap \overline{\mathfrak{e}}$ είναι κλειστή εντός τού $\overline{\mathfrak{e}}$, $\forall \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$, είναι κλειστός υπόχωρος τού X. (Τούτη η συνθήκη ισοδυναμεί με το ότι ο X είναι εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία ως προς την οικογένεια[50] $\{\overline{\mathfrak{e}} \mid \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}\}$.)

Ένας CW-χώρος X ονομάζεται

$$\left\{\begin{array}{ll} d\text{-}\textbf{διάστατος} & \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} X^{(d-1)} \subsetneqq X^{(d)} = X, \\ \textbf{απειροδιάστατος} & \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} X^{(n)} \subsetneqq X,\ \forall n \in \mathbb{N}_0, \\ \textbf{πεπερασμένος CW-χώρος} & \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{card}(\mathfrak{X}) < \infty, \\ \textbf{άπειρος CW-χώρος} & \underset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{card}(\mathfrak{X}) = \infty. \end{array}\right.$$

[Εάν ο τοπολογικός χώρος X επιδέχεται μια άλλη κυτταρική διάσπαση, ας πούμε $X = \bigcup\{\mathfrak{e} \mid \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}'\}$, τότε οι διαστάσεις των CW-χώρων $(X, \mathfrak{X})$ και $(X, \mathfrak{X}')$ είναι ίσες.]

D.3.5 Σημείωση. Η έννοια των «CW-χώρων» εισήχθη το[51] 1949 από τον J.H.C. Whitehead[52] και σύντομα καθιερώθηκε στη διεθνή βιβλιογραφία.

J.H.C. Whitehead

Ειδικά συγγράμματα αφιερωμένα στην ενδελεχή μελέτη των CW-χώρων είναι αυτά των Cooke & Finney [98], Lundell & Weingram [100] και Fritsch & Piccinini [99].

D.3.6 Παραδείγματα. (i) Όταν το πλήθος των διαθέσιμων κυττάρων είναι *πεπερασμένο*, τότε οι συνθήκες **(C)** και **(W)** πληρούνται *αυτομάτως*. Ως εκ τούτου, κάθε χώρος Hausdorff που επιδέχεται διάσπαση σε πεπερασμένου πλήθους κύτταρα, καθένα των οποίων είναι εφοδιασμένο με μια χαρακτηριστική απεικόνιση, είναι CW-χώρος.

(ii) *Κάθε τριγωνίσιμος τοπολογικός χώρος X είναι* CW-χώρος[53]. Εάν το ζεύγος (K, h) είναι ένας τριγωνισμός τού X (βλ. εδ. D.1.21) και εάν ορίσουμε ως $\mathfrak{X}$ το σύνολο $\mathfrak{X} := \{h(\mathring{\mathfrak{s}}) \mid \mathfrak{s} \in K\}$, τότε ο X γράφεται προφανώς ως ένωση των στοιχείων τού $\mathfrak{X}$. Έστω $K^{(n)}$ το υποσύμπλεγμα τού K το απαρτιζόμενο από όλα τα μονόπλοκα $\mathfrak{s} \in K$ με $\dim(\mathfrak{s}) \leqslant n$. Έστω $\mathfrak{s}$ τυχόν n-μονόπλοκο τού K. Θέτοντας $\phi_{\mathfrak{s}} := (h|_{\mathfrak{s}}) \circ a_{\mathfrak{s}}$, όπου $a_{\mathfrak{s}} : (\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow (\mathfrak{s}, \partial\mathfrak{s})$ οιοσδήποτε ομοιομορφισμός τοπολογικών ζευγών, η $\phi_{\mathfrak{s}}$ είναι χαρακτηριστική απεικόνιση για το $\mathfrak{s}$ και (επειδή τα μονόπλοκα τού K είτε δεν τέμνονται είτε τέμνονται κατά μήκος κοινών τους πλευρών) μπορεί να θεωρηθεί

[50] Αυτό σημαίνει ότι ένα υποσύνολο U τού X είναι ανοικτό εντός του εάν και μόνον εάν το $U \cap \overline{\mathfrak{e}}$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού $\overline{\mathfrak{e}}$ για κάθε $\mathfrak{e} \in \mathfrak{X}$.

[51] J.H.C. Whitehead: *Combinatorial Homotopy*, Bulletin of the American Math. Society **55** (1949), 213-245 & 453-496.

[52] Whitehead, *John Henry Constantine* (11/11/1904-8/5/1960). Βρετανός μαθηματικός. Σπούδασε στην Οξφόρδη. Εξεπόνησε τη διδακτορική του διατριβή υπό τον Oswald Veblen (1880-1960) το 1930 στο Princeton και συνέγραψε μαζί του το βιβλίο *Foundation of Differential Geometry* (1932), στο οποίο (μεταξύ άλλων) περιλαμβάνεται και η αξιωματική θεμελίωση τής εννοίας τού *διαφορίσιμου πολυπτύγματος* (differentiable manifold) που παραμένει εν χρήσει μέχρι των ημερών μας. Κατόπιν τούτου η έρευνά του επικεντρώθηκε σε ποικίλα αλγεβροτοπολογικά προβλήματα. Θεωρείται δικαίως ως ένας εκ των κύριων διαμορφωτών τής σύγχρονης Θεωρίας Ομοτοπίας. (Υπήρξε συγγραφέας 90 πρωτότυπων ερευνητικών εργασιών.) Από το 1947 έως τον πρόωρο θάνατό του (το 1960) δίδαξε ως καθηγητής των Θεωρητικών Μαθηματικών στο Balliol College τής Οξφόρδης. Επίσης, κατά την τριετία 1953-1955 διετέλεσε πρόεδρος τής London Mathematical Society.

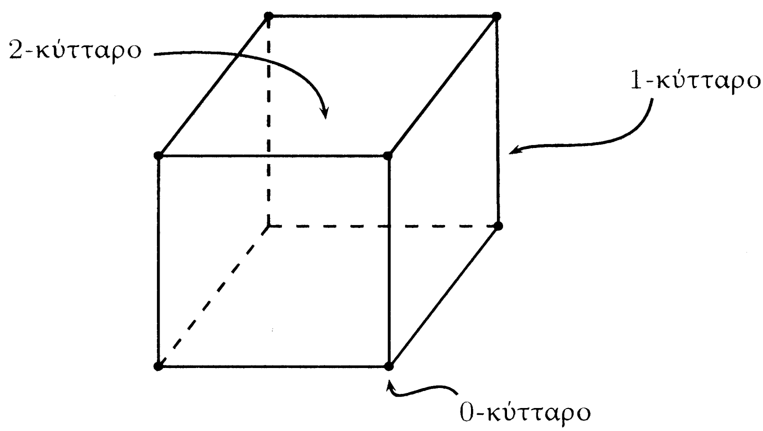
[53] Το αντίστροφο *δεν είναι εν γένει αληθές*. Για ένα απλό παράδειγμα ενός τριδιάστατου CW-χώρου (κατασκευαζόμενου μέσω κατάλληλης προσαρτήσεως ενός 3-κυττάρου στον δίσκο $\mathbb{B}^2$) που *δεν είναι τριγωνίσιμος* βλ. Shastri [85], Example 2.7.11, σελ. 105-106. Επίσης, για ένα παρόμοιο παράδειγμα, βλ. Fritsch & Piccinini [99], σελ. 128-130. Από την άλλη πλευρά, όταν ο υποκείμενος τοπολογικός χώρος ενός CW-χώρου είναι *κανονικός* (regular), η ύπαρξη τριγωνισμού είναι διασφαλισμένη. (Βλ. [99], Theorem 3.4.1, σελ. 130.)

ως σχετικός ομοιομορφισμός

$$\begin{tikzcd}(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \arrow[r, "a_{\mathfrak{s}}"] \arrow[rr, bend right, "\phi_{\mathfrak{s}}"'] & (\mathfrak{s}, \partial\mathfrak{s}) \arrow[r, "h|_{\mathfrak{s}}"] & (h(\mathring{\mathfrak{s}}) \cup \left|K^{(n-1)}\right|, \left|K^{(n-1)}\right|)\end{tikzcd}$$

(καθότι η $\phi_{\mathfrak{s}} : \mathbb{B}^n \twoheadrightarrow \phi_{\mathfrak{s}}(\mathbb{B}^n)$ είναι ομοιομορφισμός). Άρα ο $X \approx |K|$ είναι όντως CW-χώρος.

(iii) Η επιφάνεια ενός κύβου, ενός δωδεκάεδρου κ.λπ. είναι CW-χώροι. Αρκεί να θεωρήσουμε τις κορυφές ως τα 0-κύτταρα, τις ανοικτές ακμές ως τα 1-κύτταρα και τις ανοικτές έδρες ως τα 2-κύτταρα τού χώρου μας. Εν προκειμένω τα 2-κύτταρα δεν είναι (ανοικτά) μονόπλοκα!



(iv) *Η μοναδιαία σφαίρα* $\mathbb{S}^d$ *είναι ένας* CW-χώρος.

(α) Έστω $\mathfrak{e}^0 := P_+$ ο βόρειος πόλος (δηλ. ένα 0-κύτταρο) τής $\mathbb{S}^d$. Το συμπλήρωμα $\mathfrak{e}^d := \mathbb{S}^d \setminus \{\mathfrak{e}^0\}$ είναι ένα d-κύτταρο (πρβλ. B.1.3 (iv)). Η $\mathbb{S}^d$ διασπάται σε δύο κύτταρα: $\mathbb{S}^d = \{\mathfrak{e}^0\} \cup \{\mathfrak{e}^d\}$. Θέτοντας

$$\begin{cases} \phi_{\mathfrak{e}^0} : \mathbb{B}^0 \longrightarrow \mathbb{S}^d,\ \mathbf{x} \longmapsto \phi_{\mathfrak{e}^0}(\mathbf{x}) := \mathfrak{e}^0, \text{ και για } \mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) \\ \phi_{\mathfrak{e}^d} : \mathbb{B}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d,\ \mathbf{x} \longmapsto \phi_{\mathfrak{e}^d}(\mathbf{x}) := (2||\mathbf{x}||^2 - 1, 2x_1\sqrt{1 - ||\mathbf{x}||^2}, ..., 2x_d\sqrt{1 - ||\mathbf{x}||^2}) \end{cases}$$

την καθιστούμε CW-χώρο με τις $\phi_{\mathfrak{e}^0}, \phi_{\mathfrak{e}^d}$ ως χαρακτηριστικές απεικονίσεις.

$$(\varnothing = (\mathbb{S}^d)^{-1} \subsetneqq (\mathbb{S}^d)^{(0)} = \{\mathfrak{e}^0\} = ... = (\mathbb{S}^d)^{(d-1)} \subsetneqq (\mathbb{S}^d)^{(d)} = (\mathbb{S}^d)^{(d+1)} = ...)$$

(β) Ένας δεύτερος τρόπος εφοδιασμού τής $\mathbb{S}^d$ με τη δομή ενός CW-χώρου είναι ο εξής: Θεωρούμε την ακολουθία σφαιρών

$$\mathbb{S}^0 \subsetneqq \mathbb{S}^1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathbb{S}^{d-1} \subsetneqq \mathbb{S}^d$$

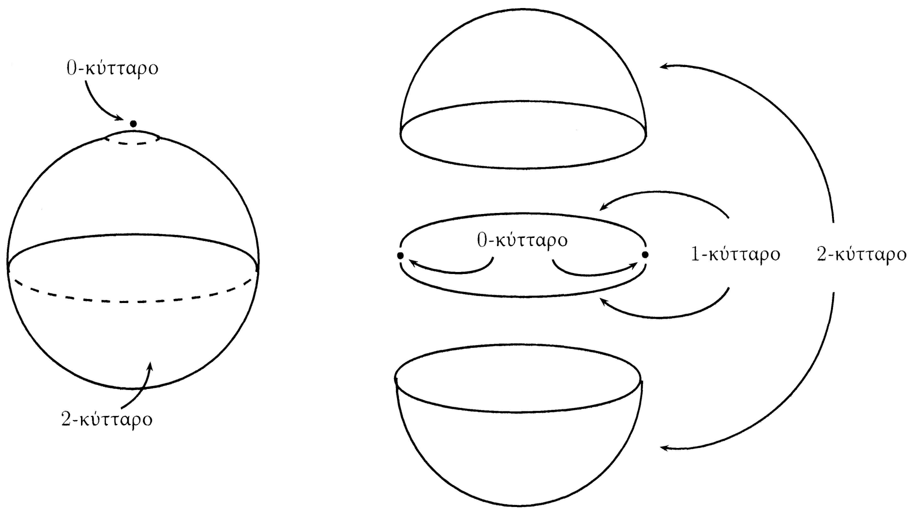
εκλαμβάνοντας καθεμία εξ αυτών ως τον «ισημερινό» τής επομένης (πρβλ. B.1.3 (iv)) καθώς και τα κύτταρα (= ανοικτά ημισφαίρια)

$$\mathfrak{e}_+^j := \mathring{\mathbb{S}}{}_+^j := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^j \mid x_{j+1} > 0\},\ \ \mathfrak{e}_-^j := \mathring{\mathbb{S}}{}_-^j := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^j \mid x_{j+1} < 0\}$$

για $j = 0, 1, ..., d$. Οι ορθογώνιες προβολές

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathfrak{e}^j_\pm} : \mathbb{B}^j \longrightarrow \mathbb{S}^d,\ (x_1, ..., x_j) = \mathbf{x} \longmapsto \boldsymbol{\phi}_{\mathfrak{e}^j_\pm}(\mathbf{x}) := (x_1, ..., x_j, \pm\sqrt{1 - ||\mathbf{x}||^2}, 0, ..., 0),$$

με $\boldsymbol{\phi}_{\mathfrak{e}^j_\pm}(\mathbb{B}^j) \approx \mathbb{S}^j_\pm \subseteq \mathbb{S}^d$, μπορούν να παίξουν τον ρόλο χαρακτηριστικών απεικονίσεων, ούτως ώστε η $\mathbb{S}^d$ να καταστεί εκ νέου CW-χώρος.



(α) (β)

(v) Για τον d-διάστατο πραγματικό προβολικό χώρο έχουμε $\mathbb{P}^d_\mathbb{R} \approx \mathbb{S}^d / \langle \alpha_d \rangle$, όπου

$$\alpha_d : \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d,\ \ \mathbf{x} \longmapsto \alpha_d(\mathbf{x}) := -\mathbf{x},$$

η αντιποδική απεικόνιση. Για κάθε φυσικό αριθμό $k \geqslant 1$ ορίζουμε ως p_k τη φυσική επίρριψη

$$p_k : \mathbb{S}^k \longrightarrow \mathbb{S}^k / \langle \alpha_k \rangle .$$

Επίσης, ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση:

$$\beta_k : \mathbb{B}^k \longrightarrow \mathbb{S}^k,\ \ \beta_k(\xi_0, ..., \xi_{k-1}) := (\xi_0, ..., \xi_{k-1}, \sqrt{1 - \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} |\xi_j|^2}),$$

καθώς και τη σύνθεση:

$$\boldsymbol{\phi}_k = p_k \circ \beta_k : \mathbb{B}^k \longrightarrow \mathbb{P}^k_\mathbb{R}.$$

Είναι εύκολος ο έλεγχος τού ότι η $\boldsymbol{\phi}_k|_{\mathring{\mathbb{B}}^k} : \mathring{\mathbb{B}}^k \longrightarrow \mathbb{P}^k_\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{P}^{k-1}_\mathbb{R}$ είναι ομοιομορφισμός. Άρα το $\mathbb{P}^d_\mathbb{R}$ είναι ένας CW-χώρος με τις $\boldsymbol{\phi}_k$, $k \in \{0, ..., d\}$, ως χαρακτηριστικές απεικονίσεις και

$$\mathfrak{X} = \{\underbrace{\mathbb{P}^d_\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{P}^{d-1}_\mathbb{R}}_{\approx \mathfrak{e}^d}, \underbrace{\mathbb{P}^{d-1}_\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{P}^{d-2}_\mathbb{R}}_{\approx \mathfrak{e}^{d-1}}, ..., \underbrace{\mathbb{P}^1_\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{P}^0_\mathbb{R}}_{\approx \mathfrak{e}^1}, \underbrace{\ \mathbb{P}^0_\mathbb{R}\ }_{\approx \mathfrak{e}^0}\},$$

οπότε

$$\boxed{\mathbb{P}^d_{\mathbb{R}} \approx \mathfrak{e}^0 \cup \mathfrak{e}^1 \cup \mathfrak{e}^2 \cup \ldots \cup \mathfrak{e}^d.} \tag{D.10}$$

(vi) Κατ' αναλογίαν, ο χώρος φακού $\mathbb{L}(p,q) = \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$ (βλ. εδ. B.4.8) διαθέτει μια κυτταρική διάσπαση

$$\boxed{\mathbb{L}(p,q) \approx \bigcup_{j=0}^{p-1} (\mathfrak{e}^0_j \cup \mathfrak{e}^1_j \cup \mathfrak{e}^2_j \cup \mathfrak{e}^3_j).} \tag{D.11}$$

έχουσα p κύτταρα σε κάθε δυνατή διάσταση[54]:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}^0_j &:= \left\{ (z_0, z_1) \in \mathbb{S}^3 \,\middle|\, \arg(z_0) = \tfrac{2\pi j}{p} \text{ και } z_1 = 0 \right\}, \\
\mathfrak{e}^1_j &:= \left\{ (z_0, z_1) \in \mathbb{S}^3 \,\middle|\, \tfrac{2\pi j}{p} < \arg(z_0) < \tfrac{2\pi (j+1)}{p} \text{ και } z_1 = 0 \right\}, \\
\mathfrak{e}^2_j &:= \left\{ (z_0, z_1) \in \mathbb{S}^3 \,\middle|\, \arg(z_1) = \tfrac{2\pi j}{p} \right\}, \\
\mathfrak{e}^3_j &:= \left\{ (z_0, z_1) \in \mathbb{S}^3 \,\middle|\, \tfrac{2\pi j}{p} < \arg(z_1) < \tfrac{2\pi (j+1)}{p} \right\},
\end{aligned}$$

για $j \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

(vii) Υπάρχουν ευρείες κλάσεις τοπολογικών πολυπτυγμάτων τα οποία είναι CW-χώροι *μέχρις ομοτοπικής ισοδυναμίας*. Βλ. θεώρημα D.3.8.

D.3.7 Ορισμός. Ένας τοπολογικός χώρος ονομάζεται **διαχωρίσιμος** όταν διαθέτει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

D.3.8 Θεώρημα (O. Hanner, 1951). *Κάθε διαχωρίσιμος τοπικώς ευκλείδειος τοπολογικός χώρος[55] είναι ομοτοπικώς ισοδύναμος με κάποιον CW-χώρο.*

Απόδειξη. Βλ. [99], Corollary 5.2.4, σελ. 228, και [100], Corollary 5.7, σελ. 135. □

D.3.9 Ορισμός. Έστω X ένας CW-χώρος και έστω A ένας υπόχωρός του, ο οποίος γράφεται ως ένωση κυττάρων τού X. Ο A ονομάζεται **CW-υπόχωρος** τού X (και το (X, A) **CW-ζεύγος**) όταν ισχύει μία (και, κατ' επέκταση, και οι τρεις) εκ των κάτωθι ισοδυνάμων συνθηκών:

(i) Ο A, με τα εντός αυτού ανήκοντα κύτταρα τού X, αποτελεί αφ' εαυτού έναν CW-χώρο.

(ii) Ο A είναι κλειστός υπόχωρος τού X.

(iii) Για κάθε κύτταρο $\mathfrak{e} \subseteq A$ έχουμε $\overline{\mathfrak{e}} \subseteq A$.

[54] Κάθε $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ γράφεται υπό την πολική του μορφή ως $z = \rho \exp(i\theta)$, όπου i η φανταστική μονάδα, $\rho > 0$ και $\theta = \arg(z) \in [0, 2\pi)$.

[55] Επειδή κάθε διαχωρίσιμος τοπολογικός χώρος είναι και 2ος αριθμήσιμος, μεταξύ αυτών συμπεριλαμβάνονται και τα *τοπολογικά πολυπτύγματα*.

D.3.10 Σημείωση. (i) Τομές και ενώσεις CW-υποχώρων ενός CW-χώρου αποτελούν CW-υπόχωρους (λόγω των D.3.9 (ii) και (iii), αντιστοίχως).

(ii) Οι σκελετοί CW-χώρων είναι CW-υπόχωροι αυτών λόγω τού D.3.9 (iii) και τής προτάσεως D.3.3. Γενικότερα, εάν η $(\mathfrak{e}_j^n)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια n-κυττάρων ανηκόντων σε έναν CW-χώρο X, τότε η ένωση $X^{(n-1)} \cup \bigcup_{j\in J} \mathfrak{e}_j^n$ αποτελεί έναν CW-υπόχωρο τού X. Για τον ίδιο λόγο, οι συνεκτικές συνιστώσες οιουδήποτε CW-χώρου X είναι CW-υπόχωροι αυτού και ο X γράφεται ως το τοπολογικό άθροισμα των συνεκτικών συνιστωσών του (με καθεμιά εξ αυτών να είναι το συμπλήρωμα των υπολοίπων ανοικτών). Εν προκειμένω, κάθε συνεκτική συιστώσα τού X είναι δρομοσυνεκτική του συνιστώσα, και αντιστρόφως!

Οι CW-χώροι *είναι δυνατόν* να διαθέτουν *απείρου πλήθους* κύτταρα. Εν τοιαύτη περιπτώσει, οι συνθήκες **(C)** και **(W)** τού D.3.4 είναι αποφασιστικής σημασίας για τη δομή των θεωρουμένων χώρων. Κατ' αρχάς, τα διαθέσιμα κύτταρα δεν μπορούν να «συσσωρεύονται», όπως δείχνει η ακόλουθη:

D.3.11 Πρόταση. *Έστω X ένας CW-χώρος και έστω $A \subseteq X$ ένας υπόχωρός του, η τομή τού οποίου με καθένα των κυττάρων τού X αποτελείται το πολύ από ένα σημείο. Τότε ο A είναι διακριτός υπόχωρος τού X.*

Απόδειξη. Για κάθε $B \subseteq A$ και για κάθε κύτταρο $\mathfrak{e} \subseteq X$ η τομή $B \cap \mathfrak{e}$ είναι είτε κενή είτε ένα μονοσύνολο. Λόγω τής συνθήκης D.3.4 **(C)** η τομή $B \cap \overline{\mathfrak{e}}$ απαρτίζεται το πολύ από πεπερασμένου πλήθους σημεία, οπότε είναι κλειστή εντός τού $\overline{\mathfrak{e}}$. Έτσι, λόγω τής συνθήκης D.3.4 **(W)**, το B είναι κλειστό εντός τού X. Επειδή, λοιπόν, κάθε υποσύνολο τού A είναι κλειστό εντός τού X, ο A είναι διακριτός υπόχωρος τού X. □

D.3.12 Παραδείγματα. (i) Όλοι οι μηδενοδιάστατοι CW-χώροι είναι διακριτοί.

(ii) Το *χαβανέζικο σκουλαρίκι* $\mathrm{HE} := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-\frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$ που ορίσθηκε στο εδάφιο B.2.11 (iii) (c) επιδέχεται κυτταρική διάσπαση (με ένα 0-κύτταρο και άπειρα-αριθμήσιμα 1-κύτταρα), αλλά *δεν είναι* CW-χώρος, καθότι τα 1-κύτταρά του συσσωρεύονται πλησίον τού 0-διάστατου κυττάρου του, κάτι που παραβιάζει τη συνθήκη D.3.4 **(W)**.

(iii) Η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$, διασπώμενη σε κύτταρα, και συγκεκριμένα στους ακεραίους αριθμούς (0-κύτταρα) και στα μεταξύ αυτών ευρισκόμενα (ανοικτά) διαστήματα (1-κύτταρα), είναι ένας CW-χώρος[56]. Κατ' επέκταση, ο ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι CW-χώρος έχων ως κύτταρά του τα καρτεσιανά γινόμενα των ως άνω 0- και 1-κυττάρων. (Πρβλ. D.3.16 (v).)

D.3.13 Πρόταση. *Έστω X ένας CW-χώρος. Τότε κάθε συμπαγές $A \subseteq X$ περιέχεται σε έναν πεπερασμένο CW-υπόχωρο τού X. Ιδιαιτέρως, ένας CW-χώρος είναι συμπαγής εάν και μόνον εάν διαθέτει μια κυτταρική διάσπαση αποτελούμενη από πεπερασμένου πλήθους κύτταρα.*

[56] Για το ότι πληρούται η D.3.4 **(W)**, βλ. [38], Charter III, Theorem 9.3, σελ. 83, και Chapter VI, §8, Ex. 2, σελ. 131.

Αποδειξη. Από κάθε κύτταρο $\mathfrak{e} \subseteq X$, για το οποίο ισχύει $\mathfrak{e} \cap A \neq \varnothing$, επιλέγουμε ένα σημείο τού $\mathfrak{e} \cap A$. Κατά την πρόταση D.3.11 το σύνολο αυτών των σημείων είναι διακριτό και, κατ' επέκταση, πεπερασμένο (αφού ανήκει στο A). Άρα το A διαθέτει μη κενή τομή με πεπερασμένου πλήθους κύτταρα τού X. Επειδή κάθε κύτταρο ανήκει σε έναν πεπερασμένο CW-υπόχωρο τού X (όπως κανείς μπορεί εύκολα να αποδείξει κάνοντας χρήση επαγωγής επί τής διαστάσεως τού κυττάρου μέσω τής προτάσεως D.3.3 και τής συνθήκης D.3.4 (**C**)), το ίδιο ισχύει και για το A. □

D.3.14 Ορισμός. Μια συνεχής απεικόνιση $f : X \longrightarrow Y$ μεταξύ CW-χώρων καλείται **κυτταρική απεικόνιση** όταν $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

D.3.15 Σημείωση. Η κατηγορία $\mathfrak{Top}_{\mathrm{CW}}$ των CW-χώρων (με τις *κυτταρικές απεικονίσεις* ως μορφισμούς της) είναι μια υποκατηγορία τής κατηγορίας $\mathfrak{Top}$ και η κατηγορία $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\mathrm{CW}}$ των CW-ζευγών D.3.9 (με τις *κυτταρικές απεικονίσεις CW-ζευγών* $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, ήτοι με κυτταρικές απεικονίσεις $f : X \longrightarrow Y$, όπου $f(A) \subseteq B$, ως μορφισμούς της) είναι μια υποκατηγορία τής κατηγορίας $\mathfrak{Top}^{[2]}$. Μια σημαντική υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\mathrm{CW}}$ είναι η $\mathfrak{Top}^{[2]}_{\mathrm{fin.CW}}$, ήτοι η κατηγορία η αποτελούμενη από *πεπερασμένα* CW-ζεύγη.

D.3.16 Πρόταση. *Εάν οι X, Y είναι CW-χώροι, τότε το καρτεσιανό γινόμενό τους $X \times Y$ επιδέχεται το $\mathfrak{X} = \{\mathfrak{e} \times \mathfrak{e}' \mid \mathfrak{e}$ κύτταρο $\subseteq X$, $\mathfrak{e}'$ κύτταρο τού $Y\}$ ως κυτταρική διάσπασή του, για την οποία ισχύουν τα εξής:*

(i) $(X \times Y)^{(n)} = (X^{(0)} \times Y^{(n)}) \cup (X^{(1)} \times Y^{(n-1)}) \cup \ldots \cup (X^{(n)} \times Y^{(0)})$.

(ii) $\overline{\mathfrak{e} \times \mathfrak{e}'} = \overline{\mathfrak{e}} \times \overline{\mathfrak{e}'}$, $\partial(\mathfrak{e} \times \mathfrak{e}') = (\partial \mathfrak{e}) \times \overline{\mathfrak{e}'} \cup \overline{\mathfrak{e}} \times (\partial \mathfrak{e}')$, $\forall \mathfrak{e} \times \mathfrak{e}' \in \mathfrak{X}$.

(iii) *Τα κύτταρα τού $\mathfrak{X}$ πληρούν τη συνθήκη* D.3.4 (**C**).

(iv) *Εάν το $\mathfrak{e} \times \mathfrak{e}^m$ είναι ένα κύτταρο τού X και το $\mathfrak{e}' = \mathfrak{e}'^n$ ένα κύτταρο τού Y με τις $\phi_{\mathfrak{e}}, \phi_{\mathfrak{e}'}$ ως χαρακτηριστικές απεικονίσεις τους, τότε η*

$$(\phi_{\mathfrak{e}} \times \phi_{\mathfrak{e}'}) \circ h : \mathbb{B}^{m+n} \longrightarrow X \times Y$$

είναι χαρακτηριστική απεικόνιση για το $\mathfrak{e} \times \mathfrak{e}' \in \mathfrak{X}$, όπου $h : \mathbb{B}^{m+n} \xrightarrow{\approx} \mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n$ οιοσδήποτε ομοιομορφισμός.

(v) *Εάν είτε ο X είτε ο Y είναι τοπικώς συμπαγής, τότε ο $(X \times Y, \mathfrak{X})$ είναι CW-χώρος.*

Αποδειξη. Βλ. Stöcker & Zieschang [87], Satz 4.2.9, σελ. 94. □

D.3.17 Σημείωση. Αξίζει να επισημανθεί ότι η κατηγορία $\mathfrak{Top}_{\mathrm{CW}}$ των CW-χώρων *δεν είναι* προσθετική. Εάν X, Y είναι δυο CW-χώροι, τότε είναι δυνατόν να εφοδιασθεί το καρτεσιανό τους γινόμενο με τη δομή ενός CW-χώρου, χωρίς ωστόσο ο προκύπτων τοπολογικός χώρος να είναι κατ' ανάγκην ομοιομορφικός τού *χώρου γινομένου* (όπως, π.χ., συμβαίνει όταν ένας εκ των X, Y είναι τοπικώς συμπαγής ή όταν αμφότεροι οι X, Y διαθέτουν *το πολύ αριθμησίμου πλήθους* κύτταρα). Για το κλασικό *αντιπαράδειγμα* τού C.H. Dowker (1953) βλ. Hatcher [68], σελ. 524-525, και Fritsch & Piccinini [99], §2.2, Example 2, σελ. 59-60.

D.3.18 Θεώρημα. *Κάθε CW-χώρος είναι τοπικώς δρομοσυνεκτικός.*

Απόδειξη. Βλ., π.χ., Rotman [84], Theorem 8.25, σελ. 207-208. □

D.3.19 Πόρισμα. *Ένας CW-χώρος είναι συνεκτικός εάν και μόνον εάν είναι δρομοσυνεκτικός.*

D.3.20 Λήμμα. *Έστω $(X, \mathfrak{X})$ ένας* CW*-χώρος. Εάν η κυτταρική διάσπαση τού X γίνεται μέσω τής ακολουθίας υποχώρων*

$$\varnothing = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq X^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq X^{(m-1)} \subseteq X^{(m)} \subseteq \cdots \subseteq X,$$

τότε για κάθε μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R, για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X^{(m)}, X^{(m-1)}; R) \cong \begin{cases} R^{(\{\,\mathfrak{e}\in\mathfrak{X} \mid \dim(\mathfrak{e})=m\})}, & \text{όταν } n = m, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \setminus \{m\}. \end{cases}}$$

Επιπροσθέτως, $H_n^{\text{sing.}}(X^{(m)}; R) \cong \{0\}$ για $n > m$, και $H_n^{\text{sing.}}(X; R) \cong \{0\}$ στην περίπτωση όπου ο X είναι πεπερασμένος και $n > \dim(X)$.

Απόδειξη. Βλ. Hatcher [68], Lemma 2.34, σελ. 137-139. □

D.3.21 Ορισμός. Έστω $(X, \mathfrak{X})$ ένας CW-χώρος (όπως στο λήμμα D.3.20). Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε

$$\boxed{W_n(\mathfrak{X}; R) := \begin{cases} H_n^{\text{sing.}}(X^{(n)}, X^{(n-1)}; R) \underset{\text{D.3.20}}{\cong} R^{(\{\,\mathfrak{e}\in\mathfrak{X} \mid \dim(\mathfrak{e})=n\})}, & \text{όταν } n \geqslant 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } n < 0, \end{cases}}$$

καθώς και τον ομομορφισμό R-μοδίων

$$\boxed{d_n^{\text{CW}} : W_n(\mathfrak{X}; R) \longrightarrow W_{n-1}(\mathfrak{X}; R)}$$

ως τη σύνθεση

$$\begin{tikzcd} W_n(\mathfrak{X}; R) \arrow[r, "\partial_n^{\text{sing.}}"] \arrow[rr, bend right] & H_{n-1}^{\text{sing.}}(X^{(n-1)}; R) \arrow[r, "H_{n-1}^{\text{sing.}}(j_{n-1})"] & W_{n-1}(\mathfrak{X}; R) \end{tikzcd}$$

όπου $\partial_n^{\text{sing.}} = \partial_n^{\text{sing.}}(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ και $j_{n-1} : X^{(n-1)} \hookrightarrow (X^{(n-1)}, X^{(n-2)})$ η συνήθης ένθεση.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι το $W_\bullet(\mathfrak{X}; R) = (W_n(\mathfrak{X}; R), d_n^{\text{CW}})_{n\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί ένα αλυσωτό σύμπλοκο (υπό την έννοια τού ορισμού 3.2.1).

D.3.22 Ορισμός. Ως **n-οστός μόδιος κυτταρικής ομολογίας τού $(X, \mathfrak{X})$ με συντελεστές ειλημμένους από τον** R ορίζεται ο R-μόδιος

$$\boxed{H_n^{\mathrm{CW}}(X; R) := H_n(W_\bullet(\mathfrak{X}; R)),}$$

ήτοι ο n-οστός μόδιος ομολογίας τού αλυσωτού συμπλόκου $W_\bullet(\mathfrak{X}; R)$.

Εάν ο $(A, \mathfrak{X}')$ είναι ένας CW-υπόχωρος τού CW-χώρου $(X, \mathfrak{X})$ (όπου $\mathfrak{X}' \subseteq \mathfrak{X}$ και $A = \bigcup \{\, \mathfrak{e} |\, \mathfrak{e} \in \mathfrak{X}' \}$), τότε θέτοντας $X_A^n := X^{(n)} \cap A$ για κάθε $n \geqslant -1$ παρατηρούμε ότι $X = \bigcup_{n \geqslant -1} X_A^n$ και ότι ο X είναι εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία ως προς την οικογένεια $\{\, X_A^n |\, n \geqslant -1 \}$. Εν συνεχεία, θέτοντας

$$W_n(\mathfrak{X}_A; R) := \begin{cases} H_n^{\text{sing.}}(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}; R), & \text{όταν } n \geqslant 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } n < 0, \end{cases}$$

αποδεικνύεται (κατ' αναλογίαν προς το λήμμα D.3.20, βλ. [84], σελ. 218) ότι

$$W_n(\mathfrak{X}_A; R) \cong R^{(\{\, \mathfrak{e} \in \mathfrak{X} \smallsetminus \mathfrak{X}' |\, \dim(\mathfrak{e}) = n \})}.$$

Ορίζοντας (και σε αυτήν την περίπτωση) τον

$$d_n^{\mathrm{CW}} : W_n(\mathfrak{X}_A; R) \longrightarrow W_{n-1}(\mathfrak{X}_A; R)$$

όπως πριν, με μόνη διαφορά την αντικατάσταση των $X^{(n)}$ με τα X_A^n, αποδεικνύεται εύκολα ότι *και* το

$$W_\bullet(\mathfrak{X}_A; R) = (W_n(\mathfrak{X}_A; R), d_n^{\mathrm{CW}})_{n \in \mathbb{Z}}$$

είναι ένα αλυσωτό σύμπλοκο.

D.3.23 Ορισμός. Ως **n-οστός (σχετικός) μόδιος κυτταρικής ομολογίας τού** CW-ζεύγους (X, A) **με συντελεστές ειλημμένους από τον** R ορίζεται ο R-μόδιος

$$\boxed{H_n^{\mathrm{CW}}(X, A; R) := H_n(W_\bullet(\mathfrak{X}_A; R)),}$$

ήτοι ο n-οστός μόδιος ομολογίας τού αλυσωτού συμπλόκου $W_\bullet(\mathfrak{X}_A; R)$.

D.3.24 Θεώρημα. *Εάν $(X, \mathfrak{X})$ είναι ένας CW-χώρος και A ένας CW-υπόχωρός του, τότε*

$$\boxed{H_n^{\mathrm{CW}}(X; R) \cong H_n^{\text{sing.}}(X; R), \ \forall n \in \mathbb{Z},}$$

και

$$\boxed{H_n^{\mathrm{CW}}(X, A; R) \cong H_n^{\text{sing.}}(X, A; R), \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Βλ. Rotman [84], Corollary 8.37 & Theorem 8.38, σελ. 216. □

D.3.25 Σημείωση. (i) Σύμφωνα με το θεώρημα D.3.24, ο ορισμός των $H_n^{\mathrm{CW}}(X; R)$ και $H_n^{\mathrm{CW}}(X, A; R)$ δεν εξαρτάται (μέχρις ισομορφισμού) από μια συγκεκριμένη επιλογή τής κυτταρικής διασπάσεως $\mathfrak{X}$.

(ii) Μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας αλυσωτών συμπλόκων

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow W_\bullet(\mathfrak{X}'; R) \xrightarrow{\iota_\bullet} W_\bullet(\mathfrak{X}; R) \xrightarrow{p_\bullet} W_\bullet(\mathfrak{X}_A; R) \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

επάγεται η μακρά ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n^{\mathrm{CW}}(A;R) \arrow[r, "H_n^{\mathrm{CW}}(\iota_\bullet)"] & H_n^{\mathrm{CW}}(X;R) \arrow[r, "H_n^{\mathrm{CW}}(p_\bullet)"] & H_n^{\mathrm{CW}}(X,A;R) \arrow[dll, "\partial_n^{\mathrm{CW}}(X,A)"] \\ & H_{n-1}^{\mathrm{CW}}(A;R) \arrow[r, "H_{n-1}^{\mathrm{CW}}(\iota_\bullet)"] & H_{n-1}^{\mathrm{CW}}(X;R) \arrow[r, "H_{n-1}^{\mathrm{CW}}(p_\bullet)"] & H_{n-1}^{\mathrm{CW}}(X,A;R) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

με συνδετικούς ομομορφισμούς ∂_n^{CW}, $n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. θεώρημα 3.2.13.)

(iii) Δυνάμει των θεωρημάτων D.3.24 και D.2.27 (και τής ανωτέρω μακράς ακριβούς ακολουθίας) μπορεί να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(H_\bullet^{\mathrm{CW}}, \partial_\bullet^{\mathrm{CW}})$ αποτελεί μια R-θεωρία ομολογίας (υπό την έννοια τού ορισμού C.1.6) επί τής (ομολογικώς επιτρεπτής) κατηγορίας $\mathfrak{Top}_{\mathrm{CW}}^{[2]}$ των CW-ζευγών. Αυτή ονομάζεται **κυτταρική θεωρία ομολογίας**, είναι δε φυσικώς ισοδύναμη τού περιορισμού τής ιδιάζουσας επί τής $\mathfrak{Top}_{\mathrm{CW}}^{[2]}$.

▸ **Υπολογιστικά παραδείγματα**. Στο σημείο αυτό θα παρατεθούν δύο παραδείγματα τοπολογικών χώρων, οι μόδιοι ομολογίας των οποίων είναι ευκολότερα προσδιορίσιμοι μέσω τής $(H_\bullet^{\mathrm{CW}}, \partial_\bullet^{\mathrm{CW}})$. Αρχικώς, ο d-διάστατος πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^d$. Λόγω τής κυτταρικής διασπάσεως (D.10), έχουμε $W_n(\mathfrak{X}; R) \cong R$ όταν $n \in \{0, 1, ..., d\}$ (και $\cong \{0\}$ για οιαδήποτε άλλη τιμή τού n), οπότε η εύρεση των d_n^{CW} μας οδηγεί στο ακόλουθο[57]:

D.3.26 Θεώρημα. *Εάν R είναι ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος, τότε για κάθε $d \in \mathbb{N}$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:*

$$\boxed{H_n^{\mathrm{sing.}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^d; R) \cong H_n^{\mathrm{CW}}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^d; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν} \begin{cases} \text{είτε } n = 0 \\ \text{είτε } n = d \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \end{cases} \\ R/2R, & \text{όταν} \begin{cases} n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \\ \text{και } 0 < n < d \end{cases} \\ \mathfrak{t}_2(R), & \text{όταν} \begin{cases} n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2) \\ \text{και } 0 < n \leqslant d \end{cases} \\ \{0\}, & \text{αλλιώς,} \end{cases}} \tag{D.12}$$

όπου $2R := \{2r | r \in R\}$ και $\mathfrak{t}_2(R) := \{r \in R | 2r = 0_R\}$.

Απόδειξη. Βλ. Hu [72], §III.3, σελ. 130-138, Mayer [79], σελ. 217-219, Munkres [80], σελ. 234-237, Vick [92], σελ. 60-63, ή Weintraub [94], σελ. 50-52. □

Το δεύτερο παράδειγμα είναι αυτό τού χώρου φακού $\mathbb{L}(p, q)$. Λόγω τής κυτταρικής διασπάσεως (D.11) λαμβάνουμε το ακόλουθο:

[57] Για έναν διαφορετικό (αλλά αρκετά περίπλοκο) τρόπο υπολογισμού (*χωρίς* τη χρήση CW-χώρων) βλ. Teleman [89], §15, σελ. 179-189.

D.3.27 Θεώρημα. *Εάν p, q είναι ακέραιοι με $0 \leqslant q < p$ και* $\mu\kappa\delta(p,q) = 1$, *και R τυχών μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε*:

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{L}(p,q);R) \cong H_n^{\text{CW}}(\mathbb{L}(p,q);R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν } n \in \{0,3\}, \\ R/pR, & \text{όταν } n = 1, \\ \mathfrak{t}_p(R), & \text{όταν } n = 2, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \geqslant 3, \end{cases}} \tag{D.13}$$

όπου $pR := \{pr | \, r \in R\}$ *και* $\mathfrak{t}_p(R) := \{r \in R | \, pr = 0_R\}$.

Απόδειξη. Βλ. Hatcher [68], σελ. 144-146, και Hu [72], Chapter III, Theorem 5.7, σελ. 148-149. □

D.3.28 Σημείωση. Αξίζει να αναφερθεί ότι στη βιβλιογραφία συναντώνται και αρκετά *ειδικά* τεχνάσματα που αποσκοπούν στον προσδιορισμό ομάδων ή μοδίων ιδιάζουσας ομολογίας για τοπολογικούς χώρους *που δεν είναι* CW-χώροι. Επί παραδείγματι, για το ποιες είναι οι ομάδες ιδιάζουσας ομολογίας τού *χαβανέζικου σκουλαρικιού* (των εδαφίων B.2.11 (iii) (c) και D.3.12 (ii)), βλ. το άρθρο των K. Eda & K. Kawamura: *The singular homology of Hawaiian earring*, Journal of London Mathematical Society (2) **62** (2000), 305-310.

▸ **Τύπος τού Euler**. Αυτός εξακολουθεί να ισχύει και στην ευρύτερη κατηγορία $\mathfrak{Top}_{\text{fin.CW}}$.

D.3.29 Πρόταση («Τύπος τού Euler για πεπερασμένους CW-χώρους»). *Έστω R μια Π.Κ.Ι. και έστω X ένας πεπερασμένος CW-χώρος. Τότε ορίζεται η $\chi(X;R)$ και για οιαδήποτε κυτταρική διάσπασή του $\mathfrak{X}$ λαμβάνουμε*

$$\boxed{\chi(X;R) = \sum_{j \geqslant 0} (-1)^j \, c_j,}$$

όπου $c_j := \text{card}(\{j\text{-κύτταρα τού } \mathfrak{X}\})$.

Απόδειξη. Πανομοιότυπη εκείνης τής προτάσεως D.2.39. □

Παράρτημα Ε

Τοπολογικά πολυπτύγματα

Η συλλογή *όλων* των τοπολογικών χώρων παραείναι «αχανής» για να μπορεί κανείς να δουλέψει κατά τρόπο παραγωγικό εντός της χωρίς να υποχρεώνεται να εστιάζει *σε συγκεκριμένες επιλογές* (βάσει κάποιων εύλογων κριτηρίων). Ανατρέχοντας, π.χ., στον κατάλογο των διαφορετικών ορισμών και συνθηκών, μέσω των οποίων γίνεται διάκριση ή κατάταξη των χώρων στο πλαίσιο τής Γενικής Τοπολογίας, διαπιστώνουμε ότι αναφύονται εκατοντάδες (αν όχι χιλιάδες) χώροι (απότοκοι συγκεκριμένων κατασκευών ή λύσεων προβλημάτων), άλλοτε «ευειδείς» άλλοτε «παράξενοι» και άλλοτε «ανεπαρκείς» ή και «εξοργιστικώς παθολογικοί[1]». Το ότι ένα μεγάλο τμήμα τής μαθηματικής κοινότητας των τοπολόγων ασχολείται επί μακρόν με χώρους «φιλικούς» και «οικείους», όπως τους *τοπικώς ευκλείδειους*, δεν οφείλεται σε συμπτώσεις. Ίσως οι δημοφιλέστεροι μεταξύ αυτών των χώρων (ακόμη και για όσους ασχολούνται με κλάδους τής Μαθηματικής Φυσικής) να είναι τα λεγόμενα *τοπολογικά πολυπτύγματα* (topological manifolds). Από αυτά αντλήθηκαν τα περισσότερα παραδείγματα και οι περισσότερες κατασκευές που χρησιμοποιήθηκαν στα κεφάλαια 7 και 8. Στο τελευταίο παράρτημα τής εργασίας παρατίθενται ορισμένες βασικές ιδιότητες αυτών.

Ε.1 ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ε.1.1 Ορισμός. Ας υποθέσουμε ότι $d, d' \in \mathbb{N}_0$ και ότι τα $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $B \subseteq \mathbb{R}^{d'}$ είναι ανοικτά υποσύνολα (ως προς τη συνήθη ευκλείδεια τοπολογία). Δοθέντος ενός $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, μια απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ καλείται $\mathscr{C}^k$**-απεικόνιση** όταν η f είναι *συνεχής* για $k = 0$, k *φορές συνεχώς διαφορίσιμη*[2] για $k \in \mathbb{N}$, και *απειράκις διαφορίσιμη*[3] για $k = \infty$.

[1] Π.χ., στο βιβλίο των J.A. Seebach & L.A. Steen: *Counterexamples in Topology*, second edition, Springer-Verlag, 1978, εντοπίζεται μια μεγάλη ποικιλία «παράξενων» χώρων με *κυμαινόμενου βαθμού* χρησιμότητα και αξιακή τοποθέτηση.

[2] Αυτό σημαίνει ότι οι μερικές παράγωγοι όλων των συνιστωσών συναρτήσεών της μέχρι και τάξεως k υπάρχουν και είναι συνεχείς επί τού A.

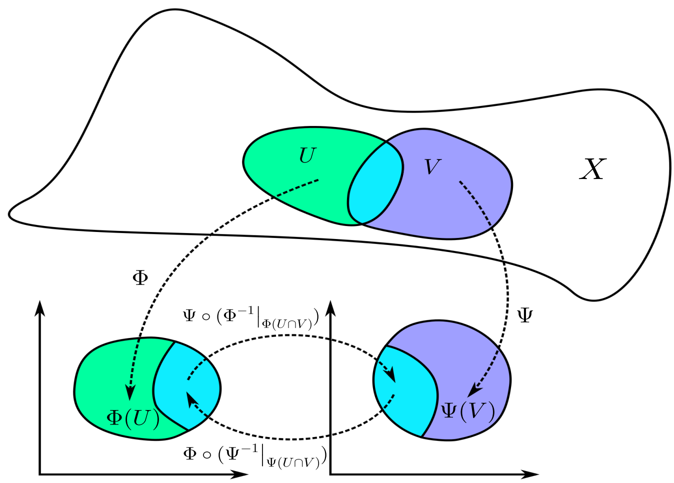
[3] Αυτό σημαίνει ότι οι συνιστώσες της συναρτήσεις έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξεως.

Ε.1.2 Ορισμός. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $d \in \mathbb{N}_0$. Ένας d-**διάστατος (τοπικός) χάρτης** (d-dimensional (local) chart) (ή ένα d-**διάστατο σύστημα συντεταγμένων**) είναι ένα ζεύγος (U, Φ) αποτελούμενο από ένα υποσύνολο $U \subseteq X$ (που καλείται **πεδίο ορισμού** αυτού) και μια *αμφίρριψη* $\Phi : U \longrightarrow U'$, όπου το[4] U' είναι ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^d$.

Ε.1.3 Ορισμός. Λέμε ότι δυο d-διάστατοι χάρτες (U, Φ) και (V, Ψ) ενός $X \neq \varnothing$ είναι μεταξύ τους $\mathscr{C}^k$-**συμβιβαστοί** όταν είτε $U \cap V = \varnothing$ είτε $U \cap V \neq \varnothing$ και -ταυτοχρόνως- οι εικόνες $\Phi(U \cap V)$ και $\Psi(U \cap V)$ είναι ανοικτά υποσύνολα τού $\mathbb{R}^d$ και οι αμφιρρίψεις

$$\Psi \circ \left(\Phi^{-1}\big|_{\Phi(U\cap V)}\right) : \Phi(U \cap V) \longrightarrow \Psi(U \cap V),$$
$$\Phi \circ \left(\Psi^{-1}\big|_{\Psi(U\cap V)}\right) : \Psi(U \cap V) \longrightarrow \Phi(U \cap V),$$

(καλούμενες ενίοτε **απεικονίσεις μεταβάσεως** (transition maps)) είναι $\mathscr{C}^k$-απεικονίσεις (ήτοι *ομοιομορφισμοί* για $k = 0$ και k-*αμφιδιαφορίσεις* για $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).



Ε.1.4 Ορισμός. Μια οικογένεια $\mathscr{A} = (U_i, \Phi_i)_{i\in I}$ d-διάστατων χαρτών ενός X καθορίζει έναν d-**διάστατο** $\mathscr{C}^k$-**άτλαντα** τού X όταν $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ και ανά δύο οι χάρτες οι ανήκοντες στην $\mathscr{A}$ είναι $\mathscr{C}^k$-συμβιβαστοί υπό την έννοια τού εδ. Ε.1.3. Λέμε ότι δυο d-διάστατοι $\mathscr{C}^k$-άτλαντες $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ τού X είναι **συμβιβαστοί** όταν η ένωσή τους $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ αποτελεί έναν d-διάστατο $\mathscr{C}^k$-άτλαντα τού X.

[4] Εννοείται ότι το U' είναι ανοικτό *ως προς τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία*.

Ε.1.5 Πρόταση. *Η σχέση συμβιβαστότητας μεταξύ δυο d-διάστατων $\mathscr{C}^k$-ατλάντων τού X ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας "$\sim_{d,k}$" επί τής κλάσεως όλων των d-διάστατων $\mathscr{C}^k$-ατλάντων τού X.*

Για δοθέντα d-διάστατον $\mathscr{C}^k$-άτλαντα $\mathscr{A}$ τού X συμβολίζουμε ως $[\mathscr{A}]_{\sim_{d,k}}$ την κλάση ισοδυναμίας αυτού ως προς την "$\sim_{d,k}$" και θέτουμε

$$\boxed{\mathscr{A}^{\max} := \bigcup \left\{ \mathscr{B} \mid \mathscr{B} \in [\mathscr{A}]_{\sim_{d,k}} \right\}.}$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι

$$\mathscr{A}^{\max} = \left\{ d\text{-διάστατοι χάρτες } (U, \Phi) \text{ τού } X \;\middle|\; \begin{array}{c} (U,\Phi) \;\; \mathscr{C}^k\text{-συμβιβαστός} \\ \text{με κάθε χάρτη τού } \mathscr{A} \end{array} \right\}$$

και ότι ο $\mathscr{A}^{\max}$ είναι ο *μοναδικός* μεγιστικός d-διάστατος $\mathscr{C}^k$-άτλας τού X που περιέχει τον $\mathscr{A}$. Είθισται να λέγεται ότι ο $\mathscr{A}$ καθορίζει μέσω τού $\mathscr{A}^{\max}$ μια $\mathscr{C}^k$-**δομή** επί τού X (και, ιδιαιτέρως, μια **τοπολογική δομή** όταν $k = 0$/ μια **λεία δομή** όταν $k = \infty$.)

Ε.1.6 Πρόταση. *Μέσω οιουδήποτε d-διάστατου $\mathscr{C}^k$-άτλαντα $\mathscr{A} = (U_i, \Phi_i)_{i \in I}$ τού X ορίζεται επί τού X μια τοπολογία*

$$\boxed{\mathscr{T}_{\mathscr{A}} := \left\{ W \subseteq X \;\middle|\; \begin{array}{c} \Phi_i(U_i \cap W) \text{ είναι ανοικτό} \\ \text{υποσύνολο τού } \mathbb{R}^d, \; \forall i \in I \end{array} \right\}}$$

με τις εξής ιδιότητες:

(i) *$U_i \in \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$, η $\Phi_i : U_i \longrightarrow U_i'$ $(:= \Phi_i(U_i))$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε $i \in I$ και τα πεδία ορισμού των χαρτών τού $\mathscr{A}^{\max}$ αποτελούν μια βάση τής $\mathscr{T}_{\mathscr{A}}$.*

(ii) *$\mathscr{A} \sim_{d,k} \mathscr{B} \Longleftrightarrow \mathscr{T}_{\mathscr{A}} = \mathscr{T}_{\mathscr{B}}$. Ιδιαιτέρως, $\mathscr{T}_{\mathscr{A}} = \mathscr{T}_{\mathscr{A}^{\max}}$.*

(iii) *Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathscr{T}_{\mathscr{A}})$ είναι τοπικώς συμπαγής και τοπικώς δρομοσυνεκτικός.*

(iv) *Ο τοπολογικός χώρος $(X, \mathscr{T}_{\mathscr{A}})$ είναι χώρος Hausdorff εάν και μόνον εάν για οιαδήποτε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν $i, j \in I$ και $Z_i, Z_j \in \mathscr{T}_{\mathscr{A}}$, ούτως ώστε*

$$x \in Z_i \subseteq U_i, \;\; y \in Z_j \subseteq U_j \;\; \textit{και} \;\; Z_i \cap Z_j = \varnothing.$$

Ε.1.7 Ορισμός. (i) Ένα μη κενό σύνολο X εφοδιασμένο με μια $\mathscr{C}^k$-δομή επαγόμενη από κάποιον d-διάστατο $\mathscr{C}^k$-άτλαντα $\mathscr{A}$, ούτως ώστε ο (υποκείμενος) τοπολογικός χώρος $(X, \mathscr{T}_{\mathscr{A}})$ να είναι χώρος Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος, καλείται d-**διάστατο** $\mathscr{C}^k$-**πολύπτυγμα** (d-dimensional $\mathscr{C}^k$-manifold).

(ii) Ένα d-διάστατο $\mathscr{C}^0$-πολύπτυγμα καλείται, ιδιαιτέρως, d-**διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα** (d-dimensional topological manifold).

(iii) Ένα d-διάστατο $\mathscr{C}^\infty$-πολύπτυγμα καλείται, ιδιαιτέρως, d-**διάστατο λείο πολύπτυγμα** (d-dimensional smooth manifold).

Ε.1.8 Παρατήρηση. Εάν X είναι ένα d-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα, τότε για κάθε σημείο $x \in X$ υπάρχει d-διάστατος χάρτης (U_x, Φ) τού X, όπου U_x είναι μια ανοικτή περιοχή τού x εντός τού X και $\Phi : U_x \longrightarrow U_x'$ ομοιομορφισμός. Μάλιστα, ύστερα από μια ενδεχόμενη μεταφορά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Phi(x) = \mathbf{0}$. Εν τοιαύτη περιπτώσει, λέμε ότι ο (U_x, Φ)

είναι ένας **(τοπικός) χάρτης τού** X **με κέντρο το** x. Εξάλλου, δοθέντος ενός χάρτη (U_x, Φ) τού X με κέντρο το x, κανείς μπορεί να κατασκευάσει έναν άλλον χάρτη (V_x, Ψ) τού X με κέντρο το x, ούτως ώστε να ισχύει $\Psi(V_x) = \mathbb{R}^d$, επιλέγοντας έναν αρκούντως μικρόν θετικό πραγματικό αριθμό r με $\mathring{\mathbb{B}}_r^d := r\mathring{\mathbb{B}}^d \subseteq \Phi(U_x)$ και θέτοντας $V_x := \Phi^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}_r^d)$ και $\Psi := f \circ \Phi$, όπου η f συμβολίζει τον ομοιομορφισμό:

$$f : \mathring{\mathbb{B}}_r^d \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^d, \ \ \mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}}{r^2 - \|\mathbf{x}\|^2}.$$

E.1.9 Παραδείγματα. (i) Τα μηδενοδιάστατα τοπολογικά (ή, ισοδυνάμως, λεία) πολυπτύγματα είναι διακριτοί τοπολογικοί χώροι αποτελούμενοι από το πολύ αριθμήσιμα σύνολα σημείων.

(ii) Μονοδιάστατα τοπολογικά (ή, ισοδυνάμως, λεία) πολυπτύγματα είναι τα $\mathbb{R}$ (μη συμπαγές) και $\mathbb{S}^1$ (συμπαγές).

(iii) Τα διδιάστατα τοπολογικά (ή, ισοδυνάμως, λεία) πολυπτύγματα καλούνται **επιφάνειες**. (Περισσότερα επ' αυτών στην ενότητα E.4.) Ορισμένοι συγγραφείς ονομάζουν τα τριδιάστατα τοπολογικά πολυπτύγματα **τριπτύγματα** (threefolds). Σημειωτέον ότι σε διαστάσεις $d \geqslant 4$ υπάρχουν τοπολογικά πολυπτύγματα τα οποία δεν μπορούν να εφοδιασθούν με καμία λεία δομή. (Βλ. E.1.14 (i).)

(iv) Ο d-διάστατος ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^d$ καθίσταται κατά τρόπο προφανή λείο πολύπτυγμα.

E.1.10 Παράδειγμα. *Συνήθης λεία δομή επί τής* $\mathbb{S}^d$. Εάν για $\kappa \in \{1, 2, ..., d+1\}$ και $j \in \{-1, 1\}$ ορίσουμε τα σύνολα

$$U_{j,\kappa} := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, ..., x_{d+1}) \in \mathbb{S}^d \middle| \, j \cdot x_\kappa > 0 \right\},$$

παρατηρούμε ότι οι απεικονίσεις

$$\Phi_{j,\kappa} : U_{j,\kappa} \longrightarrow \mathring{\mathbb{B}}^d, \ \ (x_1, ..., x_{d+1}) \longmapsto (x_1, ..., x_{\kappa-1}, x_{\kappa+1}, ..., x_{d+1}),$$

είναι αμφιρρίψεις έχουσες τις

$$\mathring{\mathbb{B}}^d \longrightarrow U_{j,\kappa}, \ \ (y_1, ..., y_d) \longmapsto (y_1, ..., y_{\kappa-1}, j \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{d} y_i^2\right)^{1/2}, y_\kappa, ..., y_d),$$

ως αντιστρόφους τους και ότι η οικογένεια χαρτών

$$\mathscr{A} := \{(U_{j,\kappa}, \Phi_{j,\kappa}) \, | j \in \{-1, 1\} \ \text{ και } \ \kappa \in \{1, 2, ..., d+1\} \}$$

είναι ένας d-διάστατος $\mathscr{C}^\infty$-άτλας τής $\mathbb{S}^d$, καθόσον αυτά τα σύνολα καλύπτουν ολόκληρη τη σφαίρα και οι απεικονίσεις μεταβάσεως

$$\Phi_{j',\kappa'} \circ (\, \Phi_{j,\kappa}^{-1}|_{\Phi_{j,\kappa}(U_{j,\kappa} \cap U_{j',\kappa'})}) : \Phi_{j,\kappa}(U_{j,\kappa} \cap U_{j',\kappa'}) \longrightarrow \Phi_{j',\kappa'}(U_{j,\kappa} \cap U_{j',\kappa'}),$$

$$\Phi_{j,\kappa} \circ (\, \Phi_{j',\kappa'}^{-1}\Big|_{\Phi_{j',\kappa'}(U_{j,\kappa} \cap U_{j',\kappa'})}) : \Phi_{j',\kappa'}(U_{j,\kappa} \cap U_{j',\kappa'}) \longrightarrow \Phi_{j,\kappa}(U_{j,\kappa} \cap U_{j',\kappa'}),$$

είναι $\mathscr{C}^\infty$-απεικονίσεις όταν $U_{j,\kappa} \cap U_{j',\kappa'} \neq \varnothing$.

E.1.11 Παραδείγματα. (i) Κάθε *ανοικτό* μη κενό υποσύνολο Y ενός d-διάστατου $\mathscr{C}^k$-πολυπτύγματος X είναι αφ' εαυτού ένα d-διάστατο $\mathscr{C}^k$-πολύπτυγμα (**ανοικτό υποπολύπτυγμα τού** X). Πράγματι· εάν $\mathscr{A} = (U_i, \Phi_i)_{i \in I}$ είναι ο άτλας που καθορίζει τη $\mathscr{C}^k$-δομή επί τού X, τότε η οικογένεια $\mathscr{A}|_Y = (U_i \cap Y, \Phi_i|_{U_i \cap Y})_{i \in I}$ αποτελεί έναν άτλαντα τού Y, μέσω τού οποίου επάγεται η $\mathscr{C}^k$-δομή επί τού Y.

(ii) Εάν X_1 είναι ένα d_1-διάστατο $\mathscr{C}^k$-πολύπτυγμα (μέσω ενός άτλαντα $\mathscr{A}_1 = (U_i, \Phi_i)_{i \in I}$) και X_2 ένα d_2-διάστατο $\mathscr{C}^k$-πολύπτυγμα (μέσω ενός άτλαντα $\mathscr{A}_2 = (V_j, \Psi_j)_{j \in J}$), τότε το καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times X_2$ καθίσταται $(d_1 + d_2)$-διάστατο $\mathscr{C}^k$-πολύπτυγμα μέσω τού άτλαντα

$$\mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2 := (U_i \times V_j, \Phi_i \times \Psi_j)_{(i,j) \in I \times J}.$$

Π.χ., ο τόρος $\mathbb{T}^d$ (βλ. εδ. 7.4.3) αποτελεί ένα d-διάστατο λείο πολύπτυγμα.

(iii) Ο d-διάστατος προβολικός χώρος $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ υπεράνω τού $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}_{\mathbb{R}}\}$ (βλ. εδ. Β.3.1) αποτελεί ένα νd-διάστατο λείο πολύπτυγμα, όπου ν όπως στην (Β.4), διότι ορίζοντας τα σύνολα

$$U_j := \left\{ [x_0 : x_1 : \ldots : x_d] \in \mathbb{P}^d_{\mathbb{K}} \,\middle|\, x_j \neq 0_{\mathbb{K}} \right\},$$

παρατηρούμε ότι οι απεικονίσεις

$$\Phi_j : U_j \longrightarrow \mathbb{K}^d, \;\; [x_0 : x_1 : \ldots : x_d] \longmapsto \left(\tfrac{x_0}{x_j}, \ldots, \tfrac{x_{j-1}}{x_j}, \tfrac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \tfrac{x_d}{x_j}\right),$$

είναι αμφιρρίψεις έχουσες τις

$$\mathbb{K}^d \longrightarrow U_j, \;\; (y_1, \ldots, y_d) \longmapsto [y_0 : \ldots : y_{j-1} : 1_{\mathbb{K}} : y_{j+1} : \ldots : y_d],$$

ως αντιστρόφους τους και ότι η οικογένεια χαρτών

$$\mathscr{A} := \{(U_j, \Phi_j) \,|\, j \in \{0, 1, \ldots, d\}\}$$

είναι ένας νd-διάστατος $\mathscr{C}^\infty$-άτλας τού $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$, καθόσον αυτά τα σύνολα καλύπτουν ολόκληρον τον $\mathbb{P}^d_{\mathbb{K}}$ και οι απεικονίσεις μεταβάσεως είναι $\mathscr{C}^\infty$-απεικονίσεις.

(iv) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ένα ανοικτό υποσύνολο. Ως γνωστόν, μια συνεχής συνάρτηση $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ καλείται **ολόμορφη συνάρτηση** όταν ικανοποιείται μία (και, κατ' επέκταση, και οι τρεις) εκ των κάτωθι ισοδυνάμων συνθηκών:

(α) Η f διαθέτει μιγαδική παράγωγο σε κάθε σημείο τού U.

(β) Η f είναι αναλυτική, ήτοι είναι τοπικώς παραστάσιμη ως συγκλίνουσα δυναμοσειρά (μιας μιγαδικής μεταβλητής), επί τού U.

(γ) Η $U \ni z = x + iy \longmapsto f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ διαθέτει συνεχείς μερικές παραγώγους ως προς τα x και y σε κάθε σημείο[5] $z = x + iy \in U$ και ικανοποιεί τις εξισώσεις των Cauchy και Riemann:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \;\text{ και }\; \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Έστω τώρα $d \in \mathbb{N}$ και έστω $U \subseteq \mathbb{C}^d$ ένα ανοικτό υποσύνολο (όπου ο τοπολογικός χώρος $\mathbb{C}^d$ ταυτίζεται με τον $\mathbb{R}^{2d}$). Μια συνάρτηση $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ (d μιγαδικών μεταβλητών) καλείται **ολόμορφη** όταν είτε $d = 1$ και η f είναι ολόμορφη (μιας μιγαδικής μεταβλητής) όπως στον προηγηθέντα ορισμό, είτε $d \geqslant 2$ και *για κάθε* $j \in \{1, \ldots, d\}$ η

$$\left\{ w \in \mathbb{C} \,|\, (z_1^0, \ldots, z_{j-1}^0, w, z_{j+1}^0, \ldots, z_d^0) \in U \right\} \ni z_j \longmapsto f(z_1^0, \ldots, z_{j-1}^0, z_j, z_{j+1}^0, \ldots, z_d^0) \in \mathbb{C}$$

είναι ολόμορφη (μιας μιγαδικής μεταβλητής z_j) όπως στον προηγηθέντα ορισμό, όπου οι $z_1^0, \ldots, z_{j-1}^0, z_{j+1}^0, \ldots, z_d^0$ είναι σταθεροί μιγαδικοί αριθμοί. Μια απεικόνιση

$$f = (f_1, \ldots, f_d) : U \longrightarrow U' \subseteq \mathbb{C}^d$$

[5] Εδώ, το i συμβολίζει τη φανταστική μονάδα, $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ και $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z))$.

από ένα ανοικτό υποσύνολο U τού $\mathbb{C}^d$ στο $\mathbb{C}^d$ έχουσα ως εικόνα της ένα ανοικτό σύνολο $U' \subseteq \mathbb{C}^d$ καλείται **ολόμορφη** όταν καθεμιά εκ των συνιστωσών συναρτήσεών της $f_1, ..., f_d$ είναι ολόμορφη υπό την ως άνω έννοια. Εάν μια τέτοια ολόμορφη απεικόνιση $f : U \longrightarrow U'$ τύχει να είναι αμφιρριπτική έχουσα ολόμορφη αντίστροφο $f^{-1} : U' \longrightarrow U$, τότε η f καλείται **αμφιολόμορφη** (biholomorphic). Έστω X ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια λεία δομή επαγόμενη από κάποιον $2d$-διάστατο $\mathscr{C}^\infty$-άτλαντα $\mathscr{A}$. Όταν αυτή η λεία δομή είναι, επιπροσθέτως, και **μιγαδική δομή** (complex structure), τότε αυτό το $2d$-διάστατο λείο πολύπτυγμα X καλείται d-**διάστατο μιγαδικό πολύπτυγμα** (d-dimensional complex manifold). Μέσω τού όρου *μιγαδική δομή* δηλούται ότι ο θεωρούμενος άτλας $\mathscr{A}$ απαρτίζεται από τέτοιους χάρτες, ώστε οι απεικονίσεις μεταβάσεως να είναι πάντοτε *αμφιολόμορφες*. Τα μονοδιάστατα συνεκτικά μιγαδικά πολυπτύγματα ονομάζονται, ιδιαιτέρως, (αφηρημένες) **επιφάνειες Riemann** (ή **ρημαννιανές επιφάνειες**). Παράδειγμα[6] συμπαγούς συνεκτικού d-διάστατου μιγαδικού πολυπτύγματος αποτελεί ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}^d_{\mathbb{C}}$.

E.1.12 Πρόταση. *Εάν μια πεπερασμένη (διακριτή) ομάδα G δρα ελευθέρως επί ενός συμπαγούς d-διάστατου τοπολογικού πολυπτύγματος X, τότε και ο τροχιακός χώρος X/G είναι ένα d-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα.*

Απόδειξη. Κατά την πρόταση B.4.7 ο X/G είναι χώρος Hausdorff. Εξάλλου, επειδή ο X είναι 2ος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και η $p : X \longrightarrow X/G$ ανοικτή (καθώς το $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού X/G για κάθε ανοικτό υποσύνολο U), ο τροχιακός χώρος X/G είναι ωσαύτως 2ος αριθμήσιμος[7]. Επιπροσθέτως, ο $X/G \; (= p(X))$ είναι συμπαγής ως εικόνα τού συμπαγούς X μέσω τής συνεχούς απεικονίσεως p. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι κάθε σημείο $[x]_{\sim_G} \in X/G$ (όπου $x \in X$) *διαθέτει μια περιοχή ομοιομορφική τού* $\mathbb{R}^d$.

Έστω[8] ότι $G = \{g_0 = 1_G, g_1, g_2, ..., g_m\}$. Επειδή η ομάδα G δρα ελευθέρως επί τού X, εάν $g_j \bullet x = x$, για κάποιον $j \in \{0, 1, ..., m\}$, θα έχουμε κατ' ανάγκην $j = 0$. Ως εκ τούτου, μέσω επαναλαμβανόμενης εφαρμογής τής ιδιότητας Hausdorff είναι δυνατή η κατασκευή ανοικτών περιοχών $U_0, U_1, ..., U_m$ των

$$x = g_0 \bullet x, g_1 \bullet x, ..., g_m \bullet x,$$

αντιστοίχως, με $U_0 \cap U_j = \varnothing$, $\forall j \in \{1, 2, ..., m\}$. Η τομή $U := \bigcap_{j=0}^m g_j^{-1} U_j$ είναι προφανώς μια ανοικτή περιοχή τού x.

Εξ υποθέσεως, για το σημείο x υπάρχει ανοικτή περιοχή W_x εντός τού X με $W_x \approx \mathbb{R}^d$. Δοθέντος ενός ομοιομορφισμού $h : W_x \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^d$, το $W_x \cap U$ είναι ανοικτό υποσύνολο τού W_x, οπότε το $h(W_x \cap U)$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{R}^d$. Επειδή $h(x) \in h(W_x \cap U)$, υπάρχει $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ με[9] $\mathring{\mathbb{B}}(h(x); \varepsilon) \subseteq h(W_x \cap U)$. Το

$$V_x := h^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}(h(x); \varepsilon)) \approx \mathring{\mathbb{B}}(h(x); \varepsilon) \approx \mathbb{R}^d$$

είναι μια ανοικτή περιοχή τού x εντός τού U. Θα δειχθεί ότι η $p|_{V_x} : V_x \twoheadrightarrow p(V_x)$ είναι αμφιρριπτική. Προς τούτο αρκεί να δειχθεί ότι είναι ενριπτική. Πράγματι· εάν έχουμε

6 Για περισσότερα παραδείγματα μιγαδικών πολυπτυγμάτων και μια υποδειγματική εισαγωγή στη θεωρία τους βλ. K. Kodaira & J. Morrow: *Complex Manifolds*, Holt, Rinehart & Winston, Inc., 1971. (Reprinted in 2005 by A.M.S.)

7 Βλ. [38], Theorem $6.2(1)$, σελ. 174.

8 Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η G δεν είναι τετριμμένη και έχει τάξη ίση με $m + 1$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$.

9 Χρησιμοποιούμενος συμβολισμός: $\mathring{\mathbb{B}}(h(x); \varepsilon) := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \|h(x) - y\| < \varepsilon \right\}$, όπου $\|...\|$ η συνήθης στάθμη επί τού $\mathbb{R}^d$.

$p|_{V_x}(x_1) = (p|_{V_x})(x_2)$, τότε $x_1 = g_j \bullet x_2$, για κάποιο $g_j \in G$. Επειδή

$$x_1, x_2 \in V_x \Longrightarrow x_1, x_2 \in U, \text{ έχουμε } x_1 \in g_0^{-1} \bullet U_0 = U_0 \text{ και } x_2 \in g_j^1 \bullet U_j,$$

οπότε $x_1 = g_j \bullet x_2 \in U_0 \cap U_j$. Κατά συνέπειαν,

$$U_0 \cap U_j \neq \varnothing \Longrightarrow j = 0 \text{ και } g_j = g_0 = 1_G \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Επειδή η απεικόνιση p είναι ανοικτή, η $p|_{V_x}$ είναι ανοικτή (και συνεχής), οπότε από την πρόταση Β.1.2 συμπεραίνουμε ότι η $p|_{V_x}$ είναι ομοιομορφισμός. Επομένως, $p(V_x) \approx V_x \approx \mathbb{R}^d$, όπου $p(V_x)$ μια ανοικτή περιοχή τού $[x]_{\sim_G}$. □

Ε.1.13 Παράδειγμα. Ο χώρος φακού $\mathbb{L}(p,q) := \mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$ (με παραμέτρους του τα p και q, όπως ορίσθηκε στο εδ. Β.4.8) αποτελεί ένα συνεκτικό συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα διαστάσεως 3 («τρίπτυγμα»).

Ε.1.14 Σημείωση. (i) *Λείες δομές επί τοπολογικών πολυπτυγμάτων*. Στην περίπτωση όπου $d \leqslant 3$, κάθε d-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα διαθέτει μία λεία δομή, η οποία είναι μέχρις αμφιδιαφορίσεως (ήτοι μέχρι διαφορομορφισμού) *μονοσημάντως ορισμένη*. Αντιθέτως, όταν $d \geqslant 4$, υπάρχουν d-διάστατα τοπολογικά πολυπτύγματα που δεν μπορούν να εφοδιασθούν με καμία λεία δομή[10].

(ii) *Εξωτικές σφαίρες*. Όταν $d \leqslant 6$, τότε η $\mathbb{S}^d$ διαθέτει (μέχρις αμφιδιαφορίσεως) *μία και μόνον* λεία δομή. (Αυτή που περιεγράφη στο παράδειγμα Ε.1.10.) Ωστόσο, επί τής $\mathbb{S}^7$ υπάρχουν λείες δομές, με τις οποίες εφοδιασμένη η $\mathbb{S}^7$ είναι λείο πολύπτυγμα *μη διαφορομορφικό* εκείνου που συναντήσαμε (ως προς τη *συνήθη* λεία δομή) στο παράδειγμα Ε.1.10 για[11] $d = 7$. Λεία πολυπτύγματα τα οποία είναι ομοιομορφικά τής $\mathbb{S}^d$ αλλά όχι και διαφορομορφικά τής $\mathbb{S}^d$ (ως προς τη *συνήθη* λεία δομή) καλούνται **εξωτικές σφαίρες**[12]. Επί παραδείγματι, για δυο *περιττούς* φυσικούς αριθμούς k, ν το[13]

$$W^{2\nu-1}(k) := \left\{ (z_0, \ldots, z_\nu) \in \mathbb{C}^{\nu+1} \,\middle|\, z_0^k + \sum_{j=1}^{\nu} z_j^2 = 0 \quad \text{και} \quad \sum_{l=0}^{\nu} z_l \overline{z_l} = 1 \right\}$$

είναι ένα $(2\nu-1)$-διάστατο συμπαγές λείο πολύπτυγμα το οποίο είναι ομοιομορφικό τής $\mathbb{S}^{2\nu-1}$. Το $W^{2\nu-1}(k)$ είναι λείο πολύπτυγμα διαφορομορφικό τής $\mathbb{S}^d$ (ως προς τη *συνήθη* λεία δομή) *εάν και μόνον εάν* $k \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\, 8)$. (Τέτοιου είδους πολυπτύγματα ονομάζονται **πολυπτύγματα Brieskorn**.)

(iii) *Εξωτικοί ευκλείδειοι χώροι*. Επί τού $\mathbb{R}^d$ ορίζεται (μέχρις αμφιδιαφορίσεως) *μία και μόνον* λεία δομή όταν $d \neq 4$. Αντιθέτως, επί τού $\mathbb{R}^4$ μπορούν να ορισθούν υπεραριθμήσιμες το πλήθος (ανά δύο διαφορετικές) λείες δομές[14].

---

[10] Μεταξύ αυτών συγκαταλέγονται απλά συνεκτικά συμπαγή τοπολογικά πολυπτύγματα κατασκευασθέντα από τον M. Freedman (στις αρχές τής δεκαετίας τού 1980). Το γνωστότερο εξ αυτών στη διάσταση 4 είναι το E_8-**πολύπτυγμα**. (Το ότι δεν μπορεί να εφοδιασθεί με καμία λεία δομή αποδεικνύεται μέσω θεωρημάτων οφειλομένων στους V.A. Rokhlin και S. Donaldson.)

[11] Με άλλα λόγια, η *λεία εκδοχή* τής *εικασίας τού Poincaré* είναι εσφαλμένη.

[12] Οι πρώτες *εξωτικές σφαίρες* εμφανίζονται στο άρθρο τού J.W. Milnor: *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Annals of Mathematics **64** (1956), 399-405.

[13] Βλ. E. Brieskorn: *Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten*, Inventiones Mathematicae **2** (1966), 1-14, και F. Hirzebruch: *Singularities and exotic spheres*. In *Séminaire Bourbaki*, Vol. **10**, Exp. Nr. 314, pp. 13-32, Soc. Math. France, 1966.

[14] Βλ. C.H. Taubes: *Exotic differentiable structures on Euclidean 4-space*. In *Asymptotic behaviour of mass and spacetime geometry*, Lecture Notes in Physics, Vol. **201**, Springer-Verlag, 1984, pp. 41-43.

(iv) Λόγω των ανωτέρω (i), (ii) και (iii), για τη μελέτη των ιδιοτήτων των (αμιγώς) τοπολογικών πολυπτυγμάτων ακολουθούνται ως επί το πλείστον αλγεβροτοπολογικές προσεγγίσεις. Αντιθέτως, η μελέτη των λείων πολυπτυγμάτων (ή, έστω, των $\mathscr{C}^k$-πολυπτυγμάτων με k αρκούντως μεγάλον) γίνεται κατά κύριο λόγο στο πλαίσιο τής Διαφορικής Τοπολογίας και τής Διαφορικής Γεωμετρίας (όπου τα βασικά διαθέσιμα τεχνικά μέσα προέρχονται από τη Μαθηματική Ανάλυση).

E.1.15 Θεώρημα. *Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος. Για κάθε συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα X τόσον οι R-μόδιοι (ιδιάζουσας) ομολογίας $H_j^{\text{sing.}}(X;R)$ όσον και οι R-μόδιοι (ιδιάζουσας) συνομολογίας $H^j_{\text{sing.}}(X;R)$ είναι πεπερασμένως παραγόμενοι (για κάθε $j \in \mathbb{Z}$).*

Αποδειξη. Βλ. Bredon [57], Corollary E.5, σελ. 538-539, και Greenberg & Harper [67], Corollary 26.17.9, σελ. 228. □

E.1.16 Θεώρημα. *Εάν X είναι ένα d-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα, τότε για κάθε ακέραιο αριθμό $k > d$ έχουμε $H_k^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}) \cong \{0\}$.*

Αποδειξη. Βλ. Dold [61], Corollary 1.4, σελ. 248, και §VIII.3, σελ. 259-266. □

E.1.17 Παρατήρηση. Λόγω των θεωρημάτων E.1.15 και E.1.16, για τα συμπαγή τοπολογικά πολυπτύγματα ορίζεται (καλώς) η χαρακτηριστική τού Euler.

▸ **Τοπολογικά πολυπτύγματα με σύνορο.** Για να ενταχθούν πολύ «οικείοι» μας τοπολογικοί χώροι, όπως ο κύλινδρος $\mathbb{S}^1 \times \mathbf{I}$, η ταινία τού Möbius, οι μπάλες κ.ά. (που δεν είναι τοπολογικά πολυπτύγματα υπό την έννοια τού ορισμού E.1.7) σε κάποιο «γενικευμένο είδος» πολυπτύγματος (που να επιτρέπει την ύπαρξη «συνόρου»), απαιτείται η τροποποίηση τού ορισμού E.1.2 τού (τοπικού) χάρτη.

E.1.18 Ορισμός. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $d \in \mathbb{N}$. Ένας d-**διάστατος** (**τοπικός**) **ημιχωρικός χάρτης** (για το X) είναι ένα ζεύγος (U, Φ) αποτελούμενο από ένα υποσύνολο $U \subseteq X$ (που καλείται **πεδίο ορισμού** αυτού) και μια *αμφίρριψη* $\Phi : U \longrightarrow U'$, όπου το[15] U' είναι ανοικτό υποσύνολο τού ημιχώρου

$$\mathfrak{H}^d := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \middle| x_d \geqslant 0 \right\}.$$

Ένας τέτοιος ημιχωρικός χάρτης καλείται, ιδιαιτέρως, **εσωτερικός χάρτης** (και αντιστοίχως, **συνοριακός χάρτης**) όταν $U' \cap \partial\mathfrak{H}^d = \varnothing$ (και αντιστοίχως, όταν $U' \cap \partial\mathfrak{H}^d \neq \varnothing$), όπου

$$\partial\mathfrak{H}^d := \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \middle| x_d = 0 \right\}.$$

Ένα σημείο $x \in X$ καλείται **εσωτερικό σημείο** (και αντιστοίχως, **συνοριακό σημείο**) **τού** X όταν το x ανήκει στο πεδίο ορισμού ενός εσωτερικού (και αντιστοίχως, ενός συνοριακού) χάρτη και θέτουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(X) &:= \{x \in X \mid x \text{ εσωτερικό σημείο τού } X\}, \\ \partial X &:= \{x \in X \mid x \text{ συνοριακό σημείο τού } X\}, \end{aligned}$$

καλώντας τό $\mathrm{int}(X)$ **εσωτερικό** και το ∂X **σύνορο τού** X.

[15] Εννοείται ότι το U' είναι ανοικτό *ως προς τη σχετική τοπολογία επί τού* $\mathfrak{H}^d$ *την επαγόμενη από τη συνήθη (ευκλείδεια) τοπολογία επί τού* $\mathbb{R}^d$.

Ε.1.19 Ορισμός. Λέμε ότι δυο d-διάστατοι ημιχωρικοί χάρτες (U, Φ) και (V, Ψ) ενός $X \neq \varnothing$ είναι μεταξύ τους $\mathscr{C}^k$**-συμβιβαστοί** όταν είτε $U \cap V = \varnothing$ είτε ισχύει $U \cap V \neq \varnothing$ και -ταυτοχρόνως- οι εικόνες $\Phi(U \cap V)$ και $\Psi(U \cap V)$ είναι ανοικτά υποσύνολα τού $\mathfrak{H}^d$ και οι αμφιρρίψεις

$$\Psi \circ (\Phi^{-1}|_{\Phi(U \cap V)}) : \Phi(U \cap V) \longrightarrow \Psi(U \cap V),$$
$$\Phi \circ (\Psi^{-1}|_{\Psi(U \cap V)}) : \Psi(U \cap V) \longrightarrow \Phi(U \cap V),$$

(που καλούνται ενίοτε **απεικονίσεις μεταβάσεως**) είναι $\mathscr{C}^k$-απεικονίσεις (ήτοι *ομοιομορφισμοί* για $k = 0$ και k*-αμφιδιαφορίσεις* για $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$).

Ε.1.20 Ορισμός. Μια οικογένεια $\mathscr{A} = (U_i, \Phi_i)_{i \in I}$ d-διάστατων ημιχωρικών χαρτών ενός X καθορίζει έναν d-**διάστατο ημιχωρικό** $\mathscr{C}^k$**-άτλαντα** τού X όταν $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ και ανά δύο οι χάρτες οι ανήκοντες στην $\mathscr{A}$ είναι $\mathscr{C}^k$-συμβιβαστοί υπό την έννοια τού εδ. Ε.1.19. Λέμε ότι δυο d-διάστατοι ημιχωρικοί $\mathscr{C}^k$-άτλαντες $\mathscr{A}$ και $\mathscr{B}$ τού X είναι **συμβιβαστοί** όταν η ένωσή τους $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ αποτελεί έναν d-διάστατο ημιχωρικό $\mathscr{C}^k$-άτλαντα τού X.

Ε.1.21 Πρόταση. *Η σχέση συμβιβαστότητας μεταξύ δυο ημιχωρικών d-διάστατων $\mathscr{C}^k$-ατλάντων τού X ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας “$\sim_{d,k}$” επί τής κλάσεως όλων των d-διάστατων ημιχωρικών $\mathscr{C}^k$-ατλάντων τού X.*

Για δοθέντα d-διάστατον ημιχωρικό $\mathscr{C}^k$-άτλαντα $\mathscr{A} = (U_i, \Phi_i)_{i \in I}$ τού X συμβολίζουμε ως $[\mathscr{A}]_{\sim_{d,k}}$ την κλάση ισοδυναμίας αυτού ως προς την “$\sim_{d,k}$” και θέτουμε

$$\boxed{\mathscr{A}^{\max} := \bigcup \left\{ \mathscr{B} \mid \mathscr{B} \in [\mathscr{A}]_{\sim_{d,k}} \right\}.}$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι

$$\mathscr{A}^{\max} = \left\{ d\text{-διάστατοι ημιχωρικοί χάρτες } (U, \Phi) \text{ τού } X \;\middle|\; \begin{array}{c} (U, \Phi) \;\; \mathscr{C}^k\text{-συμβιβαστός} \\ \text{με κάθε χάρτη τού } \mathscr{A} \end{array} \right\}$$

και ότι ο $\mathscr{A}^{\max}$ είναι ο *μοναδικός* μεγιστικός d-διάστατος ημιχωρικός $\mathscr{C}^k$-άτλας τού X που περιέχει τον $\mathscr{A}$. Είθισται να λέγεται ότι ο $\mathscr{A}$ καθορίζει μέσω τού $\mathscr{A}^{\max}$ μια $\mathscr{C}^k$**-δομή** επί τού X. Και σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται κατά τρόπο φυσικό μια τοπολογία επί τού X:

$$\boxed{\mathscr{T}_{\mathscr{A}} := \left\{ W \subseteq X \;\middle|\; \Phi_i(U_i \cap W) \text{ είναι ανοικτό υποσύνολο τού } \mathfrak{H}^d, \; \forall i \in I \right\}.}$$

Ε.1.22 Ορισμός. (i) Έστω X ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια $\mathscr{C}^k$-δομή επαγόμενη από κάποιον d-διάστατον χωρικό $\mathscr{C}^k$-άτλαντα $\mathscr{A}$, ούτως ώστε ο (υποκείμενος) τοπολογικός χώρος $(X, \mathscr{T}_{\mathscr{A}})$ να είναι χώρος Hausdorff και 2ος αριθμήσιμος. Εάν $\partial X \neq \varnothing$, τότε το X καλείται d-**διάστατο** $\mathscr{C}^k$**-πολύπτυγμα με σύνορο** (d-dimensional $\mathscr{C}^k$-manifold with boundary).

(ii) Ένα d-διάστατο $\mathscr{C}^0$-πολύπτυγμα με σύνορο καλείται, ιδιαιτέρως, d-**διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα με σύνορο**.

(iii) Ένα d-διάστατο $\mathscr{C}^\infty$-πολύπτυγμα με σύνορο καλείται, ιδιαιτέρως, d-**διάστατο λείο πολύπτυγμα με σύνορο**.

E.1.23 Σημείωση. (i) Υπάρχει εδώ ένα γενικότερο πρόβλημα με τη *χρήση* τής ορολογίας και γι' αυτό κανείς οφείλει να είναι προσεκτικός. Όταν ομιλούμε για (τοπολογικό/$\mathscr{C}^k$-/λείο) πολύπτυγμα (χωρίς την πρόσθεση οιουδήποτε άλλου χαρακτηρισμού), εννοούμε πάντοτε ό,τι έχουμε ορίσει στο εδ. E.1.7 (ήτοι ένα πολύπτυγμα *χωρίς σύνορο*, χωρίς -ωστόσο- να απαιτείται να το τονίζουμε), ενώ όταν ομιλούμε για (τοπολογικό/$\mathscr{C}^k$-/λείο) πολύπτυγμα με σύνορο εννοούμε πάντοτε ό,τι έχουμε ορίσει στο εδ. E.1.22. Από την άλλη, όμως, μεριά, όταν διατυπώνουμε, π.χ., προτάσεις οι οποίες τυγχάνει να ισχύουν *για αμφότερα τα είδη πολυπτυγμάτων*, τότε είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιούμε τη φράση **πολύπτυγμα με ή χωρίς σύνορο.**

(ii) Υιοθετείται (για διευκόλυνσή μας) ο όρος **κλειστό πολύπτυγμα** [16] για να εκφράζει (εν συντομία) ένα συμπαγές πολύπτυγμα χωρίς σύνορο.

(iii) Η μπάλα $\mathbb{B}^d$ αποτελεί ένα d-διάστατο λείο συμπαγές πολύπτυγμα με σύνορο, όπου $\partial\mathbb{B}^d = \mathbb{S}^{d-1}$.

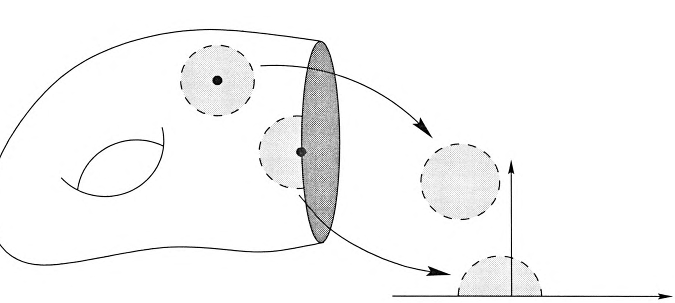
(iv) Όπως έχουμε ήδη υποσημειώσει στην αρχή τής ενότητας B.1, θα πρέπει να γίνεται διάκριση[17] μεταξύ τής *μεθορίου* (ή «τοπολογικού συνόρου») και τού *συνόρου* όπως αυτό εισήχθη στα εδάφια E.1.18 και E.1.22. Η μεθόριος *εξαρτάται πάντοτε* από τον «περιβάλλοντα χώρο». Επί παραδείγματι, η μπάλα $\mathbb{B}^d$ ναι μεν είναι υπόχωρος τού $\mathbb{R}^d$ αλλά είναι υπόχωρος *και* τού $\mathbb{R}^{d+1}$ (ταυτιζόμενη με το $\{(x_1, ..., x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_d^2 \leqslant 1, x_{d+1} = 0\}$) *και* τού εαυτού της. Έτσι,

$$\partial\mathbb{B}^d = \mathbb{S}^{d-1} = \mathrm{frnt}_{\mathbb{R}^d}(\mathbb{B}^d) \neq \varnothing = \mathrm{frnt}_{\mathbb{B}^d}(\mathbb{B}^d), \quad \partial\mathbb{B}^d = \mathbb{S}^{d-1} \subsetneqq \mathbb{B}^d = \mathrm{frnt}_{\mathbb{R}^{d+1}}(\mathbb{B}^d).$$

(v) Εάν το X είναι ένα d-διάστατο $\mathscr{C}^k$-πολύπτυγμα με σύνορο (όπως στον ορισμό E.1.22), τότε το $\mathrm{int}(X)$ είναι αφ' ενός μεν ένα ανοικτό υποσύνολο τού X, αφ' ετέρου δε ένα d-διάστατο $\mathscr{C}^k$-πολύπτυγμα *χωρίς σύνορο* (εφοδιασμένο με την $\mathscr{C}^k$-δομή την επαγόμενη μέσω τού υποάτλαντα τού $\mathscr{A}$ τού απαρτιζόμενου μόνον από τους εσωτερικούς χάρτες). Κατ' αναλογίαν, το ∂X είναι αφ' ενός μεν ένα κλειστό υποσύνολο τού X, αφ' ετέρου δε ένα $(d-1)$-διάστατο $\mathscr{C}^k$-πολύπτυγμα *χωρίς σύνορο* (εφοδιασμένο με την $\mathscr{C}^k$-δομή την επαγόμενη μέσω τού υποάτλαντα τού $\mathscr{A}$ τού απαρτιζόμενου μόνον από τους συνοριακούς χάρτες).

(vi) Εάν X_1 είναι ένα d_1-διάστατο $\mathscr{C}^k$-πολύπτυγμα με σύνορο και X_2 ένα d_2-διάστατο $\mathscr{C}^k$-πολύπτυγμα με σύνορο, τότε το καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times X_2$ καθίσταται (d_1+d_2)-διάστατο $\mathscr{C}^k$-πολύπτυγμα με σύνορό του το

$$\partial(X_1 \times X_2) = (X_1 \times \partial X_2) \cup (\partial X_1 \times X_2).$$



Ένα τοπολογικό πολύπτυγμα με σύνορο.

[16] Επί παραδείγματι, μια **κλειστή επιφάνεια** είναι ένα διδιάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα χωρίς σύνορο.

[17] Κατ' αναλογίαν, θα πρέπει να γίνεται διάκριση μεταξύ τού *τοπολογικού εσωτερικού* και τού εσωτερικού όπως εισήχθη στο εδ. E.1.18.

E.1.24 Θεώρημα («Θεώρημα αναλλοιώτου τού συνόρου»). *Εάν X είναι ένα τοπολογικό πολύπτυγμα με σύνορο, τότε κανένα σημείο τού X δεν μπορεί να είναι ταυτοχρόνως και εσωτερικό και συνοριακό. Ως εκ τούτου,* $\mathrm{int}(X) \cap \partial X = \varnothing$ *και* $X = \mathrm{int}(X) \coprod \partial X$.

Σε αμφότερους τους ορισμούς E.1.7 και E.1.22 η έννοια τού πολυπτύγματος (χωρίς ή με σύνορο) συνοδεύεται από *τη διάστασή του*. Το ακόλουθο θεώρημα μας πληροφορεί ότι αυτή αποτελεί *μια τοπολογική αναλλοίωτο*.

E.1.25 Θεώρημα («Θεώρημα αναλλοιώτου τής διαστάσεως μέσω ομοιομορφισμών»). *Έστω ότι το X_1 είναι ένα d_1-διάστατο και το X_2 ένα d_2-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα (χωρίς ή με σύνορο). Τότε ισχύει η συνεπαγωγή:* $X_1 \approx X_2 \Longrightarrow d_1 = d_2$.

Απόδειξη. Βλ. Bredon [57], Corollary 19.10, σελ. 235, και Stöcker & Zieschang [87], Satz 11.2.5, σελ. 276. □

E.1.26 Πόρισμα. *Εάν $f : X \xrightarrow{\approx} Y$ είναι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ δυο d-διάστατων τοπολογικών πολυπτυγμάτων με σύνορο, τότε ο $f|_{\partial X}$ απεικονίζει το ∂X ομοιομορφικώς επί τού ∂Y.*

Απόδειξη. Βλ. Stöcker & Zieschang [87], Satz 11.2.5, σελ. 276. □

E.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Δοθέντος ενός $d \in \mathbb{N}$, λέμε ότι δυο διατεταγμένες βάσεις $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$ και $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_d)$ τού $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^d$ **καθορίζουν τον ίδιον προσανατολισμό** όταν, θεωρηθείσες ως $(d \times d)$-πίνακες, οι ορίζουσές τους έχουν το ίδιο πρόσημο (ήτοι είναι είτε *αμφότερες θετικές* είτε *αμφότερες αρνητικές*). Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας "$\sim_{\mathrm{or.},d}$" (*σχέση καθορισμού ίδιου προσανατολισμού*) επί τού συνόλου όλων των διατεταγμένων βάσεων τού $\mathbb{R}^d$. Προφανώς, ως προς την "$\sim_{\mathrm{or.},d}$" σχηματίζονται μόνον δύο (διαφορετικές) κλάσεις ισοδυναμίας. Ένας **προσανατολισμός** επί τού $\mathbb{R}^d$ είναι η επιλογή μίας κλάσεως ισοδυναμίας ως προς την "$\sim_{\mathrm{or.},d}$" (ήτοι το σύνολο όλων των διατεταγμένων βάσεων $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$ τού $\mathbb{R}^d$ με $\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$ έχουσες το ίδιο πρόσημο[18].) Ο ορισμός αυτός γενικεύεται και για οποιονδήποτε d-διάστατο $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο V. Δυο διατεταγμένες βάσεις $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$ και $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_d)$ τού V **καθορίζουν τον ίδιον προσανατολισμό** όταν για τον πίνακα παραστάσεως $\mathbf{C} = (c_{kl}) \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ τού αυτομορφισμού f τού V με $f(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$, για κάθε $j \in \{1, \ldots, d\}$, *ως προς αυτές*, με

$$\mathbf{w}_l = \sum_{k=1}^{d} c_{kl}\mathbf{v}_k, \ \forall l \in \{1, \ldots, d\},$$

ισχύει[19]: $\det(\mathbf{C}) > 0$. Και εδώ ορίζονται *δύο προσανατολισμοί* επί τού V. Δοθέντος, λοιπόν, ενός d-διάστατου *λείου* πολυπτύγματος X, έχουμε τη δυνατότητα για κάθε σημείο $x \in X$ να θεωρήσουμε *τον εφαπτόμενο χώρο* $\mathrm{Tan}_x(X)$ *τού x στο X* ως έναν $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο και να επιλέξουμε έναν προσανατολισμό για αυτόν (κατά τα προαναφερθέντα). Μια τέτοια επιλογή προσανατολισμού για τον $\mathrm{Tan}_x(X)$ καλείται **τοπικός προσανατολισμός τού X στο x**.

[18] Ως εκ τούτου, υπάρχουν *ακριβώς δύο προσανατολισμοί* επί τού $\mathbb{R}^d$. Η κλάση ισοδυναμίας όλων των διατεταγμένων βάσεων $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$ τού $\mathbb{R}^d$ με $\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d) > 0$ και η κλάση ισοδυναμίας όλων των διατεταγμένων βάσεων $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$ τού $\mathbb{R}^d$ με $\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d) < 0$.

[19] Όταν $V = \mathbb{R}^d$, κανείς επανέρχεται στον προηγηθέντα ορισμό παρατηρώντας ότι $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$, όπου οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι οι πίνακες οι σχηματιζόμενοι χρησιμοποιώντας τα στοιχεία τής πρώτης (και αντιστοίχως, τής δεύτερης) βάσεως ως στηλοδιανύσματα. Προφανώς, $\det(\mathbf{C}) > 0$ εάν και μόνον εάν $\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) > 0$.

Εδώ ανακύπτει ένα πρόβλημα: Δεν είναι πάντα εφικτό να ορισθεί επί τού X ένας *ολομερής προσανατολισμός*. (Π.χ., όταν ως X θεωρήσουμε το σταυρωτό διαπέτασμα ή τη φιάλη τού Klein.) Για να συμβεί αυτό απαιτείται ο άτλαντας $\mathscr{A}$ μέσω τού οποίου επάγεται η $\mathscr{C}^{\infty}$-δομή επί τού X να έχει την εξής ιδιότητα: Εάν $x \in X$ και $(U_x, \Phi), (V_x, \Psi)$ είναι δυο χάρτες με κέντρο x (βλ. E.1.8) ανήκοντες στον $\mathscr{A}$, τότε ο ιακωβιανός $(d \times d)$-πίνακας τής απεικονίσεως μεταβάσεως $\Psi \circ (\,\Phi^{-1}|_{\Phi(U_x \cap V_x)})$ στο $\mathbf{0}$ έχει ορίζουσα *θετική*[20].

E.2.1 Παράδειγμα. Εάν X είναι ένα d-διάστατο μιγαδικό πολύπτυγμα (βλ. E.1.11 (iv)), τότε το X *είναι πάντοτε προσανατολίσιμο*. Πράγματι· εάν υποθέσουμε ότι $x \in X$ και $(U_x, \Phi), (V_x, \Psi)$ είναι δυο χάρτες με κέντρο x ανήκοντες στον $\mathscr{A}$, τότε ο *μιγαδικός ιακωβιανός* $(d \times d)$-πίνακας τής *αμφιολόμορφης* απεικονίσεως μεταβάσεως

$$f := \Psi \circ (\,\Phi^{-1}|_{\Phi(U_x \cap V_x)}) : \Phi(U_x \cap V_x) \longrightarrow \Psi(U_x \cap V_x)$$

(εάν $f_1, ..., f_d$ συμβολίζουν τις συνιστώσες συναρτήσεις τής f) γράφεται ως εξής:

$$\mathrm{Jac}_{\mathbb{C}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_d}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial z_d} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C}).$$

Μεταβαίνοντας στις αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις $f_j = u_j + iv_j$, όπου $u_j, v_j : \Phi(U_x \cap V_x) \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι λείες, ο *πραγματικός ιακωβιανός* $(2d \times 2d)$-πίνακας τής f είναι ο

$$\mathrm{Jac}_{\mathbb{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} (\frac{\partial u_j}{\partial x_k})_{1 \leqslant j,k \leqslant d} & (\frac{\partial u_j}{\partial y_k})_{1 \leqslant j,k \leqslant d} \\ \hline (\frac{\partial v_j}{\partial x_k})_{1 \leqslant j,k \leqslant d} & (\frac{\partial v_j}{\partial y_k})_{1 \leqslant j,k \leqslant d} \end{array}\right).$$

Θέτοντας $\mathbf{A} := (\frac{\partial u_j}{\partial x_k})_{1 \leqslant j,k \leqslant d}$, $\mathbf{B} := (\frac{\partial v_j}{\partial x_k})_{1 \leqslant j,k \leqslant d}$ και παρατηρώντας ότι οι εξισώσεις των Cauchy και Riemann δίδουν

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{\partial v_j}{\partial y_k} \text{ και } \frac{\partial u_j}{\partial y_k} = -\frac{\partial v_j}{\partial x_k},$$

έχουμε

$$\boxed{\mathrm{Jac}_{\mathbb{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{array}\right)}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial z_k} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right)(u_j + iv_j) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_j}{\partial y_k} + i\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial u_j}{\partial y_k}\right)\right) = \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + i\frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\boxed{\mathrm{Jac}_{\mathbb{C}}(f) = \mathbf{A} + i\,\mathbf{B}.}$$

Εν συνεχεία θεωρούμε τον βοηθητικό αντιστρέψιμο πίνακα

$$\mathbf{Q} := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d & i \cdot \mathbf{I}_d \\ \hline \mathbf{I}_d & -i \cdot \mathbf{I}_d \end{array}\right) \text{ με } \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d & \mathbf{I}_d \\ \hline -i \cdot \mathbf{I}_d & i \cdot \mathbf{I}_d \end{array}\right)$$

[20]Η συνθήκη αυτή ισοδυναμεί με την προσανατολισιμότητα τής *εφαπτόμενης δέσμης* (tangent bundle) τού X.

(όπου $\mathbf{I}_d$ ο μοναδιαίος $(d \times d)$-πίνακας). Προφανώς,

$$\mathbf{Q}\,\mathrm{Jac}_{\mathbb{R}}(f)\,\mathbf{Q}^{-1} = \tfrac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d & i\cdot\mathbf{I}_d \\ \hline \mathbf{I}_d & -i\cdot\mathbf{I}_d \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d & \mathbf{I}_d \\ \hline -i\cdot\mathbf{I}_d & i\cdot\mathbf{I}_d \end{array}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}+i\,\mathbf{B} & -\mathbf{B}+i\,\mathbf{A} \\ \hline \mathbf{A}-i\,\mathbf{B} & -\mathbf{B}-i\,\mathbf{A} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_d & \mathbf{I}_d \\ \hline -i\cdot\mathbf{I}_d & i\cdot\mathbf{I}_d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}+i\,\mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}-i\,\mathbf{B} \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Jac}_{\mathbb{C}}(f) & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \overline{\mathrm{Jac}_{\mathbb{C}}(f)} \end{array}\right),$$

οπότε[21]

$$\det(\mathrm{Jac}_{\mathbb{R}}(f)) = \det(\mathbf{Q})\det(\mathbf{Q}^{-1})\det(\mathrm{Jac}_{\mathbb{R}}(f)) = \det(\mathbf{Q})\det(\mathrm{Jac}_{\mathbb{R}}(f))\det(\mathbf{Q}^{-1})$$
$$= \det(\mathbf{Q}\,\mathrm{Jac}_{\mathbb{R}}(f)\,\mathbf{Q}^{-1}) = \det(\mathrm{Jac}_{\mathbb{C}}(f))\det(\overline{\mathrm{Jac}_{\mathbb{C}}(f)}) = \det(\mathrm{Jac}_{\mathbb{C}}(f))\,\overline{\det(\mathrm{Jac}_{\mathbb{C}}(f))}$$
$$= |\det(\mathrm{Jac}_{\mathbb{C}}(f))|^2 \geqslant 0.$$

Επειδή η f είναι αμφιολόμορφη, η ορίζουσα τού πραγματικού ιακωβιανού της πίνακα $\mathrm{Jac}_{\mathbb{R}}(f)$ στο $\mathbf{0}$ είναι $\neq 0$, οπότε είναι κατ' ανάγκην *θετική*.

Εάν το δοθέν X είναι τοπολογικό πολύπτυγμα (χωρίς να είναι κατ' ανάγκην εφοδιασμένο με κάποια διαφορίσιμη δομή), τα πράγματα δυσκολεύουν ακόμη και για τη θέσπιση *τοπικού προσανατολισμού* σε κάποιο σημείο $x \in X$. Γι' αυτόν τον λόγο καταφεύγουμε στην αντιμετώπιση τόσον τού τοπικού όσον και τού ολομερούς προβλήματος *μέσω των μοδίων* (ιδιάζουσας) *ομολογίας τού* X.

Ε.2.2 Λήμμα. *Εάν R είναι ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος και X ένα d-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα, τότε για κάθε σημείο $x \in X$ ο R-μόδιος $H_d^{\text{sing.}}(X, X\smallsetminus\{x\}; R)$ είναι ισόμορφος με τον R, ενώ $H_n^{\text{sing.}}(X, X\smallsetminus\{x\}; R) \cong \{0\}$ για κάθε ακέραιο αριθμό $n \neq d$.*

Απόδειξη. Έστω (U_x, Φ) ένας χάρτης τού X με κέντρο το x. Δίχως βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Phi(U_x) = \mathbb{R}^d$. (Βλ. εδ. Ε.1.8.) Επομένως υφίσταται ομοιομορφισμός τοπολογικών ζευγών

$$h : (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\smallsetminus\{\mathbf{0}\}) \xrightarrow{\approx} (U_x, U_x\smallsetminus\{x\}).$$

Εάν $i : U_x \hookrightarrow X$ και $j : (\mathbb{B}^d, \mathbb{S}^{d-1}) \hookrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d\smallsetminus\{\mathbf{0}\})$ είναι οι συνήθεις ενθέσεις, τότε λόγω τού αξιώματος τής εκτομής για την $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$ επάγεται μέσω τής συνθέσεως $i \circ h \circ j : (\mathbb{B}^d, \mathbb{S}^{d-1}) \longrightarrow (X, X\smallsetminus\{x\})$ *ισομορφισμός* R-μοδίων

$$H_n^{\text{sing.}}(i \circ h \circ j) : H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{B}^d, \mathbb{S}^{d-1}; R) \xrightarrow{\cong} H_n^{\text{sing.}}(X, X\smallsetminus\{x\}; R)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αρκεί λοιπόν να ληφθεί υπ' όψιν το θεώρημα C.4.3 για την $(H_\bullet^{\text{sing.}}, \partial_\bullet^{\text{sing.}})$. □

Ε.2.3 Ορισμός. Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος και έστω X ένα d-διάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα.

(i) Ένας R-**προσανατολισμός** επί τού X είναι μια επιλογή $\left\{ \mu_x \in H_d^{\text{sing.}}(X, X\smallsetminus\{x\}; R) \,\middle|\, x \in X \right\}$ γεννητόρων[22], ούτως ώστε να ικανοποιείται η εξής *συνθήκη συνεχείας*: Για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια περιοχή U τού x, καθώς και ένα στοιχείο $\mu_U \in H_d^{\text{sing.}}(X, X\smallsetminus U; R)$, ούτως

[21] Παύλα σε πίνακα (με μιγαδικές εγγραφές) σημαίνει *συζυγής πίνακας* (δηλαδή ότι κανείς τον δημιουργεί λαμβάνοντας τον συζυγή καθεμιάς εγγραφής τού αρχικού).

ώστε για κάθε $y \in U$ ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$H_d^{\text{sing.}}(i_y) = H_d^{\text{sing.}}(i_y; R) : H_d^{\text{sing.}}(X, X \setminus U; R) \longrightarrow H_d^{\text{sing.}}(X, X \setminus \{y\}; R)$$

ο επαγόμενος από την ένθεση $i_y : (X, X \setminus U) \hookrightarrow (X, X \setminus \{y\})$ να απεικονίζει το μ_U στον (προεπιλεγμένο) γεννήτορα μ_y τού $H_d^{\text{sing.}}(X, X \setminus \{y\}; R) \cong R$.

(ii) Το X καλείται R-**προσανατολίσιμο** όταν μπορεί να ορισθεί (τουλάχιστον) ένας R-προσανατολισμός επ' αυτού. Λέμε ότι το X είναι R-**προσανατολισμένο** όταν είναι R-προσανατολίσιμο και, ταυτοχρόνως, έχει παγιωθεί ένας (συγκεκριμένος) R-προσανατολισμός επ' αυτού.

(iii) Ένας **προσανατολισμός** επί τού X είναι ένας $\mathbb{Z}$-προσανατολισμός επ' αυτού. Το X καλείται (απλώς) **προσανατολίσιμο** όταν είναι $\mathbb{Z}$-προσανατολίσιμο. Το X καλείται (απλώς) **προσανατολισμένο** όταν είναι $\mathbb{Z}$-προσανατολισμένο.

Ε.2.4 Θεώρημα. *Κάθε τοπολογικό πολύπτυγμα είναι πάντοτε $\mathbb{Z}_2$-προσανατολίσιμο.*

Απόδειξη. Βλ. Greenberg & Harper [67], Proposition 22.12, σελ. 162. □

Ε.2.5 Θεώρημα. *Κάθε προσανατολίσιμο τοπολογικό πολύπτυγμα είναι και R-προσανατολίσιμο, για κάθε μη τετριμμένο μεταθετικό δακτύλιο R.*

Ε.2.6 Πρόταση. *Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος και έστω X ένα τοπολογικό πολύπτυγμα.*

(i) *Εάν το X είναι R-προσανατολίσιμο, τότε και κάθε ανοικτό υποπολύπτυγμά του είναι R-προσανατολίσιμο.*

(ii) *Το X είναι R-προσανατολίσιμο εάν και μόνον εάν κάθε συνεκτική συνιστώσα αυτού είναι R-προσανατολίσιμη.*

Απόδειξη. Βλ. Greenberg & Harper [67], Proposition 22.7, σελ. 161. □

Ε.2.7 Θεώρημα. *Εάν R είναι μια ακεραία περιοχή και X ένα d-διάστατο συνεκτικό κλειστό πολύπτυγμα, τότε*

$$\boxed{H_d^{\text{sing.}}(X; R) \cong \begin{cases} R, & \text{όταν το } X \text{ είναι} \\ & R\text{-προσανατολίσιμο,} \\ \{0\}, & \text{αλλιώς.} \end{cases}}$$

Απόδειξη. Βλ. Greenberg & Harper [67], Corollary 22.28, σελ. 167. □

Ε.2.8 Σημείωση. Εάν R είναι ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος και X ένα d-διάστατο συνεκτικό τοπολογικό πολύπτυγμα εφοδιασμένο με έναν R-προσανατολισμό, τότε η πολλαπλασιαστική ομάδα $(R^\times, \cdot)$ των αντιστρεψίμων στοιχείων τού R (βλ. εδ. 1.2.11) δρα ελευθέρως και μεταβατικώς επί τού συνόλου όλων των R-προσανατολισμών επί τού X. Π.χ., εάν $R = \mathbb{Z}$, τότε $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$, οπότε ένα συνεκτικό τοπολογικό πολύπτυγμα είτε δεν διαθέτει κανέναν ($\mathbb{Z}$-)προσανατολισμό είτε διαθέτει *ακριβώς δύο*.

[22]Κάθε επιλογή γεννήτορα μ_x καλείται **τοπικός** R-**προσανατολισμός** τού X στο x.

E.2.9 Θεώρημα. *Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος και έστω X ένα d-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα.*

(a) *Εάν* $\left\{ \mu_x \in H_d^{\text{sing.}}(X, X \smallsetminus \{x\}; R) \middle| x \in X \right\}$ *είναι ένας R-προσανατολισμός επί τού X, τότε υπάρχει μία και μόνον κλάση ομολογίας*

$$\mu_X \in H_d^{\text{sing.}}(X; R)$$

με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $x \in X$ ο ομομορφισμός

$$H_d^{\text{sing.}}(i_x) : H_d^{\text{sing.}}(X; R) \longrightarrow H_d^{\text{sing.}}(X, X \smallsetminus \{x\}; R)$$

ο επαγόμενος από την ένθεση $i_x : X = (X, \varnothing) \hookrightarrow (X, X \smallsetminus \{x\})$ είναι ισομορφισμός και $H_d^{\text{sing.}}(i_x)(\mu_X) = \mu_x$. Επιπροσθέτως, εάν το X είναι συνεκτικό, η μ_X είναι ένας γεννήτορας τού $H_d^{\text{sing.}}(X; R) \cong R$.

(b) *Εάν το X είναι συνεκτικό, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το X είναι προσανατολίσιμο.*

(ii) *Η αβελιανή ομάδα $H_d^{\text{sing.}}(X; \mathbb{Z})$ (ως $\mathbb{Z}$-μόδιος) είναι ισόμορφη τής $(\mathbb{Z}, +)$.*

(iii) *Η αβελιανή ομάδα $H_d^{\text{sing.}}(X; \mathbb{Z})$ (ως $\mathbb{Z}$-μόδιος) δεν είναι τετριμμένη.*

Απόδειξη. Βλ. Lück [76], Satz 8.13, σελ. 137-138. □

E.2.10 Ορισμός. Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος και έστω X ένα d-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα με έναν R-προσανατολισμό επ' αυτού. Τότε η κλάση ομολογίας $\mu_X \in H_d^{\text{sing.}}(X; R)$ (όπως στο θεώρημα E.2.9) ονομάζεται **θεμελιώδης κλάση τού** X και συμβολίζεται ως $[X; R]_{\text{f.cl.}}$ και στην ειδική περίπτωση όπου $R = \mathbb{Z}$ απλώς ως $[X]_{\text{f.cl.}}$.

E.2.11 Σημείωση. Έστω R ένας μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος. Εάν X είναι ένα d-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα *με σύνορο*, τότε ένας R-**προσανατολισμός** επί τού X δεν είναι τίποτε άλλο από έναν R-προσανατολισμό (υπό την έννοια τού ορισμού E.2.3) $\{\mu_x | x \in \text{int}(X)\}$ επί τού τοπολογικού πολυπτύγματος $\text{int}(X)$ (χωρίς σύνορο). Και σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται η **θεμελιώδης κλάση**

$$[X, \partial X; R]_{\text{f.cl.}} \in H_d^{\text{sing.}}(X, \partial X; R)$$

(και αντιστοίχως, $[X, \partial X]_{\text{f.cl.}} \in H_d^{\text{sing.}}(X, \partial X; \mathbb{Z})$, όταν $R = \mathbb{Z}$),

ως η μοναδική κλάση ομολογίας με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $x \in X \smallsetminus \partial X$ ο ομομορφισμός

$$H_d^{\text{sing.}}(i_x) : H_d^{\text{sing.}}(X, \partial X; R) \longrightarrow H_d^{\text{sing.}}(X, X \smallsetminus \{x\}; R)$$

ο επαγόμενος από την ένθεση $i_x : (X, \partial X) \hookrightarrow (X, X \smallsetminus \{x\})$ είναι ισομορφισμός και

$$H_d^{\text{sing.}}(i_x)([X, \partial X; R]_{\text{f.cl.}}) = \mu_x.$$

Εν τοιαύτη περιπτώσει, η εικόνα τής θεμελιώδους κλάσεως $[X, \partial X; R]_{\text{f.cl.}}$ μέσω τού συνδετικού ομομορφισμού

$$\partial_d^{\text{sing.}} : H_d^{\text{sing.}}(X, \partial X; R) \longrightarrow H_{d-1}^{\text{sing.}}(\partial X; R)$$

είναι η θεμελιώδης κλάση $[\partial X; R]_{\text{f.cl.}}$ τού $(d-1)$-διάστατου συμπαγούς τοπολογικού πολυπτύγματος (χωρίς σύνορο) ∂X η καθοριζόμενη από τον επαγόμενο R-προσανατολισμό επί τού ∂X.

E.3 ΔΥΪΣΜΟΣ ΚΑΤΑ POINCARÉ ΚΑΙ LEFSCHETZ

Για τα R-προσανατολίσιμα συμπαγή τοπολογικά πολυπτύγματα υφίστανται συσχετισμοί των μοδίων (ιδιάζουσας) ομολογίας και συνομολογίας παρεπόμενοι κάποιων φαινομένων «εσώτερου δυϊσμού» (τα οποία είχαν γίνει αντιληπτά ήδη από τον Poincaré και τώρα πλέον μπορούν να παρουσιάζονται κατά τρόπο συστηματικό σε πιο «σύγχρονη γλώσσα»).

E.3.1 Θεώρημα («Δυϊσμός κατά Poincaré»). *Έστω R τυχών μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος. Εάν X είναι ένα d-διάστατο κλειστό τοπολογικό πολύπτυγμα εφοδιασμένο με έναν R-προσανατολισμό $\left\{\mu_x \in H_d^{\text{sing.}}(X, X\smallsetminus\{x\}; R) \,\middle|\, x \in X\right\}$ και $[X;R]_{\text{f.cl.}}$ η αντιστοιχιζόμενη θεμελιώδης κλάση, τότε η απεικόνιση δυϊσμού κατά Poincaré*

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{PD}: H^{d-n}_{\text{sing.}}(X;R) \longrightarrow H_n^{\text{sing.}}(X;R)\\ \xi \longmapsto \mathbf{PD}(\xi) := \xi \frown [X;R]_{\text{f.cl.}}\end{gathered}}$$

αποτελεί έναν ισομορφισμό R-μοδίων για κάθε $n \in \{0, \ldots, d\}$.

Απόδειξη. Βλ. Dold [61], Chapter VIII, §9, σελ. 303-304, Greenberg & Harper [67], Chapter 26, σελ. 215-229, Hatcher [68], §3.3, σελ. 241-248, Massey [77], Chapter XIV, §4-5, σελ. 360-368, May [78], Chapter 20, §5, σελ. 158-160, Spanier [86], Chapter 6, §2, Theorem 18, σελ. 297, tom Dieck [91], Theorem 18.3.4, σελ. 446 και 451-455, και Vick [92], Theorem 6.18, σελ. 165-169. □

E.3.2 Πόρισμα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν X είναι ένα d-διάστατο κλειστό R-προσανατολίσιμο τοπολογικό πολύπτυγμα, τότε για κάθε $n \in \{0, \ldots, d\}$,*

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X;R) \cong \text{frp}(H_{d-n}^{\text{sing.}}(X;R)) \oplus \text{tors}(H_{d-n-1}^{\text{sing.}}(X;R))} \tag{E.1}$$

και, ως εκ τούτου,

$$\boxed{\text{fr-rank}_R(H_n^{\text{sing.}}(X;R)) = \text{fr-rank}_R(H_{d-n}^{\text{sing.}}(X;R)).} \tag{E.2}$$

Ιδιαιτέρως, για $R = \mathbb{Z}$, η (E.2) δίδει για τους αριθμούς Betti τού X:

$$\boxed{b_n(X) = b_{d-n}(X).}$$

Σημειωτέον ότι, στην ειδική περίπτωση όπου $\text{tors}(H_n^{\text{sing.}}(X;R)) \cong \{0\}$, έχουμε

$$\text{tors}(H_{d-n-1}^{\text{sing.}}(X;R)) \cong \{0\} \ \text{ και } \ H_n^{\text{sing.}}(X;R) \cong H_{d-n}^{\text{sing.}}(X;R). \tag{E.3}$$

Απόδειξη. Κατά το θεώρημα E.1.15, οι $H_j^{\text{sing.}}(X;R)$ και $H^j_{\text{sing.}}(X;R)$ είναι πεπερασμένως παραγόμενοι R-μόδιοι. Έτσι, για κάθε $n \in \{0, \ldots, d\}$,

$$H_n^{\text{sing.}}(X;R) \underset{\text{E.3.1}}{\cong} H^{d-n}_{\text{sing.}}(X;R) \underset{(8.10),\ 8.1.7\ (\text{i})}{\cong} \text{Hom}_R(H_{d-n}^{\text{sing.}}(X;R), R) \oplus \text{Ext}^1_R(H_{d-n-1}^{\text{sing.}}(X;R), R),$$

όπου (βάσει τού θεωρήματος 2.6.6)

$$\begin{aligned} H_{d-n}^{\text{sing.}}(X;R) &= \text{tors}(H_{d-n}^{\text{sing.}}(X;R)) \oplus \text{frp}(H_{d-n}^{\text{sing.}}(X;R)),\\ H_{d-n-1}^{\text{sing.}}(X;R) &= \text{tors}(H_{d-n-1}^{\text{sing.}}(X;R)) \oplus \text{frp}(H_{d-n-1}^{\text{sing.}}(X;R)).\end{aligned}$$

Επομένως δημιουργείται η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n-1}(X;R)),R) \oplus \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{frp}(H^{\text{sing.}}_{d-n-1}(X;R)),R) \hookrightarrow H^{d-n}_{\text{sing.}}(X;R)$$
$$\twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R)),R) \oplus \mathrm{Hom}_R(\mathrm{frp}(H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R)),R) \longrightarrow \{0\}$$

Επειδή ο $\mathrm{frp}(H^{\text{sing.}}_{d-n-1}(X;R))$ είναι ελεύθερος (και, ως εκ τούτου, *και* προβολικός), έχουμε (κατά το θεώρημα 5.2.11) $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{frp}(H^{\text{sing.}}_{d-n-1}(X;R)),R) \cong \{0\}$. Από την άλλη πλευρά,

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{frp}(H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R)),R) \cong \mathrm{Hom}_R(R^{\text{fr-rank}_R(H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R))},R)$$
$$\cong \mathrm{Hom}_R(R,R)^{\text{fr-rank}_R(H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R))} \cong R^{\text{fr-rank}_R(H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R))} \cong \mathrm{frp}(H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R))$$

και[23] ισχύει $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R)),R) \cong \{0\}$. Άρα υπολείπεται η εξέταση τού R-μοδίου $\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n-1}(X;R)),R)$. Επειδή ο $\mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n-1}(X;R))$ είναι πεπερασμένως παραγόμενος (ως υπομόδιος πεπερασμένως παραγομένου R-μοδίου, βλ. πόρισμα 2.5.49), εάν δεν είναι τετριμμένος, τότε θα εκφράζεται (μέχρις ισομορφισμού, σύμφωνα με το (iii) τού θεωρήματος 2.6.30) υπό τη μορφή

$$\mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n-1}(X;R)) \cong \bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}(R/\left\langle p_j^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle)$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n-1}(X;R)),R) \underset{(5.12)}{\cong} \bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}\mathrm{Ext}^1_R(R/\left\langle p_j^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle,R)$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n-1}(X;R)),R) \underset{5.2.15}{\cong} \bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}(R/\left\langle p_j^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle) \cong \mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n-1}(X;R)),$$

οπότε[24] καταλήγουμε στη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \to \mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n-1}(X;R)) \hookrightarrow H^{d-n}_{\text{sing.}}(X;R) \twoheadrightarrow \mathrm{frp}(H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R)) \to \{0\}$$

η οποία (ούσα διασπώμενη, βλ. πόρισμα 3.1.31) δίδει (μέσω τού 3.1.29) τη σχέση (E.1). □

E.3.3 Πόρισμα. *Έστω X ένα d-διάστατο κλειστό τοπολογικό πολύπτυγμα. Τότε ισχύει η συνεπαγωγή*:

$$\boxed{d \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2) \Longrightarrow \chi(X) = 0.}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα E.2.4, το X είναι $\mathbb{Z}_2$-προσανατολίσιμο. Επειδή (κατά τα θεωρήματα E.1.15 και E.1.16, και την πρόταση D.2.40) $\chi(X) = \chi(X;\mathbb{Z}_2)$ (με το $\mathbb{Z}_2$ *σώμα*) και η διάσταση d είναι εξ υποθέσεως τής μορφής $d = 2\nu + 1$, για κάποιον $\nu \in \mathbb{N}_0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\chi(X) &= \sum_{j=0}^{d}(-1)^j \dim_{\mathbb{Z}_2}(H^{\text{sing.}}_j(X;\mathbb{Z}_2)) \\ &= \sum_{j=0}^{\nu}(-1)^j \dim_{\mathbb{Z}_2}(H^{\text{sing.}}_j(X;\mathbb{Z}_2)) + \sum_{k=\nu+1}^{2\nu+1}(-1)^k \dim_{\mathbb{Z}_2}(H^{\text{sing.}}_k(X;\mathbb{Z}_2)).\end{aligned}$$

[23] Πράγματι· εάν $f \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R)),R)$ και $a \in \mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R))$, τότε υπάρχει $r \in R\smallsetminus\{0_R\}$ με $ra = 0_{H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R)}$. (Βλ. εδ. 2.6.1.) Κατά συνέπειαν, επειδή ο R είναι ακεραία περιοχή,

$$rf(a) = f(ra) = f(0_{H^{\text{sing.}}_{d-n}(X;R)}) = 0_R \Rightarrow f(a) = 0_R \Rightarrow f = 0.$$

[24] Ακόμη και εάν ο $\mathrm{tors}(H^{\text{sing.}}_{d-n-1}(X;R))$ *είναι* τετριμμένος, το συμπέρασμα παραμένει το ίδιο.

Προφανώς, για $k \in \{\nu+1, ..., 2\nu+1\}$, ο δυϊσμός κατά Poincaré δίδει

$$\dim_{\mathbb{Z}_2}(H_k^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}_2)) = \dim_{\mathbb{Z}_2}(H_{\text{sing.}}^{2\nu+1-k}(X;\mathbb{Z}_2)) = \dim_{\mathbb{Z}_2}(H_{2\nu+1-k}^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}_2)),$$

οπότε

$$\begin{aligned}\sum_{k=\nu+1}^{2\nu+1}(-1)^k \dim_{\mathbb{Z}_2}(H_k^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}_2)) &= \sum_{k=\nu+1}^{2\nu+1}(-1)^k \dim_{\mathbb{Z}_2}(H_{2\nu+1-k}^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}_2)) \\ &= \sum_{j=0}^{\nu}(-1)^{2\nu+1-j} \dim_{\mathbb{Z}_2}(H_j^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}_2)),\end{aligned}$$

όπου $j = 2\nu+1-k$ (και $k = 2\nu+1-j$). Κατά συνέπειαν,

$$\chi(X) = \sum_{j=0}^{\nu}((-1)^j + (-1)^{2\nu+1-j}) \dim_{\mathbb{Z}_2}(H_j^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}_2)). \tag{E.4}$$

Όμως τα $(-1)^j$ και $(-1)^{2\nu+1-j}$ έχουν πάντοτε αντίθετα πρόσημα. Άρα το άθροισμα στο δεξιό μέλος τής (E.4) ισούται κατ' ανάγκην με μηδέν. □

E.3.4 Πόρισμα. *Έστω X ένα d-διάστατο προσανατολίσιμο κλειστό τοπολογικό πολύπτυγμα. Τότε ισχύει η συνεπαγωγή:*

$$\boxed{d \not\equiv 0 (\text{mod}\, 4) \Longrightarrow \chi(X) \equiv 0 (\text{mod}\, 2).}$$

Απόδειξη. Βλ. Dold [61], Chapter VIII, Corollary 8.14, σελ. 300-301, ή Greenberg & Harper [67], Corollary 26.11, σελ. 222. □

Η ακόλουθη γενίκευση[25] τού θεωρήματος E.3.1 για συμπαγή τοπολογικά πολυπτύγματα με σύνορο οφείλεται στον S. Lefschetz[26].

S. Lefschetz

[25] Βλ. S. Lefschetz: *Transformations of manifolds with a boundary*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, **12** (1926), 737-739.

[26] Lefschetz, *Solomon* (3/9/1884-5/10/1972). Γεννήθηκε στη Μόσχα (γονείς εβραϊκής καταγωγής με τουρκική υπηκοότητα), σπούδασε στο Παρίσι Μηχανολογία και κατόπιν μετέβη στις Ηνωμένες Πολιτείες, όπου και συνέχισε τις σπουδές του στα Μαθηματικά. Η μαθηματική του σταδιοδρομία ξεκίνησε το 1910 από τα Πανεπιστήμια τού Worcester (PhD, 1911), τής Nebraska και τού Kansas. Από το 1925 έως και το 1953 διετέλεσε καθηγητής τού Πανεπιστημίου τού Princeton. Ιδιαίτερη υπήρξε η συμβολή του στην Αλγεβρική Τοπολογία και Γεωμετρία. (Πολλές, μάλιστα, έννοιες τής σύγχρονης ορολογίας εισήχθησαν από αυτόν). Δειγματοληπτικώς, για τα ερευνητικά αποτελέσματά του, πέραν των θεωρημάτων του περί σταθερών σημείων (μεσω των οποίων έγινε περισσότερο γνωστός), αξίζει να αναφερθεί ο προσδιορισμός τού αριθμού των ανεξαρτήτων μερομόρφων p-διαστάτων διαφορικών μορφών (διαφόρων ειδών) επί ενός μη ιδιάζοντος αλγεβρικού πολυπτύγματος X και ο συσχετισμός αυτού τού αριθμού με τους αριθμούς Betti τού X, ο τύπος Picard-Lefschetz στη μελέτη των μηδενιζόμενων κυκλημάτων (vanishing cycles) κ.ά. Ο Lefschetz έγραψε επίσης άρθρα επί των Διαφορικών Εξισώσεων, με κάποια έμφαση στη Θεωρία των Μη Γραμμικών Ταλαντώσεων. (Βλ. Bull. Am. Math. Soc. **79**, (1973), 663-680, και Bull. London Math. Soc. **6**, (1974), 198-217.)

E.3.5 Θεώρημα («Δυϊσμός κατά Lefschetz», 1926). *Έστω R τυχών μη τετριμμένος μεταθετικός δακτύλιος. Εάν X είναι ένα d-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα με σύνορο, εφοδιασμένο με έναν R-προσανατολισμό $\{\mu_x \mid x \in X \smallsetminus \partial X\}$, και $[X, \partial X; R]_{\text{f.cl.}}$ η αντιστοιχιζόμενη θεμελιώδης κλάση* (βλ. εδ. E.2.11), *τότε οι απεικονίσεις δυϊσμού κατά Lefschetz*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{LD} : H^{d-n}_{\text{sing.}}(X, \partial X; R) &\longrightarrow H^{\text{sing.}}_n(X; R) \\ \xi &\longmapsto \mathbf{LD}(\xi) := \xi \frown [X, \partial X; R]_{\text{f.cl.}} \end{aligned}}$$

και

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{LD}' : H^{d-n}_{\text{sing.}}(X; R) &\longrightarrow H^{\text{sing.}}_n(X, \partial X; R) \\ \xi &\longmapsto \mathbf{LD}'(\xi) := \xi \frown [X, \partial X; R]_{\text{f.cl.}} \end{aligned}}$$

αποτελούν ισομορφισμούς R-μοδίων για κάθε $n \in \{0, ..., d\}$.

Αποδειξη. Βλ. Bredon [57], Chapter VI, §9, σελ. 355-359, Dold [61], Chapter VIII, §9, σελ. 303-304, Greenberg & Harper [67], Chapter 28, σελ. 237-245, Hatcher [68], Theorem 3.43, σελ. 254, Massey [77], Chapter XIV, §7, σελ. 375-380, May [78], σελ. 168-169, Spanier [86], Chapter 6, §2, Theorem 20, σελ. 298, tom Dieck [91], Theorem 18.6.1, σελ. 455-456, και Vick [92], Theorem 6.25, σελ. 171-173. □

E.3.6 Πόρισμα. *Έστω Y ένα d-διάστατο κλειστό τοπολογικό πολύπτυγμα. Εάν υποτεθεί ότι υπάρχει $(d+1)$-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα X με σύνορο $\partial X = Y$, τότε έχουμε*

$$\chi(Y) \equiv 0 (\text{mod}\, 2).$$

Αποδειξη. Εάν υπάρχει $(d+1)$-διάστατο συμπαγές τοπολογικό πολύπτυγμα X με σύνορο $\partial X = Y$, τότε θεωρούμε την ακριβή ακολουθία τού τοπολογικού ζεύγους (X, Y) με συντελεστές ειλημμένους από το σώμα $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{gathered} \{0\} \longrightarrow H^{\text{sing.}}_{d+1}(X; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{\text{sing.}}_{d+1}(X, Y; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{\text{sing.}}_{d}(Y; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \longrightarrow H^{\text{sing.}}_{0}(Y; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{\text{sing.}}_{0}(X; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{\text{sing.}}_{0}(X, Y; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \{0\}. \end{gathered}$$

Το εναλλάσσον άθροισμα των διαστάσεων των ομολογικών ομάδων ($\mathbb{Z}_2$-διανυσματικών χώρων) αυτής τής ακριβούς ακολουθίας ισούται με μηδέν. (Βλ. λήμμα 3.4.4.) Άρα το (σκέτο) άθροισμα των διαστάσεων των εν λόγω ομάδων οφείλει να είναι *άρτιο*[27]. Επομένως,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{d} \dim_{\mathbb{Z}_2}(H^{\text{sing.}}_k(Y; \mathbb{Z}_2)) + \sum_{k=0}^{d+1} \dim_{\mathbb{Z}_2}(H^{\text{sing.}}_k(X; \mathbb{Z}_2)) \\ &+ \sum_{k=0}^{d+1} \dim_{\mathbb{Z}_2}(H^{\text{sing.}}_k(X, Y; \mathbb{Z}_2)) \equiv 0 (\text{mod}\, 2). \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά, έχουμε αφ' ενός μεν

$$\chi(Y) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \dim_{\mathbb{Z}_2}(H^{\text{sing.}}_k(Y; \mathbb{Z}_2)) \equiv \sum_{k=0}^{d} \dim_{\mathbb{Z}_2}(H^{\text{sing.}}_k(Y; \mathbb{Z}_2)) (\text{mod}\, 2),$$

[27] Εάν προσθέσουμε το άθροισμα και το εναλλάσσον άθροισμα των διαστάσεων των εν λόγω ομάδων λαμβάνουμε το διπλάσιο τού αθροίσματος των διαστάσεων που εμφανίζονται με θετικό πρόσημο στο εναλλάσσον άθροισμα.

αφ' ετέρου δε (ένεκα τού κατά Lefschetz δυϊσμού)

$$\dim_{\mathbb{Z}_2}(H_k^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}_2)) = \dim_{\mathbb{Z}_2}(H_{\text{sing.}}^{d+1-k}(X,Y;\mathbb{Z}_2)) = \dim_{\mathbb{Z}_2}(H_{d+1-k}^{\text{sing.}}(X,Y;\mathbb{Z}_2))$$

για κάθε $k \in \{0,\ldots,d+1\}$, οπότε

$$\sum_{k=0}^{d+1} \dim_{\mathbb{Z}_2}(H_k^{\text{sing.}}(X;\mathbb{Z}_2)) = \sum_{k=0}^{d+1} \dim_{\mathbb{Z}_2}(H_k^{\text{sing.}}(X,Y;\mathbb{Z}_2)).$$

Είναι πλέον πρόδηλο ότι $\chi(Y) \equiv 0(\operatorname{mod} 2)$. □

E.3.7 Παραδείγματα. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ οι προβολικοί χώροι

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{2\nu},\ \ \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2\nu}\ \text{ και }\ \mathbb{P}_{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}}^{2\nu}$$

είναι αδύνατον να αποτελούν σύνορα, καθόσον

$$\chi(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{2\nu};\mathbb{Z}_2) = 1$$

και

$$\chi(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{2\nu};\mathbb{Z}_2) = 2\nu + 1 = \chi(\mathbb{P}_{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}}^{2\nu};\mathbb{Z}_2).$$

Ένα τεχνικώς δύσκολο αποτέλεσμα τού Rokhlin (από τη δεκαετία τού[28] 1950) μας πληροφορεί ότι *όλα τα προσανατολίσιμα συμπαγή τριπτύγματα αποτελούν σύνορα* (κάποιων τετραδιάστατων πολυπτυγμάτων με σύνορο).

E.4 ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΠΟΛΥΠΤΥΓΜΑΤΩΝ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΣ $\leqslant 2$

Παρότι τα γνωστά θεωρήματα που αφορούν σε τοπολογικά πολυπτύγματα «χαμηλών διαστάσεων» (π.χ., σε διαστάσεις $\leqslant 6$) βρίσκονται εν αφθονία, τα μόνα θεωρήματα *πλήρους ταξινομήσεως* (μέχρις ομοιομορφισμού) περιορίζονται στις διαστάσεις[29] 0, 1 και 2. (Πρβλ. The Manifold Atlas Project, `http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Main_Page`.)

▸ **Ταξινόμηση των μονοδιάστατων τοπολογικών πολυπτυγμάτων**. Αυτή είναι μια σχετικώς εύκολη ταξινόμηση, στηριζόμενη σε απλές τοπολογικές ιδιότητες[30].

E.4.1 Θεώρημα («Θεώρημα ταξινομήσεως μονοδιάστατων συνεκτικών τοπολογικών πολυπτυγμάτων»). *Κάθε μονοδιάστατο συνεκτικό τοπολογικό πολύπτυγμα X οφείλει να είναι (αναλόγως με το κατά πόσον είναι ή δεν είναι συμπαγές και με το κατά πόσον έχει ή δεν έχει σύνορο) ομοιομορφικό με ένα από εκείνα που δίδονται στον κάτωθι κατάλογο*:

X	χωρίς σύνορο	με σύνορο
συμπαγή	$\mathbb{S}^1$	$[0,1]$
μη συμπαγή	$\mathbb{R}$	$[0,\infty)$

[28] Βλ. V.A. Rokhlin: *New results in the theory of 4-dimensional manifolds*, Doklady **84** (1952), 221-224.

[29] Για τη διάσταση 0 βλ. E.1.9 (i). Εδώ θα αναλυθεί το τι συμβαίνει στις διαστάσεις 1 και 2.

[30] Βλ. D.B. Fuks & V.A. Rokhlin: *Beginner's Course in Topology*, Universitext, Springer-Verlag, 1984, σελ. 139-141, και D. Gale: *The Classification of 1-Manifolds: A Take-Home Exam*, American Math. Monthly **94** (1987), 170-175.

▸ **Περί τής ταξινομήσεως των κλειστών επιφανειών.** Έστω $g \in \mathbb{N}$ και έστω

$$\mathfrak{E}_{4g} := \operatorname{conv}(\{ z_n | \, 1 \leqslant n \leqslant 4g\}) \subsetneqq \mathbb{B}^2 \subsetneqq \mathbb{C}, \;\; z_n := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{4g}n) \in \mathbb{S}^1,$$

το συμπαγές κανονικό $4g$-γωνο[31] έχον ως κορυφές του τα σημεία z_n. Επί αυτού τού (κυρτού) υποσυνόλου τού μιγαδικού επιπέδου ορίζεται, θέτοντας εν είδει συμβάσεως

$$z_{4g+1} := z_1,$$

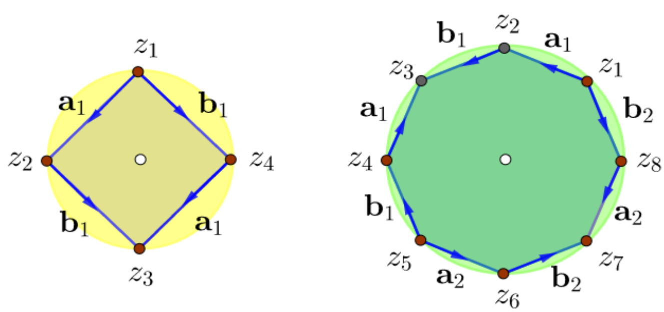
μια σχέση ισοδυναμίας $\mathfrak{R}$ ως ακολούθως:

$$(\zeta,\eta) \in \mathfrak{R} \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \text{είτε } \zeta = \eta, \\ \text{είτε } \begin{cases} \zeta = (1-t)z_{4j-3} + tz_{4j-2}, & \text{όπου } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \text{και } \eta = (1-t)z_{4j} + tz_{4j-1}, & \text{και } j \in \{1,\dots,g\} \end{cases} \\ \text{είτε } \begin{cases} \zeta = (1-t)z_{4j-2} + tz_{4j-1}, & \text{όπου } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \text{και } \eta = (1-t)z_{4j+1} + tz_{4j}, & \text{και } j \in \{1,\dots,g\} \end{cases} \end{cases}$$

Θέτουμε

$$\boxed{X_g^{\text{or.}} := \mathfrak{E}_{4g}/\mathfrak{R}.}$$

Αυτός ο πηλικόχωρος αποτελεί μια συνεκτική, κλειστή, προσανατολίσιμη επιφάνεια. Ας δούμε τα αντίστοιχα σχήματα στην περίπτωση όπου $g = 1$ και $g = 2$.



$g = 1$ $\qquad$ $g = 2$

Η $\mathfrak{R}$ ταυτίζει τις ακμές τού $\mathfrak{E}_{4g}$ *ανά ζεύγη*. Σύμβαση στα σχήματα: Ταυτιζόμενες ακμές συμβολίζονται *με το ίδιο γράμμα*. Επιπροσθέτως, κάθε ακμή θεωρείται εφοδιασμένη με έναν προσανατολισμό κατά τέτοιον τρόπο, ώστε σημεία αρχής να ταυτίζονται με σημεία αρχής και ληκτικά σημεία με ληκτικά σημεία.

[31] Εννοείται ότι σε αυτό συμπεριλαμβάνεται *και* το εσωτερικό του, αφού το $\mathfrak{E}_{4g}$ είναι εξ ορισμού *η κυρτή θήκη* των εν λόγω $4g$ σημείων τού μιγαδικού επιπέδου.

E.4.2 Ορισμός. Θέτουμε $X_0^{\text{or.}} := \mathbb{S}^2$ και ονομάζουμε το $X_g^{\text{or.}}$, $g \geqslant 0$, **θεμελιακή προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους** g.

E.4.3 Σημείωση. Παρά το γεγονός ότι ο ανωτέρω τρόπος ορισμού των επιφανειών αυτού τού είδους είναι κομψός και πολύ χρήσιμος (π.χ., για διάφορες υπολογιστικές διαδικασίες), δεν είναι γεωμετρικώς αρκούντως εύληπτος (καθόσον οι ταυτίσεις μέσω τής $\mathfrak{R}$ είναι πανταχού παρούσες). Γι' αυτόν τον λόγο ανακαλείται το επόμενο θεώρημα E.4.4 που χαρακτηρίζει (μέχρις ομοιομορφισμού) τις $X_g^{\text{or.}}$ με τη βοήθεια τής «πράξεως» τού *συνεκτικού αθροίσματος*. Εάν, δοθεισών δυο επιφανειών X, Y, απομακρύνουμε έναν δίσκο από καθεμιά εξ αυτών και συνδέσουμε τους προκύπτοντες συνοριακούς κύκλους μέσω ενός κυλίνδρου, τότε η δημιουργούμενη επιφάνεια συμβολίζεται ως $X\#Y$ και καλείται[32] **συνεκτικό άθροισμα**[33] **των** X **και** Y.

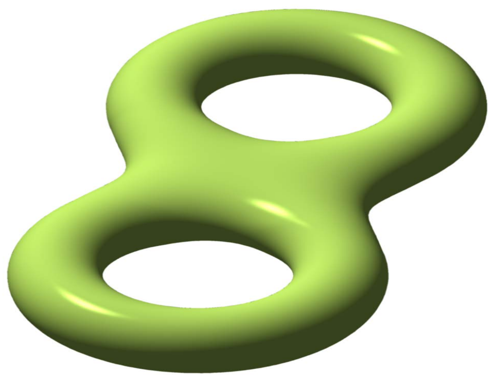
E.4.4 Θεώρημα. *Για κάθε* $g \geqslant 1$ *έχουμε*

$$\boxed{X_g^{\text{or.}} \approx \underbrace{\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\cdots\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2}_{g\ \text{φορές}}} \tag{E.5}$$

και, γενικότερα, για κάθε $g \geqslant 0$,

$$\boxed{X_g^{\text{or.}} \approx \mathbb{S}^2\#\underbrace{\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\cdots\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2}_{g\ \text{φορές}}.} \tag{E.6}$$

E.4.5 Σημείωση. (i) Για την «οπτικοποίηση» τού (E.5) στην περίπτωση κατά την οποία $g = 2$, δηλαδή για το πώς από τις πραγματοποιούμενες ταυτίσεις των ακμών τού $\mathfrak{E}_8$ μέσω τής $\mathfrak{R}$ κανείς καταλήγει (διά καταλλήλου ομοιομορφισμού) στον **διπλό τόρο** $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$:



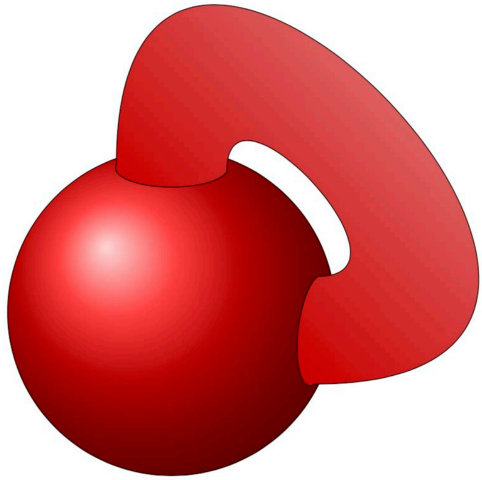
οι αναγνώστες παραπέμπονται στη σχετική πανέμορφη κινηματογραφική αναπαράσταση τού Jos Leys[34].

[32] Το συνεκτικό άθροισμα μπορεί να ιδωθεί (αυστηρότερα) ως μια κατάλληλη *εξώθηση* (με συγκόλληση κατά μήκος των εν λόγω συνοριακών κύκλων). Πρβλ. 7.3.1 και 7.3.2 (ii).

[33] Εάν X, Y, Z είναι επιφάνειες, τότε $X\#Y \approx Y\#X$ και $(X\#Y)\#Z \approx X\#(Y\#Z)$.

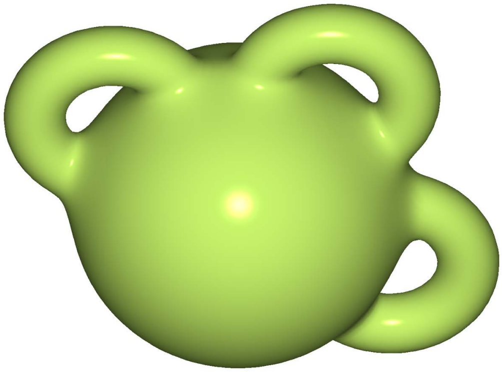
[34] Βλ. `http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=368`.

(ii) Ο ομοιομορφισμός (Ε.6) μπορεί να δεχθεί μια κατά τι διαφοροποιημένη γεωμετρική ερμηνεία: Με τον όρο **επικόλληση μιας χειρολαβής** στη σφαίρα $\mathbb{S}^2$ εννοούμε ότι απομακρύνουμε τα εσωτερικά δύο ξένων μεταξύ τους δίσκων και ότι μετά προσαρτούμε έναν κύλινδρο μέσω συγκολλήσεως των συνοριακών του κύκλων και των περιγραμμάτων των δύο τρυπών επί τής σφαίρας.



Με μια τέτοια «πράξη» (που αποδεικνύεται ότι είναι από πάσα άποψη «καλώς ορισμένη») αποκτούμε το συνεκτικό άθροισμα $\mathbb{S}^2\#\mathbb{T}^2$. (Όταν εισάγουμε επιπρόσθετες χειρολαβές, τότε όλη αυτή η διαδικασία λαμβάνει χώρα σε διαφορετικά μέρη τής σφαίρας.) Έτσι, η επιφάνεια $X_g^{\mathrm{or.}}$ είναι ομοιομορφική *με τη σφαίρα* $\mathbb{S}^2$ *στην οποία έχουμε επικολλήσει* g *χειρολαβές*. Ιδού, λοιπόν, μια τέτοια «οπτικοποίηση» τής $X_3^{\mathrm{or.}}$ μέσω τού (Ε.5) (**τριπλός τόρος**):

και η αντίστοιχή της μέσω τού (Ε.6) (**σφαίρα με τρεις χειρολαβές**):



(iii) Για το πώς από τις πραγματοποιούμενες ταυτίσεις των ακμών τού $\mathfrak{E}_{16}$ μέσω τής $\mathfrak{R}$ κανείς καταλήγει (διά καταλλήλου ομοιομορφισμού) στη σφαίρα με 4 χειρολαβές, βλ. http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=369.

Έστω τώρα $g \in \mathbb{N}$, $g \geqslant 2$, και έστω

$$\mathfrak{E}_{2g} := \operatorname{conv}\left(\{\, z_n |\, 1 \leqslant n \leqslant 2g\}\right) \subsetneqq \mathbb{B}^2 \subsetneqq \mathbb{C}, \;\; z_n := \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{2g} n) \in \mathbb{S}^1,$$

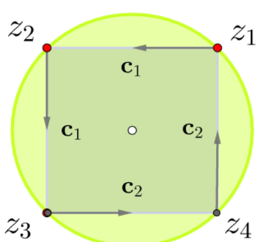
το συμπαγές κανονικό $2g$-γωνο έχον ως κορυφές του τα σημεία z_n. Επί αυτού τού (κυρτού) υποσυνόλου τού μιγαδικού επιπέδου ορίζεται μια σχέση ισοδυναμίας $\mathfrak{R}'$ ως ακολούθως[35]:

$$(\zeta,\eta) \in \mathfrak{R}' \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \text{είτε } \zeta = \eta, \\ \text{είτε } \begin{cases} \zeta = (1-t)z_{2j-1} + t z_{2j}, & \text{όπου } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \text{και } \eta = (1-t)z_{2j} + t z_{2j+1}, & \text{και } j \in \{1,\dots,g\} \end{cases} \end{cases}$$

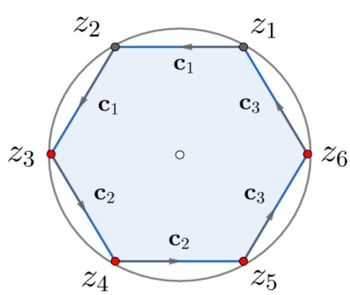
Θέτουμε

$$\boxed{X_g^{\text{nonor.}} := \mathfrak{E}_{2g}/\mathfrak{R}'.}$$

Αυτός ο πηλικόχωρος αποτελεί μια συνεκτική, κλειστή, μη προσανατολίσιμη επιφάνεια. Ας δούμε τα αντίστοιχα σχήματα στην περίπτωση όπου $g = 2$ και $g = 3$.



$g = 2$



$g = 3$

[35] Σύμβαση: $z_{2g+1} := z_1$.

E.4.6 Ορισμός. Θέτουμε $X_1^{\text{nonor.}} := \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ και ονομάζουμε το $X_g^{\text{nonor.}}$, $g \geqslant 1$, **θεμελιακή μη προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους** g.

Η $X_1^{\text{nonor.}}$ είναι ομοιομορφική με ένα *σταυρωτό διαπέτασμα* και η $X_2^{\text{nonor.}}$ με μια *φιάλη τού Klein*. Επίσης, ακόμη και για τις θεμελιακές *μη προσανατολίσιμες* επιφάνειες υφίσταται ένα θεώρημα ανάλογο τού E.4.4.

E.4.7 Θεώρημα. *Για κάθε $g \geqslant 1$ έχουμε*

$$\boxed{X_g^{\text{nonor.}} \approx \underbrace{\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \# \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \# \cdots \# \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \# \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}_{g \text{ φορές}}.}$$

Το κύριο θεώρημα είναι το ακόλουθο:

E.4.8 Θεώρημα («Θεώρημα ταξινομήσεως κλειστών συνεκτικών επιφανειών»). *Κάθε κλειστή συνεκτική*[36] *επιφάνεια είναι ομοιομορφική με κάποια θεμελιακή (προσανατολίσιμη ή μη) επιφάνεια*[37]. *Επιπροσθέτως, μεταξύ των μελών των οικογενειών*

$$\left\{ X_g^{\text{or.}} \,\middle|\, g \in \mathbb{N}_0 \right\} \quad \textit{και} \quad \left\{ X_g^{\text{nonor.}} \,\middle|\, g \in \mathbb{N} \right\}$$

δεν υπάρχουν δύο (διαφορετικές) επιφάνειες που να είναι ομοιομορφικές.

E.4.9 Σημείωση. (i) Στη διάσταση 2, η ανωτέρω ταξινόμηση «μέχρις ομοιομορφισμού» *είναι ισοδύναμη* με την ταξινόμηση «μέχρις ομοτοπικής ισοδυναμίας» αλλά και με την ταξινόμηση «μέχρις αμφιδιαφορίσεως (ή διαφορομορφισμού)» (αφού κάθε επιφάνεια μπορεί να ιδωθεί και ως *λείο* πολύπτυγμα).

(ii) Οι πρώτες προσπάθειες για ένα είδος ταξινομήσεως επιφανειών ανήκουν στους A.F. Möbius (1863) και C. Jordan (1866). Το 1888, σε ένα πολυσέλιδο άρθρο[38] του στο Mathematische Annalen (συνοδευόμενο από εκτενή βιβλιογραφία), ο W. von Dyck[39] εισήγαγε αναλλοιώτους δικής του επινοήσεως προκειμένου να καταλήξει σε κριτήρια για το πότε δυο επιφάνειες είναι μεταξύ τους ομοιομορφικές. Ωστόσο, όπως δεν ήταν ασύνηθες για τα δεδομένα εκείνης τής εποχής (όπου υπήρχε μια κάποια ρευστότητα ακόμη και για τους χρησιμοποιούμενους ορισμούς, εάν κανείς λάβει, π.χ., υπ' όψιν ότι η τελικώς αποδεκτή εννοιοδότηση τού

[36] Στη μελέτη ταξινομήσεως πολυπτυγμάτων (δεδομένης διαστάσεως) μέχρις ομοιομορφισμού μπορούμε να περιοριζόμαστε στα *συνεκτικά* πολυπτύγματα. Και αυτό διότι δύο (ισοδιάστατα) τοπολογικά πολυπτύγματα X και Y είναι ομοιομορφικά εάν και μόνον εάν υπάρχει μια αμφίρριψη μεταξύ τής κλάσεως των συνεκτικών συνιστωσών τού X και τής κλάσεως των συνεκτικών συνιστωσών τού Y, ούτως ώστε κάθε συνεκτική συνιστώσα τού X να είναι ομοιομορφική με την εικόνα της μέσω αυτής.

[37] Η θεώρηση διαδοχικών συνεκτικών αθροισμάτων πεπερασμένου πλήθους σταυρωτών διαπετασμάτων και διδιάστατων τόρων (ακόμη και με ανάμιξη) δεν δίδει κάτι που να είναι μη ομοιομορφικό με κάποια θεμελιακή επιφάνεια. Αυτό έγκειται στη μεταθετικότητα και στην προσεταιριστικότητα τής «πράξεως» τού συνεκτικού αθροίσματος, εν συνδυασμώ με τον ομοιομορφισμό

$$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \# \mathbb{T}^2 \approx \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \# X_2^{\text{nonor.}}.$$

(Για μια «οπτική απόδειξη» αυτού, βλ. στη διαδικτυακή διεύθυνση: http://www.josleys.com/show_gallery.php?galid=377.)

[38] W. von Dyck: *Beiträge zur Analysis Situs*, Mathematische Annalen **32** (1888), 457-512.

[39] von Dyck, *Walther Franz Anton* (6/12/1856-5/11/1934). Γερμανός μαθηματικός. Σπούδασε στο Μόναχο, στο Βερολίνο και στη Λειψία και ανεκηρύχθη διδάκτωρ το 1879 με μια διατριβή επί των επιφανειών Riemann (έχων ως επιβλέψαντα καθηγητή τον F. Klein). Ακολούθησε υφηγεσία το 1882 στη Λειψία και καθηγεσία από το 1884 στο ίδρυμα που έπαιξε τον ρόλο τού προδρόμου τού Πολυτεχνείου τού Μονάχου. Υπήρξε μέλος τής Βαυαρικής Ακαδημίας Επιστημών, καθώς και δύο φορές πρόεδρος τής DMV (Deutsche Mathematiker Vereinigung). Οι ερευνητικές του εργασίες αφορούσαν κυρίως σε προβλήματα τής Θεωρίας Ομάδων, τής Μιγαδικής Αναλύσεως και τής Διαφορικής Γεωμετρίας.

όρου *τοπολογικός χώρος* μέσω σαφών αξιωμάτων επισυνέβη το 1914), οι αποδείξεις του δεν ήταν αυστηρές, στηριζόμενες εν πολλοίς σε διαισθητικά επιχειρήματα. Εν συνεχεία, στις αρχές τού 20ου αιώνα, ένα κοινό άρθρο[40] των M. Dehn[41] και P. Heegaard[42] (δημοσιευθέν στην τότε εκδιδόμενη από τον οίκο Teubner «Εγκυκλοπαίδεια των Μαθηματικών Επιστημών») επί τής «Αναλύσεως Situs» εντυπωσίασε την κοινότητα των γεωμετρών, καθώς περιείχε *την πρώτη αυστηρή προσέγγιση* τού θεωρήματος ταξινομήσεως (τόσον για προσανατολίσιμες όσον και για μη προσανατολίσιμες επιφάνειες). Παρά ταύτα, η «τελευταία πράξη τού έργου» επρόκειτο να γραφεί από δύο συμμετέχοντες στα σεμινάρια τού O. Veblen στο Princeton: Τον J.W. Alexander, ο οποίος, σε ένα ολιγοσέλιδο άρθρο[43] του, αποσαφήνισε το πώς είναι δυνατή η αναγωγή κάθε κλειστής επιφάνειας παγιωμένου γένους σε μία και μόνον διευθετημένη μορφή (normal form) και τον H.R. Brahana[44], ο οποίος το[45] 1921 συμπλήρωσε ό,τι έλειπε από το παζλ και έδωσε την πρώτη *πλήρη απόδειξη* τού θεωρήματος ταξινομήσεως, η οποία επέζησε μέχρι των ημερών μας.

[40] M. Dehn & P. Heegaard: *Analysis Situs*, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften (mit Einschluss ihrer Anwendungen), Band III (Geometrie), Teubner, 1907, σελ. 153-220.

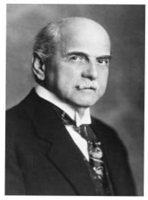
[41] Dehn, *Max Wilhelm* (13/11/1878-27/6/1952). Γερμανός μαθηματικός εβραϊκής καταγωγής. Σπούδασε στο Freiburg και στο Göttingen. Διδάκτωρ το 1900 (με επιβλέψαντα καθηγητή τον D. Hilbert). Υφηγεσία το 1901 στο Πανεπιστήμιο τού Münster, όπου και δίδαξε μέχρι το 1911. (Στη υφηγεσία του έλυσε σε μεγάλο βαθμό το 3ο πρόβλημα τού Hilbert, αν και οι μετέπειτα απλουστεύσεις και συμπληρώσεις των Kagan και Hadwiger εκρίθησαν απαραίτητες.) Αναπληρωτής καθηγητής για μία διετία (από το 1911) στο Πανεπιστήμιο τού Κιέλου. Καθηγητής από το 1913 στο Πολυτεχνείο τού Breslau και από το 1921 στο Πανεπιστήμιο τής Φρανκφούρτης, διαδεχόμενος τον L. Bieberbach (1886-1982). Παρά το ότι είχε μετάσχει ως στρατιώτης τού γερμανικού στρατού στις μάχες τού **Α′** Παγκοσμίου Πολέμου, όταν οι ναζιστές βρέθηκαν στην εξουσία τον κατεδίωξαν, τον έπαυσαν το 1935 από το ίδρυμά του και παρ' ολίγον να τον είχαν δολοφονήσει (εάν δεν τού είχε προσφέρει καταφύγιο τη «Νύχτα των Κρυστάλλων» ο ιστορικός W. Hartner). Το 1939 αναγκάστηκε να εγκαταλείψει για πάντα τη Γερμανία. Ύστερα από περιπλανήσεις (στη Δανία και στη Νορβηγία) κατόρθωσε να φθάσει το 1940 στις Η.Π.Α., όπου και διέμεινε μέχρι το θάνατό του. Δυστυχώς, οι καθηγητικές θέσεις που έλαβε εκεί (από απόψεως διάρκειας ή ποιότητας ιδρυμάτων) δεν ήταν αντάξιες τού επιστημονικού του κύρους (κάτι που τότε είχε υπογραμμισθεί και από τον S. Mac Lane). Η μαθηματική κοινότητα τον μνημονεύει τόσον για τις τοπολογικές του (χειρουργική Dehn, αναλλοίωτος τού Dehn, συστροφή Dehn, λήμμα τού Dehn [διορθωθέν από τον Χ. Παπακυριακόπουλο] κ.ά.) όσον και για τις ομαδοθεωρητικές του εργασίες (πεπερασμένως παριστώμενες ομάδες, word problems κ.ά.).

[42] Heegaard, *Poul* (2/11/1871-7/2/1948). Δανός μαθηματικός. Σπούδασε από το 1889 έως το 1893 στο Πανεπιστήμιο τής Κοπεγχάγης υπό τον H. Zeuthen (1839-1920) και τον J. Petersen (1839-1910). Ύστερα από μια άκαρπη παραμονή στο Παρίσι, μετέβη στο Πανεπιστήμιο τού Göttingen και ενετάχθη στην ερευνητική ομάδα τού F. Klein (1849-1925). Μελέτησε τις τοπολογικές ιδιότητες των τετραδιάστατων πολυπτυγμάτων (σε μια προσπάθεια βαθύτερης κατανοήσεως των μιγαδικών συναρτήσεων δύο μεταβλητών) και ξεκίνησε την ενασχόλησή του με τα τριδιάστατα πολυπτύγματα, τα οποία έμελλε να καταστούν συν τω χρόνω το κύριο αντικείμενο τής έρευνάς του. Στη διατριβή του (το 1898) εισήγαγε ό,τι αργότερα έγινε γνωστό ως *διάγραμμα Heegaard* και *διάσπαση Heegaard*. Επίσης, έδωσε ένα αντιπαράδειγμα για την τότε επικρατούσα εκδοχή τού κατά Poincaré δυϊσμού, αναγκάζοντας το ίδιον τον Poincaré σε ριζική αναθεώρησή της. Μετά την αποπεράτωση τού διδακτορικού του και μέχρι το 1910 δίδαξε σε σχολή δοκίμων αξιωματικών τού ναυτικού. Το 1910 εξελέγη καθηγητής τού Πανεπιστημίου τής Κοπεγχάγης, όμως το 1918 υπέβαλε την παραίτησή του (επικαλούμενος ως λόγους φόρτο εργασίας και αδυναμία συνεννοήσεως με κάποιους συναδέλφους του). Το ίδιο έτος εξελέγη καθηγητής στο Πανεπιστήμιο τού Όσλο, στο οποίο και εθήτευσε μέχρι τη συνταξιοδότησή του το 1941. Υπήρξε συνιδρυτής τής Νορβηγικής Μαθηματικής Εταιρείας. Παρά το γεγονός ότι είχε λίγες ερευνητικές δημοσιεύσεις, αυτές είναι τόσο σημαντικές, ώστε τα αποτελέσματά τους να παραμένουν ακόμη και σήμερα απαραίτητα κατά την ανάπτυξη τής σύγχρονης θεωρίας περί 3-διάστατων πολυπτυγμάτων.

[43] J.W. Alexander: *Normal forms for one- and two-sided surfaces*, Annals of Mathematics **16** (1915), 158-161.

[44] Brahana, *Henry Roy* (16/8/1895-9/10/1972). Αμερικανός μαθηματικός. Διδάκτωρ τού Πανεπιστημίου τού Princeton το 1920 (με επιβλέψαντα καθηγητή τον O. Veblen). Μετέπειτα καθηγητής στο Πανεπιστήμιο τού Illinois (at Urbana-Champaign) από το 1921 μέχρι τη συνταξιοδότησή του το 1963. Πιθανολογείται ότι, υπό την επιρροή τού G.A. Miller (1963-1951), η θεματική των ερευνητικών του εργασιών άλλαξε και από αμιγώς τοπολογική κατέστη με την πάροδο τού χρόνου ομαδοθεωρητική. (Γεννήτορες απλών ομάδων, πεπερασμένες μετααβελιανές ομάδες κ.ά.) Διακρίθηκε τόσον για τα διδακτικά του (27 διδακτορικές διατριβές υπό την επίβλεψή του) όσον και για τα διοικητικά του προσόντα (πρόεδρος Τμήματος που μερίμνησε να προσληφθούν σε αυτό άτομα που εκ των υστέρων διακρίθηκαν κ.ά.).

[45] H.R. Brahana: *Systems of circuits on two-dimensional manifolds*, Annals of Mathematics **23** (1921), 144-168. [Πρόκειται για τη δημοσίευση ενός τμήματος τής διδακτορικής του διατριβής (τού 1920) στο Princeton.]



W. von Dyck

M. Dehn

P. Heegaard

H. R. Brahana

(iii) Αξίζει να επισημανθεί ότι τα προαναφερθέντα αφορούσαν στην ταξινόμηση (μέχρις ομοιομορφισμού) των *συνδυαστικών επιφανειών* (ήτοι των τριγωνίσιμων). Το ότι *κάθε* διδιάστατο τοπολογικό πολύπτυγμα *είναι πάντοτε τριγωνίσιμο*, απεδείχθη κάποια χρόνια αργότερα (και συγκεκριμένα το 1925 από τον T. Radó).

(iv) Για περισσότερα ιστορικά στοιχεία περί τού θεωρήματος Ε.4.8 βλ. Scholz [125], Kap. IV, σελ. 142-179, και Gallier & Xu [95]. Για ειδικότερη βιβλιογραφία, στην οποία κανείς συναντά πολλά επεξεργασμένα παραδείγματα επιφανειών, τριγωνισμών αυτών, συνεκτικών αθροισμάτων κ.ά., καθώς και διάφορες αποδεικτικές διαδικασίες για το Ε.4.8, βλ. Armstrong [37], Chapters 6-7, Agoston [52], Chapter 3, Fulton [65], Chapter 17, σελ. 233-246, Giblin [96], Kinsey [97], Massey [77], Chapter I, σελ. 1-34, Munkres [41], Chapter 12, σελ. 446-476, Shastri [85], §5.3, σελ. 229-240, και Stillwell [127], §1.3, σελ. 69-80, και §8.1, σελ. 242.

(v) Φυσικά, άπαξ και κάποιος έχει στη διάθεσή του τις ομάδες ομολογίας (7.24), (7.26) και (7.34) των οικογενειών των επιφανειών που παρατίθενται στο θεώρημα Ε.4.8, είναι άμεσο το ότι μεταξύ των μελών τους δεν υπάρχουν δύο (διαφορετικές) επιφάνειες που να είναι ομοιομορφικές, καθώς επίσης και το ποιες εξ αυτών είναι οι προσανατολίσιμες και οι μη προσανατολίσιμες (μέσω τού θεωρήματος Ε.2.7).

▸ **Περί των λοιπών επιφανειών.** Έστω $X_{g,k}^{\mathrm{or.}}$ (και αντιστοίχως, έστω $X_{g,k}^{\mathrm{nonor.}}$), $k \in \mathbb{N}$, το αποτέλεσμα τής αφαιρέσεως τού εσωτερικού k σαφώς διακεκριμένων δίσκων από την $X_g^{\mathrm{or.}}$ (και αντιστοίχως, από την $X_g^{\mathrm{nonor.}}$). (Π.χ., το $X_{1,1}^{\mathrm{nonor.}}$ είναι μια ταινία τού Möbius.[46]) Τότε έχουμε τη δυνατότητα να διατυπώσουμε το αντίστοιχο τού θεωρήματος Ε.4.8 για τις συμπαγείς συνεκτικές επιφάνειες *με σύνορο*.

Ε.4.10 Θεώρημα («Θεώρημα ταξινομήσεως συμπαγών συνεκτικών επιφανειών με σύνορο»). *Κάθε συμπαγής συνεκτική επιφάνεια με σύνορο είναι ομοιομορφική με κάποιο εκ των μελών των οικογενειών*

$$\left\{ X_{g,k}^{\mathrm{or.}} \middle| (g,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \right\} \;\; \textit{και} \;\; \left\{ X_{g,k}^{\mathrm{nonor.}} \middle| (g,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \right\}.$$

Επιπροσθέτως, μεταξύ των μελών των εν λόγω οικογενειών δεν υπάρχουν δύο (διαφορετικές) επιφάνειες που να είναι ομοιομορφικές.

[46] Βλ. https://www.youtube.com/watch?v=yeaw3BnCs34.

Οι ομάδες (ιδιάζουσας) ομολογίας των κλειστών επιφανειών τού θεωρήματος E.4.8 έχουν υπολογισθεί μέσω των (7.24), (7.26) και (7.34). Με λίγο περισσότερο κόπο κανείς υπολογίζει τις αντίστοιχες ομάδες ομολογίας και των επιφανειών τού θεωρήματος E.4.10. Το μάλλον «μη αναμενόμενο» εδώ είναι ότι καμία εξ αυτών των ομάδων δεν διαθέτει στρέψη.

E.4.11 Θεώρημα. (i) *Για κάθε* $(g,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$ *και για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$ *έχουμε*:

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X_{g,k}^{\text{or.}};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n=0, \\ \mathbb{Z}^{2g+k-1}, & \text{όταν } n=1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\}. \end{cases}}$$

(ii) *Για κάθε* $(g,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *και για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$ *έχουμε*:

$$\boxed{H_n^{\text{sing.}}(X_{g,k}^{\text{nonor.}};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{όταν } n=0, \\ \mathbb{Z}^{g+k-1}, & \text{όταν } n=1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\}. \end{cases}}$$

Σε ό,τι αφορά στην ταξινόμηση των *μη συμπαγών* επιφανειών (με ή χωρίς σύνορο) οι αναγνώστες παραπέμπονται στα ακόλουθα άρθρα:

I. Richards: *On the classification of noncompact surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society **106** (1963), 259-269.

M.E. Goldman: *An algebraic classification of noncompact 2-manifolds*, Transactions of the American Mathematical Society **156** (1971), 241-258.

E.M. Brown & R. Messer: *The classification of two-dimensional manifolds*, Transactions of the American Mathematical Society **255** (1979), 377-402.

A.O. Prishlyak & K.I. Mischenko: *Classification of noncompact surfaces with boundary*, Methods of Functional Analysis and Topology **13** (2007), no. 1, 62-66.

▸ **Περί θεωρημάτων μερικών ή αδρομερών ταξινομήσεων τοπολογικών πολυπτυγμάτων σε υψηλότερες διαστάσεις**. Στη διάσταση $d = 3$ το πρόβλημα είναι εξαιρετικά περίπλοκο. Για μια πρώτη εισαγωγή σε διάφορες τεχνικές προσεγγίσεώς του (στο πνεύμα τής προ Thurston και προ Perelman εποχής) υπάρχει το βιβλίο τού
J. Hempel: *3-Manifolds*, Annals of Mathematics Studies, Vol. **86**, Princeton University Press, 1976.

Από τα νεότερα βιβλία επί τής ίδιας θεματικής ξεχωρίζουν τα εξής:

W. Thurston: *3-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton Un. Press, 1997.
S. Matveev: *Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds*, Algorithms and Computation in Mathematics, Vol. **9**, second edition, Springer-Verlag, 2007.
N. Saveliev: *Lectures on the Topology of 3-Manifolds*, second ed., de Gruyter, 2012.
J. Schultens: *Introduction to 3-Manifolds*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **151**, American Mathematical Society, 2014.
M. Aschenbrenner, S. Friedl & H. Wilton: *3-Manifold Groups*, E.M.S. Series of Lectures in Mathematics, Vol. **20**, European Mathematical Society, 2015.
K. Ohshika & A. Papadopoulos (ed.): *In the Tradition of Thurston. Geometry and Topology*, Springer-Verlag, 2020.

Πλήρης ταξινόμηση τοπολογικών πολυπτυγμάτων διαστάσεως $d \geqslant 4$ είναι αδύνατη, *ακόμη και μέχρις ομοτοπίας*. Δοθείσας μιας πεπερασμένως παριστώμενης ομάδας G, μπορεί να κατασκευασθεί ένα κλειστό πολύπτυγμα διαστάσεως 4 έχον την G ως θεμελιώδη του ομάδα. Επειδή δεν υφίσταται αλγόριθμος που να αποφαίνεται για το πρόβλημα υπάρξεως ισομορφισμού μεταξύ δυο πεπερασμένως παριστωμένων ομάδων, δεν υφίσταται αλγόριθμος που να αποφαίνεται και για το πότε δύο τοπολογικά πολυπτύγματα διαστάσεως 4 έχουν την ίδια θεμελιώδη ομάδα. (Επειδή τούτο οδηγεί σε μία κλάση τοπολογικών πολυπτυγμάτων διαστάσεως 4 που είναι ομοιομορφικά *εάν και μόνον εάν* οι αντίστοιχες ομάδες είναι ισόμορφες, το πρόβλημα τής ταξινομήσεως τοπολογικών πολυπτυγμάτων διαστάσεως 4 είναι μη αποκρίσιμο.) Μολαταύτα, τα μέχρι στιγμής υπάρχοντα αποτελέσματα επί *μερικών ταξινομήσεων* είναι πολλά και εντυπωσιακά. Για την «κομβικής σημασίας διάσταση 4» (τόσον για τοπολογικά όσον και για λεία πολυπτύγματα) βλ.

R.C. Kirby: *The Topology of 4-Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **1374**, Springer-Verlag, 1989.
M.H. Freedman & F. Quinn: *Topology of 4-Manifolds*, Princeton Mathematical Series, Vol. **39**, Princeton University Press, 1990.
S. Donaldson & P.B. Kronheimer: *The Geometry of Four-Manifolds*, Oxford Un. Press, 1990.
R. Friedman & J.W. Morgan: *Smooth 4-Manifolds and Complex Surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band **27**, Springer-Verlag, 1994.
R.E. Gompf & A.I. Stipsicz: *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **20**, American Mathematical Society, 1999.
A. Scorpan: *The Wild World of 4-Manifolds,* American Mathematical Society, 2005,
και S. Akbulut: *4-Manifold*s, Oxford Graduate Texts in Mathematics, Vol. **25**, Oxford University Press, 2016.

Τέλος, οι αναγνώστες που ενδιαφέρονται για πιο down-to-earth επισκοπήσεις τής προόδου των ερευνών επί *μερικών ταξινομήσεων* (χωρίς πολλές τεχνικές λεπτομέρειες) παραπέμπονται στο κεφάλαιο 20 (υπό τον τίτλο *Prolongements*) τού δεύτερου τόμου τού συγγράμματος [74] των A. Jeanneret & D. Lines, και (ειδικώς για το τι συμβαίνει σε διαστάσεις $\geqslant 5$ μέσω των τεχνικών τής «χειρουργικής») στην πτυχιακή εργασία τού J. Kelner: *The Surgery Theoretic Classification of High-Dimensional Smooth and Piecewise Linear Simply Connected Manifolds*, Harvard University, 2002.

Βιβλιογραφία

Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

[1] HALMOS, P.R.: *Αφελής Συνολοθεωρία,* σε μετάφραση (από το αγγλικό πρωτότυπο υπό τον τίτλο *Naive Set Theory*, Springer-Verlag, 1960) από τον Γ. Κολέτσο, Εκδόσεις Εκκρεμές, Αθήνα, 2002.

[2] HERRLICH, H.: *Axiom of Choice*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **1876**, Springer-Verlag, 2006.

[3] ΚΑΛΦΑ, Κ.: *Αξιωματική Θεωρία Συνόλων*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1990.

Κατηγορίες και Συναρτητές

[4] BRANDENBURG, M.: *Einführung in die Kategorientheorie*, zweite Auflage, Springer Spektrum, 2016.

[5] BUCUR, I. & DELEANU, A.: *Introduction to the Theory of Categories and Functors*, a Wiley-Interscience publication, John Wiley & Sons Ltd, 1968.

[6] FREYD, P.: *Abelian Categories. An Introduction to the Theory of Functors*, Harper and Row, New York, 1964.

[7] LAWVERE, F.W. & SCHANUEL, S.H.: *Conceptual Mathematics. A First Introduction to Categories*, Cambridge University Press, 1997; reprinted, 2000.

[8] MAC LANE, S.: *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Volume **5**, Springer-Verlag, 1971.

[9] MITCHELL, B.: *Theory of Categories*, Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, Volume **17**, Academic Press, New York & London, 1965.

[10] PAREIGIS, B.: *Categories and Functors*, Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, Volume **39**, Academic Press, New York & London, 1970.

[11] SCHUBERT, H.: *Categories*, Springer-Verlag, 1972.

Βοηθήματα από τη Γενική Άλγεβρα

[12] ADKINS, W.A. & WEINTRAUB, S.H.: *Algebra. An Approach via Module Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **136**, Springer-Verlag, 1992.

[13] ATIYAH, M. & MACDONALD, I.G.: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Pub. Co., 1969.

[14] BLYTH, T.S.: *Module Theory. An Introduction to Linear Algebra*, second edition, Oxford University Press, 1990.

[15] DUMMIT, D.S. & FOOTE, R.M.: *Abstract Algebra*, third edition, John Wiley & Sons, Inc., 2004.

[16] FUCHS, L.: *Abelian Groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2015.

[17] HUNGERFORD, T.W.: *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **73**, Springer-Verlag, 1974; 12th printing, 2003.

[18] NTAH, Δ.Ι.: *Θεωρία Δακτυλίων και Μοδίων*, Σημειώσεις Παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Κρήτης, εαρινό εξάμηνο των ακ. ετών 2004, 2005, 2010, 2012, 2013, 2015 και 2019.

Εισαγωγή στην Ομολογική Άλγεβρα

[19] BRUNNER, G.: *Homologische Algebra*, Wissenschaftsverlag, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1973.

[20] ΖΑΧΑΡΙΟΥ, Α.: *Ομολογική Άλγεβρα*, Τεύχος Ι, Σημειώσεις Παραδόσεων, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Αθηνών, 1976.

[21] HU, S.-T.: *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day Inc., San Francisco, 1968.

[22] JANS, J.P.: *Rings and Homology*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1964.

[23] NORTHCOTT, D.G.: *A First Course of Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1973.

[24] NTAH, Δ.Ι.: *Στοιχεία Ομολογικής Άλγεβρας*, Σημειώσεις Παραδόσεων, Πανεπιστήμιο Κρήτης, χειμερινό εξάμηνο 2006-2007 και εαρινό εξάμηνο 2020.

[25] ROTMAN, J.J.: *Notes on Homological Algebra*, Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies, Vol. **26**, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1970.

[26] ROTMAN, J.J.: *Homology*, Chapter C-3 of the book *Advanced Modern Algebra*, third edition, part 2, pp. 223-338, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **80**, American Mathematical Society, 2017.

[27] VERMANI, L.R.: *An Elementary Approach to Homological Algebra*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. **130**, Chapman & Hall/ CRC, 2003.

Προκεχωρημένη Ομολογική Άλγεβρα

[28] Bourbaki, N.: *Algèbre homologique*. Éléments de Mathématique, *Algèbre*, Chapitre **10**, Masson, Paris, 1980; reprinted 2007 by Springer-Verlag.

[29] Cartan, H. & Eilenberg, S.: *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956; seventh printing, 1973.

[30] Gelfand, S.I. & Manin, Yu.I.: *Methods of Homological Algebra,* second edition, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2003.

[31] Hilton, P.J.: *Lectures in Homological Algebra*, Regional Conference Series in Mathematics, Vol. **8**, American Mathematical Society, 1971.

[32] Hilton, P.J. & Stammbach, U.: *A Course in Homological Algebra,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. **4**, Springer-Verlag, 1971; second edition, 1997. [Οι παραπομπές σε σελίδες αυτού αφορούν στη *δεύτερη* έκδοσή του.]

[33] Mac Lane, S.: *Homology*, second edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **114**, Springer-Verlag, 1975.

[34] Osborne, S.M.: *Basic Homological Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **196**, Springer-Verlag, 2000.

[35] Rotman, J.J.: *An Introduction to Homological Algebra*, first edition, Academic Press, 1979; second edition, Universitext, Springer-Verlag, 2009. [Οι παραπομπές σε σελίδες αυτού αφορούν στη *δεύτερη* έκδοσή του.]

[36] Weibel, C.A.: *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. **38**, Cambridge University Press, 1994; reprinted, 2003.

Βοηθήματα από τη Γενική Τοπολογία

[37] Armstrong, M.A.: *Basic Topology*, second edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1983.

[38] Dugunji, J.: *Topology,* Allyn and Bacon Inc., 1966.

[39] Hu, S.T.: *Elements of General Topology,* Holden Day, Inc., San Francisco, 1964.

[40] McCleary, J.: *A First Course in Topology*, Student Mathematical Library, Vol. **31**, American Mathematical Society, 2006.

[41] Munkres, J.R.: *Topology*, second edition, Prentice Hall, 2000. (Reprinted 2014 by Pearson Education Limited.)

[42] Νεγρεποντη, Σ.: *Σημειώσεις Παραδόσεων Γενικής Τοπολογίας*, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Αθηνών, 1975.

[43] Willard, S.: *General Topology*, Addison-Wesley Pub. Co., 1970.

Βιβλία ιστορικής αξίας για την εξέλιξη τής Συνδυαστικής και τής Αλγεβρικής Τοπολογίας

[44] ALEXANDROFF, P. & HOPF, H.: *Topologie,* Erster Band, die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band **45**, Springer-Verlag, 1935.

[45] KERÉKJÁRTÓ, B.: *Vorlesungen über Topologie* I, die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band **8**, Springer-Verlag, 1923.

[46] LEFSCHETZ, S.: *Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **12**, American Mathematical Society, 1930.

[47] LEFSCHETZ, S.: *Algebraic Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **27**, American Mathematical Society, 1942.

[48] LEFSCHETZ, S.: *Introduction to Topology*, Princeton Mathematical Series, Vol. **11**, Princeton University Press, 1949.

[49] REIDEMEISTER, K.: *Einführung in die kombinatorische Topologie*, Vieweg, Braunschweig, 1932.

[50] SEIFERT, H. & THRELFALL, W.: *Lehrbuch der Topologie,* Teubner, Leipzig, 1934.

[51] VEBLEN, O.: *Analysis Situs*, American Mathematical Society Colloquium Lectures, Vol. **5**, American Mathematical Society, 1922.

Εισαγωγή στην Αλγεβρική Τοπολογία

[52] AGOSTON, M.K.: *Algebraic Topology, A First Course,* Marcel Dekker, New York, 1976.

[53] CROOM, F.H.: *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1978.

[54] KOSNIOWSKI, C.: *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge Un. Press, 1980.

[55] LAHIRI, B.K.: *A First Course in Algebraic Topology*, second edition, Alpha Science International Ltd., 2005.

Προκεχωρημένη Αλγεβρική Τοπολογία

[56] ARTIN, E. & BRAUN, H.: *Introduction to Algebraic Topology*, Charles E. Merrill Pub. Co., 1969.

[57] BREDON, G.E.: *Topology and Geometry,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. **139**, Springer-Verlag, 1993.

[58] BOTT, R. & TU L.W.: *Differential Forms in Algebraic Topology,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. **82**, Springer-Verlag, 1982.

[59] Davis, J.F. & Kirk, P.: *Lecture Notes in Algebraic Topology*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **35**, American Mathematical Society, 2001.

[60] Dieudonné, J.: *Éléments D' Analyse*, Tome **IX**, *Topologie Algébrique, Topologie Différentielle Élémentaire*, Éditions Jacques Gabay, 1982.

[61] Dold, A.: *Lectures on Algebraic Topology*, second edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **200**, Springer-Verlag, 1980.

[62] Eilenberg, S. & Steenrod, N.E.: *Foundations of Algebraic Topology,* Princeton University Press, 1952.

[63] Ferrario, D.L. & Piccinini, R.A.: *Simplicial Structures in Topology,* Canadian Mathematical Society Books in Mathematics, Springer-Verlag, 2011.

[64] Friedman, G.: *Singular Intersection Homology,* New Mathematical Monographs, Vol. **33**, Cambridge University Press, 2020.

[65] Fulton, W.: *Algebraic Topology. A First Course,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. **153**, Springer-Verlag, 1995.

[66] Godbillon, C.: *Éléments de topologie algébrique,* Hermann, Paris, 1971.

[67] Greenberg, M.J. & Harper, J.R.: *Algebraic Topology. A First Course*, Mathematics Lecture Note Series, Vol. **58**, The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1981.

[68] Hatcher, A.: *Algebraic Topology,* Cambridge University Press, 2002.

[69] Hilton, P.J. & Wylie, S.: *Homology Theory. An Introduction to Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1960.

[70] Hocking, J.G. & Young, G.S.: *Topology*, Addison-Wesley Pub. Co., 1961; reprinted by Dover Publications, Inc., in 1988.

[71] Hu, S.-T.: *Theory of Retracts,* Wayne State University Press, Michigan, 1965.

[72] Hu, S.-T.: *Homology Theory. A First Course in Algebraic Topology,* Holden-Day Inc., San Francisco, 1966.

[73] Hu, S.-T.: *Cohomology Theory,* Markam Publishing Co., Chicago, 1968.

[74] Jeanneret, A. & Lines, D.: *Invitation à la topologie algébrique*, deux volumes, Cépaduès-Éditions, Toulouse, 2014.

[75] Kirwan, F. & Woolf, J.: *An Introduction to Intersection Homology Theory,* second edition, CRC Press, Taylor and Francis Group, Chapman & Hall Books, 2006.

[76] Lück, W.: *Algebraische Topologie. Homologie und Mannigfaltigkeiten*, Vieweg, 2005.

[77] Massey, W.S.: *A Basic Course in Algebraic Topology,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. **127**, Springer-Verlag, 1991.

[78] May, J.P.: *A Concise Course in Algebraic Topology,* Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, 1999.

[79] MAYER, K.H.: *Algebraische Topologie,* Birkhäuser, 1989.

[80] MUNKRES, J.R.: *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley Pub. Co., 1984.

[81] PARK, E.: *Complex Topological K-Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. **111**, Cambridge University Press, 2008.

[82] PRASOLOV, V.V.: *Elements of Homology Theory*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. **81**, American Mathematical Society, 2007.

[83] RANICKI J.: *Exact Sequences in the Algebraic Theory of Surgery,* P.U.P., 1981.

[84] ROTMAN, J.J.: *An Introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **119**, Springer-Verlag, 1988.

[85] SHASTRI, A.R.: *Basic Algebraic Topology*, CRC Press, Taylor and Francis Group, Chapman & Hall Books, 2014.

[86] SPANIER, E.: *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966; reprinted by Springer-Verlag.

[87] STÖCKER, R. & ZIESCHANG, H.: *Algebraische Topologie*, zweite Auflage, Teubner, 1994.

[88] SWITZER, R.M.: *Algebraic Topology. Homotopy and Homology,* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band **212**, Springer-Verlag, 1975.

[89] TELEMAN, C.: *Grundzüge der Topologie und differenzierbare Mannigfaltigkeiten,* Mathematische Monographien, Band **8**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.

[90] TOENNIESSEN, F.: *Topologie. Ein Lesebuch von den elementaren Grundlagen bis zur Homologie und Kohomologie,* Spektrum, Springer-Verlag, 2017.

[91] TOM DIECK, T.: *Algebraic Topology*, Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, 2008.

[92] VICK, J.W.: *Homology Theory. An Introduction to Algebraic Topology,* second edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **145**, Springer-Verlag, 1994.

[93] WALLACE, A.H.: *An Introduction to Algebraic Topology,* Pergamon Press, 1957.

[94] WEINTRAUB, S.H.: *Fundamentals of Algebraic Topology,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. **270**, Springer-Verlag, 2014.

Περί τοπολογικών επιφανειών

[95] GALLIER, J. & XU, D.: *A Guide to the Classification for Compact Surfaces*, Geometry and Computing, Vol. **9**, Springer-Verlag, 2013.

[96] GIBLIN, P.: *Graphs, Surfaces and Homology*, third edition, Cambridge University Press, 2010.

[97] Kinsey, L.C.: *Topology of Surfaces*, Undegraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1993.

Περί CW-συμπλεγμάτων (CW-complexes)

[98] Cooke, G.E. & Finney, R.S.: *Homology of Cell Complexes.* (Based on Lectures by N.E. Steenrod.) Math. Notes, Princeton University Press, 1967.

[99] Fritsch, R. & Piccinini, R.A.: *Cellular Structures in Topology,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. **19**, Cambridge University Press, 1990.

[100] Lundell, A.T. & Weingram, S.: *The Topology of CW Complexes*, Van Nostrand Reinhold Co., 1969.

Θεωρία Δραγμάτων (Sheaf Theory)

[101] Bredon, G.E.: *Sheaf Theory,* McGraw-Hill, Inc., 1967; second edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **170**, Springer-Verlag, 1997. [Οι παραπομπές σε σελίδες αυτού αφορούν στη *δεύτερη* έκδοσή του.]

[102] Dimca, A.: *Sheaves in Topology,* Universitext, Springer-Verlag, 2004.

[103] Godement, R.: *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux,* Hermann, Paris, 1958.

[104] Hirzebruch, F. & Scheja, G.: *Garben und Cohomologietheorie,* Ausarbeitungen mathematischer und physikalischer Vorlesungen, Band **XX**, Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung, Münster, Westf., 1957.

[105] Iversen, B.: *Cohomology of Sheaves,* Universitext, Springer-Verlag, 1986.

[106] Kultze, R.: *Garbentheorie,* B.G. Teubner, Stuttgart, 1970.

[107] Swan, R.G.: *The Theory of Sheaves,* The University of Chicago Press, Ltd., 1964.

Συνομολογία Ομάδων

[108] Brown, K.S.: *Cohomology of Groups,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. **87**, Springer-Verlag, 1982.

[109] Evens, L.: *The Cohomology of Groups,* Oxford University Press, 1991.

[110] Lassueur, C.: *Cohomology of Groups,* Lecture Notes, Technische Universität Kaiserslautern, 2018.

[111] Löh, C.: *Group Cohomology,* Lecture Notes, Universität Regensburg, 2019.

[112] Weiss, E.: *Cohomology of Groups,* Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, Vol. **34**, Academic Press, New York and London, 1969.

Από την Ιστορία τής Αλγεβρικής Τοπολογίας

[113] Basbois, N.: *Die Entstehung des Begriffs der Homologiegruppe,* Internationale Mathematische Nachrichten, Nr. **217** (2011), 1-37. (Σε μετάφραση τού Christian Krattenthaler από τα γαλλικά.)

[114] Bollinger, M.: *Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffs,* Archive for History of Exact Sciences, Vol. **9** (1972), 94–170.

[115] Dieudonné, J.: *Emmy Noether and Algebraic Topology*, Journal of Pure and Applied Algebra **31** (1984), 5-6.

[116] Dieudonné, J.: *A History of Algebraic and Differential Topology* 1900-1960, Birkhäuser, 1989.

[117] Haupt, O.: *Hermann Künneth zum Gedenken*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereiniging **78** (1976), 61-66.

[118] Helmberg, G. & Sigmund, K.: *Nestor of Mathematicians: Leopold Vietoris Turns 105*, The Mathematical Intelligencer **18** (1996), no. 4, 47-50.

[119] Hilton, P.J.: *A brief, subjective history of homology and homotopy theory in this century*, Mathematics Magazine **61** (1988), no. 5, 282-291.

[120] Hirzebruch, F.: *Emmy Noether and Topology*. In *The Heritage of Emmy Noether*, Israel Mathematical Conference Proceedings, Vol. **12**, Mina Teicher (ed.), (1999), pp. 57-66; see also Gesammelte Abhandlungen, Band III, 2019, pp. 433-441.

[121] Mac Lane, S.: *Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether*, Journal of Pure and Applied Algebra **39** (1986), 305-307.

[122] Reitberger, H.: *The contributions of L. Vietoris and H. Tietze to the foundations of General Topology,* in: *Handbook of the History of General Topology*, Vol. **1**, C.E. Aull & R. Lowen (eds.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, pp. 31-40.

[123] Reitberger, H.: *Leopold Vietoris (1891-2002),* Notices of A.M.S., **46** (2002), no. 10, 1232-1236.

[124] Reitberger, H.: *Leopold Vietoris zum Gedenken,* Internationale Mathematische Nachrichten, Nr. **191** (2002), 1-16.

[125] Scholz, E.: *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser, 1980.

[126] Scholz, E.: *The concept of manifold, 1850-1950*, in *History of Topology*, edited by I.M. James, North-Holland, 1999, pp. 25-64.

[127] Stillwell, J.: *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **72**, Springer-Verlag, 1980.

Ευρετήριο Όρων

Ευρετήριο Ονομάτων