ΟΜΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ: 6ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να αποδειχθεί ότι $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \{0\}$ και ότι $(\mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \{0\}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

2. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένας (κανονιστικός) ισομορφισμός $\mathbb{Z}$-μοδίων $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

3. Να αποδειχθεί ότι το στοιχείο $2 \otimes (1 + 2\mathbb{Z})$ είναι το μηδενικό στοιχείο τού $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, ενώ είναι διάφορο τού μηδενικού στοιχείου τού $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

4. Εάν ο R είναι μια ακεραία περιοχή και το $\mathrm{Quot}(R)$ το σώμα κλασμάτων της, να αποδειχθεί ότι $(\mathrm{Quot}(R)/R) \otimes_R (\mathrm{Quot}(R)/R) = \{0\}$.

5. (i) Να αποδειχθεί ότι για οιουσδήποτε $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ υφίσταται ένας ισομορφισμός $\mathbb{Z}$-μοδίων

$$(\mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\text{μκδ}(\kappa, \lambda)\mathbb{Z}.$$

(ii) Γενικότερα, να αποδειχθεί ότι για οιουσδήποτε $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_s \in \mathbb{N}$ (όπου $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$) υφίσταται ένας ισομορφισμός $\mathbb{Z}$-μοδίων

$$(\mathbb{Z}/\kappa_1\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/\kappa_2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/\kappa_s\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\text{μκδ}(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_s)\mathbb{Z}.$$

[*Υπόδειξη*: Για το (i) να εφαρμοσθεί το πόρισμα 3.6.5. Για το (ii) να γίνει χρήση τού (i), τού θεωρήματος 3.4.4 και μαθηματικής επαγωγής επί τού s.]

6. Εάν οι G, H είναι δυο (προσθετικές) *πεπερασμένες* αβελιανές ομάδες, να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(i) $G \otimes_{\mathbb{Z}} H = \{0\}$.

(ii) $\text{μκδ}(|G|, |H|) = 1$.

[*Υπόδειξη*: Βλ. πόρισμα 1.7.17, θεώρημα 3.4.5 και άσκηση **5**.]

7. Έστω G μια (προσθετική) αβελιανή ομάδα. Έστω $\kappa \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $\kappa G := \{\kappa g |\, g \in G\}$ να αποδειχθεί η ύπαρξη ενός ισομορφισμού $\mathbb{Z}$-μοδίων

$$(\mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} G \cong G/\kappa G.$$

[*Υπόδειξη*: Να εφαρμοσθεί το πόρισμα 3.6.4.]

8. Έστω G μια (προσθετική) *πεπερασμένως παραγόμενη* αβελιανή ομάδα. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(i) Η G είναι πεπερασμένη.

(ii) $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \{0\}$.

[*Υπόδειξη*: Βλ. σημείωση 1.7.15, θεωρήματα 3.4.3 και 3.4.5, και άσκηση **1** ή άσκηση **7**.]

9. Εάν το K είναι ένα σώμα, να αποδειχθεί η ύπαρξη ενός (κανονιστικού) ισομορφισμού K-διανυσματικών χώρων

$$K[t_1, t_2] \cong K[t_1] \otimes_K K[t_2].$$

10. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος ορισμένος υπεράνω ενός σώματος K.

(i) Εάν $v, v' \in V \smallsetminus \{0_V\}$, να αποδειχθεί ότι $v \otimes v' = v' \otimes v$ εντός τού $V \otimes_K V$ εάν και μόνον εάν $v' = \lambda v$ για κάποιο $\lambda \in K$. [*Υπόδειξη*: Η μία κατεύθυνση είναι προφανής βάσει τού πορίσματος 3.3.13 (iii). Για την άλλη αρκεί να αποδειχθεί ότι το $\{v, v'\}$ είναι κατ' ανάγκην σύνολο γραμμικώς εξαρτημένο.]

(ii) Εάν $v_1, v_2, v_1', v_2' \in V \smallsetminus \{0_V\}$, να αποδειχθεί ότι $v_1 \otimes v_2 = v_1' \otimes v_2'$ εντός τού $V \otimes_K V$ εάν και μόνον εάν $v_1' = \lambda v_1$ και $v_2' = \mu v_2$ για κάποια $\lambda, \mu \in K$ με $\lambda\mu = 1_K$. [*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί το (i) σε συνδυασμό με το πόρισμα 3.4.10 (i).]

11. Έστω ότι το K είναι ένα σώμα και ότι οι U και V είναι δυο K-διανυσματικοί χώροι. Εάν οι $U' \subseteq U$ και $V' \subseteq V$ είναι οιοιδήποτε υπόχωροί τους, υποθέτουμε ότι έχουμε ταυτίσει την εικόνα τού $U' \otimes_K V'$ εντός τού $U \otimes_K V$ μέσω τού μονομορφισμού

$$U' \otimes_K V' \hookrightarrow U \otimes_K V$$

τού επαγομένου από τις ενθετικές απεικονίσεις $U' \hookrightarrow U$ και $V' \hookrightarrow V$, θεωρώντας τόν $U' \otimes_K V'$ ως υπόχωρο τού $U \otimes_K V$.

Να αποδειχθεί ότι για υποχώρους $U_1, U_2, U' \subseteq U$ και $V_1, V_2, V' \subseteq V$ ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $(U_1 \otimes_K V) \cap (U_2 \otimes_K V) = (U_1 \cap U_2) \otimes_K V$,

(ii) $V_1 \cap V_2 = \{0\} \Longrightarrow (U_1 \otimes_K V_1) \cap (U_2 \otimes_K V_2) = \{0\}$,

(iii) $(U' \otimes_K V) \cap (U \otimes_K V') = U' \otimes_K V'$,

(iv) $(U_1 \otimes_K V_1) \cap (U_2 \otimes_K V_2) = (U_1 \cap U_2) \otimes_K (V_1 \cap V_2)$,

και ότι, γενικότερα, για υποχώρους $U_j \subseteq U$, $j \in J$, και $V_\lambda \subseteq V$, $\lambda \in \Lambda$, ισχύει η ισότητα

(v) $\displaystyle\bigcap_{(j,\lambda) \in J \times \Lambda} (U_j \otimes_K V_\lambda) = \left(\bigcap_{j \in J} U_j\right) \otimes_K \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\right).$

12. (i) Έστω $(M_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων και έστω N ένας R-μόδιος. Να αποδειχθεί ότι ο κανονιστικός ομομορφισμός

$$(\prod_{j \in \mathbb{N}} M_j) \bigotimes_R N \longrightarrow \prod_{j \in \mathbb{N}} (M_j \bigotimes_R N), \quad (m_j)_{j \in J} \otimes n \longmapsto (m_j \otimes n)_{j \in J},$$

είναι *επιμορφισμός* όταν ο N είναι *πεπερασμένως παραγόμενος*.

(ii) Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Να αποδειχθεί ότι

$$(\prod_{j \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z})) \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \ncong \prod_{j \in \mathbb{N}} ((\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}) \bigotimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}).$$

(Ως εκ τούτου, το θεώρημα 3.4.5 δεν ισχύει εάν το ευθύ άθροισμα αντικατασταθεί από το ευθύ γινόμενο.)

13. *Γενίκευση τού παραδείγματος 3.3.17* (iv). Ας υποθέσουμε ότι η $f : M \longrightarrow M'$ είναι ένας ομομορφισμός μεταξύ δυο πεπερασμένως παραγομένων, ελευθέρων R-μοδίων και ότι οι

$$\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_l\}, \ \mathcal{A}' = \{m_1', \ldots, m_k'\}, \ ((k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}),$$

είναι διατεταγμένες βάσεις των M και M', αντιστοίχως. Μέσω των l ισοτήτων

$$f(m_i) = \sum_{i=1}^{k} a_{i\nu}\, m_i', \ \ 1 \leq \nu \leq l,$$

ορίζεται ο πίνακας

$$\mathbf{M}_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}(f) := (a_{i\nu}) \in \mathrm{Mat}_{k\times l}(R)$$

τού f ως προς τις βάσεις $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}'$. Εάν ο $g : N \longrightarrow N'$ είναι ένας επιπρόσθετος ομομορφισμός μεταξύ πεπερασμένως παραγομένων, ελευθέρων R-μοδίων, οι

$$\mathcal{B} = \{n_1, \ldots, n_q\},\ \ \mathcal{B}' = \{n'_1, \ldots, n'_p\},\ \ ((p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}),$$

διατεταγμένες βάσεις των N και N', αντιστοίχως, και

$$\mathbf{M}_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(g) := (b_{j\mu}) \in \mathrm{Mat}_{p\times q}(R)$$

ο πίνακας τού g ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$, τότε, κάνοντας χρήση τού θεωρήματος 3.4.6 και τής λεξικογραφικής διατάξεως δεικτών, ορίζουμε τη διατεταγμένη βάση

$$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} := \{m_1\otimes n_1, \ldots, m_1\otimes n_q, \ldots\ldots, m_l\otimes n_1, \ldots, m_l\otimes n_q\}$$

τού $M\otimes_R N$ και τη διατεταγμένη βάση

$$\mathcal{A}'\otimes\mathcal{B}' := \{m'_1\otimes n'_1, \ldots, m'_1\otimes n'_p, \ldots\ldots, m'_k\otimes n'_1, \ldots, m'_k\otimes n'_p\}$$

τού $M'\otimes_R N'$, αποκαλώντας τήν $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ (και, αντιστοίχως, την $\mathcal{A}'\otimes\mathcal{B}'$) **τανυστικό γινόμενο των βάσεων** $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ (και αντιστοίχως, τανυστικό γινόμενο των βάσεων $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{B}'$). Ο πίνακας

$$\mathbf{M}_{\mathcal{A}'\otimes\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}(f\bar{\otimes}g) := (c_{\alpha\beta}) \in \mathrm{Mat}_{kp\times lq}(R)$$

τού τανυστικού γινομένου των ομομορφισμών f και g ως προς τις ανωτέρω βάσεις $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ και $\mathcal{A}'\otimes\mathcal{B}'$ είναι ευκόλως υπολογίσιμος, καθότι έχουμε

$$\begin{aligned}
(f\bar{\otimes}g)(m_\nu\otimes n_\mu) &= f(m_\nu)\otimes g(n_\mu)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} a_{i\nu}\, m'_i\right)\otimes\left(\sum_{j=1}^{p} b_{j\mu}\, n'_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} a_{i\nu}\, b_{j\mu}\left(m'_i\otimes n'_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} c_{(i-1)p+j,(\nu-1)q+\mu}\left(m'_i\otimes n'_j\right),
\end{aligned}$$

και, ως εκ τούτου,

$$c_{(i-1)p+j,(\nu-1)q+\mu} = a_{i\nu}\, b_{j\mu},$$

για κάθε $i\in\{1,\ldots,k\}$, $j\in\{1,\ldots,p\}$, $\nu\in\{1,\ldots,l\}$ και $\mu\in\{1,\ldots,q\}$. Η ως άνω *κατασκευαστική* διαδικασία μάς οδηγεί στην παράθεση τού ακολούθου φορμαλιστικού ορισμού: Εάν οι k,l,p,q είναι φυσικοί αριθμοί και

$$\mathbf{A} = (a_{i\nu}) \in \mathrm{Mat}_{k\times l}(R),\ \ \mathbf{B} = (b_{j\mu}) \in \mathrm{Mat}_{p\times q}(R),$$

τότε ο πίνακας

$$\mathbf{C} := \mathbf{A}\otimes\mathbf{B} := (c_{\alpha\beta}) \in \mathrm{Mat}_{kp\times lq}(R),$$

ο οριζόμενος μέσω τής

$$c_{(i-1)p+j,(\nu-1)q+\mu} := a_{i\nu}\, b_{j\mu},$$

για κάθε $i \in \{1,\ldots,k\}$, $j \in \{1,\ldots,p\}$, $\nu \in \{1,\ldots,l\}$ και $\mu \in \{1,\ldots,q\}$, καλείται **τανυστικό γινόμενο**[1] (ή **κατά Kronecker γινόμενο**) **των πινάκων A και B**. Σύμφωνα με τα όσα προαναφέραμε, το τανυστικό γινόμενο

$$\mathrm{Mat}_{k\times l}(R) \times \mathrm{Mat}_{p\times q}(R) \ni (\mathbf{A},\mathbf{B}) \longmapsto \mathbf{A}\otimes\mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{kp\times lq}(R)$$

πινάκων είναι καλώς ορισμένο. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Έστω ότι οι M, M', N και N' είναι τέσσερεις πεπερασμένως παραγόμενοι, ελεύθεροι R-μόδιοι και ότι $f \in \mathrm{Hom}_R(M,M')$ και $g \in \mathrm{Hom}_R(N,N')$. Εάν οι $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{A}',\mathcal{B}'$ είναι διατεταγμένες βάσεις των M, M', N και N', αντιστοίχως, τότε

$$\mathbf{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(f) \otimes \mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(g) = \mathbf{M}^{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}}_{\mathcal{A}'\otimes\mathcal{B}'}(f\bar{\otimes}g)\,.$$

(ii) Εάν $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{k\times l}(R)\,,\ \mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{p\times q}(R)\,,$ τότε

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1l}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2l}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1}\mathbf{B} & a_{k2}\mathbf{B} & \cdots & a_{kl}\mathbf{B} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{kp\times lq}(R)\,,$$

όπου για κάθε $i \in \{1,\ldots,k\}$ και $\nu \in \{1,\ldots,l\}$ έχουμε

$$a_{i\nu}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{i\nu}b_{11} & a_{i\nu}b_{12} & \cdots & a_{i\nu}b_{1q} \\ a_{i\nu}b_{21} & a_{i\nu}b_{22} & \cdots & a_{i\nu}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i\nu}b_{p1} & a_{i\nu}b_{p2} & \cdots & a_{i\nu}b_{pq} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{p\times q}(R)\,.$$

(iii) Εάν $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{k\times l}(R)$ και $\varphi_{\mathbf{A}} : R^l \longrightarrow R^k,\ x \longmapsto \varphi_{\mathbf{A}}(x) := \mathbf{A}x$, να αποδειχθεί ότι

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{\mathcal{E}_l}_{\mathcal{E}_k}(\varphi_{\mathbf{A}})\,,$$

όπου $\mathcal{E}_l, \mathcal{E}_k$ είναι οι *συνήθεις βάσεις* των R^l και R^k.

14. *Κύριες ιδιότητες τού τανυστικού γινομένου πινάκων.* Εάν οι k, l, p, q, r, s, t είναι φυσικοί αριθμοί και

$$\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{k\times l}(R)\,,\ \mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{p\times q}(R)\,,\ \mathbf{C} \in \mathrm{Mat}_{r\times s}(R)\,,\ \mathbf{D} \in \mathrm{Mat}_{s\times t}(R)\,,$$

να αποδειχθούν (με τη βοήθεια των (i)-(iii) τής ασκήσεως **13**) τα ακόλουθα:

(i) Οι υπολογιστικοί κανόνες:

a) $\mathbf{A}\otimes(\mathbf{B}\otimes\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})\otimes\mathbf{C}$,

b) Για $p = r, q = s \Longrightarrow \begin{cases} \mathbf{A}\otimes(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\otimes\mathbf{B} + \mathbf{A}\otimes\mathbf{C}, \\ (\mathbf{B}+\mathbf{C})\otimes\mathbf{A} = \mathbf{B}\otimes\mathbf{A} + \mathbf{C}\otimes\mathbf{A}. \end{cases}$

c) Για κάθε $\lambda \in R : \lambda(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}) = (\lambda\mathbf{A})\otimes\mathbf{B} = \mathbf{A}\otimes(\lambda\mathbf{B})\,,$

d) $(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{\intercal} = \mathbf{A}^{\intercal}\otimes\mathbf{B}^{\intercal}$.

[1]Το τανυστικό γινόμενο πινάκων (ιδιαιτέρως όταν ο R είναι *σώμα*) αποτελεί λίαν χρήσιμο εργαλείο σε πολλούς μαθηματικούς κλάδους, όπως π.χ. στη Γραμμική Αριθμητική Ανάλυση, στη Θεωρία Αριθμητικής Επιλύσεως Διαφορικών Εξισώσεων, στη Μαθηματική Φυσική κ.ά.

(ii) Εάν $l = p$, τότε

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})\,(\mathbf{B} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AB} \otimes \mathbf{CD}.$$

[*Υπόδειξη*: Προφανώς,

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})\,(\mathbf{B} \otimes \mathbf{D}) &= (\mathbf{M}_{\mathcal{E}_k}^{\mathcal{E}_l}(\varphi_{\mathbf{A}}) \otimes \mathbf{M}_{\mathcal{E}_r}^{\mathcal{E}_s}(\varphi_{\mathbf{C}}))(\mathbf{M}_{\mathcal{E}_p}^{\mathcal{E}_q}(\varphi_{\mathbf{B}}) \otimes \mathbf{M}_{\mathcal{E}_s}^{\mathcal{E}_t}(\varphi_{\mathbf{D}})) \\ &= (\mathbf{M}_{\mathcal{E}_k \otimes \mathcal{E}_r}^{\mathcal{E}_l \otimes \mathcal{E}_s}(\varphi_{\mathbf{A}} \bar{\otimes} \varphi_{\mathbf{C}}))(\mathbf{M}_{\mathcal{E}_p \otimes \mathcal{E}_s}^{\mathcal{E}_q \otimes \mathcal{E}_t}(\varphi_{\mathbf{B}} \bar{\otimes} \varphi_{\mathbf{D}})) \\ &= \mathbf{M}_{\mathcal{E}_k \otimes \mathcal{E}_r}^{\mathcal{E}_q \otimes \mathcal{E}_t}((\varphi_{\mathbf{A}} \bar{\otimes} \varphi_{\mathbf{C}}) \circ (\varphi_{\mathbf{B}} \bar{\otimes} \varphi_{\mathbf{D}}))\,,\end{aligned}$$

οπότε αρκεί η εφαρμογή τής προτάσεως 3.5.5.]

(iii) Υπάρχουν μετατακτικοί πίνακες[2]

$$\mathbf{P} \in \mathrm{Mat}_{kp \times kp}(R)\,, \quad \mathbf{Q} \in \mathrm{Mat}_{lq \times lq}(R)\,,$$

ούτως ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{B} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{P}\,(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})\,\mathbf{Q}.$$

Στην περίπτωση κατά την οποία $k = l$ και $p = q$, οι εν λόγω πίνακες μπορούν να επιλεγούν κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να έχουμε $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{\intercal}$. [*Υπόδειξη*: Για κάθε ζεύγος $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ έστω

$$\sigma_{ij} : R^i \otimes_R R^j \longrightarrow R^j \otimes_R R^i$$

ο κανονιστικός ισομορφισμός που ορίσθηκε από το θεώρημα 3.4.1. Προφανώς, $\sigma_{ij}^{-1} = \sigma_{ji}$. Επιπροσθέτως, ο πίνακας $\mathbf{P}_{ij} := \mathbf{M}_{\mathcal{E}_j \otimes \mathcal{E}_i}^{\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{E}_j}(\sigma_{ij})$ είναι μετατακτικός με

$$\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}^{\intercal} = \mathbf{P}_{ji} = \mathbf{M}_{\mathcal{E}_i \otimes \mathcal{E}_j}^{\mathcal{E}_j \otimes \mathcal{E}_i}(\sigma_{ji}) \in \mathrm{Mat}_{ij \times ij}(R)$$

και $\varphi_{\mathbf{B}} \bar{\otimes} \varphi_{\mathbf{A}} = \sigma_{kp} \circ (\varphi_{\mathbf{A}} \bar{\otimes} \varphi_{\mathbf{B}}) \circ \sigma_{lq}$. Εξ αυτού έπεται το ζητούμενο εάν κανείς θέσει $\mathbf{P} := \mathbf{P}_{kp}$ και $\mathbf{Q} := \mathbf{P}_{lq}$.]

(iv) Εάν $k = l$ και $p = q$, τότε

$$\mathbf{tr}\,(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathbf{tr}\,(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{tr}\,(\mathbf{B}) = \mathbf{tr}\,(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})$$

(όπου $\mathbf{tr}$ = *ίχνος*) και

$$\det(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\det(\mathbf{A}))^p\,(\det(\mathbf{B}))^k = \det(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})\,.$$

[*Υπόδειξη*: Κατά το (iii) υπάρχει μετατακτικός πίνακας $\mathbf{P} \in \mathrm{Mat}_{kp \times kp}(R)$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{P}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})\mathbf{P}^{\intercal}$. Να χρησιμοποιηθεί η ισότητα $\det(\mathbf{P})^2 = 1$. Εν συνεχεία, για τον υπολογισμό τής $\det(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$ να χρησιμοποιηθεί η ισότητα $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_p)(\mathbf{I}_k \otimes \mathbf{B})$ (που έπεται από το (ii)).]

(v) Εάν $k = l$ και $p = q$, και εάν αμφότεροι οι A και B είναι αντιστρέψιμοι, τότε και ο πίνακας $A \otimes B$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}.$$

(vi) Εάν ο R είναι *περιοχή κυρίων ιδεωδών*, τότε η βαθμίδα τού πίνακα $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ ισούται με το γινόμενο των βαθμίδων των πινάκων $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$:

$$\mathrm{rank}\,(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathrm{rank}\,(\mathbf{A}) \cdot \mathrm{rank}\,(\mathbf{B})\,.$$

[2] Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται **μετατακτικός** όταν κατασκευάζεται μέσω μιας μετατάξεως γραμμών ή στηλών τού μοναδιαίου πίνακα. (Σημειωτέον ότι για κάθε μετατακτικό πίνακα P έχουμε $P^{\intercal} = P^{-1}$ και $\det(P)^2 = 1$.)

15. Έστω ότι οι k, l είναι δυο φυσικοί αριθμοί και ότι $\mathbf{A} \in \mathrm{Mat}_{k\times k}(\mathbb{C}), \mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{l\times l}(\mathbb{C})$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ είναι οι ιδιοτιμές τού $\mathbf{A}$ με τα $u_1, \ldots, u_k$ ως ιδιοδιανύσματα (και αντιστοίχως, οι $\mu_1, \ldots, \mu_l \in \mathbb{C}$ οι ιδιοτιμές τού $\mathbf{B}$ με τα $v_1, \ldots, v_l$ ως ιδιοδιανύσματα), τότε το $\left\{ \lambda_i \otimes \mu_j \middle| 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l \right\}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών και το $\{ u_i \otimes v_j | 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l \}$ το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων τού πίνακα $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathrm{Mat}_{kl\times kl}(\mathbb{C})$.

(ii) Ο πίνακας $\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_l + \mathbf{I}_k \otimes \mathbf{B}$ έχει το $\left\{ \lambda_i + \mu_j \middle| 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l \right\}$ ως σύνολο ιδιοτιμών και το $\{ u_i \otimes v_j | 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l \}$ ως σύνολο ιδιοδιανυσμάτων.

(iii) Ως γνωστόν, η **εκθετική απεικόνιση**[3] exp: $\mathrm{Mat}_{k\times k}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{k\times k}(\mathbb{C})$ που δίδεται μέσω τού τύπου

$$\exp(\mathbf{A}) := e^{\mathbf{A}} := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^j}{j!},$$

είναι καλώς ορισμένη, καθόσον η προκειμένη σειρά συγκλίνει[4]. Εάν $k = l$, τότε

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{(\mathbf{A}\otimes\mathbf{I}_k + \mathbf{I}_k\otimes\mathbf{B})}.$$

Από τη δεύτερη ισότητα προκύπτει άμεσα η

$$\mathbf{tr}(e^{(\mathbf{A}\otimes\mathbf{I}_k + \mathbf{I}_k\otimes\mathbf{B})}) = \mathbf{tr}\left(e^{\mathbf{A}}\right) \mathbf{tr}\left(e^{\mathbf{B}}\right),$$

η οποία διασυνδέει το ίχνος, το τανυστικό γινόμενο και την εκθετική απεικόνιση, και παίζει σημαντικό ρόλο στη μελέτη των *συστημάτων τού Fermi* στο πλαίσιο τής Θεωρητικής Μηχανικής[5].

16. *Αλλαγή τού δακτυλίου αναφοράς.* Έστω $\phi : R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός μεταξύ δυο μεταθετικών δακτυλίων με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο (και, ως συνήθως, $\phi(1_R) = 1_S$). Ο S καθίσταται *R-μόδιος* μέσω τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού

$$R \times S \longrightarrow S, \ \ (r, s) \longmapsto rs := \phi(r)s, \ \ \forall\, (r, s) \in R \times S.$$

(Το ίδιο συμβαίνει με οιονδήποτε S-μόδιο. Πρβλ. άσκηση **4** τού 1ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων.) Εάν ο M είναι τυχών R-μόδιος, τότε το τανυστικό γινόμενο

$$M_{(\phi)} := M_{(S)} := M \otimes_R S$$

είναι αφ' ενός μεν *R-μόδιος* με

$$rz = \phi(r)z, \quad \forall (r, z) \in R \times M_{(S)},$$

[3]Βλ. G. Strang: *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*, σε μετάφραση Π. Πάμφιλου, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1995, § 5.4, σελ. 321-337.

[4]Το σύνολο $\mathrm{Mat}_{k\times k}(\mathbb{C})$, εφοδιασμένο με τη στάθμη (= νόρμα) $\|\cdot\| : \mathrm{Mat}_{k\times k}(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_{k\times k}(\mathbb{C}) \longrightarrow [0, +\infty)$,

$$\|\mathbf{A}\| := \inf\left\{ c \geq 0 : |Ax| \leq c\,|x|\,,\ \forall x \in \mathbb{C}^k \right\},$$

όπου $|\cdot|$ η συνήθης (ευκλείδεια) στάθμη τού $\mathbb{C}^k$, είναι ένας χώρος Banach. Επειδή

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| \frac{\mathbf{A}^j}{j!} \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|\mathbf{A}\|^j}{j!} = e^{\|\mathbf{A}\|} < +\infty,$$

η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^j}{j!}$ συγκλίνει, αφού σε χώρους Banach οι απολύτως συγκλίνουσες σειρές είναι (σημειακώς) συγκλίνουσες.

[5]Βλ. W.-H. Steeb: *Kronecker Product of Matrices and Applications*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1991.

αφ' ετέρου δε S-*μόδιος* εφοδιαζόμενος με τον αριθμητικό πολλαπλασιασμό

$$S \times M_{(S)} \longrightarrow M_{(S)},\ \ (s, m \otimes s') := m \otimes (ss'),\ \ \forall m \in M,\ \ \forall (s,s') \in S \times S.$$

Ο $M_{(\phi)} := M_{(S)}$ καλείται **ο κατόπιν αλλαγής τού δακτυλίου αναφοράς αποκτώμενος S-μόδιος**. (Μάλιστα, ο ισομορφισμός R-μοδίων $M \otimes_R S \cong S \otimes_R M$ ο θεσπισθείς στο θεώρημα 3.4.1 μπορεί να ιδωθεί και ως ισομορφισμός S-μοδίων.) Ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$\iota_M : M \longrightarrow M_{(S)},\ \ m \longmapsto m \otimes 1_S,$$

στέλνει το M να απεικονισθεί σε ένα σύστημα S-γεννητόρων τού $M_{(S)}$. (Μάλιστα, ισχύει κάτι ακόμη πιο ισχυρό: ο ι_M στέλνει *κάθε* σύστημα R-γεννητόρων τού M να απεικονισθεί σε ένα σύστημα σύστημα S-γεννητόρων τού $M_{(S)}$.)

Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν ο M είναι ελεύθερος R-μόδιος (με την οικογένεια $(x_j)_{j\in J}$ ως μια βάση του), τότε ο $M_{(S)}$ είναι ελεύθερος S-μόδιος (με την οικογένεια $(x_j \otimes 1_S)_{j\in J}$ ως μια βάση του).

(ii) Όταν ο $\phi : R \longrightarrow S$ είναι *μονομορφισμός* δακτυλίων, τότε ο $M_{(\phi)} := M_{(S)}$ καλείται ιδιαιτέρως **ο κατόπιν επεκτάσεως τού δακτυλίου αναφοράς αποκτώμενος S-μόδιος**. Η ενριπτικότητα τού ϕ δεν συνεπάγεται πάντοτε την ενριπτικότητα τού ι_M. Ωστόσο, όταν ο ι_M συμβαίνει να είναι *μονομορφισμός* R-μοδίων, τότε είθισται να ταυτίζουμε τον M με την εικόνα του $\iota_M(M)$ εντός τού $M_{(S)}$ και να εισάγουμε τη συντομογραφία

$$sm := s(m \otimes 1_S),\ \forall (s,m) \in S \times M.$$

Επί παραδείγματι, όταν ο V είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος, ο

$$V_{(\mathbb{C})} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

είναι $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος (η λεγόμενη **μιγαδοποίηση** τού V) και $\dim_{\mathbb{C}}(V_{(\mathbb{C})})) = \dim_{\mathbb{R}}(V)$. Χρησιμοποιώντας τήν $\mathbb{R}$-βάση $\{1, i\}$ τού $\mathbb{C}$ και το πόρισμα 3.4.9 συνάγουμε τον ισομορφισμό $\mathbb{R}$-διανυσματικών χώρων

$$V \times V \xrightarrow{\cong} V_{(\mathbb{C})},\ \ \ (x,y) \longmapsto x \otimes 1 + y \otimes i.$$

Εάν ληφθούν υπ' όψιν αυτές οι ταυτίσεις, τότε για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x, y \in V$ ο αριθμητικός πολλαπλασιασμός εντός τού $V_{(\mathbb{C})}$ παρέχεται από τον τύπο

$$(a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i.$$

(iii) Εάν ο N είναι τυχών S-μόδιος, τότε η απεικόνιση

$$\mathrm{Hom}_S(M_{(S)}, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N),\ \ \ g \longmapsto g \circ \iota_M,$$

είναι αμφιρριπτική και μπορεί να εκληφθεί τόσον ως *ισομορφισμός R-μοδίων* όσον και ως *ισομορφισμός S-μοδίων*.

(iv) Εάν η απεικόνιση $f : M \longrightarrow M'$ είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων, τότε η

$$f_{(S)} := f \bar{\otimes} \mathrm{Id}_S : M_{(S)} \longrightarrow M'_{(S)}$$

είναι τόσον ομομορφισμός R-μοδίων όσον και ομομορφισμός S-μοδίων. Επιπροσθέτως, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M' \arrow[d, "\iota_{M'}"] \\ M_{(S)} \arrow[r, "f_{(S)}"'] & M'_{(S)} \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και για οιονδήποτε ομομορφισμό R-μοδίων $g : M' \longrightarrow M''$ έχουμε

$$g_{(S)} \circ f_{(S)} = (g \circ f)_{(S)}.$$

(v) Εκ τού ανωτέρω μεταθετικού διαγράμματος συνάγεται η ύπαρξη κανονιστικών ομομορφισμών S-μοδίων

$$(\mathrm{Ker}(f))_{(S)} \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_{(S)}), \quad (\mathrm{Im}(f))_{(S)} \longrightarrow \mathrm{Im}(f_{(S)}),$$

οι οποίοι είναι *ισομορφισμοί* όταν ο S είναι *ισόπεδος* R-μόδιος. (Π.χ. τούτο συμβαίνει πάντοτε όταν ο R είναι *σώμα*.)

(vi) Μέσω τού ομομορφισμού R-μοδίων

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni f \longmapsto f_{(S)} \in \mathrm{Hom}_S(M_{(S)}, M'_{(S)})$$

επάγεται ένας κανονιστικός ομομορφισμός S-μοδίων

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \otimes_R S \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(M_{(S)}, M'_{(S)}).$$

Όταν οι M, M' είναι ελεύθεροι και πεπερασμένως παραγόμενοι R-μόδιοι (ή όταν ο S είναι ελεύθερος και πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος), τότε αυτός καθίσταται *ισομορφισμός* S-μοδίων, δηλαδή

$$\mathrm{Hom}_S(M_{(S)}, M'_{(S)}) \cong (\mathrm{Hom}_R(M, M'))_{(S)}.$$

(vii) Για οιουσδήποτε R-μοδίους M, M' υφίσταται ο εξής κανονιστικός ισομορφισμός S-μοδίων:

$$(M \otimes_R M') \otimes_R S \cong M_{(S)} \otimes_S M'_{(S)}, \quad (m \otimes m') \otimes 1_S \longmapsto (m \otimes 1_S) \otimes (m' \otimes 1_S).$$

(viii) Εάν το I είναι ένα ιδεώδες τού R, τότε για οιονδήποτε R-μόδιο M η απεικόνιση

$$M \otimes_R (R/I) \longrightarrow M/IM, \ \ m \otimes (r + I) \longmapsto (rm) + I,$$

είναι ισομορφισμός (R/I)-μοδίων (με την $m + IM \longmapsto m \otimes (1_R + I)$ ως αντίστροφό της). Κατά συνέπειαν, για οιονδήποτε ομομορφισμό R-μοδίων $f : M \longrightarrow M'$ ο $f_{(R/I)}$ είναι ο (σε επίπεδο πηλικομοδίων) επαγόμενος ομομορφισμός (R/I)-μοδίων $M/IM \longrightarrow M'/IM'$.

(ix) Ας υποθέσουμε ότι η $f : M \longrightarrow M'$ είναι ένας ομομορφισμός μεταξύ δυο πεπερασμένως παραγομένων, ελευθέρων R-μοδίων και ότι οι

$$\mathcal{A} = \{m_1, \ldots, m_l\}, \ \ \mathcal{A}' = \{m'_1, \ldots, m'_k\}, \ \ ((k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}),$$

είναι διατεταγμένες βάσεις των M και M', αντιστοίχως. Μέσω των l ισοτήτων

$$f(m_i) = \sum_{i=1}^{k} a_{i\nu}\, m_i', \;\; 1 \leq \nu \leq l,$$

ορίζεται ο πίνακας

$$\mathbf{M}_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}\,(f) := (a_{i\nu}) \in \mathrm{Mat}_{k\times l}\,(R)$$

τού f ως προς τις βάσεις $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}'$ όπως στην άσκηση **13**. Τότε

$$\mathbf{M}_{\mathcal{A}'_{(S)}}^{\mathcal{A}_{(S)}}\left(f_{(S)}\right) = (a_{i\nu} \otimes 1_S) \in \mathrm{Mat}_{k\times l}\,(S)\,,$$

όπου

$$\mathcal{A}_{(S)} := \{m_1 \otimes 1_S, \ldots, m_l \otimes 1_S\}, \;\; \mathcal{A}'_{(S)} := \{m_1' \otimes 1_S, \ldots, m_k' \otimes 1_S\}.$$

Επιπροσθέτως, για κάθε ζεύγος $(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ υφίσταται ο κανονιστικός *ισομορφισμός* S-μοδίων:

$$\mathrm{Mat}_{k\times l}\,(R) \otimes_R S =: (\mathrm{Mat}_{k\times l}\,(R))_{(S)} \cong \mathrm{Mat}_{k\times l}\,(S)\,.$$

17. Έστω S ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο και έστω R ένας υποδακτύλιός του με $1_R = 1_S$. Εάν το I είναι ένα ιδεώδες τού πολυωνυμικού δακτυλίου $R[t_1, \ldots, t_k]$, να αποδειχθεί η ύπαρξη ενός ισομορφισμού S-μοδίων

$$(R[t_1, \ldots, t_k]/I) \otimes_R S =: (R[t_1, \ldots, t_k]/I)_{(j)} \cong S[t_1, \ldots, t_k]/I\, S[t_1, \ldots, t_k],$$

όπου $j : R \hookrightarrow S$ η φυσική ενθετική απεικόνιση. (Εδώ χρησιμοποιείται ο συμβολισμός ο εισαχθείς στην άσκηση **16**.)

18. Έστω $I = \langle 2, t\rangle$ το ιδεώδες τού $R = \mathbb{Z}[t]$ το παραγόμενο από τα 2 και t. Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Η $f : I \times I \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ η οριζόμενη μέσω τού τύπου

$$f\left(\sum_{j=0}^{k} a_j t^j, \sum_{j=0}^{l} b_j t^j\right) := \frac{a_0}{2} b_1 (\mathrm{mod}\ 2),$$

αποτελεί R-διγραμμική απεικόνιση.

(ii) Υπάρχει ομομορφισμός R-μοδίων $I \otimes_R I \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ο οποίος στέλνει κάθε αποσυντιθέμενο τανυστή $p(t) \otimes q(t)$ (όπου $p(t), q(t) \in I$) να απεικονίζεται στο $\frac{p(0)}{2}\frac{dq}{dt}(0)$, όπου το $\frac{dq}{dt}$ συμβολίζει τη συνήθη (επίτυπη) παράγωγο τού πολυωνύμου $q(t)$.

(iii) Εντός τού $I \otimes_R I$ έχουμε $2 \otimes t \neq t \otimes 2$.

(iv) Το $2 \otimes t - t \otimes 2$ είναι ένα *στοιχείο στρέψεως* τού $I \otimes_R I$. (Βλ. άσκηση **11** τού 1ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων.)

(v) Ο υπομόδιος τού $I \otimes_R I$ ο παραγόμενος από το $2 \otimes t - t \otimes 2$ είναι ισόμορφος τού R-μοδίου R/I.

(vi) Το $2 \otimes t - t \otimes 2$ δεν είναι αποσυντιθέμενος τανυστής τού $I \otimes_R I$.

19. Έστω I ένα *κύριο ιδεώδες* μιας *ακεραίας περιοχής* R. Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{tors}(I \otimes_R I) = \{0_{I\otimes_R I}\}$.

20. Έστω ότι οι M, N είναι δυο μόδιοι ορισμένοι υπεράνω μιας *ακεραίας περιοχής* R. Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Εάν τουλάχιστον ένας εκ των M, N είναι *διαιρετός*, τότε και ο $M \otimes_R N$ είναι διαιρετός. (Βλ. άσκηση **12** τού 1ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων.)

(ii) Εάν ο M είναι *R-μόδιος στρέψεως* και ο N διαιρετός, τότε $M \otimes_R N = \{0\}$. (Βλ. άσκηση **11** τού 1ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων.)

21. Έστω ότι ο M είναι ένας R-μόδιος και τα I_1, I_2 δυο ιδεώδη τού R.

(i) Να αποδειχθεί η ύπαρξη ενός (κανονιστικού) ισομορφισμού R-μοδίων

$$(M/I_1M) \otimes_R (M/I_2M) \cong M/(I_1 + I_2)M.$$

(ii) Εάν η $j : I_1M \hookrightarrow M$ είναι η φυσική ενθετική απεικόνιση, να αποδειχθεί ότι

$$\mathrm{Ker}(j \bar{\otimes} \mathrm{Id}_{R/I_2}) \cong (I_1M \cap I_2M)/(I_1I_2)M$$

(οπότε η $j \bar{\otimes}\, \mathrm{Id}_{R/I_2}$ είναι μονομορφισμός R-μοδίων εάν και μόνον εάν $I_1M \cap I_2M = (I_1I_2)M$).

22. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι εμβολικός, αλλά δεν είναι ισόπεδος.

(ii) Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$ είναι ισόπεδος, αλλά δεν είναι ούτε προβολικός ούτε εμβολικός.

23. Για έναν R-μόδιο M να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) Ο M είναι ισόπεδος.

(ii) Για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία τής μορφής

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου P ισόπεδος R-μόδιος, και για οιονδήποτε R-μόδιο E η βραχεία ακολουθία

$$0 \longrightarrow N \otimes_R E \longrightarrow P \otimes_R E \longrightarrow M \otimes_R E \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

(iii) Υπάρχει μια βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου P ισόπεδος R-μόδιος, τέτοια ώστε για οιονδήποτε R-μόδιο E η επαγομένη βραχεία ακολουθία

$$0 \longrightarrow N \otimes_R E \longrightarrow P \otimes_R E \longrightarrow M \otimes_R E \longrightarrow 0$$

να είναι ακριβής. [*Υπόδειξη*: (i)⇒(ii) Έστω τυχών R-μόδιος E. Ως γνωστόν (βλ. πόρισμα 1.6.16) $E \cong F/E'$, όπου F ένας ελεύθερος R-μόδιος. Επειδή ο M είναι ισόπεδος, λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M \otimes_R E' \longrightarrow M \otimes_R F \longrightarrow M \otimes_R E \longrightarrow 0.$$

Για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία τής μορφής

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου P ισόπεδος R-μόδιος, προκύπτει ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & N \otimes_R E' & \longrightarrow & P \otimes_R E' & \longrightarrow & M \otimes_R E' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N \otimes_R F & \longrightarrow & P \otimes_R F & \longrightarrow & M \otimes_R F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\
 & & N \otimes_R E & \longrightarrow & P \otimes_R E & \longrightarrow & M \otimes_R E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Αρκει να εφαρμοσθεί σε αυτό το *λήμμα τού φιδιού* 2.2.7.

(ii)⇒(iii) Αρκεί να ληφθεί ως P ένας ελεύθερος R-μόδιος με $M \cong P/N$ (βλ. πόρισμα 1.6.16), ούτως ώστε να σχηματισθεί η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

(iii)⇒(i) Δοθείσας μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ αρκεί να αποδειχθεί ότι η

$$0 \longrightarrow A \otimes_R M \longrightarrow B \otimes_R M \longrightarrow C \otimes_R M \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Εκ νέου εφαρμογή τού *λήμματος τού φιδιού* 2.2.7 για το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & A \otimes_R N & \longrightarrow & B \otimes_R N & \longrightarrow & C \otimes_R N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A \otimes_R P & \longrightarrow & B \otimes_R P & \longrightarrow & C \otimes_R P & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow & & \\
 & & A \otimes_R M & \longrightarrow & B \otimes_R M & \longrightarrow & C \otimes_R M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

αποδεικνύει ότι ο M είναι όντως ισόπεδος.]

24. Εάν η $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων με τον M'' ισόπεδο, να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) Ο M είναι ισόπεδος.

(ii) Ο M' είναι ισόπεδος.

[*Υπόδειξη*: Εάν ο $j : N' \longrightarrow N$ είναι ένας *μονομορφισμός* R-μοδίων, τότε προκύπτει το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \otimes_R N' \arrow[r, "f\bar{\otimes}\mathrm{Id}_{N'}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{M'}\bar{\otimes}j"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \otimes_R N' \arrow[r, "g\bar{\otimes}\mathrm{Id}_{N'}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{M}\bar{\otimes}j"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \otimes_R N' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{M''}\bar{\otimes}j"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \otimes_R N \arrow[r, "f'\bar{\otimes}\mathrm{Id}_{N}"'] & M \otimes_R N \arrow[r, "g'\bar{\otimes}\mathrm{Id}_{N}"'] & M'' \otimes_R N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Επειδή ο M'' είναι εξ υποθέσεως ισόπεδος, οι οριζόντιες γραμμές του οφείλουν να είναι ακριβείς επί τη βάσει των ισοδυναμιών τής ασκήσεως **23**. Επιπροσθέτως, ο $\mathrm{Id}_{M''}\bar{\otimes}j$ είναι (εξ ορισμού) μονομορφισμός. Για την απόδειξη τής ισχύος τής συνεπαγωγής (i)⇒(ii) αρκεί κανείς να παρατηρήσει ότι η

$$(\mathrm{Id}_M\bar{\otimes}j) \circ (f\bar{\otimes}\mathrm{Id}_{N'}) = (f'\bar{\otimes}\mathrm{Id}_N) \circ (\mathrm{Id}_{M'}\bar{\otimes}j)$$

είναι μονομορφισμός ως σύνθεση των μονομορφισμών $\mathrm{Id}_M\bar{\otimes}j$ και $f\bar{\otimes}\mathrm{Id}_{N'}$. Επειδή η $f'\bar{\otimes}\mathrm{Id}_N$ είναι μονομορφισμός (λόγω τής ακριβείας τής άνω γραμμής), η $\mathrm{Id}_{M'}\bar{\otimes}j$ οφείλει να είναι ωσαύτως ένας μονομορφισμός. Για την απόδειξη τής ισχύος τής συνεπαγωγής (ii)⇒(i) αρκεί να εφαρμοσθεί το *βραχύ λήμμα των πέντε* 2.2.3 (i).]

25. Έστω $(M_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων. Να αποδειχθεί η αμφίπλευρη συνεπαγωγή:

$$(\text{ο } \prod_{j\in J} M_j \text{ είναι ισόπεδος}) \Longleftrightarrow (\text{οι } M_j \text{ είναι ισόπεδοι, } \forall j \in J).$$

26. Εάν οι M και N είναι δυο R-μόδιοι, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Εάν οι M και N είναι προβολικοί, τότε και ο $M \otimes_R N$ είναι προβολικός.

(ii) Εάν οι M και N είναι ισόπεδοι, τότε και ο $M \otimes_R N$ είναι ισόπεδος.

27. Υποθέτοντας ότι οι M, N είναι υπομόδιοι ενός R-μοδίου L με το άθροισμά τους $M + N$ ισόπεδο, να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) Αμφότεροι οι M και N είναι ισόπεδοι R-μόδιοι.

(ii) Η τομή $M \cap N$ των M και N είναι ισόπεδος R-μόδιος.

28. Έστω $R := K[t_1, t_2]$ ο πολυωνυμικός δακτύλιος δύο μεταβλητών t_1, t_2, όπου το K είναι σώμα. Ορίζοντας ως I_1, I_2 τα κύρια ιδεώδη

$$I_1 := \langle t_1 \rangle\,, \quad I_2 := \langle t_2 \rangle$$

τού R, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Τα $I_1, I_2, I_1 \cap I_2 = \langle t_1 t_2 \rangle$ είναι ελεύθεροι R-μόδιοι.

(ii) Το ιδεώδες $I := I_1 + I_2$ δεν είναι ισόπεδος R-μόδιος, παρότι είναι ελεύθερος στρέψεως.

29. Έστω ότι ο M είναι ένας R-μόδιος και τα I, I_1, I_2 ιδεώδη τού R. Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Υπάρχει ένας κανονιστικός επιμορφισμός R-μοδίων

$$I \otimes_R M \longrightarrow IM,$$

όπου $a \otimes m \longmapsto am, \forall (a, m) \in I \times M$. (Πρόκειται για τον περιορισμό τής κανονιστικής απεικονίσεως $I \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M \cong M$ επί τής εικόνας της.) Ιδιαιτέρως, υπάρχει ένας κανονιστικός επιμορφισμός R-μοδίων

$$I_1 \otimes_R I_2 \longrightarrow I_1 I_2 \ (\subseteq R).$$

(ii) Εάν ο M είναι ισόπεδος, τότε ο $I \otimes_R M \longrightarrow IM$ είναι ισομορφισμός R-μοδίων.

(iii) Εάν τουλάχιστον ένα εκ των ιδεωδών I_1, I_2 είναι ισόπεδο, τότε ο $I_1 \otimes_R I_2 \longrightarrow I_1 I_2$ είναι ισομορφισμός R-μοδίων.

30. Για οιονδήποτε R-μόδιο M συμβολίζουμε ως

$$\Phi_M : M \longrightarrow M^{\vee\vee}, \ \ m \longmapsto (f \longmapsto f(m))\,,$$

τον κανονιστικό ομομορφισμό από αυτόν στον διπλό δυϊκό του $M^{\vee\vee}$ (βλ. 3.7.17). Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Εάν ο M είναι ένας R-μόδιος γραφόμενος ως ευθύ άθροισμα $M = M_1 \oplus M_2$ δύο υπομοδίων του M_1, M_2, και $i_1 : M_1 \hookrightarrow M$, $i_2 : M_2 \hookrightarrow M$ οι φυσικές ενθετικές απεικονίσεις, τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M_1 \oplus M_2 \arrow[r, "\Phi_{M_1} \oplus \Phi_{M_2}"] \arrow[d, "i_1 + i_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_1^{\vee\vee} \oplus M_2^{\vee\vee} \arrow[d, "j"] \\
M \arrow[r, "\Phi_M"'] & M^{\vee\vee}
\end{tikzcd}$$

όπου $j := \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(i_1 + i_2, \mathrm{Id}_R), \mathrm{Id}_R)$, είναι μεταθετικό. Ως εκ τούτου, η $\Phi_{M_1} \oplus \Phi_{M_2}$ είναι μονομορφισμός (και αντιστοίχως, ισομορφισμός) R-μοδίων εάν και μόνον εάν αμφότερες οι Φ_{M_1}, Φ_{M_2} είναι μονομορφισμοί (και αντιστοίχως, ισομορφισμοί) R-μοδίων. (Βλ. άσκηση **7** τού 2ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων.)

(ii) Εάν ο M είναι ένας προβολικός (και αντιστοίχως, ένας προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος) R-μόδιος, τότε ο Φ_M είναι μονομορφισμός (και αντιστοίχως, ισομορφισμός) R-μοδίων. [*Σημείωση*: Τούτο ισχυροποιεί προφανώς το συμπέρασμα τού θεωρήματος 3.7.18. *Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί το (i) και τα θεωρήματα 3.2.6 και 3.7.18.]

(iii) Εάν οι M, N είναι δυο προβολικοί, πεπερασμένως παραγόμενοι R-μόδιοι, τότε

$$\mathrm{Bil}_R\,(M^\vee, N^\vee; R) \cong M \otimes_R N.$$

[*Σημείωση*: Τούτο ισχυροποιεί προφανώς το συμπέρασμα τού πορίσματος 3.7.22. *Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί το (ii) και το πόρισμα 3.7.22.]