ΟΜΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ:
5ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να παρατεθούν δύο R-μόδιοι M, N για τους οποίους ισχύει $\mathrm{Hom}_R(M,R) \cong \mathrm{Hom}_R(N,R)$, ενώ $M \ncong N$. [*Υπόδειξη*: Π.χ. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}) = 0$ και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$. Ως εκ τούτου, το ανάλογο τής προτάσεως 3.1.1 δεν ισχύει όταν κανείς εναλλάξει σε αυτήν τους ρόλους των M και R.]

2. Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}) = 0$ για οιαδήποτε *πεπερασμένη* αβελιανή ομάδα G.

3. (i) Εάν οι κ, λ είναι δυο φυσικοί αριθμοί ≥ 2, να αποδειχθεί ότι

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_\kappa, \mathbb{Z}_\lambda) \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{\mu\kappa\delta}(\kappa,\lambda)}.$$

[*Υπόδειξη*: Εκκινώντας από τη βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times\kappa} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_\kappa \longrightarrow 0$ (βλ. παράδειγμα 2.1.3 (iv)) και μεταβαίνοντας στην ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_\kappa, \mathbb{Z}_\lambda) \xrightarrow{p^*} \mathbb{Z} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\lambda) \xrightarrow{(\times\kappa)^*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\lambda) \cong \mathbb{Z}$$

αρκεί ο υπολογισμός τού πυρήνα $\mathrm{Ker}((\times\kappa)^*) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_\kappa, \mathbb{Z}_\lambda)$.]

(ii) Γενικότερα, εάν το R είναι μια περιοχή κυρίων ιδεωδών και $a, b \in R \smallsetminus \{0_R\}$, να αποδειχθεί ότι

$$\mathrm{Hom}_R(R/(Ra), R/(Rb)) \cong R/(Rd),$$

όπου $d \underset{\text{συντρ.}}{\sim} \mathrm{\mu\kappa\delta}(a,b)$.

4. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο και έστω I ένα ιδεώδες τού R. Θέτοντας $M_I := \{m \in M \mid I \subseteq \mathrm{Ann}_R(m)\}$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το M_I είναι ένας R-μόδιος.

(ii) Η απεικόνιση

$$\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \ni f \longmapsto \vartheta(f) := f(1_R + I) \in M_I$$

αποτελεί έναν ισομορφισμό R-μοδίων.

(iii) Για κάθε φυσικό αριθμό $k \geq 2$ υφίσταται ένας ισομορφισμός $\mathbb{Z}$-μοδίων

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_k \ (\cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}).$$

[*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί η απεικόνιση $\mathbb{Z} \ni \xi \longmapsto \frac{\xi}{k} + \mathbb{Z} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{k\mathbb{Z}}$.]

5. Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $(N_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων. Να αποδειχθεί ότι υφίσταται ένας ισομορφισμός R-μοδίων

$$\mathrm{Hom}_R(M, \bigoplus_{j\in J} N_j) \cong \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(M, N_j).$$

6. Έστω ότι το K είναι ένα σώμα και ότι οι

$$K[t] = \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} Kt^j = K^{(\mathbb{N}_0)}, \quad K[\![t]\!] = \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}_0} k_j t^j \,\middle|\, k_j \in K \right\} \cong K^{\mathbb{N}_0},$$

είναι οι δακτύλιοι των πολυωνύμων και των επιτύπων δυναμοσειρών μιας μεταβλητής, αντιστοίχως, με συντελεστές ειλημμένους από το K. Να αποδειχθεί ότι

$$K^{(\mathbb{N}_0)} \cong \bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} \mathrm{Hom}_K(Kt^j, K) \subsetneqq \mathrm{Hom}_K(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}_0} Kt^j, K) = \mathrm{Hom}_K(K[t], K) \cong K^{\mathbb{N}_0}.$$

[*Υπόδειξη*: Να δειχθεί ότι η απεικόνιση

$$K^{\mathbb{N}_0} \ni \sum_{j\in\mathbb{N}_0} k_j t^j \longmapsto \left(\sum_{j=0}^{\nu} a_j t^j \longmapsto \sum_{j=0}^{\nu} k_j a_j\right) \in \mathrm{Hom}_K(K[t], K)$$

είναι ισομορφισμός K-διανυσματικών χώρων.]

7. (i) Έστω ότι οι $(M_j)_{1\le j\le k}, (N_\lambda)_{1\le\lambda\le l}$ είναι δυο πεπερασμένες οικογένειες R-μοδίων. Εάν

$$M := \bigoplus_{j=1}^{k} M_j, \quad N := \bigoplus_{\lambda=1}^{l} N_\lambda,$$

να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$\Theta : \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \bigoplus_{1\le j\le k,\ 1\le\lambda\le l} \mathrm{Hom}_R\left(M_j, N_\lambda\right)$$

η οριζόμενη από τον τύπο

$$\Theta(f) := f_{\lambda\, j}, \forall f \in \mathrm{Hom}_R(M, N), \qquad f_{\lambda\, j} := \mathrm{pr}_\lambda^N \circ f \circ \mathrm{in}_j^M,$$

όπου $\mathrm{pr}_\lambda^N : N \longrightarrow N_\lambda$ η λ-οστή προβολή τού N επί τού N_λ και $\mathrm{in}_j^M : M_j \hookrightarrow M$ η j-οστή ένθεση τού M_j εντός τού M (βλ. 1.5.4, 1.5.12 και 1.5.16 (i)), είναι ισομορφισμός R-μοδίων. Κατά συνέπειαν, κάθε $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ αναπαρίσταται μονοσημάντως μέσω τού $(l \times k)$-πίνακα $(f_{\lambda\, j})_{1\le j\le k, 1\le\lambda\le l}$ (βλ. θεώρημα 1.5.11 και πρόταση 1.5.19).

(ii) Εάν οι $(M_j)_{1\le j\le k}, (N_\lambda)_{1\le\lambda\le l}, (L_\mu)_{1\le\mu\le\nu}$ είναι τρεις πεπερασμένες οικογένειες R-μοδίων,

$$M := \bigoplus_{j=1}^{k} M_j, \quad N := \bigoplus_{\lambda=1}^{l} N_\lambda, \quad L := \bigoplus_{\mu=1}^{\nu} L_\mu,$$

και $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(N, L)$, να αποδειχθεί ότι η σύνθεσή τους $g \circ f$ αναπαρίσταται μονοσημάντως μέσω τού $(\nu \times k)$-πίνακα

$$(g_{\mu\, \lambda})_{\substack{1\le\lambda\le l,\\ 1\le\mu\le\nu}} (f_{\lambda\, j})_{\substack{1\le j\le k,\\ 1\le\lambda\le l}} .$$

8. Έστω M ένας ελεύθερος R-μόδιος και έστω $X = (x_j)_{j\in J}$ μια βάση αυτού. Να αποδειχθεί ότι για οιονδήποτε R-μόδιο N υφίσταται ένας ισομορφισμός R-μοδίων

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \prod_{j\in J} N_j,$$

όπου $N_j \cong N, \forall j \in J$. [*Υπόδειξη*: $\mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} Rx_j, N) \cong \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(Rx_j, N)$.]

9. Εάν οι M, N είναι δυο πεπερασμένως παραγόμενοι, ελεύθεροι R-μόδιοι, να αποδειχθεί ότι *και* ο $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ είναι πεπερασμένως παραγόμενος και ελεύθερος. [*Υπόδειξη*: Εάν επιλεχθεί μια βάση $X=\{x_1,\ldots,x_k\}$ τού M και μια βάση $Y=\{y_1,\ldots,y_l\}$ τού N, και ορισθούν ομομορφισμοί R-μοδίων $f_{j\lambda}: M \longrightarrow N$, $1\leq j\leq k$, $1\leq \lambda \leq l$, μέσω τού τύπου

$$f_{j\lambda}(x_\nu) := \begin{cases} y_\lambda, & \text{όταν } \nu = j, \\ 0_N, & \text{όταν } \nu \neq j, \end{cases}$$

και μέσω γραμμικής επεκτάσεως (βλ. θεώρημα 1.6.14), τότε το σύνολο $\{\, f_{j\lambda} \,|\, 1\leq j\leq k, 1\leq \lambda\leq l\}$ αποτελεί μια βάση τού $\mathrm{Hom}_R(M,N)$.]

10. Να αποδειχθεί (με την παράθεση καταλλήλου παραδείγματος) ότι ο μόδιος ομομορφισμών $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ δυο τυχόντων ελευθέρων R-μοδίων M,N *δεν είναι κατ' ανάγκην ελεύθερος*. [*Υπόδειξη*: Θέτοντας $R=N=\mathbb{Z}$ και $M=\mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_0)}$, λαμβάνουμε (μέσω τής ανωτέρω ασκήσεως **8**) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_0)},\mathbb{Z})\cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$. Κατά την άσκηση **10** τού 3ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων ο $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ δεν είναι ελεύθερος $\mathbb{Z}$-μόδιος.]

11. Έστω M ένας R-μόδιος και έστω U ένας υπομόδιος τού M. Υποτιθεμένου ότι ο πηλικομόδιος M/U είναι προβολικός, να αποδειχθεί ότι ο U είναι ευθύς προσθετέος τού M.

12. Έστω $0\longrightarrow \frac{\kappa}{\lambda}\mathbb{Z}_\kappa \hookrightarrow \mathbb{Z}_\kappa \longrightarrow \lambda\mathbb{Z}_\kappa \longrightarrow 0$ η βραχεία ακριβής ακολουθία η εισαχθείσα στο 2.1.3 (v). Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) Η εν λόγω ακολουθία είναι διασπώμενη.

(ii) μκδ$(\lambda,\frac{\kappa}{\lambda})=1$.

(iii) Ο $\mathbb{Z}_\kappa$-μόδιος $\lambda\mathbb{Z}_\kappa$ είναι προβολικός.

Εν συνεχεία, να δοθούν

(α) Ένα παράδειγμα ενός προβολικού μη ελευθέρου μοδίου. [*Υπόδειξη*: Μπορεί κανείς να θεωρήσει τον $\mathbb{Z}_6$-μόδιο $3\mathbb{Z}_6\cong 3\,(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_2$, όταν $\kappa=6$ και $\lambda=3$. Πρβλ. άσκηση **8** (iii) τού 3ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων.]

(β) Ένα παράδειγμα μη προβολικού υπομοδίου ενός προβολικού μοδίου. [*Υπόδειξη*: Μπορεί κανείς να θεωρήσει τον $\mathbb{Z}_4$-μόδιο $2\mathbb{Z}_4\cong 2\,(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_2$, ως υπομόδιο τού ελευθέρου -και κατ' επέκτασιν προβολικού- $\mathbb{Z}_4$-μοδίου $\mathbb{Z}_4$, θέτοντας $\kappa=4$ και $\lambda=2$.]

13. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Ένας R-μόδιος είναι πεπερασμένως παραγόμενος και προβολικός εάν και μόνον εάν είναι ισόμορφος με το ευθύ άθροισμα πεπερασμένως παραγομένων, ελευθέρων R-μοδίων.

(ii) Εάν οι P,P' είναι δυο πεπερασμένως παραγόμενοι, προβολικοί R-μόδιοι, τότε και ο $\mathrm{Hom}_R(P,P')$ είναι ένας πεπερασμένως παραγόμενος, προβολικός R-μόδιος.

14. Έστω R μια περιοχή κυρίων ιδεωδών. Να αποδειχθεί ότι κάθε προβολικός R-μόδιος είναι ελεύθερος στρέψεως.

15. Έστω R μια περιοχή κυρίων ιδεωδών. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Ένας R-μόδιος είναι ελεύθερος εάν και μόνον εάν είναι προβολικός.

(ii) Κάθε υπομόδιος ενός προβολικού R-μοδίου είναι προβολικός.

16. a) Υποτιθεμένου ότι η γραμμή τού διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "g'"'] & C \end{tikzcd}$$

είναι ακριβής, ότι ο P είναι προβολικός και ότι $g' \circ f = 0$, να αποδειχθεί η ύπαρξη ενός μονοσημάντως ορισμένου $h \in \mathrm{Hom}_R(P, A)$ με την ιδιότητα $g \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "g'"'] & C \end{tikzcd}$$

[*Υπόδειξη*: Επειδή $g' \circ f = 0$, έχουμε $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g') = \mathrm{Im}(g)$, οπότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g^+"'] & \mathrm{Im}(g) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

έχει ακριβή γραμμή (με την g^+ ορισμένη όπως στο 1.4.7). Αρκεί η εφαρμογή τού ορισμού 3.2.1.]

b) Υποτιθεμένου ότι η γραμμή τού διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g'"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \\ & Q & \end{tikzcd}$$

είναι ακριβής, ότι ο Q είναι εμβολικός και ότι $f \circ g' = 0$, να αποδειχθεί η ύπαρξη ενός μονοσημάντως ορισμένου $h \in \mathrm{Hom}_R(C, Q)$ με την ιδιότητα $h \circ g = f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g'"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

[*Υπόδειξη*: Έστω $E := \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(g')$. Κατά τα πορίσματα 1.4.5 και 1.4.6 υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος *μονομορφισμός* R-μοδίων $\overline{g} : B/E \longrightarrow C$, τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα $\overline{g} \circ \pi = g$, όπου $\pi : B \longrightarrow B/E$ ο φυσικός επιμορφισμός. Επίσης, κατά το πόρισμα 1.4.5 υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος μονομορφισμός R-μοδίων $\overline{f} : B/E \longrightarrow Q$, τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα $\overline{f} \circ \pi = f$. Επειδή ο Q είναι εμβολικός, υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(C, Q)$ με την ιδιότητα $h \circ \overline{g} = \overline{f}$. Η απόδειξη αποπερατούται παρατηρώντας ότι $h \circ g = f$.]

17. a) Για έναν R-μόδιο P να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) Ο P είναι προβολικός.

(ii) Για κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $f : P \longrightarrow B$ και κάθε επιμορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$, όπου A εμβολικός, υπάρχει ομομορφισμός R-μοδίων $h : P \longrightarrow A$, τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα $g \circ h = f$.

b) Κατ' αναλογίαν, για έναν R-μόδιο Q να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) Ο Q είναι εμβολικός.

(ii) Για κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $f : A \longrightarrow Q$ και κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$, όπου B προβολικός, υπάρχει ομομορφισμός R-μοδίων $h : B \longrightarrow Q$, τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα $h \circ g = f$.

18. Να αποδειχθεί ότι αμφότεροι οι $\mathbb{Z}$-μόδιοι $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι εμβολικοί, ενώ δεν είναι προβολικοί.

19. Έστω R μια ακεραία περιοχή. Να αποδειχθεί ότι ένας R-μόδιος χωρίς στρέψη είναι εμβολικός εάν και μόνον εάν είναι διαιρετός.

20. Έστω R μια περιοχή κυρίων ιδεωδών. Να αποδειχθεί ότι ένας R-μόδιος είναι εμβολικός εάν και μόνον εάν είναι διαιρετός.