ΟΜΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ: 4ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εάν η

$$\cdots \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{h} \cdots$$

είναι μια ακριβής ακολουθία και ο $\theta : M \longrightarrow N$ ένας ισομορφισμός R-μοδίων, να αποδειχθεί ότι η ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow M' \xrightarrow{f\circ\theta} N \xrightarrow{g\circ\theta^{-1}} M'' \xrightarrow{h} \cdots$$

είναι ακριβής.

2. Να αποδειχθεί ότι δυο ακριβείς ακολουθίες τής μορφής

$$\cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M \longrightarrow 0 \quad , \quad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{g} M_3 \xrightarrow{f_3} M_4 \longrightarrow \cdots$$

επάγουν την εξής συντιθέμενη ακριβή ακολουθία:

$$\cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{g\circ f_2} M_3 \xrightarrow{f_3} M_4 \longrightarrow \cdots$$

3. Έστω $f : M \longrightarrow N$ ένας ομομορφισμός R-μοδίων και έστω $j : L \hookrightarrow M$ ένας *μονομορφισμός* ο οποίος πληροί τις εξής συνθήκες:

α) $f \circ j = 0$, και

β) Για κάθε R-μόδιο P και για κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $g : P \longrightarrow M$ με $f \circ g = 0$ υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $\vartheta \in \mathrm{Hom}_R(P, L)$, ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\vartheta"'] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, "g"] & & \\ L \arrow[rr, "j"'] & & M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος *ισομορφισμός* $\xi \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ker}(f), L)$, ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "j"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \\ \mathrm{Ker}(f) \arrow[u, "\xi"] \arrow[ur, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, όπου η ι παριστά την ενθετική απεικόνιση τού πυρήνα τής f εντός τού M.

(ii) Οιαδήποτε ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής $0 \longrightarrow A \overset{\alpha}{\longrightarrow} B \overset{\beta}{\longrightarrow} C$ είναι ακριβής εάν και μόνον εάν $A \underset{\alpha}{\xrightarrow{\cong}} \mathrm{Ker}(\beta)$.

4. Έστω $f : M \longrightarrow N$ ένας ομομορφισμός R-μοδίων και έστω $q : N \longrightarrow L$ ένας *επιμορφισμός* ο οποίος πληροί τις εξής συνθήκες:

α) $q \circ f = 0$, και

β) Για κάθε R-μόδιο P και για κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $g : N \longrightarrow P$ με $g \circ f = 0$ υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $\vartheta \in \mathrm{Hom}_R(L, P)$, ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & L \arrow[dl, "\vartheta"] \\
& P &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος *ισομορφισμός* $\eta \in \mathrm{Hom}_R(L, \mathrm{Coker}(f))$, ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{Im}(f)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & L \arrow[dl, "\eta"] \\
\mathrm{Coker}(f) &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, όπου $\pi_{\mathrm{Im}(f)}$ ο φυσικός επιμορφισμός από τον N επί τού συμπυρήνα τής f.

(ii) Οιαδήποτε ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$ είναι ακριβής εάν και μόνον εάν ο επιμορφισμός β επάγει έναν ισομορφισμό $\mathrm{Coker}(\alpha) \xrightarrow{\cong} C$.

5. Υποτιθεμένου ότι το ακόλουθο διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων είναι μεταθετικό και ότι τόσο η σχηματιζόμενη «γραμμή» όσο και η σχηματιζόμενη «στήλη» του είναι βραχείες ακριβείς ακολουθίες, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Οι α και β είναι μηδενικοί ομομορφισμοί R-μοδίων.

(ii) Οι f και g είναι ισομορφισμοί R-μοδίων.

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & & \\
& & A_2' \arrow[d, "\iota_2"] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
0 \arrow[r] & A_1' \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[dr, "\beta"'] & A \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & A_1'' \arrow[r] & 0 \\
& & A_2'' \arrow[ur, "g"'] \arrow[d] & & \\
& & 0 & &
\end{tikzcd}$$

6. Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

καλείται **επέκταση τού** M **μέσω τού** N και σημειώνεται ως (f, E, g).

(i) Δοθέντων δυο R-μοδίων M, N, να αποδειχθεί ότι υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον μία επέκταση τού M μέσω τού N.

(ii) Δυο επεκτάσεις (f_1, E_1, g_1) και (f_2, E_2, g_2) τού M μέσω τού N χαρακτηρίζονται ως **ισοδύναμες** όταν υπάρχει κάποιος ομομορφισμός R-μοδίων $h : E_1 \longrightarrow E_2$, ούτως ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$h \circ f_1 = f_2, \quad h \circ g_1 = g_2.$$

Να αποδειχθεί ότι τέτοιου είδους ομομορφισμοί R-μοδίων h είναι κατ' ανάγκην ισομορφισμοί.

(iii) Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν επεκτάσεις

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_8 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow 0$$

τού $\mathbb{Z}_2$ μέσω τού $\mathbb{Z}_4$ που δεν είναι ισοδύναμες.

7. Εάν οι $(f'_j : M'_j \longrightarrow M_j)_{j \in J}$, $(f_j : M_j \longrightarrow M''_j)_{j \in J}$ είναι δυο οικογένειες ομομορφισμών R-μοδίων (με το ίδιο σύνολο δεικτών), να αποδειχθεί ότι η ακολουθία

$$\bigoplus_{j \in J} M'_j \xrightarrow{\;\bigoplus_{j \in J} f'_j\;} \bigoplus_{j \in J} M_j \xrightarrow{\;\bigoplus_{j \in J} f_j\;} \bigoplus_{j \in J} M''_j$$

είναι ακριβής εάν και μόνον εάν οι ακολουθίες

$$M'_j \xrightarrow{f'_j} M_j \xrightarrow{f_j} M''_j$$

είναι ακριβείς για κάθε $j \in J$. (Βλ. άσκηση **7** τού 2ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων.)

8. Έστω ότι οι

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$$

είναι δυο βραχείες ακριβείς ακολουθίες και ότι οι $\varphi : M \longrightarrow N$, $\varphi' : M' \longrightarrow N'$ είναι δυο ομομορφισμοί R-μοδίων, τέτοιοι ώστε $g' \circ \varphi' = \varphi \circ f'$. Βάσει τής προτάσεως 2.1.8 υπάρχει ένας μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων $\varphi'' : M'' \longrightarrow N''$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r, "g"'] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Να αποδειχθούν οι ισότητες

$$\mathrm{Ker}(\varphi'') = f(\varphi^{-1}(\mathrm{Ker}(g))), \quad \mathrm{Im}(\varphi'') = \mathrm{Im}(g \circ \varphi),$$

και να συναχθεί εξ αυτών ότι

(i) ο φ'' είναι *μονομορφισμός* εάν και μόνον εάν $\varphi^{-1}(\mathrm{Ker}(g)) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, και

(ii) ο φ'' είναι *επιμορφισμός* εάν και μόνον εάν ο $g \circ \varphi$ είναι επιμορφισμός.

9. Να αποδειχθεί το 1ο *θεώρημα ισομορφισμών μοδίων* (βλ. 1.4.8) κάνοντας χρήση καταλλήλων βραχέων ακριβών ακολουθιών σε συνδυασμό με την άσκηση **8**. [*Υπόδειξη*: Αρκεί η θεώρηση τού μεταθετικού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "\pi_{\mathrm{Ker}(f)}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Coim}(f) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\zeta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\iota"'] & M \arrow[r, "f^{+}"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

και η απόδειξη τού ότι ο ζ είναι ισομορφισμός R-μοδίων.]

10. Να αποδειχθεί το 2ο *θεώρημα ισομορφισμών μοδίων* (βλ. 1.4.11) κάνοντας χρήση καταλλήλων βραχέων ακριβών ακολουθιών σε συνδυασμό με την άσκηση **8**. [*Υπόδειξη*: Αρκεί η θεώρηση τού μεταθετικού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \cap W \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{inj.}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U \arrow[r, "\pi_{U \cap W}"] \arrow[d, "\text{inj.}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U/(U \cap W) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & W \arrow[r, hook] & U + W \arrow[r, "\pi_W"'] & (U + W)/W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

και η απόδειξη τού ότι ο φ είναι ισομορφισμός R-μοδίων.]

11. Εάν οι U, W είναι υπομόδιοι ενός R-μοδίου M, να αποδειχθεί ότι η ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων

$$0 \longrightarrow M/(U \cap V) \xrightarrow{\ f\ } (M/U) \times (M/W) \xrightarrow{\ g\ } M/(U + W) \longrightarrow 0\ ,$$

όπου

$$\begin{cases} f(m + U \cap W) := (m + U, (-m) + W), & \forall m \in M, \\ g(m_1 + U, m_2 + W) := (m_1 + m_2) + (U + W), & \forall (m_1, m_2) \in M \times M, \end{cases}$$

είναι ακριβής, καθώς και ότι

$$(U + W)/(U \cap W) \cong ((U + W)/U) \times ((U + W)/W) \cong (W/(U \cap W)) \times (U/(U \cap W)).$$

12. Να αποδειχθεί το 3ο *θεώρημα ισομορφισμών μοδίων* (βλ. 1.4.12) κάνοντας χρήση καταλλήλων βραχέων ακριβών ακολουθιών σε συνδυασμό με την άσκηση **8**. [*Υπόδειξη*: Αρκεί η θεώρηση τού μεταθετικού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_W|_U"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "\pi_U"] \arrow[d, "\pi_W"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M/U \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U/W \arrow[r, hook] & M/W \arrow[r, "\pi_{U/W}"'] & (M/W)/(U/W) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

και η απόδειξη τού ότι ο h είναι ισομορφισμός R-μοδίων.]

13. Υποτιθεμένου ότι το ακόλουθο διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων είναι μεταθετικό, ότι οι α, β, γ είναι *ισομορφισμοί* R-μοδίων και ότι η άνω του γραμμή είναι ακριβής, να αποδειχθεί ότι και η κάτω του γραμμή οφείλει να είναι ακριβής.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

14. Υποτιθεμένου ότι το ακόλουθο διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων είναι μεταθετικό, ότι οι α, β, γ είναι *ισομορφισμοί* R-μοδίων και ότι η άνω του γραμμή είναι ακριβής και διασπάται στο B, να αποδειχθεί ότι και η κάτω του γραμμή οφείλει να είναι ακριβής και να διασπάται στο B'.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

15. Έστω $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων και έστω I ένα ιδεώδες τού R. Εάν η ακολουθία αυτή διασπάται στον M_2, να αποδειχθεί ότι η

$$0 \longrightarrow M_1/IM_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} M_2/IM_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} M_3/IM_3 \longrightarrow 0,$$

όπου

$$\overline{f}_j(m_j + IM_j) := f_j(m_j) + IM_{j+1}, \quad \forall m_j \in M_j, \;\; j = 1, 2,$$

είναι ακριβής και διασπάται στον M_2/IM_2. [*Σημείωση*: Η δεύτερη ακολουθία δεν είναι κατ' ανάγκην ακριβής όταν η πρώτη δεν διασπάται στον M_2. Ένα απλό αντιπαράδειγμα μας παρέχει η μη διασπωμένη βραχεία ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(\times 2)} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$. Αρκεί να ληφθεί ως I το ιδεώδες $2\mathbb{Z}$ τού $\mathbb{Z}$. Η επαγομένη απεικόνιση $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\overline{(\times 2)}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ είναι η μηδενική που προφανώς δεν είναι ενριπτική.]

16. Υποτιθεμένου ότι το διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Εάν οι α, γ, f' είναι μονομορφισμοί, τότε και ο β είναι μονομορφισμός.

(ii) Εάν οι α, γ, g είναι επιμορφισμοί, τότε και ο β είναι επιμορφισμός.

17. Υποτιθεμένου ότι το διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r, "g"'] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Εάν οι φ', φ'' είναι μονομορφισμοί (και αντιστοίχως, επιμορφισμοί), τότε και ο φ είναι μονομορφισμός (και αντιστοίχως, επιμορφισμός).

(ii) Εάν δύο εκ των $\varphi, \varphi', \varphi''$ είναι ισομορφισμοί, τότε και ο τρίτος οφείλει να είναι ισομορφισμός.

(iii) Θεωρώντας τό μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z}_{p^2} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "g'"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "g"'] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς), όπου p πρώτος αριθμός,

$$\varphi' := \_ \times p, \;\; \varphi := \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}, \;\; g' := \_ \times p, \quad f' := \_ \times p^2,$$

και f, g, φ'' οι φυσικοί επιμορφισμοί, *οι* φ, φ' *είναι ενριπτικές, αλλά η* φ'' *δεν είναι*! [*Διευκρίνιση*: Τούτο δεν αντίκειται προς το (ii)! Εάν υποτεθεί ότι οι φ, φ' είναι ισομορφισμοί, η απόδειξη τής *ενριπτικότητας* τής φ'' έπεται από το ότι η φ είναι *ενριπτική* και η φ' *επιρριπτική*. Στο ανωτέρω παράδειγμα η φ' δεν είναι επιρριπτική. Ως εκ τούτου, το ζεύγος φ, φ' *δεν πληροί* την ιδιότητα που αντιστοιχεί σε εκείνη που περιγράφεται στο (i) για το ζεύγος φ', φ''.]

18. Πρώτη εκδοχή τού λήμματος των 3×3. Υποθέτοντας ότι το διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "g''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[d] & C \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό με τις τρεις στήλες του και τις δύο άνω γραμμές του ακριβείς, να αποδειχθεί ότι ορίζονται μονοσημάντως ομομορφισμοί R-μοδίων

$$\alpha'' : C' \longrightarrow C, \quad \beta'' : C \longrightarrow C'',$$

τέτοιοι ώστε η προκύπτουσα κάτω γραμμή να είναι ακριβής και το κατ' αυτόν τον τρόπο συμπληρωμένο διάγραμμα μεταθετικό. [*Υπόδειξη*: Επειδή $g \circ \alpha \circ f' = 0$, ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathrm{Ker}(g') = \mathrm{Im}(f') \subseteq \mathrm{Ker}(g \circ \alpha).$$

Για την κατασκευή τού α'' αρκεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα 1.3.13. Παρομοίως κατασκευάζεται και ο ομομορφισμός β''. Κατόπιν τούτου, η αποπεράτωση τής αποδείξεως καθίσταται εφικτή μέσω κυνηγητού τού διαγράμματος.]

19. Δεύτερη εκδοχή τού λήμματος των 3×3. Υποθέτοντας ότι το διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "g''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d] & C \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό με τις τρεις στήλες του ακριβείς, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Εάν οι δύο άνω γραμμές του είναι ακριβείς, τότε και η τρίτη του γραμμή είναι ακριβής.

(ii) Εάν οι δύο κάτω γραμμές του είναι ακριβείς, τότε και η τρίτη του γραμμή είναι ακριβής.

(iii) Εάν η πρώτη και η τρίτη του γραμμή είναι ακριβείς, τότε η μεσαία του γραμμή δεν είναι κατ' ανάγκην ακριβής.

(iv) Εάν καθεμιά των τριών του γραμμών συνιστά ένα *αλυσωτό σύμπλοκο* και δύο εξ αυτών είναι ακριβείς, τότε και η τρίτη οφείλει να είναι ακριβής.

20. **Το λήμμα τού φιδιού.** Έστω ότι οι M, M', M'' και N, N', N'' είναι δυο τριάδες R-μοδίων και ότι οι

$$\phi : M \longrightarrow N,\ \ \phi' : M' \longrightarrow N',\ \ \phi'' : M'' \longrightarrow N'',$$

είναι τρεις ομομορφισμοί R-μοδίων, τέτοιοι ώστε το διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \ker(\phi') \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\phi) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(\phi'') \arrow[d] \arrow[dddll, bend left] & \\
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\phi'"] & M \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, "\phi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\beta'"'] \arrow[d] & N \arrow[r, "\beta''"'] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker}(\phi') \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\phi) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\phi'') \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό με τις δύο μεσαίες του γραμμές ακριβείς. Κατά τη διάρκεια των παραδόσεων εδόθη μια απόδειξη (βλ. 2.2.7) περί τής υπάρξεως ομομορφισμού R-μοδίων $\mathrm{Ker}(\phi'') \longrightarrow \mathrm{Coker}(\phi')$ (υποδηλουμένου μέσω τού οφιοειδούς βέλους), ούτως ώστε η προκύπτουσα ακολουθία

$$\mathrm{Ker}\,(\phi') \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(\phi) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(\phi'') \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(\phi') \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(\phi) \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(\phi'')$$

να είναι ακριβής. Η εν λόγω απόδειξη στηρίζεται στο *λήμμα των δύο τετραγώνων* (βλ. 2.2.5) και οφείλεται στον J. Lambek. Ορίζοντας το $\Delta : \mathrm{Ker}(\phi'') \longrightarrow \mathrm{Coker}(\phi')$ μέσω τού συγκεκριμένου τύπου

$$\Delta(x) := ((\beta'^{-1} \circ \phi \circ \alpha''^{-1})(x)) + \mathrm{Im}(\phi'),\ \ \forall x \in \mathrm{Ker}\,(\phi''),$$

να δειχθεί ότι αυτό συνιστά μια *καλώς ορισμένη* απεικόνιση, η οποία είναι -επιπροσθέτως- ομομορφισμός R-μοδίων. Εν συνεχεία, να δοθεί μια άλλη απόδειξη για το ότι η ως άνω ακολουθία είναι ακριβής *κάνοντας χρήση μόνον τού Δ και απλού κυνηγητού εντός τού διαγράμματος.*

21. Εάν οι $f : M' \longrightarrow M$ και $g : M \longrightarrow M''$ είναι δυο ομομορφισμοί R-μοδίων, να αποδειχθεί η ύπαρξη μιας (κατά φυσιολογικό τρόπο κατασκευαζόμενης) ακριβούς ακολουθίας

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(g \circ f) \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(g) \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(f) \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(g \circ f) \longrightarrow \mathrm{Coker}\,(g) \longrightarrow 0\,.$$

[*Υπόδειξη*: Από τη μεταθετικότητα τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\mathrm{Id}'_M"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g \circ f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[d, "g"] & \\
& M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r, "\mathrm{Id}''_M"'] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

εξάγονται οι ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow \text{Ker}\,(f) \longrightarrow \text{Ker}\,(g \circ f) \longrightarrow \text{Ker}\,(g)$$

και

$$\text{Coker}\,(f) \longrightarrow \text{Coker}\,(g \circ f) \longrightarrow \text{Coker}\,(g) \longrightarrow 0\,.$$

Αρκεί ο ορισμός τού συνδετικού ομομορφισμού

$$\text{Ker}\,(g) \ni y \longmapsto y + \text{Im}(f) \in \text{Coker}\,(f)$$

προκειμένου να αποδειχθεί ότι αυτές συνενούνται σε μία και μόνον ακριβή ακολουθία.]

22. Το λήμμα τού εξαγώνου. Υποθέτοντας ότι κάθε τρίγωνο τού ακολούθου διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[dl, "l"'] \arrow[dr, "l'"] \arrow[dd, "g"] & \\
Z & & Z' \\
& C \arrow[ul, "j"] \arrow[ur, "j'"'] \arrow[dd, "h"] & \\
U \arrow[uu, "k", "\cong"'] \arrow[ur, "i"'] \arrow[dr, "s"'] & & U' \arrow[uu, "k'"', "\cong"] \arrow[ul, "i'"] \arrow[dl, "s'"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

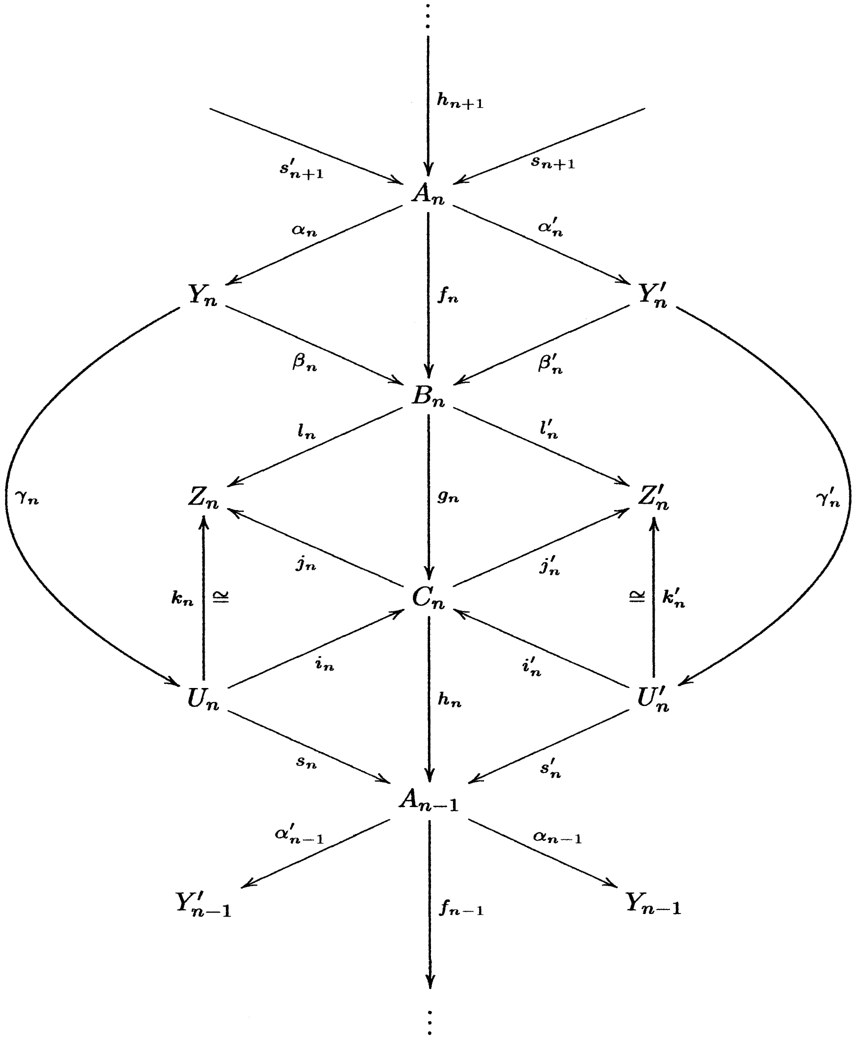
είναι μεταθετικό, ότι οι ακολουθίες $U \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j'} Z', U' \xrightarrow{i'} C \xrightarrow{j} Z$ είναι ακριβείς και ότι οι k, k' είναι ισομορφισμοί R-μοδίων, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) $\text{Ker}(j) \cap \text{Ker}(j') = \{0_C\}$,

(ii) $C = \text{Im}\,(i) \oplus \text{Im}\,(i')$, και

(iii) $s \circ k^{-1} \circ l + s' \circ k'^{-1} \circ l' = h \circ g$.

23. Δοθέντος ενός διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων (απείρως εκτεινομένου προς τα άνω και προς τα κάτω) τής μορφής



με όλα του τα τρίγωνα μεταθετικά και την ακολουθία την ευρισκομένη στην κατακόρυφη (κεντρική) γραμμή του, τις ακολουθίες

$$\cdots \xrightarrow{s_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha_n} Y_n \xrightarrow{\gamma_n} U_n \xrightarrow{s_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} Y_{n-1} \xrightarrow{\gamma_{n-1}} \cdots$$

και

$$\cdots \xrightarrow{s'_{n+1}} A_n \xrightarrow{\alpha'_n} Y'_n \xrightarrow{\gamma'_n} U'_n \xrightarrow{s'_n} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha'_{n-1}} Y'_{n-1} \xrightarrow{\gamma'_{n-1}} \cdots$$

τις ευρισκόμενες στο πλευρικό του περίγραμμα, καθώς και τις ακολουθίες (τριών όρων)

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{j'_n} Z'_n, \\ U'_n \xrightarrow{i'_n} C_n \xrightarrow{j_n} Z_n, \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_n \xrightarrow{\beta_n} B_n \xrightarrow{l'_n} Z'_n, \\ Y'_n \xrightarrow{\beta'_n} B_n \xrightarrow{l_n} Z_n, \end{array} \right\}$$

ακριβείς, να αποδειχθεί η ύπαρξη μιας ακριβούς ακολουθίας

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\psi_n} Y_n \oplus Y'_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\Delta_n} A_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \cdots,$$

όπου

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n \ni x \longmapsto \psi_n(x) := (\alpha_n(x), \alpha'_n(x)) \in Y_n \oplus Y'_n, \\ Y_n \oplus Y'_n \ni (y, y') \longmapsto \varphi_n(y, y') := -\beta_n(y) + \beta'_n(y') \in B_n, \end{array} \right\}$$

και μιας ακριβούς ακολουθίας

$$\cdots \xrightarrow{\Delta'_{n+1}} A_n \xrightarrow{\psi'_n} Y'_n \oplus Y_n \xrightarrow{\varphi'_n} B_n \xrightarrow{\Delta'_n} A_{n-1} \xrightarrow{\psi'_{n-1}} \cdots,$$

όπου

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n \ni x \longmapsto \psi'_n(x) := (\alpha'_n(x), \alpha_n(x)) \in Y'_n \oplus Y_n, \\ Y'_n \oplus Y_n \ni (y', y) \longmapsto \varphi'_n(y', y) := -\beta'_n(y') + \beta_n(y) \in B_n, \end{array} \right\}$$

με τους συνδετικούς ομομορφισμούς τους αντιθέτους (ήτοι $\Delta'_n = -\Delta_n, \forall n \in \mathbb{Z}$).

[*Υπόδειξη*: Τα κλιμακωτά διαγράμματα

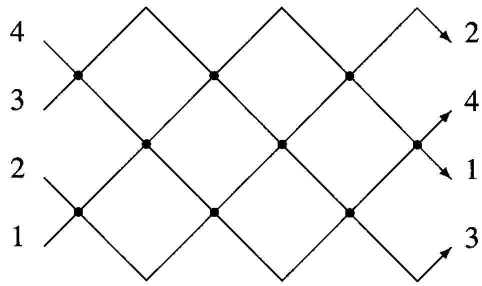
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\alpha'_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_n \arrow[r, "\gamma_n"] \arrow[d, "\beta_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U_n \arrow[r, "s_n"] \arrow[d, "k_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{n-1} \arrow[r, "\alpha_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha'_{n-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y'_n \arrow[r, "\beta'_n"'] & B_n \arrow[r, "l_n"'] & Z_n \arrow[r, "\alpha'_{n-1} \circ s_n \circ k_n^{-1}"'] & Y'_{n-1} \arrow[r, "\beta'_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{A}$$

και

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\alpha'_n"] \arrow[d, "\alpha_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y'_n \arrow[r, "\gamma'_n"] \arrow[d, "\beta'_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U_n \arrow[r, "s'_n"] \arrow[d, "k'_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_{n-1} \arrow[r, "\alpha'_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\beta'_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_n \arrow[r, "\beta_n"'] & B_n \arrow[r, "l'_n"'] & Z'_n \arrow[r, "\alpha_{n-1} \circ s'_n \circ k_n'^{-1}"'] & Y_{n-1} \arrow[r, "\beta_{n-1}"'] & B_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{B}$$

είναι (εκ κατασκευής) μεταθετικά με τις άνω γραμμές τους ακριβείς. Επιπροσθέτως, είναι εύκολο να ελεγχθεί (στους όρους Z_n, Z'_n) η ακρίβεια *και των κάτω γραμμών τους* (κάνοντας χρήση τής μεταθετικότητας των μετεχόντων τριγώνων και τού λήμματος τού εξαγώνου). Επειδή οι k_n, k'_n είναι ισομορφισμοί, είναι δυνατή η εφαρμογή τού λήμματος των Barratt και Whitehead, το οποίο αποδείχθηκε στις παραδόσεις τού μαθήματος.

Σημείωση: Το μεγάλο διάγραμμα τής ασκήσεως ανήκει σε μια κατηγορία διαγραμμάτων που είναι γνωστά ως **αλληλεμπλεκόμενες ακολουθίες** (interlocking sequences) ή ως **διαγράμματα πλεξιδίων** (braid diagrams). Σε αδρές γραμμές, αυτά είναι διαγράμματα τής μορφής



(όπου εδώ οι κουκκίδες υποδηλώνουν R-μοδίους και τα νούμερα $1, 2, 3, 4$ τον τρόπο με τον οποίο καθεμιά από τις τέσσερεις μετέχουσες ακολουθίες είναι τοποθετημένη στο διάγραμμα). Εάν τρεις εκ των τεσσάρων ακολουθιών είναι ακριβείς και η τέταρτη συνιστά ένα αλυσωτό σύμπλοκο, τότε *και η τέταρτη υποχρεούται να είναι ακριβής*. (Στην περίπτωσή μας, οι τέσσερεις ακολουθίες είναι αυτές που αποτελούν τις γραμμές των κλιμακωτών διαγραμμάτων (A) και (B).) Για περισσότερες πληροφορίες, οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες παραπέμπονται στο άρθρο τού C.T.C. Wall: *On the exactness of intelocking sequences*, Enseignement Math., Vol. **12**, 1966, 95-100.]

24. Έστω $\mathbf{C}_\bullet$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο πεπερασμένως παραγομένων R-μοδίων, όπου R μια περιοχή κυρίων ιδεωδών. Εάν υπάρχει ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός k, τέτοιος ώστε να ισχύει $C_j = 0$ για όλους τους δείκτες $j \in \mathbb{Z}$ με $|j| \geq k$, τότε ορίζεται καλώς το εναλλάσσον άθροισμα

$$\chi_R(\mathbf{C}_\bullet) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j \operatorname{rank}_R(C_j) \in \mathbb{Z},$$

το οποίο καλείται **χαρακτηριστική Euler τού** $\mathbf{C}_\bullet$. Να αποδειχθούν οι εξής ιδιότητες τού $\chi_R(\mathbf{C}_\bullet)$:

(i) Κάθε R-μόδιος ομολογίας $H_j(\mathbf{C}_\bullet)$ τού $\mathbf{C}_\bullet$ είναι πεπερασμένως παραγόμενος, $H_j(\mathbf{C}_\bullet) = 0$ για όλους τους δείκτες j με $|j| \geq k$ και

$$\chi_R(\mathbf{C}_\bullet) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j \operatorname{rank}_R(H_j(\mathbf{C}_\bullet)).$$

Μάλιστα, στην ειδική περίπτωση κατά την οποία το $\mathbf{C}_\bullet$ συνιστά μια ακριβή ακολουθία, έχουμε $\chi_R(\mathbf{C}_\bullet) = 0$.

(ii) Εάν η $0 \longrightarrow \mathbf{C}'_\bullet \xrightarrow{f'_\bullet} \mathbf{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathbf{C}''_\bullet \longrightarrow 0$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων (αυτού τού είδους), τότε

$$\chi_R(\mathbf{C}_\bullet) = \chi_R(\mathbf{C}'_\bullet) + \chi_R(\mathbf{C}''_\bullet).$$

25. Υποτιθεμένου ότι το

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{C}'_\bullet \arrow[r, "f'_\bullet"] \arrow[d, "\varphi'_\bullet"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{C}_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d, "\varphi_\bullet"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbf{C}''_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{D}'_\bullet \arrow[r, "g'_\bullet"'] & \mathbf{D}_\bullet \arrow[r, "g_\bullet"'] & \mathbf{D}''_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα αλυσωτών συμπλόκων και αλυσωτών μετασχηματισμών με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, να αποδειχθεί ότι το

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[r, "H_n(f'_\bullet)"] \arrow[d, "H_n(\varphi'_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[r, "H_n(f_\bullet)"] \arrow[d, "H_n(\varphi_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(\mathbf{C}''_\bullet) \arrow[r, "\partial_n^{(1)}"] \arrow[d, "H_n(\varphi''_\bullet)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{n-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(\varphi'_\bullet)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(\mathbf{D}'_\bullet) \arrow[r, "H_n(g'_\bullet)"'] & H_n(\mathbf{D}_\bullet) \arrow[r, "H_n(g_\bullet)"'] & H_n(\mathbf{D}''_\bullet) \arrow[r, "\partial_n^{(2)}"'] & H_{n-1}(\mathbf{D}'_\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

είναι ένα μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς. Εν προκειμένω, ο $\partial_n^{(1)}$ (και αντιστοίχως, ο $\partial_n^{(2)}$) παριστά τον συνδετικό ομομορφισμό τής πρώτης (και αντιστοίχως, τής δεύτερης) μακράς ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων ομολογίας.