ΟΜΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ:
3ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $\{6, 10, 15\}$ παράγει τον $\mathbb{Z}$-μόδιο $\mathbb{Z}$, καθώς και το ότι αυτός είναι αδύνατον να παραχθεί από οιοδήποτε υποσύνολο τού $\{6, 10, 15\}$.

2. Έστω $R = \mathbb{Z}_6$ και έστω $M := R^2 = \{(a, b) | a, b \in R\}$ ο ελεύθερος R-μόδιος βαθμίδας 2. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Τα υποσύνολα

$$X_1 := \{([1]_6, [0]_6), ([0]_6, [1]_6)\}, \quad X_2 := \{([2]_6, [3]_6), ([3]_6, [2]_6)\}$$

τού M αποτελούν βάσεις αυτού.

(ii) Το σύνολο που σχηματίζεται ύστερα από αντικατάσταση ενός εκ των στοιχείων τού X_1 με το $([2]_6, [3]_6)$ δεν είναι βάση τού M.

3. Έστω M ένας R-μόδιος, όπου R μια *ακεραία περιοχή*. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(i) Ο M δεν διαθέτει στρέψη. (Βλ. άσκηση **11** τού 1ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων.)

(ii) Τα μονοσύνολα $\{m\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα για κάθε $m \in M \setminus \{0_M\}$.

4. Έστω M ένας R-μόδιος. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) Ο M είναι πεπερασμένως παραγόμενος.

(ii) $M \cong R^k/U$, όπου U είναι υπομόδιος τού R^k και k κάποιος φυσικός αριθμός ≥ 1.

5. Έστω M ένας R-μόδιος ο οποίος περιέχει ένα *πεπερασμένο* παράγον υποσύνολο $Y \subseteq M$. Τότε *κάθε* παράγον υποσύνολο τού M εμπεριέχει ένα *πεπερασμένο* παράγον υποσύνολό του.

6. Έστω M ένας R-μόδιος ο οποίος περιέχει ένα *άπειρο* παράγον υποσύνολο $Y \subseteq M$. Τότε *κάθε* σύστημα γεννητόρων $(x_j)_{j\in J}$ τού M εμπεριέχει ένα σύστημα γεννητόρων $(x_j)_{j\in\Lambda}$ τού M, όπου $\Lambda \subseteq J$ και $\mathrm{card}(\Lambda) \leq \mathrm{card}(Y)$.

7. (i) Εάν $R = \mathbb{Q}[t_1, t_2]$, να αποδειχθεί ότι το ιδεώδες $I = \langle t_1, t_2\rangle$ το παραγόμενο από τα t_1, t_2 (ως *υπομόδιος τού ελευθέρου* R-μοδίου R) *δεν είναι ελεύθερος* R-μόδιος.

(ii) Εάν $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, να αποδειχθεί ότι το ιδεώδες $I = \left\langle 2, 1 + \sqrt{-5}\right\rangle$ (ως *υπομόδιος τού ελευθέρου* R-μοδίου R) *δεν είναι ελεύθερος* R-μόδιος.

8. Εάν $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ και μκδ$(\kappa, \lambda) = 1$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Τα $\mathbb{Z}_\kappa, \mathbb{Z}_\lambda, \mathbb{Z}_{\kappa\lambda}$, πέραν τού ότι είναι $\mathbb{Z}$-μόδιοι, είναι *και* $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda}$-μόδιοι.

(ii) Ο ισομορφισμός $\mathbb{Z}$-μοδίων $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda} \cong \mathbb{Z}_\kappa \oplus \mathbb{Z}_\lambda$ (βλ. άσκηση **5** τού 2ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων), είναι *και* ισομορφισμός $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda}$-μοδίων.

(iii) Ο $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda}$ ως $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda}$-μόδιος είναι ελεύθερος, ενώ κανείς εκ των $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda}$-μοδίων $\mathbb{Z}_\kappa, \mathbb{Z}_\lambda$ δεν είναι ελεύθερος. (Ως εκ τούτου, το αντίστροφο τού θεωρήματος 1.6.17 δεν ισχύει.)

9. Εάν τα M και N είναι δυο ελεύθεροι R-μόδιοι, να αποδειχθεί ότι

$$\mathrm{rank}_R(M \oplus N) = \mathrm{rank}_R(M) + \mathrm{rank}_R(N).$$

10. Έστω R ένας δακτύλιος αναφοράς (ήτοι μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο). Θεωρώντας ως γνωστή την πρόταση:

► *Εάν υπάρχει μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία κυρίων ιδεωδών*

$$I_0 \supsetneqq I_1 \supsetneqq I_2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq I_k \supsetneqq I_{k+1} \supsetneqq \cdots$$

τού R με $I_0 = R$, τότε ο R-μόδιος $R^{\mathbb{N}_0}$ δεν είναι ελεύθερος,

να αποδειχθεί ότι ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ δεν είναι ελεύθερος και να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει γενίκευση τού θεωρήματος 1.6.17 για ευθέα *γινόμενα*.

[*Σημείωση*: Η τεχνική αποδείξεως τής ως άνω προτάσεως οφείλεται κατ' ουσίαν στον E. Specker (βλ. *Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen*, Math. Potugaliae, Vol. **9**, 1950, 131-140). Το εντυπωσιακό είναι ότι ο R. Baer είχε αποδείξει ήδη από το 1937 (βλ. *Abelian groups without elements of finite order*, Duke Math. J., Vol. **3**, 1937, 68-122) ότι *όλες οι αριθμήσιμες υποομάδες τής* $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}, +)$ *είναι ελεύθερες*! Για μια πιο πρόσφατη εργασία που ασχολείται, μεταξύ άλλων, με το *ποιες υποομάδες τής* $(\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}, +)$ *περιέχουν μη αριθμήσιμες, ελεύθερες υποομάδες*, βλ. A. Blass και J. Irwin: *Free subgroups of the Baer-Specker group*, Comm. in Alg., Vol. **29** (12), 2001, 5769-5794.]