ΟΜΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ:
2ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εάν τα U, U', U'' είναι τρεις υπομόδιοι ενός R-μοδίου M και $U \subseteq U'' \subseteq U \oplus U'$, να αποδειχθεί η εξής ισότητα:

$$U'' \cap (U \oplus U') = U \oplus (U' \cap U'').$$

2. Εάν τα U και V είναι δυο υπομόδιοι ενός R-μοδίου M, όπου $M = U + W$, και η $f : M \longrightarrow N$ ένας επιμορφισμός R-μοδίων με πυρήνα του την τομή $U \cap W$, να αποδειχθεί ότι $N = f(U) \oplus f(W)$.

3. Εάν οι M και N είναι δυο R-μόδιοι και οι $f : M \longrightarrow N,\ g : N \longrightarrow M$ ομομορφισμοί R-μοδίων, τέτοιοι ώστε η σύνθεση $g \circ f$ να αποτελεί έναν ισομορφισμό R-μοδίων, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Ο f είναι μονομορφισμός και ο g επιμορφισμός R-μοδίων.

(ii) $N = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}(g)$.

4. Εάν η $f : M \longrightarrow M$ είναι ένας ενδομορφισμός ενός R-μοδίου M, να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) $f \circ f = f$,

(ii) $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_M) = \mathrm{Im}(f)$,

(iii) $M = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_M) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.

5. Εάν ένας R-μόδιος M είναι το άθροισμα $M = U + W$ δύο υπομοδίων του U και W, να αποδειχθεί ότι

$$M/(U \cap W) \cong (M/U) \oplus (M/W).$$

Χρήσιμη εφαρμογή: Θεωρώντας τούς υπομοδίους $U = \kappa\mathbb{Z}$ και $W = \lambda\mathbb{Z}$ τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Z}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ και μκδ$(\kappa, \lambda) = 1$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $U + W = \mathbb{Z},\ \ U \cap W = \kappa\lambda\mathbb{Z}$,

(ii) $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda} \cong \mathbb{Z}/\kappa\lambda\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_\kappa \oplus \mathbb{Z}_\lambda$.

6. Εάν τα U, U', U'' είναι τρεις υπομόδιοι ενός R-μοδίου M, να αποδειχθεί η ισοδυναμία των κάτωθι συνθηκών:

(i) $M \cong U \oplus U' \oplus U''$.

(ii) $U \cap U' = \{0_M\} = U' \cap U''$ και $M/U' \cong (U + U')/U' \oplus (U' + U'')/U'$.

7. Εάν η $(f_j : M_j \longrightarrow N_j)_{j \in J}$ είναι μια οικογένεια ομομορφισμών R-μοδίων και ορίσουμε **ως ευθύ γινόμενο** των μελών της την απεικόνιση

$$\prod_{j \in J} f_j : \prod_{j \in J} M_j \longrightarrow \prod_{j \in J} N_j,\ \ (m_j)_{j \in J} \longmapsto (f(m_j))_{j \in J},$$

και, αντιστοίχως, ως **ευθύ άθροισμα** των μελών της την απεικόνιση

$$\bigoplus_{j \in J} f_j : \bigoplus_{j \in J} M_j \longrightarrow \bigoplus_{j \in J} N_j,\ \ (m_j)_{j \in J} \longmapsto (f(m_j))_{j \in J},$$

(όπου εδώ «σχεδόν όλα» τα m_j είναι ίσα με το μηδενικό στοιχείο), να αποδειχθεί ότι αμφότερες οι $\prod_{j\in J} f_j$ και $\bigoplus_{j\in J} f_j$ είναι ομομορφισμοί R-μοδίων με τους υπομοδίους

$$\mathrm{Ker}(\prod_{j\in J} f_j) = \prod_{j\in J} \mathrm{Ker}(f_j), \quad \mathrm{Ker}(\bigoplus_{j\in J} f_j) = \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Ker}(f_j)$$

ως πυρήνες τους και τους υπομοδίους

$$\mathrm{Im}(\prod_{j\in J} f_j) = \prod_{j\in J} \mathrm{Im}(f_j), \quad \mathrm{Im}(\bigoplus_{j\in J} f_j) = \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Im}(f_j)$$

ως εικόνες τους.

8. Έστω $(M_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων και έστω N_j ένας υπομόδιος τού M_j, $\forall j \in J$. Να αποδειχθεί ότι το ευθύ γινόμενο και το ευθύ άθροισμα των μελών τής $(\pi_{N_j} : M_j \longrightarrow M_j/N_j)_{j\in J}$ (τής απαρτιζομένης από τους αντιστοίχους φυσικούς επιμορφισμούς) επάγουν ισομορφισμούς R-μοδίων:

$$(\prod_{j\in J} M_j)/(\prod_{j\in J} N_j) \cong \prod_{j\in J}(M_j/N_j), \quad (\bigoplus_{j\in J} M_j)/(\bigoplus_{j\in J} N_j) \cong \bigoplus_{j\in J}(M_j/N_j).$$

9. Εάν η $(M_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια R-μοδίων και το I ένα ιδεώδες τού R, να αποδειχθεί η ύπαρξη ισομορφισμών:

$$I(\bigoplus_{j\in J} M_j) \cong \bigoplus_{j\in J} IM_j, \quad (\bigoplus_{j\in J} M_j)/I(\bigoplus_{j\in J} M_j) \cong \bigoplus_{j\in J}(M_j/IM_j).$$

10. Εάν ένας R-μόδιος M διασπάται υπό τη μορφή $M = \bigoplus_{j\in J} M_j$ (εσωτερικού ευθέος αθροίσματος των μελών μιας οικογενείας υπομοδίων του) και η $f : M \longrightarrow N$ είναι ένας ισομορφισμός R-μοδίων, να αποδειχθεί ότι $N = \bigoplus_{j\in J} f(M_j)$.

11. Υποθέτοντας ότι οι $(f_j, g_j : M_j \longrightarrow N)_{j\in J}$ είναι δυο οικογένειες ομομορφισμών R-μοδίων και ότι $h \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$, να αποδειχθούν οι ισότητες

$$(\bigoplus_{j\in J} f_j) + (\bigoplus_{j\in J} g_j) = \bigoplus_{j\in J}(f_j + g_j), \quad h \circ (\bigoplus_{j\in J} f_j) = \bigoplus_{j\in J}(h \circ f_j).$$

12. Έστω ότι οι S, R είναι δυο μεταθετικοί δακτύλιοι με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο και ο $f : S \longrightarrow R$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων (με $f(1_S) = 1_R$). Ως γνωστόν (βλ. άσκηση **4** τού 1ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων), κάθε R-μόδιος M καθίσταται S-μόδιος μέσω τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού τού επαγομένου από την f. Εάν ένας R-μόδιος M διασπάται υπό τη μορφή $M = \bigoplus_{j\in J} M_j$ (εσωτερικού ευθέος αθροίσματος μιας οικογενείας υπομοδίων του), να αποδειχθεί ότι η διάσπαση αυτή εξακολουθεί να ισχύει ακόμη και όταν αυτός θεωρηθεί S-μόδιος (κατά τα προαναφερόμενα).

13. Έστω $(M_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων, όπου R μια *ακεραία περιοχή*. Να αποδειχθεί η ισότητα

$$\mathrm{tors}(\bigoplus_{j\in J} M_j) = \bigoplus_{j\in J} \mathrm{tors}(M_j).$$

(Βλ. άσκηση **11** τού 1ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων.) Εν συνεχεία, να διαπιστωθεί ότι η αντίστοιχη ισότητα *για ευθέα γινόμενα* δεν είναι πάντοτε αληθής κάνοντας χρήση τού αντιπαραδείγματος όπου: $R = \mathbb{Z}$, $J = \{ j \in \mathbb{N} | \, j \geq 2 \}$, $M_j = \mathbb{Z}, \forall j \in J$. Καθένας των M_j είναι μόδιος στρέψεως, ενώ ο $\prod_{j\in J} M_j$ δεν είναι. [*Υπόδειξη*: $k\,[1]_{k+1} \neq [0]_{k+1}$, για κάθε φυσικό αριθμό $k \geq 1$.]

14. Έστω $(M_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων, όπου R μια *ακεραία περιοχή*. Να αποδειχθούν οι ισότητες

$$\mathrm{Dv}(\prod_{j\in J} M_j) = \prod_{j\in J} \mathrm{Dv}(M_j), \quad \mathrm{Dv}(\bigoplus_{j\in J} M_j) = \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Dv}(M_j).$$

(Βλ. άσκηση **12** τού 1ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων. Εξ αυτού έπεται ότι τόσο το ευθύ γινόμενο όσο και το ευθύ άθροισμα των μελών μιας οικογενείας διαιρετών μοδίων είναι ένας διαιρετός μόδιος.)

15. Έστω p ένας πρώτος αριθμός και έστω $A := \left\{ \frac{a}{p^k} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ \ k \in \mathbb{N}_0 \right\}$. Το A είναι μια υποομάδα τής προσθετικής αβελιανής ομάδας $(\mathbb{Q}, +)$ περιέχουσα την $(\mathbb{Z}, +)$. Εφεξής θα συμβολίζουμε την πηλικοομάδα $A/\mathbb{Z}$ ως $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ είναι διαιρετός.

(ii) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{p \text{ πρώτος}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$.