ΟΜΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ: 1ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Έστω $(G,+)$ μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα τάξεως $k \geq 2$. Να αποδειχθεί ότι, εάν $\lambda, \lambda' \in \mathbb{Z}$, τότε ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda \equiv \lambda' (\text{mod } k) \Longrightarrow (\forall g \in G) \quad \lambda g = \lambda' g,$$

και να συναχθεί εξ αυτού ότι

(i) η $(G,+)$ είναι ένας $\mathbb{Z}_k$-μόδιος με αριθμητικό πολλαπλασιασμό του τον

$$\mathbb{Z}_k \times G \ni ([\ell]_k, g) \longmapsto \ell g \in G,$$

(ii) κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα με τάξη της έναν πρώτο αριθμό p μπορεί να θεωρηθεί ως διανυσματικός χώρος ορισμένος υπεράνω ενός σώματος με p στοιχεία.

2. Να αποδειχθεί ότι μια αβελιανή ομάδα $(A,+)$ καθίσταται $\mathbb{Z}_m$-μόδιος (για κάποιον φυσικό αριθμό $m \geq 2$) εάν και μόνον εάν $mA = 0$.

3. Έστω M ένας R-μόδιος. Εάν ο δακτύλιος R είναι χαρακτηριστικής p, όπου p πρώτος αριθμός, να αποδειχθεί ότι $pm = 0_M$, $\forall m \in M$.

4. Έστω ότι οι R, S είναι δυο μεταθετικοί δακτύλιοι με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο και ο $\phi : R \longrightarrow S$ ένας ομομορφισμός δακτυλίων (με $\phi(1_R) = 1_S$). Εάν ο M είναι ένας S-μόδιος, να αποδειχθεί ότι ο M μπορεί να καταστεί R-μόδιος μέσω τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού

$$R \times M \ni (r,m) \longmapsto \phi(r)m \in M.$$

5. Έστω M ένας R-μόδιος και έστω I ένα ιδεώδες τού δακτυλίου R. Να αποδειχθεί ότι ο πηλικομόδιος M/IM (όπου IM ο υπομόδιος τού M που παράγεται από το σύνολο $\{am \mid a \in I, \ m \in M\}$, πρβλ. 1.2.3. (iv)) καθίσταται (R/I)-μόδιος μέσω τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού

$$(r+I)(m+IM) := (rm) + IM, \quad (\forall r \in R) \wedge (\forall m \in M).$$

6. Ένας R-μόδιος M καλείται απλός όταν δεν διαθέτει άλλους υπομοδίους πέραν τού τετριμμένου και τού εαυτού του. Να αποδειχθεί ότι ένας R-μόδιος M είναι απλός εάν και μόνον εάν παράγεται από κάθε μονοσύνολο $\{m\}$, όπου $m \in M \setminus \{0_M\}$.

7. Έστω $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ η απεικόνιση

$$f(a + b\sqrt{2}) := a + b, \ \ \forall\, (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

(i) Είναι η f ομομορφισμός δακτυλίων;

(ii) Είναι η f ομομορφισμός $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-μοδίων;

(iii) Είναι η f ομομορφισμός $\mathbb{Z}$-μοδίων;

8. Να παρατεθούν παραδείγματα R-μοδίων M και N, και απεικονίσεων $f, g : M \longrightarrow N$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $f(m+n) = f(m) + f(n)$, $\forall (m,n) \in M \times N$, και $f(rm) \neq rf(m)$, για κάποιο $(r,m) \in R \times M$,

(ii) $g(m+n) \neq g(m) + g(n)$, για κάποιο $(m,n) \in M \times N$, και $g(rm) = rg(m)$, $\forall (r,m) \in R \times M$.

9. Δοθέντων δυο ομομορφισμών R-μοδίων

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

να αποδειχθούν οι ισότητες

$$\mathrm{Im}\,(f) \cap \mathrm{Ker}\,(g) = f\,(\mathrm{Ker}\,(g \circ f))\,, \quad \mathrm{Im}\,(f) + \mathrm{Ker}\,(g) = g^{-1}\,(\mathrm{Im}(g \circ f))\,.$$

10. Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $m \in M$. Το σύνολο

$$\mathrm{Ann}_R(m) := \{r \in R |\ rm = 0_M\}$$

ονομάζεται **μηδενιστής τού στοιχείου** m. Εάν το U είναι ένας υπομόδιος τού M, τότε το σύνολο

$$\mathrm{Ann}_R(U) := \{r \in R |\ ru = 0_M,\ \forall u \in U\}$$

ονομάζεται **μηδενιστής τού υπομοδίου** U. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το $\mathrm{Ann}_R(m)$ είναι ένα ιδεώδες τού R και υφίσταται ένας ισομορφισμός R-μοδίων:

$$R/\mathrm{Ann}_R(m) \cong Rm.$$

(ii) Το $\mathrm{Ann}_R(U)$ είναι ένα ιδεώδες τού R (και κατ' επέκτασιν υπομόδιος τού R-μοδίου R).

(iii) Εάν η $(U_j)_{j \in J}$ είναι μια οικογένεια υπομοδίων τού M, τότε

$$\mathrm{Ann}_R(\sum_{j \in J} U_j) = \bigcap_{j \in J} \mathrm{Ann}_R(U_j).$$

11. Έστω M ένας R-μόδιος, όπου R μια ακεραία περιοχή. Ένα στοιχείο $m \in M$ καλείται **στοιχείο στρέψεως** όταν $\mathrm{Ann}_R(m) \neq \{0_R\}$. Να αποδειχθεί ότι τα στοιχεία στρέψεως ενός R-μοδίου M συνιστούν έναν υπομόδιο $\mathrm{tors}(M)$ τού M. Ο $\mathrm{tors}(M)$ καλείται **υπομόδιος στρέψεως τού** M. Λέμε ότι ο M είναι R-**μόδιος στρέψεως** όταν $\mathrm{tors}(M) = M$. Κατ' αναλογίαν, λέμε ότι ο M **δεν διαθέτει στρέψη** (ή ότι είναι **ελεύθερος στρέψεως**) όταν $\mathrm{tors}(M) = \{0_M\}$. Να δοθούν παραδείγματα R-μοδίων στρέψεως και R-μοδίων ελευθέρων στρέψεως, και να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε R-μόδιο M έχουμε $\mathrm{tors}(\mathrm{tors}\,(M)) = \mathrm{tors}(M)\,$.

(ii) Η ίδια η περιοχή R είναι ένας R-μόδιος ελεύθερος στρέψεως.

(iii) Εάν ο M είναι ένας R-μόδιος στρέψεως και ο U ένας υπομόδιος τού M, τότε ο U είναι ένας R-μόδιος στρέψεως.

(iv) Εάν ο M είναι ένας R-μόδιος ελεύθερος στρέψεως και ο U ένας υπομόδιος τού M, τότε ο U είναι ένας R-μόδιος ελεύθερος στρέψεως.

(v) Εάν $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, τότε $f(\mathrm{tors}(M)) \subseteq \mathrm{tors}(N)$.

(vi) Ο πηλικομόδιος $M/\mathrm{tors}(M)$ δεν διαθέτει στρέψη.

12. Έστω M ένας R-μόδιος, όπου R μια ακεραία περιοχή. Ένα στοιχείο $m \in M$ ονομάζεται **διαιρετό** όταν για κάθε $r \in R \setminus \{0_R\}$ υπάρχει κάποιο $m' \in M$,τέτοιο ώστε να ισχύει $rm' = m$. Έστω $\mathrm{Dv}(M)$ το σύνολο όλων των διαιρετών στοιχείων τού M. Όταν $\mathrm{Dv}(M) = M$, τότε ο M ονομάζεται **διαιρετός μόδιος**. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το $\mathrm{Dv}(M)$ συνιστά υπομόδιο τού M.

(ii) Για κάθε υπομόδιο U ενός διαιρετού R-μοδίου M,ο πηλικομόδιος M/U είναι διαιρετός.

(iii) Οι $\mathbb{Z}$-μόδιοι $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ είναι διαιρετοί.

(iv) Καμία πεπερασμένως παραγόμενη, μη τετριμμένη αβελιανή ομάδα (ως $\mathbb{Z}$-μόδιος) δεν είναι διαιρετή. [*Υπενθύμιση*: Κάθε πεπερασμένως παραγόμενη αβελιανή ομάδα είναι ισόμορφη με το ευθύ άθροισμα *κυκλικών* ομάδων. Πρβλ. άσκηση **14** τού 2ου καταλόγου προτεινομένων ασκήσεων.]

13. Θεωρώντας τούς υπομοδίους $U = \kappa\mathbb{Z}$ και $W = \lambda\mathbb{Z}$ τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Z}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) $U + W = \text{μκδ}(\kappa, \lambda)\mathbb{Z}$, $U \cap W = \text{εκπ}(\kappa, \lambda)\mathbb{Z}$,

(ii) $(\kappa\mathbb{Z})/(\text{εκπ}(\kappa, \lambda)\mathbb{Z}) \cong (\text{μκδ}(\kappa, \lambda)\mathbb{Z})/(\lambda\mathbb{Z})$.

14. Το Κινέζικο Θεώρημα (ή το Θεώρημα τού Νικομάχου τού Γερασηνού) για R-μοδίους.

Εάν ο Mείναι ένας R-μόδιος και τα $I_1, I_2, \ldots, I_k$ ιδεώδη τού R,να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση

$$M \longrightarrow \prod_{j=1}^{k} (M/I_jM), \quad m \longmapsto (m + I_1M, \ldots, m + I_kM),$$

είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων με την τομή $\bigcap_{j=1}^{k} (I_jM)$ ως πυρήνα του. Εν συνεχεία, εάν υποτεθεί ότι για κάθε $j, j' \in \{1, \ldots, k\}$ με $j \neq j'$ ισχύει η ισότητα $I_j + I_{j'} = R$, να αποδειχθεί ότι η εν λόγω απεικόνιση είναι επιρριπτική και ότι

$$M/(\prod_{j=1}^{k} I_j)M \cong \prod_{j=1}^{k} (M/I_jM).$$

[*Υπενθύμιση*: Το $\prod_{j=1}^{k} I_j$ είναι το ιδεώδες τού R το αποτελούμενο από όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα στοιχείων τής μορφής $a_1a_2 \cdots a_k$, όπου $a_j \in I_j$,$\forall j \in \{1, \ldots, k\}$.]

15. Έστω $f : M \longrightarrow N$ ένας ομομορφισμός R-μοδίων και έστω I ένα μηδενοδύναμο ιδεώδες τού R. Εάν υποτεθεί ότι ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$f_{\pi\eta\lambda} : M/IM \longrightarrow N/IN$$

ο επαγόμενος από τον f (βλ. πόρισμα 1.4.5) είναι επιμορφισμός, να αποδειχθεί ότι και ο ίδιος ο f οφείλει να είναι επιμορφισμός. [*Υπενθύμιση*: Ένα ιδεώδες I τού R καλείται **μηδενοδύναμο ιδεώδες** όταν $I^k = \{0_R\}$, για κάποιον φυσικό αριθμό $k \geq 1$. Το I^k είναι το ιδεώδες το αποτελούμενο από όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα στοιχείων τής μορφής $a_1a_2 \cdots a_k$, όπου $a_j \in I, \forall j \in \{1, \ldots, k\}$.]