ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Hom και ⊗

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετούμε τις κύριες ιδιότητες των μοδίων ομομορφισμών και του τανυστικού γινομένου R-μοδίων, καθώς και τον συσχετισμό αυτών.

§ 3.1 Μόδιοι ομομορφισμών

Εάν οι M και N είναι δυο R-μόδιοι, τότε το σύνολο

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) = \{\text{ομομορφισμοί R-μοδίων } f: M \to N\}$$

καθίσταται R-μόδιος μέσω των πράξεων

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_R(M,N) \times \mathrm{Hom}_R(M,N) \ni (f_1,f_2) \mapsto f_1+f_2 \in \mathrm{Hom}_R(M,N), \\ R \times \mathrm{Hom}_R(M,N) \ni (r,f) \mapsto rf \in \mathrm{Hom}_R(M,N), \end{cases}$$

όπου $(f_1+f_2)(m) := f_1(m)+f_2(m)$, $\forall m \in M$, και $(rf)(m) = rf(m)$, $\forall r \in R$ και $\forall m \in M$.

3.1.1. Πρόταση: Για κάθε R-μόδιο M έχουμε

$$\mathrm{Hom}_R(R,M) \cong M.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε την απεικόνιση $h: \mathrm{Hom}_R(R,M) \longrightarrow M$, $h(f) := f(1_R)$, $\forall f \in \mathrm{Hom}_R(R,M)$. Επειδή $h(r_1 f_1 + r_2 f_2) = (r_1 f_1 + r_2 f_2)(1_R) = r_1 f_1(1_R) + r_2 f_2(1_R)$ $= r_1 h(f_1) + r_2 h(f_2)$, για οιαδήποτε $r_1, r_2 \in R$ και οιουσδήποτε $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_R(R,M)$, η h αποτελεί ομομορφισμό R-μοδίων. Επίσης, για οιουσδήποτε $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_R(R,M)$, για τους οποίους ισχύει $h(f_1) = h(f_2)$, έχουμε

$f_1(1_R) = f_2(1_R) \Rightarrow f_1(r) = f_1(r \cdot 1_R) = r f_1(1_R) = r f_2(1_R) = f_2(r \cdot 1_R) = f_2(r)$, $\forall r \in R$,

οπότε ο h είναι μονομορφισμός. Τέλος, επειδή ο δακτύλιος R είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος (με το $\{1_R\}$ ως βάση του), θεωρώντας την απεικόνιση $\varphi_m: \underset{R}{\underset{\cap}{\{1_R\}}} \longrightarrow \underset{M}{\underset{\cap}{\{m\}}}$, για οιοδήποτε $m \in M$, υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος

$f_m \in \mathrm{Hom}_R(R,M)$ με $f_m|_{\{1_R\}} = \varphi_m$, δηλ. με $\underset{h(f_m)}{\underset{\parallel}{f_m}}(1_R) = \varphi_m(1_R) = m$ (βλ. 1.6.14).

Τούτο σημαίνει ότι ο h είναι και επιμορφισμός. $\square$

3.1.2. Παραδείγματα: (i) Κατά την πρόταση 3.1.1,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z},\quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_k}(\mathbb{Z}_k,\mathbb{Z}_k)\cong\mathbb{Z}_k,\quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_k)\cong\mathbb{Z}_k,$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, $k\geq 2$, και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$.

(ii) Έχουμε $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})\ncong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}$. Πράγματι· εάν $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ και εάν υποθέσουμε ότι $f(1)\neq 0$, τότε $\forall q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$: $f(1)=q\,f(\frac{1}{q})\Rightarrow q\,|\,f(1)$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής έπεται ότι ο $f(1)$ διαθέτει πεπερασμένου πλήθους ακεραίους διαιρέτες. Επειδή λοιπόν ο q είναι ένας <u>αυθαιρέτως επιλεγμένος</u> ακέραιος (διάφορος του μηδενός), καταλήγουμε σε άτοπο! Ως εκ τούτου, $f(1)=0$.
Για οιουσδήποτε $p,q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ έχουμε $0=p\,f(1)=p\,f(\frac{q}{q})=pq\,f(\frac{1}{q})=q\,f(\frac{p}{q})$ $\underset{q\neq 0}{\Longrightarrow} f(\frac{p}{q})=0$. Άρα ο f είναι κατ' ανάγκην ο μηδενικός ομομορφισμός και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})=0$.

(iii) Κατ' αναλογίαν έχουμε $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k,\mathbb{Z})\neq\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_k)\cong\mathbb{Z}_k$, $\forall k\in\mathbb{Z}$, $k\geq 2$. Πράγματι· έστω τυχών $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k,\mathbb{Z})$. Τότε $k\,f([1]_k)=f([k]_k)=f([0]_k)=0$ οπότε $f([1]_k)=0\Longrightarrow f([\ell]_k)=f(\ell\cdot[1]_k)=\ell\,f([1]_k)=\ell\cdot 0=0$, $\forall \ell\in\{0,1,\ldots,k-1\}$ $\Longrightarrow f=0\Longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k,\mathbb{Z})=0$. (Με τα ίδια επιχειρήματα δείχνει κανείς ότι $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k,\mathbb{Q})=0$.)

3.1.3. Ορισμός. Εάν οι M,M',N,N' είναι τέσσερις R-μόδιοι και $f\in\mathrm{Hom}_R(M',M)$, $g\in\mathrm{Hom}_R(N,N')$, τότε ορίζουμε ως $\mathrm{Hom}_R(f,g)$ τον ομομορφισμό R-μοδίων

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(M,N)\ni\varphi\mapsto\mathrm{Hom}_R(f,g)(\varphi):=g\circ\varphi\circ f\in\mathrm{Hom}_R(M',N').}$$

3.1.4. Σημείωση: Προφανώς, ο ομομορφισμός $\mathrm{Hom}_R(f,g)$ εντάσσεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(M',N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Id}_{M'},g)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright", near start] & \mathrm{Hom}_R(M',N') \\
\mathrm{Hom}_R(M,N) \arrow[u, "\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{Id}_N)"] \arrow[ur, "\mathrm{Hom}_R(f,g)"'] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Id}_M,g)"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft", near end, shift right=3] & \mathrm{Hom}_R(M,N') \arrow[u, "\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{Id}_{N'})"']
\end{tikzcd}$$

3.1.5. Λήμμα. Εάν $f_1 \in Hom_R(M', M)$, $f_2 \in Hom_R(M, M'')$ και N είναι τυχών R-μόδιος, τότε:

$$Hom(f_2 \circ f_1, Id_N) = Hom(f_1, Id_N) \circ Hom(f_2, Id_N).$$

Απόδειξη: Για κάθε $\varphi \in Hom_R(M'', N)$ έχουμε:

$Hom_R(f_2 \circ f_1, Id_N) = Id_N \circ \varphi \circ (f_2 \circ f_1) = Id_N \circ (\varphi \circ f_2) \circ f_1 = Hom_R(f_1, Id_N)(\varphi \circ f_2)$
$= (Hom_R(f_1, Id_N) \circ Hom_R(f_2, Id_N))(\varphi)$. □

3.1.6. Λήμμα. Εάν $g_1 \in Hom_R(N', N)$, $g_2 \in Hom(N, N'')$ και M τυχών R-μόδιος, τότε

$$Hom_R(Id_M, g_2 \circ g_1) = Hom_R(Id_M, g_2) \circ Hom_R(Id_M, g_1).$$

Απόδειξη: Για κάθε $\varphi \in Hom_R(M, N'')$ έχουμε:

$Hom_R(Id_M, g_2 \circ g_1)(\varphi) = (g_2 \circ g_1) \circ \varphi \circ Id_M = g_2 \circ (g_1 \circ \varphi) \circ Id_M$
$= Hom_R(Id_M, g_2)(g_1 \circ \varphi) = Hom_R(Id_M, g_2)(g_1 \circ \varphi \circ Id_M)$
$= Hom_R(Id_M, g_2) \circ Hom_R(Id_M, g_1)$. □

3.1.7. Λήμμα Εάν τα M, N είναι δυο R-μόδιοι, τότε

$$Hom_R(Id_M, Id_N) = Id_{Hom_R(M,N)}$$

Απόδειξη: Για κάθε $\varphi \in Hom_R(M, N)$ έχουμε

$Hom_R(Id_M, Id_N)(\varphi) = Id_N \circ \varphi \circ Id_M = \varphi = Id_{Hom_R(M,N)}(\varphi)$. □

3.1.8 Πρόταση. Εάν $\begin{Bmatrix} f_1 \in Hom_R(M', M), & f_2 \in Hom_R(M, M'') \\ g_1 \in Hom_R(N', N), & g_2 \in Hom_R(N, N'') \end{Bmatrix}$, τότε

$$Hom_R(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) = Hom_R(f_1, g_2) \circ Hom_R(f_2, g_1)$$

Απόδειξη: Κατόπιν εφαρμογής των λημμάτων 3.1.5, 3.1.6 και 3.1.7 γι' αυτά τα δεδομένα λαμβάνουμε:

$\mathrm{Hom}_R(f_2 \circ f_1, Id_N) = \mathrm{Hom}_R(f_1, Id_N) \circ \mathrm{Hom}_R(f_2, Id_N)$
$\mathrm{Hom}_R(Id_{M'}, g_2 \circ g_1) = \mathrm{Hom}_R(Id_{M'}, g_2) \circ \mathrm{Hom}_R(Id_{M'}, g_1)$
$\mathrm{Hom}_R(Id_{M'}, Id_{N'}) = Id_{\mathrm{Hom}_R(M', N')}$, οπότε (βάσει της σημειώσεως 3.1.4) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_R(f_1, g_2) \circ \mathrm{Hom}_R(f_2, g_1) \\
&= \mathrm{Hom}_R(Id_{M'}, g_2) \circ \mathrm{Hom}_R(f_1, Id_N) \circ \mathrm{Hom}_R(f_2, Id_N) \circ \mathrm{Hom}_R(Id_{M''}, g_1) \\
&= \mathrm{Hom}_R(Id_{M'}, g_2) \circ \mathrm{Hom}_R(f_2 \circ f_1, Id_N) \circ \mathrm{Hom}(Id_{M''}, g_1) \\
&= \mathrm{Hom}_R(f_2 \circ f_1, g_2) \circ \mathrm{Hom}_R(Id_{M''}, g_1) = \mathrm{Hom}_R(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1). \quad \square
\end{aligned}$$

3.1.9. Πόρισμα. Εάν οι $f \in \mathrm{Hom}_R(M', M)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$ είναι ισομορφισμοί R-μοδίων, τότε και ο $\mathrm{Hom}_R(f, g)$ είναι ισομορφισμός R-μοδίων.

Απόδειξη: Υπάρχουν $h \in \mathrm{Hom}_R(M', M)$ και $k \in \mathrm{Hom}_R(N', N)$, τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι ισότητες: $h \circ f = Id_{M'}$, $f \circ h = Id_M$, $k \circ g = Id_N$, $g \circ k = Id_{N'}$. Κατά το λήμμα 3.1.7. οι συνθέσεις

$$\mathrm{Hom}_R(h, k) \circ \mathrm{Hom}_R(f, g) \quad , \quad \mathrm{Hom}_R(f, g) \circ \mathrm{Hom}_R(h, k)$$

είναι οι ταυτοτικοί ομομορφισμοί των R-μοδίων $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ και $\mathrm{Hom}_R(M', N')$, αντιστοίχως. Επομένως ο $\mathrm{Hom}_R(f, g)$ είναι όντως ισομορφισμός R-μοδίων. $\square$

3.1.10 Πρόταση. Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $(N_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων. Τότε υφίστανται οι εξής ισομορφισμοί:

(i) $\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{j \in J} N_j, M\right) \cong \prod_{j \in J} \mathrm{Hom}_R(N_j, M)$

(ii) $\mathrm{Hom}_R\left(M, \prod_{j \in J} N_j\right) \cong \prod_{j \in J} \mathrm{Hom}_R(M, N_j)$

Απόδειξη: (i) Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned}
\theta : \mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{j \in J} N_j, M\right) &\longrightarrow \prod_{j \in J} \mathrm{Hom}_R(N_j, M) \\
f &\longmapsto (f \circ in_j)_{j \in J}
\end{aligned}$$

(όπου in_j όπως στον ορσ. 1.5.12). Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι η θ είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων.

'Εστω τυχόν στοιχείο $(g_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} \mathrm{Hom}_R(N_j, M)$. Τότε υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $h \in \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} N_j, M)$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} N_j \arrow[r, "g_j"] \arrow[d, "in_j"'] & M \\ \bigoplus_{j\in J} N_j \arrow[ur, dashed, "\exists! h"'] & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό (πρβλ. 1.5.9, 1.5.13). Επειδή $\theta(h) = (h\circ in_j)_{j\in J} = (g_j)_{j\in J}$, ο θ είναι επιμορφισμός. Επιπροσθέτως, εάν $\alpha \in Ker(\theta)$, τότε $0 = \theta(\alpha) = (\alpha \circ in_j)_{j\in J} \Rightarrow$ κάθε διάγραμμα της μορφής

$$\begin{tikzcd} N_j \arrow[r, "0"] \arrow[d, "in_j"'] & M \\ \bigoplus_{j\in J} N_j \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Επειδή το $(\bigoplus_{j\in J} N_j, (in_j)_{j\in J})$ είναι συγγινόμενο των μελών της οικογένειας $(N_j)_{j\in J}$ και επειδή ο μηδενικός ομομορφισμός από το $\bigoplus_{j\in J} N_j$ στον M "κάνει μεταθετικό" οιοδήποτε διάγραμμα αυτού του είδους, έχομε (λόγω του θεωρήματος 1.5.11) $\alpha = 0 \Rightarrow \theta$ είναι και μονομορφισμός. Άρα ο θ είναι ισομορφισμός.

(ii) Η απόδειξη είναι "δυϊκή" εκείνης του (i) και αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. (Αρκεί να αντικατασταθεί το $\bigoplus_{j\in J} N_j$ με το $\prod_{j\in J} N_j$, να αντιστραφούν τα χρησιμοποιούμενα βέλη και να ορισθεί ως θ η απεικόνιση $\theta(f) := (pr_j \circ f)_{j\in J}$. $\square$

3.1.11. Πόρισμα. Εάν $J = \{1, \dots, k\}$, τότε

(i) $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j=1}^{k} N_j, M) \cong \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Hom}_R(N_j, M)$

(ii) $\mathrm{Hom}_R(M, \bigoplus_{j=1}^{k} N_j) \cong \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Hom}_R(M, N_j)$.

3.1.12. Πόρισμα Εάν οι $(M_j)_{j\in J}$, $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι δυο οικογένειες R-μοδίων, τότε

(i) $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} M_j, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) \cong \prod_{j\in J} (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_j, N_\lambda))$

(ii) $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} M_j, \prod_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) \cong \prod_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} \mathrm{Hom}_R(M_j, N_\lambda)$

Απόδειξη: Το (i) έπεται από την πρόταση 3.1.10 (i) και την άσκηση 5 του 5ου φυλλαδίου. Το (ii) έπεται ύστερα από διαδοχική εφαρμογή των (ii) και (i) της προτάσεως 3.1.10. $\square$

3.1.13. Θεώρημα. Για οιουσδήποτε ομομορφισμούς R-μοδίων $f: M' \to M$ και $g: N \to N'$ ο πυρήνας του

$$\mathrm{Hom}_R(f,g): \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M',N')$$

ισούται με τον υπομόδιο U του $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ τον οριζόμενον ως εξής:

$$U := \{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \mid \varphi(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(g)\}.$$

Απόδειξη: Έστω $h := \mathrm{Hom}_R(f,g)$. Για να αποδείξουμε ότι $U \subseteq \mathrm{Ker}(h)$ επιλέγουμε τυχόντα $\varphi \in U$. Αρκεί ν.δ.ό. $h(\varphi) = 0_{\mathrm{Hom}_R(M',N')}$. Για κάθε $x \in M'$ έχουμε $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow \varphi(f(x)) \in \mathrm{Ker}(g)$, οπότε

$$h(\varphi)(x) = (g \circ \varphi \circ f)(x) = g(\varphi(f(x))) = 0_{N'} \Rightarrow h(\varphi) = 0_{\mathrm{Hom}_R(M',N')}.$$

Και αντιστρόφως: έστω $\varphi \in \mathrm{Ker}(h)$. Τότε $g \circ \varphi \circ f = h(\varphi) = 0_{\mathrm{Hom}_R(M',N')}$

$$\Longrightarrow \underset{\varphi(\mathrm{Im}(f))}{\underset{\|}{\mathrm{Im}(\varphi \circ f)}} \subseteq \mathrm{Ker}(g) \Longrightarrow \varphi \in U. \quad \square$$

3.1.14. Πόρισμα Εάν ο $f: M' \to M$ είναι ένας επιμορφισμός και ο $g: N \to N'$ ένας μονομορφισμός R-μοδίων, τότε ο

$\mathrm{Hom}_R(f,g): \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M',N')$ είναι μονομορφισμός.

3.1.15. Θεώρημα Εάν η $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ είναι μια ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και ο M τυχών R-μόδιος, τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B,M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A,M),$$

όπου

$$f^* := \mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{Id}_M), \quad g^* := \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{Id}_M),$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη: Επειδή ο g είναι επιμορφισμός και ο Id_M μονομορφισμός, ο g^* είναι μονομορφισμός επί τη βάσει τού πορίσματος 3.1.14. Επειδή $g\circ f=0$, έχουμε (εξ ορισμού) $Hom_R(g\circ f, Id_M)=0$. Κατά συνέπειαν,

$$f^*\circ g^* \underset{3.1.8.}{=} Hom_R(g\circ f, Id_M\circ Id_M) = Hom_R(g\circ f, Id_M) = 0$$

$\Longrightarrow$ $Im(g^*) \subseteq Ker(f^*)$. Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι $Ker(f^*) \subseteq Im(g^*)$.

Έστω τυχόν στοιχείο φ τού $Hom_R(B,M)$ ανήκον στον πυρήνα $Ker(f^*)$. Έστω $U := Im(f) (= Ker(g))$. Επειδή $f^* := Hom_R(f, Id_M)$, έχουμε
$\varphi(U) = \varphi(Im(f)) \subseteq Ker(Id_M) = \{0_M\}$ (βλ. 3.1.13) $\Longrightarrow \varphi(U) = \{0_M\}$.
Βάσει τού πορίσματος 1.4.6. ο $\varphi : B \to M$ επάγει έναν ομομορφισμό $\overline{\varphi} : Q \to M$ από τον πηλικομόδιο $Q := B/U$ στον M. Επιπροσθέτως, επειδή ο g είναι επιμορφισμός έχων τον U ως πυρήνα του, υφίσταται κάποιος ισομορφισμός $h : Q \xrightarrow{\cong} C$ (βλ. άσκηση 4(ii) τού 4ου φυλλαδίου). Ως εκ τούτου, προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "p = \text{προβολή}"'] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Q \arrow[ul, "h"'] \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Επειδή ο h είναι ισομορφισμός, ορίζεται ένας ομομορφισμός $\chi := \overline{\varphi}\circ h^{-1} : C \to M$, για τον οποίο ισχύει $g^*(\chi) = \chi\circ g = \overline{\varphi}\circ h^{-1}\circ g = \overline{\varphi}\circ p = \varphi \Longrightarrow \varphi \in Im(g^*)$. □

3.1.16. Θεώρημα. Εάν η $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ είναι μια βραχεία διασπώμενη ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και ο M τυχών R-μόδιος, τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow Hom_R(C,M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(B,M) \xrightarrow{f^*} Hom_R(A,M) \longrightarrow 0,$$

όπου

$$f^* := Hom_R(f, Id_M), \quad g^* := Hom_R(g, Id_M),$$

είναι ακριβής.

<u>Απόδειξη:</u> Κατά το Θεώρημα 2.1.13 ο f διαθέτει αριστερό αντίστροφο, δηλ. $\exists \alpha \in Hom_R(B,A) : \alpha \circ f = Id_A$. Επειδή

$$Hom_R(f, Id_M) \circ Hom_R(\alpha, Id_M) \underset{3.1.8}{=} Hom_R(\alpha \circ f, Id_M \circ Id_M)$$
$$= Hom_R(Id_A, Id_M) \underset{3.1.7.}{=} Id_{Hom_R(A,M)} \Rightarrow o\ Hom_R(f, Id_M) =: f^*$$
είναι επιμορφισμός.

Υπολείπεται η εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1.15. □

<u>3.1.17. Σημείωση:</u> Εάν η $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ είναι μια βραχεία ακριβής <u>μη διασπώμενη</u> ακολουθία, τότε ο f^* δεν είναι κατ' ανάγκην επιμορφισμός. Επί παραδείγματι, θεωρώντας την

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0, \quad M = \mathbb{Z},$$

διαπιστώνουμε ότι ο $i^* : \underbrace{Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})}_{\overset{\| \leftarrow 3.1.2.(ii)}{0}} \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \neq 0$

είναι ο μηδενικός ομομορφισμός, ο οποίος δεν είναι επιμορφισμός.

<u>3.1.18. Θεώρημα.</u> Εάν η $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ είναι μια ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και ο M τυχών R-μόδιος, τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow Hom_R(M,A) \xrightarrow{f_*} Hom_R(M,B) \xrightarrow{g_*} Hom_R(M,C),$$

όπου

$$f_* := Hom_R(Id_M, f), \quad g_* := Hom_R(Id_M, g),$$

είναι ακριβής.

<u>Απόδειξη:</u> Επειδή ο Id_M είναι επιμορφισμός και ο f μονομορφισμός, ο f_* είναι μονομορφισμός επί τη βάσει του πορίσματος 3.1.14. Και επειδή $g \circ f = 0$, έχουμε (εξ ορισμού) $Hom_R(Id_M, g \circ f) = 0$. Κατά συνέπειαν,

$$g_* \circ f_* \underset{3.1.8.}{=} Hom_R(Id_M \circ Id_M, g \circ f) = Hom_R(Id_M, g \circ f) = 0 \Rightarrow Im(f_*) \subseteq Ker(g_*)$$

Απομένει λοιπόν να δείξουμε ότι $Ker(g_*) \subseteq Im(f_*)$. Έστω τυχόν στοιχείο φ του $Hom_R(M,B)$ ανήκον στον πυρήνα $Ker(g_*)$. Επειδή $g_* := Hom_R(Id_M, g)$, έχουμε $\varphi(M) = \varphi(Im(Id_M)) \subseteq Ker(g) \overset{\text{ακρίβεια}}{=} Im(f)$ (βλ. 3.1.13). Επειδή ο f είναι μονομορφισμός, υπάρχει κάποιος ισομορφισμός $j: Im(f) \xrightarrow{\cong} A$ (βλ. άσκηση 3(ii) του 4ου φυλλαδίου), ούτως ώστε η σύνθεση $f \circ j$ να είναι η ενθετική απεικόνιση του $Im(f)$ εντός του B. Ως εκ τούτου, ορίζεται ένας ομομορφισμός

$$\psi := j \circ \varphi : M \to A,$$

για τον οποίο ισχύει $f_*(\psi)(x) = f(j(\varphi(x))) = \varphi(x)$, $\forall x \in M$, οπότε $f_*(\psi) = \varphi \Rightarrow \varphi \in Im(f_*)$. □

3.1.19 Θεώρημα. Εάν η $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ είναι μια βραχεία διασπώμενη ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και ο M τυχών R-μόδιος, τότε η ακολουθία

$$0 \to Hom_R(M,A) \xrightarrow{f_*} Hom_R(M,B) \xrightarrow{g_*} Hom_R(M,C) \to 0,$$

όπου

$$f_* := Hom_R(Id_M, f), \quad g_* := Hom_R(Id_M, g),$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη: Κατά το Θεώρημα 2.1.13 ο g διαθέτει δεξιό αντίστροφο, δηλ. $\exists\, \beta \in Hom_R(C,B) : g \circ \beta = Id_C$. Επειδή

$$Hom_R(Id_M, g) \circ Hom_R(Id_M, \beta) \underset{3.1.8}{=} Hom_R(Id_M \circ Id_M, g\circ\beta)$$

$$= Hom_R(Id_M, Id_C) \underset{3.1.7}{=} Id_{Hom_R(M,C)} \Rightarrow \text{ο } Hom_R(Id_M, g) =: g_*$$ είναι επιμορφισμός.

Υπολείπεται η εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1.18. □

3.1.20. Σημείωση. Εάν η $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ είναι μια βραχεία ακριβής μη διασπώμενη ακολουθία, τότε ο g_* δεν είναι κατ' ανάγκην επιμορφισμός. Επί παραδείγματι, θεωρώντας την $0 \to \mathbb{Z} \xhookrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$, $M = \mathbb{Z}_2$, διαπιστώνουμε ότι ο

$$\pi_* : \underset{\substack{\| \\ 0}}{Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q})} \longrightarrow \underset{\substack{\| ? \\ \mathbb{Z}_2 \\ \neq \\ 0}}{Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$$

3.1.2 (iii) → (πρώτη ισότητα); (βλ. άσκηση 4 του 5ου φυλλαδίου) (δεύτερη ισότητα)

είναι ο μηδενικός ομομορφισμός, ο οποίος δεν είναι επιμορφισμός.

§ 3.2 Προβολικοί και εμβολικοί μόδιοι

__3.2.1. Ορισμός.__ Ένας R-μόδιος P καλείται __προβολικός__ όταν για κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $f: P \to B$ και κάθε επιμορφισμό R-μοδίων $g: A \to B$ υπάρχει ομομορφισμός R-μοδίων $h: P \to A$, για τον οποίο ισχύει $g \circ h = f$.
Στη γλώσσα των διαγραμμάτων ο εν λόγω ορισμός αναδιατυπώνεται ως εξής:
Ένας R-μόδιος P είναι προβολικός $\underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow}$ για κάθε διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων της μορφής

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

με τη γραμμή του ακριβή υπάρχει $h \in Hom_R(P,A)$ που το "κλείνει":

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h"'] & \\ A \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "G"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

__3.2.2. Πρόταση.__ Για έναν R-μόδιο P οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:
(i) Ο P είναι προβολικός.
(ii) Για κάθε επιμορφισμό R-μοδίων $g: A \to B$
ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$Hom_R(P,A) \xrightarrow{g_*} Hom_R(P,B)$$

ο επαγόμενος από τον g $(g_* := Hom_R(Id_P, g))$ είναι επιμορφισμός.

__Απόδειξη:__ Εξ ορισμού, ο g_* είναι επιμορφισμός $\Leftrightarrow$ για κάθε $f \in Hom_R(P,B)$ υπάρχει $h \in Hom_R(P,A)$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$g_*(h) = g \circ h \circ Id_P = g \circ h = f.$$

Ως εκ τούτου, οι συνθήκες (i) και (ii) είναι ισοδύναμες (βλ. 3.2.1). □

__3.2.3. Πρόταση:__ Κάθε ελεύθερος R-μόδιος είναι προβολικός.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω P ένας ελεύθερος R-μόδιος και έστω X μια βάση αυτού. Εάν $f \in Hom_R(P,B)$ και εάν ο $g: A \to B$ είναι ένας επιμορφισμός R-μοδίων, ορίζουμε μια απεικόνιση $\varphi: X \to A$ ως εξής: Εάν $x \in X$, τότε $f(x) \in B$ και, επειδή ο g είναι επιμορφισμός, υπάρχει $y \in A: g(y) = f(x)$. Θέτουμε $\varphi(x) := y$, $\forall x \in X$. Κατά το θεώρημα 1.6.14 "της Γραμμικής Επεκτάσεως" υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $h \in Hom_R(P,A): h|_X = \varphi$.

Έστω z τυχόν στοιχείο του P. Επειδή το X είναι βάση του P, το z παρίσταται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του X, δηλαδή υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in X$ και $r_1, \ldots, r_k \in R$, τέτοια ώστε να ισχύει $z = \sum_{j=1}^{k} r_j x_j$.

Κατά συνέπειαν,

$$g(h(z)) \underset{\substack{g \text{ ομο-} \\ \text{μορφισμός}}}{=\!=\!=} \sum_{j=1}^{k} r_j\, g(h(x_j)) \underset{h|_X = \varphi}{=\!=\!=} \sum_{j=1}^{k} r_j\, g(\varphi(x_j))$$

$$\underset{\left(\substack{\text{από τον ορισμό} \\ \text{της } \varphi}\right)}{=\!=\!=} \sum_{j=1}^{k} r_j\, f(x_j) \underset{f \text{ ομομορφισμός}}{=\!=\!=} f\left(\sum_{j=1}^{k} r_j x_j\right) = f(z),$$

οπότε $g \circ h = f$. Αυτό σημαίνει ότι ο P είναι προβολικός. $\square$

<u>3.2.4. Σημείωση:</u> Υπάρχουν πάμπολλοι προβολικοί μη ελεύθεροι R-μόδιοι. (Βλ. παραδείγματα 3.2.7). Ως εκ τούτου, η κλάση των προβολικών R-μοδίων είναι ευρύτερη εκείνης των ελευθέρων.

<u>3.2.5. Πρόταση:</u> Κάθε ευθύς προσθετέος ενός προβολικού R-μοδίου είναι προβολικός.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω P ένας προβολικός R-μόδιος ο οποίος παρίσταται ως ευθύ άθροισμα $P = U \oplus U'$ δυο υπομοδίων του U και U'. Έστω $f \in Hom_R(U,B)$ και έστω $g: A \to B$ τυχών επιμορφισμός R-μοδίων. Συμβολίζοντας ως $j: U \hookrightarrow P$ τη φυσική ένθεση και ως $\pi: P \to U$ τη φυσική προβολή, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο P είναι προβολικός, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ενός $\theta \in Hom_R(P,A)$, για τον οποίο ισχύει $g \circ \theta = f \circ \pi$. Επειδή $\pi \circ j = Id_U$, θέτοντας

$h := \theta \circ j : U \to A$

$$\begin{tikzcd}
& P = U \oplus U' \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[d, shift left, "\pi"] \arrow[dr, bend left, "f\circ\pi"] & \\
& U \arrow[u, hook, shift left, "j"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

λαμβάνουμε

$g \circ h = g \circ \theta \circ j = f \circ \pi \circ j = f \circ Id_U = f$.

Αυτό σημαίνει ότι ο U είναι προβολικός. $\square$

3.2.6. Θεώρημα. Για έναν R-μόδιο P οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) ο P είναι προβολικός.

(ii) Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία της μορφής $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ είναι διασπώμενη.

(iii) Εάν ο N είναι ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M, τέτοιος ώστε να ισχύει $M/N \cong P$, τότε ο P αποτελεί ευθύ προσθετέο του M.

(iv) Ο P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελευθέρου R-μοδίου.

(v) Για κάθε επιμορφισμό R-μοδίων $g: A \to B$ ο επαγόμενος ομομορφισμός $\mathrm{Hom}_R(P,A) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P,B)$ (όπου $g_* := \mathrm{Hom}_R(Id_P, g)$) είναι επιμορφισμός.

(vi) Για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ η ακολουθία $0 \to \mathrm{Hom}_R(P,A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P,B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P,C) \to 0$ (όπου $f_* := \mathrm{Hom}_R(Id_P, f)$, $g_* := \mathrm{Hom}_R(Id_P, g)$) είναι ακριβής.

Απόδειξη: **(i) ⟹ (ii)** Θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "Id_P"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(με ακριβή γραμμή).
Επειδή ο P είναι προβολικός, υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(P,M)$: $g \circ h = Id_P$.
Εξ αυτού έπεται ότι κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία της μορφής $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ διασπάται στον M (βλ. θεώρημα 2.1.13, σελ. 77).

(ii) ⟹ (iii) Εάν ο N είναι ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M με $M/N \cong P$, τότε η βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \to N \xrightarrow{\text{ένθεση}} M \xrightarrow{\text{φυσ. επιμ.}} M/N \cong P \to 0$ διασπάται στον M, οπότε $M \cong N \oplus P$ (βλ. θεώρημα 2.1.13, σελ. 77).

(iii) ⟹ (iv) Κατά το πόρισμα 1.6.16 (σελ. 46) ο P είναι ισόμορφος ενός πηλικομοδίου M/N, όπου M ένας ελεύθερος R-μόδιος. Επομένως, ο P είναι ευθύς προσθετέος του ελευθέρου R-μοδίου M.

(iv) ⟹ (i) Υποθέτουμε ότι ο P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελευθέρου R-μοδίου M. Ο M ως ελεύθερος είναι προβολικός (βλ. πρόταση 3.2.3, σελ. 129). Ως εκ τούτου, ο P ως ευθύς προσθετέος ενός προβολικού μοδίου είναι προβολικός (βλ. πρόταση 3.2.5, σελ. 130).

(v) ⟺ (i) Πρόκειται για την πρόταση 3.2.2 (σελ. 129).

(vi) ⟺ (v) Τούτο έπεται από το θεώρημα 3.1.18 (σελ. 127). □

3.2.7. Παραδείγματα: (i) Εάν $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$, $\kappa, \lambda \geq 2$, και $\mu\kappa\delta(\kappa,\lambda)=1$, τότε υφίσταται ένας ισομορφισμός $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda}$-μοδίων $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda} \cong \mathbb{Z}_\kappa \oplus \mathbb{Z}_\lambda$ (βλ. άσκηση 8(ii) τού 3ου φυλλαδίου.) Ο $\mathbb{Z}_\kappa$ είναι ευθύς προσθετέος τού ελευθέρου $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda}$-μοδίου $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda}$. Επομένως, ο $\mathbb{Z}_\kappa$ είναι ένας προβολικός $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda}$-μόδιος. Ωστόσο, ο $\mathbb{Z}_\kappa$ δεν είναι ελεύθερος $\mathbb{Z}_{\kappa\lambda}$-μόδιος, καθότι $\mathrm{card}(\mathbb{Z}_\kappa)=\kappa<\kappa\lambda=\mathrm{card}(\mathbb{Z}_{\kappa\lambda})$ (πρβλ. άσκηση 8(iii) τού 3ου φυλλαδίου). Για μια γενίκευση αυτού τού παραδείγματος βλ. άσκηση 12 τού 5ου φυλλαδίου.

(ii) Εάν $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, τότε το ιδεώδες $I:=\langle 2, 1+\sqrt{-5}\rangle$ είναι ένας μη ελεύθερος R-μόδιος (βλ. άσκηση 7(ii) τού 3ου φυλλαδίου). Ωστόσο, είναι προβολικός R-μόδιος! Πράγματι· εάν ο F είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος βαθμίδας 2, δηλ. εάν $F\cong Rs_1\oplus Rs_2$ (για κατάλληλα $s_1,s_2\in F$) και ορίσουμε τον ομομορφισμό R-μοδίων $\varphi: F\to I$, $\varphi(r_1s_1+r_2s_2):=2r_1+(1+\sqrt{-5})r_2$, $\forall (r_1,r_2)\in R\times R$, καθώς και τον ομομορφισμό R-μοδίων $\psi: I\to F$, $\psi(a):=-as_1+\left(\frac{a(1-\sqrt{-5})}{2}\right)s_2$, $\forall a\in I$, τότε

$$\varphi\circ\psi(a) = \varphi\left(-as_1+\frac{a(1-\sqrt{-5})}{2}s_2\right) = -2a+\frac{a}{2}\underbrace{(1-\sqrt{-5})(1+\sqrt{-5})}_{\substack{\shortparallel\\ 6}} = a, \ \forall a\in I$$

$$\Longrightarrow \varphi\circ\psi = Id_I \underset{\substack{\text{Θεώρημα}\\ 2.1.13}}{\Longrightarrow} \underbrace{F}_{\text{ελεύθερος}} \cong \ker(\varphi)\oplus I \underset{\substack{\text{Θεώρημα}\\ 3.2.6\,(iv)}}{\Longrightarrow} I \text{ προβολικός } R\text{-μόδιος.}$$

(Σημειωτέον ότι η ψ είναι καλώς ορισμένη καθώς $2 \mid a(1-\sqrt{-5})$, $\forall a\in I$.)

(iii) Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_k$ $(k\geq 2)$ δεν είναι προβολικός (πρβλ. 3.1.20, 3.2.6.(v)).

3.2.8. Πρόταση: Έστω $(P_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων. Τότε το ευθύ άθροισμα $P:=\bigoplus_{j\in J}P_j$ είναι προβολικός μόδιος $\Longleftrightarrow$ (ο P_j είναι προβολικός, $\forall j\in J$).

Απόδειξη: ($\Longrightarrow$) Εάν το P είναι προβολικός R-μόδιος, τότε υπάρχει (κατά το Θ.3.2.6) ένας ελεύθερος R-μόδιος F και ένας υπομόδιος αυτού P', ούτως ώστε $F=P\oplus P'$.

Επομένως, $F=\left(\bigoplus_{j\in J}P_j\right)\oplus P' \underset{1.5.15}{\cong} P_j\oplus\left(\bigoplus_{\lambda\in J\setminus\{j\}}P_\lambda \oplus P'\right)$, $\forall j\in J$

$\underset{\text{Θεώρημα 3.2.6}}{\Longrightarrow}$ (ο P_j είναι προβολικός, $\forall j\in J$).

($\Longleftarrow$) Εάν ο P_j είναι προβολικός, $\forall j\in J$, τότε υπάρχει (κατά το Θ.3.2.6) ελεύθερος R-μόδιος F_j και ένας υπομόδιος αυτού P_j', ούτως ώστε $F_j=P_j\oplus P_j'$, $\forall j\in J$.

Άρα $P\oplus\left(\bigoplus_{j\in J}P_j'\right) \underset{1.5.15}{\cong} \bigoplus_{j\in J}(P\oplus P_j') \cong \underbrace{\bigoplus_{j\in J}F_j}_{\substack{\text{ελεύθερος ως ευθύ άθροισμα}\\ \text{ελευθέρων } R\text{-μοδίων (βλ. 1.6.17)}}} \underset{\text{Θεώρημα 3.2.6}}{\Longrightarrow} P$ προβολικός. $\square$

<u>Ορισμός 3.2.9.</u> Ένας R-μόδιος Q καλείται <u>εμβολικός</u> όταν για κάθε ομομορφισμό $f: A \to Q$ και κάθε μονομορφισμό $g: A \to B$ υπάρχει ένας ομομορφισμός R-μοδίων $h: B \to Q$, για τον οποίο ισχύει $h \circ g = f$.
Στη γλώσσα των διαγραμμάτων ο εν λόγω ορισμός αναδιατυπώνεται ως εξής:
Ένας R-μόδιος Q είναι εμβολικός $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ για κάθε διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων της μορφής

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ & Q & \end{tikzcd}$$

με τη γραμμή του ακριβή υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(B,Q)$ που το "κλείνει":

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

<u>Πρόταση 3.2.10.</u> Για έναν R-μόδιο Q οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Ο Q είναι εμβολικός.

(ii) Για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $g: A \to B$ ο ομομορφισμός R-μοδίων
$$\mathrm{Hom}_R(B,Q) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(A,Q)$$
ο επαγόμενος από τον g ($g^* := \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{Id}_Q)$) είναι επιμορφισμός.

<u>Απόδειξη:</u> Εξ ορισμού, ο g^* είναι επιμορφισμός $\Longleftrightarrow$ για κάθε $f \in \mathrm{Hom}_R(A,Q)$ υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(B,Q)$, τέτοιος ώστε να ισχύει
$$g^*(h) = \mathrm{Id}_Q \circ h \circ g = h \circ g = f.$$
<u>Ως</u> εκ τούτου, οι συνθήκες (i) και (ii) είναι ισοδύναμες (βλ. 3.2.9). □

<u>Θεώρημα 3.2.11.</u> Κάθε R-μόδιος είναι ισόμορφος με έναν υπομόδιο ενός εμβολικού R-μοδίου.

<u>Απόδειξη:</u> Βλ. S. MacLane: "Homology", Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 114, Springer-Verlag, Third Corrected Printing, 1975, Theorem 7.4., pp. 93-94. □

3.2.12. Πρόταση: Κάθε ευθύς προσθετέος ενός εμβολικού R-μοδίου είναι εμβολικός.

Απόδειξη: Έστω Q ένας εμβολικός R-μόδιος ο οποίος παρίσταται ως ευθύ άθροισμα $Q = U \oplus U'$ δυο υπομοδίων του U και U'. Έστω $f \in \mathrm{Hom}_R(A,U)$ και έστω $g : A \to B$ τυχών μονομορφισμός R-μοδίων. Συμβολίζοντας ως $j : U \hookrightarrow Q$ τη φυσική ένθεση και ως $\pi : Q \to U$ τη φυσική προβολή, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο Q είναι εμβολικός, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη ενός $\theta \in \mathrm{Hom}_R(B,Q)$, για τον οποίο ισχύει $\theta \circ g = j \circ f$. Επειδή $\pi \circ j = \mathrm{Id}_U$, θέτοντας

$h := \pi \circ \theta : B \to U$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[ddl, "\theta"] \\
& U \arrow[d, shift right, "j"'] & \\
& U \oplus U' = Q \arrow[u, shift right, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

λαμβάνουμε $h \circ g = \pi \circ \theta \circ g = \pi \circ j \circ f = f$. Αυτό σημαίνει ότι ο U είναι εμβολικός. □

3.2.13. Πρόταση: Έστω $(Q_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων. Τότε το ευθύ γινόμενο $Q := \prod_{j \in J} Q_j$ είναι εμβολικός μόδιος $\Leftrightarrow$ (ο Q_j είναι εμβολικός, $\forall j \in J$)

Απόδειξη: ($\Longrightarrow$) Εάν ο Q είναι εμβολικός, $f_j \in \mathrm{Hom}_R(A, Q_j)$, $\forall j \in J$, και $g : A \to B$ τυχών μονομορφισμός R-μοδίων, τότε θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_j"'] \arrow[dr] & B \arrow[dl, dashed, "h_j"'] \arrow[d, "\theta_j"] \\
& Q_j \arrow[r, shift left, "i_j"] & Q \arrow[l, shift left, "pr_j"]
\end{tikzcd}$$

Προφανώς, $\exists\, \theta_j \in \mathrm{Hom}_R(B,Q)$:
$\theta_j \circ g = i_j \circ f_j$, $\forall j \in J$.

Θεωρώντας την σύνθεση $h_j := pr_j \circ \theta_j$, $\forall j \in J$, λαμβάνουμε
$h_j \circ g = pr_j \circ \theta_j \circ g$
$= pr_j \circ i_j \circ f_j = f_j$, $\forall j \in J$.

Αυτό σημαίνει ότι ο Q_j είναι εμβολικός, $\forall j \in J$.

($\Longleftarrow$) Εάν ο Q_j είναι εμβολικός, $\forall j \in J$, $f \in \mathrm{Hom}_R(A,Q)$ και $g : A \to B$ τυχών μονομορφισμός R-μοδίων, τότε θεωρούμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr] & B \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "\eta_j"] \\
& Q \arrow[r, "pr_j"] & Q_j
\end{tikzcd}$$

Προφανώς, $\exists\, \eta_j \in \mathrm{Hom}_R(B, Q_j)$:
$\eta_j \circ g = pr_j \circ f$, $\forall j \in J$.

Θεωρώντας τον ομομορφισμό $h : B \to Q$, $h(b) := (\eta_j(b))_{j \in J}$, $\forall b \in B$ λαμβάνουμε
$(h \circ g)(a) = (\eta_j(g(a)))_{j \in J}$
$= (pr_j(f(a)))_{j \in J} = f(a)$, $\forall a \in A$.

Άρα ο Q είναι εμβολικός. □

3.2.14. Σημείωση: Το ευθύ άθροισμα οιασδήποτε οικογένειας εμβολικών R-μοδίων είναι εμβολικός R-μόδιος εάν και μόνον εάν ο R είναι ναιτεριανός δακτύλιος.
(Βλ. J.J. Rotman: "An Introduction to Homological Algebra", Academic Press, 1979, Theorem 4.10, pp. 111-112.)

3.2.15. Θεώρημα. Για έναν R-μόδιο Q οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:
(i) Ο Q είναι εμβολικός.
(ii) Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία της μορφής $0 \to Q \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ είναι διασπώμενη.
(iii) Ο Q είναι ευθύς προσθετέος ενός εμβολικού R-μοδίου.
(iv) Για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $g: A \to B$ ο επαγόμενος ομομορφισμός $\mathrm{Hom}_R(B,Q) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(A,Q)$ (όπου $g^* := \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{Id}_Q)$) είναι επιμορφισμός.
(v) Για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ η ακολουθία $0 \to \mathrm{Hom}_R(C,Q) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B,Q) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A,Q) \to 0$ (όπου $f^* := \mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{Id}_Q)$, $g^* := \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{Id}_Q)$) είναι ακριβής.

Απόδειξη: (i) ⇒ (ii) Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_Q"] & M \\ & Q & \end{tikzcd}$$

(με ακριβή γραμμή).
Επειδή ο Q είναι εμβολικός, υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(M,Q)$: $h \circ f = \mathrm{Id}_Q$.
Εξ αυτού έπεται ότι κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία της μορφής $0 \to Q \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ διασπάται στον M (βλ. θεώρημα 2.1.13, σελ. 77).
(ii) ⇒ (iii) Κατά το θεώρημα 3.2.11 (σελ. 133) υπάρχει μονομορφισμός R-μοδίων $f: Q \hookrightarrow Q'$ με τον Q' εμβολικό. Ως εκ τούτου, έχουμε τη δυνατότητα σχηματισμού της βραχείας ακριβούς ακολουθίας $0 \to Q \xrightarrow{f} Q' \xrightarrow{g} Q'/\mathrm{Im}(f) \to 0$.
φυσικός επιμ.
Επειδή αυτή διασπάται (εξ υποθέσεως) στον Q', ο $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g) \cong Q$ είναι ευθύς προσθετέος του Q' (πρβλ. θ. 2.1.13, σελ. 77).
(iii) ⇒ (i) Πρόκειται για την πρόταση 3.2.12, σελ. 134.
(iv) ⇔ (i) Πρόκειται για την πρόταση 3.2.10, σελ. 133.
(iv) ⇔ (v) Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.1.15, σελ. 125. □

3.2.16. Θεώρημα (Κριτήριο τού Baer). Ένας R-μόδιος M είναι εμβολικός εάν και μόνον εάν κάθε ομομορφισμός R-μοδίων $f: I \to M$ από ένα ιδεώδες I τού R στον M μπορεί να επεκταθεί σε έναν ομομορφισμό R-μοδίων $\hat{f}: R \to M$.

Απόδειξη: Βλ. J.J. Rotman: "An Introduction to Homological Algebra", Academic Press, 1979, Theorem 3.20, pp. 67-68. $\square$

3.2.17. Πόρισμα. Κάθε εμβολικός R-μόδιος (όπου R ακεραία περιοχή) είναι διαιρετός (πρβλ. άσκηση 12 τού 1ου φυλλαδίου).

Απόδειξη: Έστω M ένας εμβολικός R-μόδιος. Έστω $m \in M$ και $a \in R \smallsetminus \{0_R\}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $f: Ra \to M$, $f(ra) := rm$, $\forall r \in R$. Η f είναι ομομορφισμός R-μοδίων και διαθέτει (επί τη βάσει τού Θεωρήματος 3.2.16) μια επέκταση $\hat{f} \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$. Κατά συνέπειαν,

$$m = f(a) = \hat{f}(a) = \hat{f}(a \cdot 1_R) = a\,\underbrace{\hat{f}(1_R)}_{\substack{\| \\ m' \in M}},$$

κάτι που σημαίνει ότι ο M είναι όντως διαιρετός. $\square$

3.2.18. Σημείωση. (i) Όταν ο R είναι ΠΚΙ, τότε ισχύει και το αντίστροφο τού πορίσματος 3.2.17. (βλ. άσκηση 20 τού 5ου φυλλαδίου).

(ii) Όταν ο R είναι ακεραία περιοχή, τότε ένας R-μόδιος χωρίς στρέψη είναι εμβολικός εάν και μόνον εάν είναι διαιρετός (βλ. άσκηση 19 τού 5ου φυλλαδίου).

§ 3.3 Τανυστικό γινόμενο μοδίων

3.3.1 Ορισμός. 'Εστω ότι τα M, N, L είναι τρεις R-μόδιοι. Μια απεικόνιση $\varphi: M \times N \to L$ καλείται (R-)διγραμμική όταν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\varphi(r_1 m_1 + r_2 m_2, n) = r_1 \varphi(m_1, n) + r_2 \varphi(m_2, n)$,

(ii) $\varphi(m, r_1 n_1 + r_2 n_2) = r_1 \varphi(m, n_1) + r_2 \varphi(m, n_2)$,

για οιαδήποτε $r_1, r_2 \in R$, $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$. Συμβολισμός:

$$Bil_R(M,N;L) := \{\varphi: M \times N \to L \mid \varphi \text{ R-διγραμμική}\}.$$

3.3.2 Σχόλιο. Εάν οι M, L είναι δυο R-μόδιοι και $f \in Hom_R(M,L)$, τότε, ως γνωστόν (βλ. πρόταση 1.3.4 (ii),(iii)), ο πυρήνας $Ker(f)$ τού f είναι υπομόδιος τού M και η εικόνα $Im(f)$ τού f είναι υπομόδιος τού L. Από την άλλη μεριά, οι διγραμμικές απεικονίσεις $\beta \in Bil_R(M,N;L)$ ενδέχεται να μην διατηρούν πλήρως τη δομή τού μοδίου, υπό την έννοια τού ότι είναι δυνατόν τόσο το σύνολο $\{(m,n) \in M \times N \mid \beta(m,n) = 0_L\}$ όσο και το $Im(\beta) = \{\beta(m,n) \mid (m,n) \in M \times N\}$ μιας τέτοιας β να μην είναι υπομόδιοι.

3.3.3 Παραδείγματα. (i) Η απεικόνιση $\beta: R \times R \to R$, $\beta(r,s) = rs$, $\forall (r,s) \in R \times R$, είναι R-διγραμμική. Ωστόσο, εάν υποθέσουμε ότι ο R είναι ακεραία περιοχή, τότε το σύνολο

$$\{(r,s) \in R \times R \mid \beta(r,s) = 0_R\} = (R \times \{0_R\}) \cup (\{0_R\} \times R)$$

δεν είναι υπομόδιος τού $R \times R$. (Προφανώς, το $(1_R, 0_R) + (0_R, 1_R) = (1_R, 1_R)$ δεν ανήκει σε αυτό το σύνολο.)

(ii) 'Εστω K ένα σώμα. Η απεικόνιση $\beta: K^2 \times K^2 \to K^4$, όπου

$$\beta((a,b),(c,d)) := (ab, cd, ad, ad-bc) \; \forall ((a,b),(c,d)) \in K^2 \times K^2,$$

είναι διγραμμική. Η εικόνα $Im(\beta)$ τής β περιέχει τα στοιχεία τής βάσεως

$$X := \{(1_K, 0_K, 0_K, 0_K), (0_K, 1_K, 0_K, 0_K), (0_K, 0_K, 1_K, 1_K), (0_K, 0_K, 0_K, 1_K)\}$$

τού K-διανυσματικού χώρου K^4, διότι

$$\beta^{-1}((1_K, 0_K, 0_K, 0_K)) = \{((\lambda, \lambda^{-1}), (0_K, 0_K)) \mid \lambda \in K \setminus \{0_K\}\},$$

$$\beta^{-1}((0_K, 1_K, 0_K, 0_K)) = \{((0_K, 0_K), (\lambda, \lambda^{-1})) \mid \lambda \in K \setminus \{0_K\}\},$$

$$\beta^{-1}((0_K, 0_K, 1_K, 1_K)) = \{((\lambda, 0_K), (0_K, \lambda^{-1})) \mid \lambda \in K \setminus \{0_K\}\},$$

$$\beta^{-1}((0_K, 0_K, 0_K, 1_K)) = \{((0_K, \lambda), (-\lambda^{-1}, 0_K)) \mid \lambda \in K \setminus \{0_K\}\}.$$

Ωστόσο, $\beta^{-1}((0_K,0_K,1_K,0_K)) = \emptyset$, διότι οι εξισώσεις $ab=0_K$, $cd=0_K$, $ad=1_K$, $bc=1_K$ δεν διαθέτουν κοινές λύσεις $((a,b),(c,d))$ εντός του $K^2\times K^2$. Ως εκ τούτου, η εικόνα $\mathrm{Im}(\beta)$ της β δεν είναι υπόχωρος του K^4. (Εάν η $\mathrm{Im}(\beta)$ ήταν υπόχωρος του K-δ.χ. K^4, τότε $\mathrm{Im}(\beta)=\mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\beta))$ και $X \subseteq \mathrm{Im}(\beta) \subseteq K^4 \Rightarrow K^4=\mathrm{Lin}(X)\subseteq \mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\beta))\subseteq K^4$ $\Rightarrow \mathrm{Im}(\beta)=K^4$, πράγμα άτοπο, διότι $(0_K,0_K,1_K,0_K)\notin \mathrm{Im}(\beta)$.)

3.3.4. Σημείωση. Λόγω αυτής της "ιδιόρρυθμης" συμπεριφοράς των διγραμμικών απεικονίσεων, εάν μας δοθούν R-μόδιοι M,N, κατασκευάζουμε έναν "ειδικό" R-μόδιο W, καθώς και μια "ειδική" διγραμμική απεικόνιση $\varphi: M\times N \to W$ η οποία προσδιορίζει έναν ομομορφισμό (: R-γραμμική απεικόνιση) $\tilde{\beta}\in \mathrm{Hom}_R(W,Z)$ για κάθε $\beta \in \mathrm{Bil}_R(M,N;Z)$ (όπου Z τυχών R-μόδιος), ούτως ώστε η $\tilde{\beta}$ να περιγράφει ουσιώδεις ιδιότητες της β. Αυτό το ζεύγος (W,φ) καλείται "τανυστικό γινόμενο" των μοδίων M,N: πέραν του ότι πληροί την προαναφερθείσα "καθολική" συνθήκη, είναι και κατ' ουσίαν μονοσημάντως ορισμένο (βλ. 3.3.7 και 3.3.8).

3.3.5. Ορισμός. Έστω ότι οι M,N είναι δυο R-μόδιοι. Κάθε ζεύγος (W,φ) αποτελούμενο από έναν R-μόδιο W και μια διγραμμική απεικόνιση $\varphi: M\times N\to W$ καλείται *τανυστικό γινόμενο των M και N υπεράνω του R* όταν πληροί την ακόλουθη "καθολική" συνθήκη:

$\forall\, \beta\in \mathrm{Bil}_R(M,N;Z)$ (όπου Z τυχών R-μόδιος)
$\exists!\, \tilde{\beta}\in \mathrm{Hom}_R(W,Z)$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\beta"'] & W \arrow[d, dashed, "\tilde{\beta}"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, ήτοι

$$\beta(m,n)=\tilde{\beta}(\varphi(m,n)),\quad \forall (m,n)\in M\times N.$$

Η πρόταση 3.3.6 μας παρέχει δύο χρηστικές ιδιότητες για το ζεύγος (W,φ), οι οποίες, όταν ισχύουν από κοινού, ισοδυναμούν με την ως άνω καθολική συνθήκη. Εξάλλου, μέσω τού Θεωρήματος 3.3.10 αποδεικνύεται κατασκευαστικώς η ύπαρξη τανυστικού γινομένου για οιουσδήποτε R-μοδίους M και N. Προηγείται το Θεώρημα 3.3.7, το οποίο μας εγγυάται τη μοναδικότητά του "με ακρίβεια ισομορφισμού".

3.3.6. Πρόταση. Ένα ζεύγος (W,φ) αποτελούμενο από έναν R-μόδιο W και μια διγραμμική απεικόνιση $\varphi: M\times N\to W$ είναι ένα τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M και N εάν και μόνον εάν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\varphi)) = W$.

(ii) $\forall \beta\in \mathrm{Bil}_R(M,N;Z)\ \exists \tilde{\beta}\in \mathrm{Hom}_R(W,Z): \beta=\tilde{\beta}\circ\varphi$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω (W,φ) ένα τανυστικό γινόμενο των M,N. Το (ii) περιέχεται στον ορισμό 3.3.5. Για την απόδειξη τού (i) θεωρούμε τον $Z:=\mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\varphi))$ και τη διγραμμική απεικόνιση $\beta: M\times N\to Z$, $\beta(m,n):=\varphi(m,n)$, $\forall (m,n)\in M\times N$. Από την καθολική ιδιότητα τού 3.3.5 υπάρχει μοναδικός $\tilde{\beta}\in\mathrm{Hom}_R(W,Z)$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\beta"'] & W \arrow[d, bend left, dashed, "\tilde{\beta}"] \\ & Z \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ul, phantom, "\circlearrowleft"] \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. (Εδώ $i: Z\hookrightarrow W$ είναι η φυσική ένθεση.)

Άρα $\tilde{\beta}\circ\varphi=\beta \Rightarrow \underbrace{i\circ(\tilde{\beta}\circ\varphi)}_{\substack{\shortparallel\\ (i\circ\tilde{\beta})\circ\varphi}} = i\circ\beta=\varphi=\mathrm{Id}_W\circ\varphi \xRightarrow[\text{περιεχόμενη στον ορσ. 3.3.5}]{\text{μοναδικότητα τέτοιου ομομορφισμού}}$

$i\circ\tilde{\beta}=\mathrm{Id}_W \xRightarrow[\text{σελ.12}]{1.3.11}$ i επιρριψη, δηλαδή $\mathrm{Im}(i)=Z=W$.

($\Leftarrow$) Αρκεί να δείξουμε τη μοναδικότητα της $\tilde{\beta}$. Εάν υπάρχει $\tilde{\tilde{\beta}}\in\mathrm{Hom}_R(W,Z)$ με $\tilde{\tilde{\beta}}\circ\varphi=\beta$, τότε $\tilde{\tilde{\beta}}\circ\varphi=\tilde{\beta}\circ\varphi \Rightarrow \tilde{\tilde{\beta}}|_{\mathrm{Im}(\varphi)}=\tilde{\beta}|_{\mathrm{Im}(\varphi)} \underset{(i)}{\Rightarrow} \tilde{\tilde{\beta}}=\tilde{\beta}$. □

3.3.7. Θεώρημα (Το "μονοσήμαντο" τού τανυστικού γινομένου) Εάν τα (W,φ) και (W',φ') είναι δυο τανυστικά γινόμενα των R-μοδίων M και N, τότε υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος ισομορφισμός R-μοδίων $h: W\to W'$, ούτως ώστε να ισχύει: $\beta=\tilde{\beta}\circ\varphi$.

<u>Απόδειξη:</u> Από την καθολική συνθήκη 3.3.5 που πληρούν τα (W,φ), (W',φ')

$$\left\{\begin{array}{l} \exists!\ h\in \mathrm{Hom}_R(W,W'):\ h\circ\varphi=\varphi' \\ \exists!\ h'\in \mathrm{Hom}_R(W',W):\ h'\circ\varphi'=\varphi \end{array}\right\}$$

Επί τη βάσει του ακολούθου μεταθετικού διαγράμματος (όπου $Z:=W'$, $\beta:=\varphi'$, $\tilde{\beta}:=h$ στην πρώτη και $Z:=W$, $\beta:=\varphi$, $\tilde{\beta}:=h'$ στη δεύτερη περίπτωση.)

$$\begin{tikzcd} W & M\times N \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"] & W \arrow[dl, dashed, "\exists!h"] \\ & W' \arrow[ul, dashed, "\exists!h'"] & \end{tikzcd}$$

Άρα $\left\{\begin{array}{l} h'\circ h\circ\varphi=\varphi=\mathrm{Id}_W\circ\varphi \\ h'\circ h\in \mathrm{Hom}_R(W,W) \\ \mathrm{Id}_W\in \mathrm{Hom}_R(W,W) \end{array}\right\} \Longrightarrow h'\circ h=\mathrm{Id}_W,$

μοναδικότητα τέτοιου ομομορφισμού περιεχόμενη στον ορσ. 3.3.5

και (κατ' αναλογίαν) $h\circ h'=\mathrm{Id}_{W'}$. Αυτό σημαίνει ότι αμφότεροι οι h,h' είναι ισομορφισμοί R-μοδίων με $h'=h^{-1}$. $\square$

<u>3.3.8. Σημείωση:</u> (i) Εάν το (W,φ) είναι ένα τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M,N και $g: W\cong Z$ ένας ισομορφισμός R-μοδίων, τότε, με ανάλογη συλλογιστική, δείχνουμε ότι και το $(Z, g\circ\varphi)$ είναι ένα τανυστικό γινόμενο των M,N.
(ii) Κατ' ουσίαν, το Θεώρημα 3.3.7 μας πληροφορεί ότι ένα τανυστικό γινόμενο των M,N, εφόσον υπάρχει, είναι μονοσημάντως ορισμένο "μέχρις ισομορφισμού". Μάλιστα, όπως θα δούμε αργότερα στην ενότητα 3.7, στην ειδική περίπτωση κατά την οποία αμφότεροι οι M και N είναι ελεύθεροι και πεπερασμένως παραγόμενοι, υπάρχει και η δυνατότητα επιλογής ενός "καλού εκπροσώπου" από την κλάση των (ανά δύο ισομόρφων) ζευγών (W,φ) (βλ. σημείωση 3.7.23).

<u>3.3.9. Ορισμός</u> Έστω ότι οι M,N είναι R-μόδιοι. Θεωρούμε τον ελεύθερο R-μόδιο $R^{(M\times N)}$ με το σύνολο $\mathrm{Im}(\delta)=\{\delta_{(m,n)}\mid (m,n)\in M\times N\}$ ως βάση του, όπου δ η εμφυτευτική απεικόνιση

$$M\times N\ni(m,n)\longmapsto \delta(m,n):=\delta_{(m,n)}\in R^{(M\times N)}$$

με

$$M\times N\ni(x,y)\longmapsto \delta_{(m,n)}(x,y)=\begin{cases} 1_R, & \text{όταν } (m,n)=(x,y), \\ 0_R, & \text{όταν } (m,n)\neq(x,y). \end{cases}$$

(Βλ. 1.6.3, 1.6.4 και 1.6.5, σελ. 39–41.)

Εν συνεχεία, ορίζουμε τον υπομόδιο $\Xi_{M,N}(R)$ τού $R^{(M\times N)}$ τον παραγόμενο από τα στοιχεία τής μορφής

(i) $\delta_{(\lambda m+\mu m',n)}-\lambda\delta_{(m,n)}-\mu\delta_{(m',n)}$, $(m,m',n)\in M\times M\times N$, $(\lambda,\mu)\in R\times R$, και

(ii) $\delta_{(m,\lambda n+\mu n')}-\lambda\delta_{(m,n)}-\mu\delta_{(m,n')}$, $(m,n,n')\in M\times N\times N$, $(\lambda,\mu)\in R\times R$,

και συμβολίζουμε ως $\pi=\pi_{\Xi_{M,N}(R)}: R^{(M\times N)}\longrightarrow R^{(M\times N)}/\Xi_{M,N}(R)$ τον φυσικό επιμορφισμό.

Τώρα πλέον έχουμε στη διάθεσή μας όλα εκείνα τα "τεχνικά μέσα" τα οποία θα απαιτηθούν για την κατασκευή τανυστικού γινομένου για οιουσδήποτε R-μοδίους M,N.

3.3.10 Θεώρημα. (Ύπαρξη τανυστικού γινομένου). Για οιουσδήποτε R-μοδίους M,N, το ζεύγος (W,φ), όπου

$$\boxed{W:=R^{(M\times N)}/\Xi_{M,N}(R)\,,\quad \varphi=\pi\circ\delta,}$$

αποτελεί τανυστικό γινόμενο των M και N.

Απόδειξη: Αυτή θα παρουσιασθεί σε τρία διαδοχικά βήματα.

1ο βήμα. Η απεικόνιση $\varphi=\pi\circ\delta: M\times N\longrightarrow W$ είναι διγραμμική. Πράγματι· για $r_1,r_2\in R$, $(m_1,m_2,n)\in M\times M\times N$, έχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(r_1m_1+r_2m_2,n)=\delta_{(r_1m_1+r_2m_2,n)}+\Xi_{M,N}(R)\\ r_1\varphi(m_1,n)+r_2\varphi(m_2,n)=(r_1\delta_{(m_1,n)}+r_2\delta_{(m_2,n)})+\Xi_{M,N}(R)\\ \text{Εξ ορισμού (3.3.9)}:\ \delta_{(r_1m_1+r_2m_2,n)}-(r_1\delta_{(m_1,n)}+r_2\delta_{(m_2,n)})\in\Xi_{M,N}(R)\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

$\varphi(r_1m_1+r_2m_2,n)=r_1\varphi(m_1,n)+r_2\varphi(m_2,n)$. Παρομοίως, για $(m,n_1,n_2)\in M\times N\times N$ έχουμε $\varphi(m,r_1n_1+r_2n_2)=r_1\varphi(m,n_1)+r_2\varphi(m,n_2)$.

2ο βήμα. Έστω Z τυχών R-μόδιος και έστω $\beta\in Bil_R(M,N;Z)$. Κατόπιν διπλής εφαρμογής τής "καθολικής συνθήκης" που πληροί ο ελεύθερος R-μόδιος $(R^{(M\times N)},\delta)$ επί τού $M\times N$ (βλ. 1.6.1 και 1.6.5)

[για τις απεικονίσεις $\varphi: M\times N \to W$ και $\beta: M\times N \to Z$]
λαμβάνουμε δυο (μονοσημάντως ορισμένους) ομομορφισμούς $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_R(R^{(M\times N)}, W)$ και $\bar{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(R^{(M\times N)}, Z)$ με $\varphi = \bar{\varphi}\circ\delta$ και $\beta=\bar{\beta}\circ\delta$, αντιστοίχως.
Σημειωτέον ότι $\bar{\varphi} = \pi$ (λόγω της μοναδικότητας τού $\bar{\varphi}$ με αυτήν την ιδιότητα, καθόσον $\varphi = \pi\circ\delta$ εξ ορισμού). Ως εκ τούτου, προκύπτει το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & W & \\
 & M\times N \arrow[u, "\varphi"] \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
R^{(M\times N)} \arrow[uur, "\bar{\varphi}=\pi"] \arrow[rr, "\bar{\beta}"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

[Προσοχή! Η διγραμμικότητα της β ισοδυναμεί με τη συνθήκη: $\mathcal{I}_{M,N}(R) \subseteq \mathrm{Ker}(\bar{\beta})$]

3ο βήμα. Εφαρμόζοντας την "καθολική συνθήκη" 1.4.6 για τον πηλικομόδιο $W = R^{(M\times N)}/\mathcal{I}_{M,N}(R)$ στον $\bar{\beta}\in \mathrm{Hom}_R(R^{(M\times N)},Z)$ λαμβάνουμε έναν (μονοσημάντως ορισμένο) ομομορφισμό $\tilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(W,Z)$: $\tilde{\beta}\circ\pi = \tilde{\beta}\circ\bar{\varphi} = \bar{\beta}$.

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[ddr, dashed, "\tilde{\beta}"] & \\
 & M\times N \arrow[u, "\varphi"] \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
R^{(M\times N)} \arrow[uur, "\bar{\varphi}=\pi"] \arrow[rr, "\bar{\beta}"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Επειδή $\tilde{\beta}\circ\underbrace{\bar{\varphi}\circ\delta}_{\varphi} = \underbrace{\bar{\beta}\circ\delta}_{\beta}$ έχουμε $\tilde{\beta}\circ\varphi=\beta$.

Για να δείξουμε ότι ο $\tilde{\beta}$ είναι μονοσημάντως ορισμένος (και ως προς αυτήν την ιδιότητα) αρκεί (βάσει της προτάσεως 3.3.6) να δείξουμε ότι $\mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\varphi)) = W$.
Προφανώς, $\mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{Lin}(\varphi(M\times N)) = \mathrm{Lin}(\pi(\delta(M\times N))$

$$\underset{\pi \text{ επιμορφισμός}}{=\!=\!=} \pi(\mathrm{Lin}(\delta(M\times N)) = \pi(\mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\delta))) \underset{(\text{Λήμμα } 1.6.2 \text{ και Θεώρημα } 1.6.5)}{=\!=\!=} \pi(R^{(M\times N)}) = W. \ \square$$

3.3.11 Ορισμός Δοθέντων δυο R-μοδίων M και N κατασκευάζουμε το ζεύγος (W,φ), όπου $W := R^{(M\times N)}/\mathcal{I}_{M,N}(R)$ και $\varphi := \pi\circ\delta$, και χρησιμοποιούμε τον (κλασικό) συμβολισμό $\boxed{M\otimes_R N =: W}$.

Δυνάμει τού θεωρήματος 3.3.7 και τής σημειώσεως 3.3.8 μπορούμε, αναφερόμενοι από τούδε και στο εξής στο $(M\otimes_R N, \varphi)$, να ομιλούμε για <u>**το** τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M και N</u>. Επίσης, ονομάζουμε την φ <u>τανυστική απεικόνιση</u> (από το $M\times N$ στο $M\otimes_R N$).

<u>3.3.12 Ορισμός.</u> Τα στοιχεία τού υποκειμένου συνόλου W τού τανυστικού γινομένου $(W := M\otimes_R N, \varphi)$ ονομάζονται <u>τανυστές</u>. Ιδιαιτέρως, κάθε τανυστής τής μορφής $\boxed{m\otimes n := \varphi(m,n)\in \mathrm{Im}(\varphi), \text{ για κάποια } m\in M,\ n\in N,}$ καλείται <u>αποσυντιθέμενος τανυστής τού W.</u>

<u>3.3.13. Πόρισμα.</u> Έστω $(W = M\otimes_R N, \varphi)$ το τανυστικό γινόμενο των M και N. Τότε ισχύουν οι ακόλουθοι υπολογιστικοί κανόνες για τους αποσυντιθέμενους τανυστές τού W:

(i) $(m_1+m_2)\otimes n = (m_1\otimes n) + (m_2\otimes n)$, για κάθε $m_1, m_2\in M$ και κάθε $n\in N$.

(ii) $m\otimes(n_1+n_2) = (m\otimes n_1) + (m\otimes n_2)$, για κάθε $m\in M$ και κάθε $n_1, n_2\in N$.

(iii) $r(m\otimes n) = (rm)\otimes n = m\otimes (rn)$, για κάθε $m\in M, n\in N$ και κάθε $r\in R$.

(iv) $0_M\otimes n = m\otimes 0_N = 0_W$, για κάθε $m\in M$ και κάθε $n\in N$.

<u>Απόδειξη:</u> Επειδή $m\otimes n = \varphi(m,n)$, όλοι οι αναγραφόμενοι υπολογιστικοί κανόνες έπονται άμεσα από τη διγραμμικότητα τής $\varphi: M\times N\to W$. □

<u>3.3.14 Πόρισμα</u> Έστω $(W = M\otimes_R N, \varphi)$ το τανυστικό γινόμενο των M και N. Τότε για κάθε τανυστή $w\in W$ υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $m_j\in M$, $n_j\in N$ και $r_j\in R$, $j\in\{1,\dots,k\}$, $k\in\mathbb{N}$, τέτοια ώστε να ισχύει η ισότητα

$$w = \sum_{j=1}^{k} r_j(m_j\otimes n_j).$$

<u>Απόδειξη:</u> Επειδή $\mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\varphi)) = W$ (κατά την πρόταση 3.3.6), κάθε στοιχείο τού W γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός πεπερασμένου πλήθους αποσυντιθέμενων τανυστών. □

<u>3.3.15. Πόρισμα</u> Έστω $W = M\otimes_R N$. Τότε κάθε $w\in W$ γράφεται ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους αποσυντιθέμενων τανυστών.

<u>Απόδειξη:</u> Η παράσταση $w = \sum_{j=1}^{k} r_j(m_j \otimes n_j)$ ενός στοιχείου $w \in W$ μπορεί (κάνοντας χρήση του υπολογιστικού κανόνα 3.3.13 (iii)) να γραφεί ως
$$w = \sum_{j=1}^{k} (r_j m_j) \otimes n_j = \sum_{j=1}^{k} m_j \otimes r_j n_j,$$ απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

<u>3.3.16. Σημείωση.</u> (i) Εξ όσων αναφέρονται στην απόδειξη του 3.3.15 η παράσταση ενός τανυστή $w \in W$ ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους αποσυντεθέμενων τανυστών <u>δεν είναι κατ' ανάγκην μονοσημάντως ορισμένη.</u>
(ii) Θα πρέπει, επιπροσθέτως, να επισημανθεί ότι –εν γένει– είναι δυνατή <u>η ύπαρξη μη αποσυντεθέμενων τανυστών</u> $w \in W$. Για ένα απλό παράδειγμα βλ. 3.4.8., σελ. 152. (Για ένα επιπρόσθετο παράδειγμα, βλ. άσκηση 18(vi) του 6ου φυλλαδίου.)

<u>3.3.17. Παραδείγματα.</u> Στο σημείο αυτό δίνουμε κάποια πρώτα "απλά" παραδείγματα τανυστικών γινομένων $M \otimes_R N$ δυο R-μοδίων M και N.
(i) Εάν $R = \mathbb{Z}$, $M = N = \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, τότε $\boxed{\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2}$.
Πράγματι· το καρτεσιανό γινόμενο των M και N είναι το
$$\{([0]_2,[0]_2), ([0]_2,[1]_2), ([1]_2,[0]_2), ([1]_2,[1]_2)\}.$$
Επομένως ο $R^{(M\times N)}$ είναι ένας ελεύθερος $\mathbb{Z}$-μόδιος βαθμίδας 4 με το $\{\delta_{([0]_2,[0]_2)}, \delta_{([0]_2,[1]_2)}, \delta_{([1]_2,[0]_2)}, \delta_{([1]_2,[1]_2)}\}$ ως βάση του.
Δεδομένου ότι $2[k]_2 = [2k]_2 = [0]_2$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, έχουμε
$$\begin{cases} \delta_{([0]_2,[0]_2)} - 0\cdot\delta_{([0]_2,[0]_2)} = \delta_{([0]_2,[0]_2)} \in \Xi_{M,N}(R), \\ \delta_{([0]_2,[1]_2)} - 0\cdot\delta_{([0]_2,[1]_2)} = \delta_{([0]_2,[1]_2)} \in \Xi_{M,N}(R), \\ \delta_{([1]_2,[0]_2)} - 0\cdot\delta_{([1]_2,[0]_2)} = \delta_{([1]_2,[0]_2)} \in \Xi_{M,N}(R), \text{ και} \\ 2\delta_{([k]_2,[k']_2)} = \delta_{([0]_2,[0]_2)} \in \Xi_{M,N}(R),\ \forall ([k]_2,[k']_2) \in \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2. \end{cases}$$

Ωστόσο, όπως διαπιστώνει κανείς εύκολα, $\delta_{([1]_2,[1]_2)} \notin \Xi_{M,N}(R)$, οπότε
$$M \otimes_R N = R^{(M\times N)}/\Xi_{M,N}(R) = \{\Xi_{M,N}(R), \delta_{([1]_2,[1]_2)} + \Xi_{M,N}(R)\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

(ii) Το τανυστικό γινόμενο δυο μη τετριμμένων μοδίων δεν είναι κατ' ανάγκην μη τετριμμένο (πρβλ. 3.4.10, 3.4.11). Π.χ. για $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_p$, $N = \mathbb{Z}_q$, όπου p, q δυο <u>σχετικώς πρώτοι</u> φυσικοί αριθμοί ≥ 2, έχουμε

$$\boxed{\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_q = \{0\}.}$$

Τούτο έπεται από το ότι $[k]_p \otimes [\ell]_q = 0_W$, $\forall ([k]_p, [\ell]_q) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, σε συνδυασμό με το πόρισμα 3.3.15. Η εν λόγω ισότητα αποδεικνύεται ως εξής: Επειδή $\exists (\mu, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: \mu p + \nu q = 1$, έχουμε

$$[k]_p \otimes [\ell]_q = 1 \cdot ([k]_p \otimes [\ell]_q) = (\mu p + \nu q)([k]_p \otimes [\ell]_q)$$
$$= \mu p ([k]_p \otimes [\ell]_q) + \nu q ([k]_p \otimes [\ell]_q)$$
$$\overset{3.3.13(iii)}{=\!=\!=} (\underbrace{\mu p [k]_p}_{\underset{[0]_p}{\shortparallel}} \otimes [\ell]_q) + ([k]_p \otimes \underbrace{\nu q [\ell]_q}_{\underset{[0]_q}{\shortparallel}}) = ([0]_p \otimes [\ell]_q) + ([k]_p \otimes [0]_q)$$

$$\overset{3.3.13(iv)}{=\!=\!=} 0_W + 0_W = 0_W.$$

Σημειωτέον ότι, γενικότερα, για οιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς κ, λ (βλ. άσκηση 5(i) τού 6ου φυλλαδίου) υφίσταται ένας ισομορφισμός

$$\boxed{(\mathbb{Z}/\kappa\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/\lambda\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\mu\kappa\delta(\kappa,\lambda)\mathbb{Z}.}$$

(iii) Εάν ο M είναι ένας ελεύθερος R-πρότυπος, τότε για κάθε μη κενό σύνολο J, ισχύει

$$\boxed{M^{(J)} \cong R^{(J)} \otimes M.}$$

Πράγματι· η απεικόνιση $\varphi: R^{(J)} \times M \longrightarrow M^{(J)}$, $\varphi((r_j)_{j\in J}, m) := (r_j m)_{j \in J}$, είναι διγραμμική και για κάθε $(m_j)_{j\in J} \in M^{(J)}$ έχουμε

$$(m_j)_{j\in J} = \sum_{j\in J} \varphi(e_j, m_j),$$

όπου $(e_j)_{j\in J}$ η συνήθης βάση τού $R^{(J)}$, οπότε $\mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\varphi)) = M^{(J)}$. Εξάλλου, εάν ο Z είναι τυχών R-πρότυπος και $\beta \in \mathrm{Bil}_R(R^{(J)}, M; Z)$, τότε η απεικόνιση $\tilde{\beta}: M^{(J)} \to Z$, $\tilde{\beta}((m_j)_{j\in J}) := \sum_{j\in J} \beta(e_j, m_j)$ αποτελεί έναν ομομορφισμό R-προτύπων για τον οποίον ισχύει:

$$\tilde{\beta}(\varphi((r_j)_{j\in J}, m)) = \tilde{\beta}((r_j m)_{j\in J}) = \sum_{j\in J} r_j \beta(e_j, m) = \sum_{j\in J} \beta(r_j e_j, m)$$

$= \beta(((r_j)_{j\in J}, m))$, $\forall ((r_j)_{j\in J}, m) \in R^{(J)} \times M$. Ως εκ τούτου, το ζεύγος $(M^{(J)}, \varphi)$

είναι (μέχρις ισομορφισμού) το τανυστικό γινόμενο των $R^{(J)}$ και M (βλ. 3.3.6 και 3.3.7). Προφανώς, όταν $k \in \mathbb{N}$ και $J = \{1, \ldots, k\}$ λαμβάνουμε

$$\boxed{M^k = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{k \text{ φορές}} \cong R^k \otimes M}$$

(iv) Ο R-μόδιος $\mathrm{Mat}_{k\times \ell}(R)$ (βλ. 1.1.2 (vi)) όλων των $(k\times\ell)$-πινάκων με τις εγγραφές τους ειλημμένες από τον R μπορεί να ιδωθεί ως το τανυστικό γινόμενο των R^k και R^ℓ, καθότι

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{k\times\ell}(R) \cong \mathrm{Mat}_{k\times 1}(R) \otimes_R \mathrm{Mat}_{1\times \ell}(R) \cong R^k \times R^\ell.}$$

Πράγματι· η απεικόνιση

$$\psi : \mathrm{Mat}_{k\times 1}(R) \times \mathrm{Mat}_{1\times\ell}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{k\times\ell}(R)$$

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_\ell \end{pmatrix}^T\right) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_\ell \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_\ell \\ \vdots & & \\ x_ky_1 & \cdots & x_ky_\ell \end{pmatrix}$$

είναι διγραμμική και για κάθε πίνακα $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{k\times\ell}(R)$ έχουμε

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{k} \psi\left(\mathbf{E}_j^{(1)}, (a_{j1}\, a_{j2} \cdots a_{j\ell})\right),$$

όπου $\left\{ \mathbf{E}_j^{(1)} := \begin{pmatrix} \delta_{j1} \\ \vdots \\ \delta_{jk} \end{pmatrix}, 1 \le j \le k \right\}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathrm{Mat}_{k\times 1}(R)$ (με το $\delta_{j\lambda}$ να εκφράζει -ως είθισται- το σύμβολο του Kronecker), οπότε $\mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\psi)) = \mathrm{Mat}_{k\times\ell}(R)$. Εξάλλου, εάν η $\{\mathbf{E}_j^{(2)} = (\delta_{j1} \cdots \delta_{j\ell}) \mid 1 \le j \le \ell\}$ είναι η συνήθης βάση του (ελευθέρου) R-μοδίου $\mathrm{Mat}_{1\times\ell}(R)$, η οικογένεια πινάκων $\left(\mathbf{E}_{j\lambda} := \psi(\mathbf{E}_j^{(1)}, \mathbf{E}_\lambda^{(2)})\right)_{1\le j\le k,\, 1\le\lambda\le\ell}$ είναι η συνήθης βάση του (ελευθέρου) R-μοδίου $\mathrm{Mat}_{k\times\ell}(R)$. Εάν λοιπόν ο Z είναι τυχών R-μόδιος και $\beta \in \mathrm{Bil}_R(\mathrm{Mat}_{k\times 1}(R), \mathrm{Mat}_{1\times\ell}(R); Z)$, τότε η απεικόνιση $\tilde{\beta} : \mathrm{Mat}_{k\times\ell}(R) \to Z$, $\tilde{\beta}(\mathbf{E}_{j\lambda}) := \beta(\mathbf{E}_j^{(1)}, \mathbf{E}_\lambda^{(2)})$, $1 \le j \le k$, $1 \le \lambda \le \ell$, αποτελεί έναν ομομορφισμό R-μοδίων με $\tilde{\beta} \circ \psi = \beta$. Άρα το ζεύγος $(\mathrm{Mat}_{k\times\ell}(R), \psi)$ είναι (μέχρις ισομορφισμού) το τανυστικό γινόμενο των $\mathrm{Mat}_{k\times 1}(R) \cong R^k$ και $\mathrm{Mat}_{1\times\ell} \cong R^\ell$ το οριζόμενο υπεράνω του R.

[Για μια γενίκευση αυτού του παραδείγματος, βλ. άσκηση 13 του 6ου φυλλαδίου]

§ 3.4 Κύριες ιδιότητες τού τανυστικού γινομένου

Για τη διευκόλυνση των υπολογισμών που απαιτούνται για τον προσδιορισμό τού τανυστικού γινομένου δυο δοθέντων R-μοδίων παρατίθενται οι κύριες ιδιότητες τού "$\otimes_R$".

3.4.1. Θεώρημα (Μεταθετικότητα τού "$\otimes_R$"). Για οιουσδήποτε R-μοδίους M και N υφίσταται ο ακόλουθος ισομορφισμός R-μοδίων:

$$\boxed{M\otimes_R N \cong N\otimes_R M}$$

ο οποίος επάγεται από την απεικόνιση

$$M\otimes_R N \ni m\otimes n \longmapsto n\otimes m \in N\otimes_R M.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα τανυστικά γινόμενα $(W = M\otimes_R N, \varphi)$ και $(W' = N\otimes_R M, \varphi')$. Η απεικόνιση

$$\beta : M\times N \longrightarrow N\otimes_R M, \quad (m,n) \longmapsto \beta(m,n) := n\otimes m = \varphi'(n,m)$$

είναι διγραμμική. Άρα $\exists!\ \tilde{\beta}\in \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, N\otimes_R M)$:

$$\tilde{\beta}(\varphi(m,n)) = \tilde{\beta}(m\otimes n) = \beta(m,n) = n\otimes m, \quad \forall (m,n)\in M\times N.$$

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\beta"'] & M\otimes_R N = W \arrow[d, dashed, "\tilde{\beta}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & N\otimes_R M\ (=:Z) \end{tikzcd}$$

Επίσης, η απεικόνιση

$$\gamma : N\times M \longrightarrow M\otimes_R N, \quad (n,m) \longmapsto \gamma(n,m) := m\otimes n = \varphi(m,n)$$

είναι διγραμμική. Άρα $\exists!\ \tilde{\gamma}\in \mathrm{Hom}_R(N\otimes_R M, M\otimes_R N)$:

$$\tilde{\gamma}(\varphi'(n,m)) = \tilde{\gamma}(n\otimes m) = \gamma(n,m) = m\otimes n, \quad \forall (m,n)\in M\times N.$$

$$\begin{tikzcd} N\times M \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[dr, "\gamma"'] & N\otimes_R M = W' \arrow[d, dashed, "\tilde{\gamma}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & M\otimes_R N\ (=:Z) \end{tikzcd}$$

Προφανώς,

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\beta}\circ\tilde{\gamma}(\varphi'(n,m)) = \tilde{\beta}\circ\tilde{\gamma}(n\otimes m) = \tilde{\beta}(m\otimes n) = \varphi'(n,m) \\ \tilde{\gamma}\circ\tilde{\beta}(\varphi(m,n)) = \tilde{\gamma}\circ\tilde{\beta}(m\otimes n) = \tilde{\gamma}(n\otimes m) = \varphi(m,n) \end{array}\right\} \forall (m,n)\in M\times N$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{\beta}\circ\tilde{\gamma}\,|_{\mathrm{Im}(\varphi')} = \mathrm{Id}_{W'}|_{\mathrm{Im}(\varphi')} \\ \tilde{\gamma}\circ\tilde{\beta}\,|_{\mathrm{Im}(\varphi)} = \mathrm{Id}_{W}|_{\mathrm{Im}(\varphi)} \end{array}\right\} \underset{\left(\begin{array}{l}\mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\varphi)) = W \\ \mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\varphi')) = W'\end{array}\right)}{\overset{3.3.6}{\Longrightarrow}} \left\{\begin{array}{l} \tilde{\beta}\circ\tilde{\gamma} = \mathrm{Id}_{W'} \\ \tilde{\gamma}\circ\tilde{\beta} = \mathrm{Id}_{W} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \tilde{\beta},\tilde{\gamma}\ \text{ισο-} \\ \text{μορφισμοί} \\ \text{με } \tilde{\gamma} = \tilde{\beta}^{-1} \end{array}\right\}$$

□

3.4.2. Σημείωση. Η "μεταθετικότητα" αυτή ισχύει για R-μοδίους με "ακρίβεια ισομορφισμού". Ωστόσο, όταν $M=N$ και $m_1, m_2 \in M$, οι αποσυντιθέμενοι τανυστές $m_1 \otimes m_2$ και $m_2 \otimes m_1$ τού $M \otimes_R M$ δεν είναι κατ' ανάγκην ίσοι (δηλαδή ο υφιστάμενος ισομορφισμός δεν είναι κατ' ανάγκην η ταυτοτική απεικόνιση).

3.4.3. Θεώρημα. Για οιονδήποτε R-μόδιο M υφίστανται οι ισομορφισμοί:

$$\boxed{R \otimes_R M \cong M \otimes_R R \cong M}$$

Απόδειξη: Ο πρώτος ισομορφισμός αποδείχθηκε στο θεώρημα 3.4.1.
Η απεικόνιση $\beta : M \times R \to M$, $\beta(m,r) := rm$, $\forall (m,r) \in M \times R$, είναι διγραμμική. Ως εκ τούτου, εάν η φ είναι η τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R R$, $\exists ! \tilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R R, M) : \tilde{\beta} \circ \varphi = \beta$. Έστω $\beta' : M \to M \otimes_R R$, $\beta'(m) := m \otimes 1_R$, $\forall m \in M$.

$$\begin{tikzcd} M \times R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\beta"'] & M \otimes_R R \arrow[d, dashed, "\tilde{\beta}", bend right] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & M\ (=: Z) \arrow[u, bend right, "\beta'"'] \end{tikzcd}$$

Η β' είναι προφανώς ομομορφισμός R-μοδίων και

$$\tilde{\beta}(\beta'(m)) = \tilde{\beta}(m \otimes 1_R) = \tilde{\beta}(\varphi(m, 1_R)) = \beta(m, 1_R) = 1_R \cdot m = m, \ \forall m \in M \Rightarrow \tilde{\beta} \circ \beta' = \mathrm{Id}_M,$$

$$\beta'(\tilde{\beta}(\varphi(m,r))) = \beta'(rm) = (rm) \otimes 1_R \underset{3.3.13(iii)}{=\!=} m \otimes r = \varphi(m,r), \ \forall (m,r) \in M \times R,$$

$$\left(\text{οπότε } \beta' \circ \tilde{\beta}|_{\mathrm{Im}(\varphi)} = \mathrm{Id}_{M \otimes_R R}|_{\mathrm{Im}(\varphi)} \underset{\substack{\mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\varphi)) = M \otimes_R R \\ (3.3.6)}}{\Longrightarrow} \beta' \circ \tilde{\beta} = \mathrm{Id}_{M \otimes_R R}\right).$$

Κατά συνέπειαν, οι $\tilde{\beta}$, β' είναι ισομορφισμοί με $\tilde{\beta}^{-1} = \beta'$. □

3.4.4. Θεώρημα (Προσεταιριστικότητα τού "$\otimes_R$") Για οιουσδήποτε R-μοδίους L, M, N υφίσταται ο ακόλουθος ισομορφισμός R-μοδίων:

$$\boxed{(L \otimes_R M) \otimes_R N \cong L \otimes_R (M \otimes_R N)}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τα τανυστικά γινόμενα $(W = L \otimes_R M, \varphi)$, $(U = (L \otimes_R M) \otimes_R N, \psi)$ και $(U' = L \otimes_R (M \otimes_R N), \psi')$. Παγιώνοντας ένα $n \in N$ διαπιστώνουμε (μέσω τού πορίσματος 3.3.13) ότι η απεικόνιση

$\beta_n: L \times M \longrightarrow U$, $\beta_n(l,m) := l\otimes(m\otimes n)$, $\forall (l,m)\in L\times M$,
είναι διγραμμική ($\beta_n \in Bil_R(L,M;U')$). Από τον ορισμό 3.3.5 τού τανυστικού γινομένου (W,φ) διασφαλίζεται η ύπαρξη ενός μονοσημάντως ορισμένου ομομορφισμού $\tilde{\beta}_n \in Hom_R(W,U')$ με την ιδιότητα: $\tilde{\beta}_n \circ \varphi = \beta_n$.

$$\begin{tikzcd} L\times M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\beta_n"'] & W \arrow[d, dashed, "\tilde{\beta}_n"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & U' \end{tikzcd}$$

Προφανώς, $\tilde{\beta}_n(\varphi(l,m)) = \tilde{\beta}_n(l\otimes m) = \beta_n(l,m) = l\otimes(m\otimes n)$, $\forall (l,m)\in L\times M$.
Επιπροσθέτως, λόγω των ισχυόντων υπολογιστικών κανόνων (βλ. πόρισμα 3.3.13), και η απεικόνιση $\gamma: W\times N \longrightarrow U'$, η οριζόμενη επί τού συνόλου των αποσυντιθέμενων τανυστών τού W μέσω τού τύπου

$$\gamma((l\otimes m),n)) := \beta_n(l,m) = l\otimes(m\otimes n),\quad \forall n\in N,$$

είναι διγραμμική. Από τον ορισμό 3.3.5 τού τανυστικού γινομένου (U,ψ)
$\exists!\ \tilde{\gamma}\in Hom_R(U,U')$: $\tilde{\gamma}\circ\psi = \gamma$.

$$\begin{tikzcd} W\times N \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & U \arrow[d, dashed, "\tilde{\gamma}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & U' \end{tikzcd}$$

Προφανώς, $\overset{\tilde{\gamma}((l\otimes m)\otimes n)}{\overset{\parallel}{\tilde{\gamma}(\psi(\varphi(l,m),n))}} = \tilde{\gamma}(\psi(l\otimes m, n)) = \gamma((l\otimes m),n) = \beta_n(l,m)$
$= l\otimes(m\otimes n)$, για οιαδήποτε $(l,m,n)\in L\times M\times N$.
Παρομοίως, είναι δυνατός ο προσδιορισμός μιας διγραμμικής απεικονίσεως $\varepsilon: L\times(M\otimes_R N)\longrightarrow U$, για την οποία $\exists!\ \tilde{\varepsilon}\in Hom_R(U',U)$: $\tilde{\varepsilon}\circ\psi' = \varepsilon$,

$$\begin{tikzcd} L\times(M\otimes_R N) \arrow[r, "\psi'"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & U' \arrow[d, dashed, "\tilde{\varepsilon}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & U \end{tikzcd}$$

με $\tilde{\varepsilon}(l\otimes(m\otimes n)) = (l\otimes m)\otimes n$, $\forall (l,m,n)\in L\times M\times N$.
Επειδή

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{\varepsilon}\circ\tilde{\gamma}\,|_{Im(\psi)} = Id_U|_{Im(\psi)} \\ \tilde{\gamma}\circ\tilde{\varepsilon}\,|_{Im(\psi')} = Id_{U'}|_{Im(\psi')} \end{array}\right\} \underset{\left(\begin{array}{l} Lin(Im(\psi)) = U \\ Lin(Im(\psi')) = U' \end{array}\right)}{\overset{3.3.6}{\Longrightarrow}} \left\{\begin{array}{l} \tilde{\varepsilon}\circ\tilde{\gamma} = Id_U \\ \tilde{\gamma}\circ\tilde{\varepsilon} = Id_{U'} \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow$ $\tilde{\gamma}, \tilde{\varepsilon}$ ισομορφισμοί R-μοδίων με $\tilde{\gamma}^{-1} = \tilde{\varepsilon}$. $\square$

3.4.5. Θεώρημα (Επιμεριστικότητα των "$\oplus$" και "$\otimes_R$"). Για οιεσδήποτε οικογένειες R-μοδίων $(M_j)_{j\in J}$ και $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ υφίσταται ο ακόλουθος ισομορφισμός R-μοδίων:

$$\boxed{\Big(\bigoplus_{j\in J} M_j\Big)\otimes_R\Big(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda\Big)\cong\bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda}(M_j\otimes_R N_\lambda)}$$

Απόδειξη: Θέτουμε $W:=\bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda}(M_j\otimes_R N_\lambda)$, $M:=\bigoplus_{j\in J} M_j$ και $N:=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$, και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi: M\times N\longrightarrow W,\quad \varphi((m_j)_{j\in J},(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}):=((m_j\otimes n_\lambda)_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda})$$

Η φ είναι προφανώς διγραμμική. Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι το ζεύγος (W,φ) πληροί τη συνθήκη 3.3.5 τού τανυστικού γινομένου (πρβλ. 3.3.7). Έστω Z τυχών R-μόδιος και έστω $\beta\in Bil_R(M,N;Z)$. Ας συμβολίσουμε ως $in_j^M: M_j\hookrightarrow M$, $j\in J$, $in_\lambda^N: N_\lambda\hookrightarrow N$, $\lambda\in\Lambda$, $in_{j,\lambda}^W: M_j\otimes_R N_\lambda\hookrightarrow W$, $(j,\lambda)\in J\times\Lambda$, τις φυσικές ενθέσεις καθενός προσθετέου εντός των ευθέων αθροισμάτων M, N και W, αντιστοίχως, και ως $\varphi_{j,\lambda}: M_j\times N_\lambda\longrightarrow M_j\otimes_R N_\lambda$ την τανυστική απεικόνιση τού $M_j\otimes_R N_\lambda$, για κάθε $(j,\lambda)\in J\times\Lambda$. Εφαρμόζοντας την καθολική συνθήκη 3.3.5 που πληρούται από το $(M_j\otimes_R N_\lambda,\varphi_{j,\lambda})$ για τη διγραμμική απεικόνιση $\beta_{j,\lambda}:=\beta\circ(in_j^M\times in_\lambda^N)\in Bil_R(M_j,N_\lambda;Z)$ λαμβάνουμε έναν μονοσημάντως ορισμένο $\widetilde{\beta}_{j,\lambda}\in Hom_R(M_j\otimes_R N_\lambda,Z)$ με την ιδιότητα $\widetilde{\beta}_{j,\lambda}\circ\varphi_{j,\lambda}=\beta_{j,\lambda}$, $\forall (j,\lambda)\in J\times\Lambda$.

$$\begin{tikzcd}
M_j\times N_\lambda \arrow[rr, "\varphi_{j,\lambda}"] \arrow[ddd, "in_j^M\times in_\lambda^N"'] \arrow[drr, "\beta_{j,\lambda}"] & & M_j\otimes_R N_\lambda \arrow[d, dashed, "\widetilde{\beta}_{j,\lambda}"] \arrow[ddr, "in_{j,\lambda}^W"] & \\
& & Z & \\
& & & \\
M\times N \arrow[urr, "\beta"'] \arrow[rrr, "\varphi"'] & & & W \arrow[uul, dashed, "\gamma_{j,\lambda}"']
\end{tikzcd}$$

Εν συνεχεία, εφαρμόζοντας την καθολική συνθήκη του συγκινομένου $(W,(in_{j,\lambda}^W)_{(j,\lambda)})$ (βλ. 1.5.9, 1.5.11, σελ. 30-31, και 1.5.13, σελ. 32) για τους $\widetilde{\beta}_{j,\lambda}\in Hom_R(M_j\otimes_R N_\lambda,Z)$ λαμβάνουμε μονοσημάντως ορισμένους $\gamma_{j,\lambda}\in Hom_R(W,Z)$ με την ιδιότητα $\gamma_{j,\lambda}\circ in_{j,\lambda}^W=\widetilde{\beta}_{j,\lambda}$, $\forall (j,\lambda)\in J\times\Lambda$. Έστω $\gamma:=\bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda}\gamma_{j,\lambda}$.

Για κάθε $((m_j)_{j\in J}, (n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \in M\times N$ έχουμε

$$(\gamma\circ\varphi)((m_j)_{j\in J},(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = \gamma((m_j\otimes n_\lambda)_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda})$$

$$= \sum_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda}' \widetilde{\beta}_{j,\lambda}(m_j\otimes n_\lambda) = \sum_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda}' \beta_{j,\lambda}(m_j,n_\lambda) = \sum_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda}' (\beta\circ(in_j^M\times in_\lambda^N))(m_j,n_\lambda)$$

$$= \sum_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda}' \beta(m_j,n_\lambda) \underset{\substack{\beta \text{ διγραμμική}\\(\text{βλ. } 3.3.13(ii),(iii))}}{=\!=\!=\!=\!=} \beta\Big(\sum_{j\in J}' m_j, \sum_{\lambda\in\Lambda}' n_\lambda\Big) \underset{(1.5.17)}{=} \beta((m_j)_{j\in J},(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}),$$

ήτοι $\gamma\circ\varphi=\beta$. Εξάλλου, από τον ορισμό της φ είναι φανερό ότι $W=\mathrm{Lin}(\mathrm{Im}(\varphi))$. Συνεπώς, το ζεύγος (W,φ) αποτελεί πράγματι τανυστικό γινόμενο των M και N (βλ. Πρόταση 3.3.6, σελ. 139). Αρκεί, τέλος, να εφαρμοσθεί το Θεώρημα 3.3.7, σελ. 139-140. □

3.4.6. Θεώρημα (Το τανυστικό γινόμενο δυο ελευθέρων μοδίων) Εάν οι M, N είναι δυο ελεύθεροι R-μόδιοι, τότε και το τανυστικό τους γινόμενο $M\otimes_R N$ είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος. Ιδιαιτέρως, εάν οι $(x_j)_{j\in J}$ και $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι βάσεις των M και N, αντιστοίχως, τότε η οικογένεια $\{x_j\otimes y_\lambda \mid (j,\lambda)\in J\times\Lambda\}$ συνιστά μια βάση του $M\otimes_R N$. Κατά συνέπειαν,

$$\boxed{\mathrm{rank}_R(M\otimes_R N) = \mathrm{rank}_R(M)\cdot\mathrm{rank}_R(N)}$$

Απόδειξη: Εάν $M\cong \bigoplus_{j\in J} Rx_j$ και $N\cong\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Ry_\lambda$, τότε από το Θεώρημα 3.4.5 έπεται ότι

$$M\otimes_R N \cong \bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} (Rx_j\otimes_R Ry_\lambda) \cong \bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} R(x_j\otimes y_\lambda)$$

$\underset{\binom{1.6.13}{1.6.32}}{\Longrightarrow}$ ο $M\otimes_R N$ είναι ελεύθερος βαθμίδας $=\mathrm{card}(J)\cdot\mathrm{card}(\Lambda)=\mathrm{rank}_R(M)\,\mathrm{rank}_R(N)$. □

3.4.7. Πόρισμα Εάν οι V_1, V_2 είναι δυο διανυσματικοί χώροι ορισμένοι υπεράνω ενός σώματος K, τότε

$$\boxed{\dim_K(V_1\otimes_K V_2) = \dim_K(V_1)\cdot\dim_K(V_2)}$$

3.4.8 Παράδειγμα. Έστω K ένα σώμα και έστω $\{e_1=(1_K,0_K), e_2=(0_K,1_K)\}$ η συνήθης βάση τού K-διανυσματικού χώρου K^2. Εάν $W:=K^2\otimes_K K^2$, τότε ο τύπος τού πορίσματος 3.4.7 μας δίνει $\dim_K(W)=4$ και το σύνολο $\{e_j\otimes e_\lambda \mid j,\lambda\in\{1,2\}\}$ αποτελεί μια βάση τού W.

Σημειωτέον ότι ο τανυστής $w\in W$ ο οριζόμενος μέσω τού τύπου

$$w:=e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1$$

δεν είναι αποσυντιθέμενος. Πράγματι· εάν υποθέσουμε ότι υπάρχουν διανύσματα

$$x=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2\in K^2,\quad y=\mu_1e_1+\mu_2e_2\in K^2,\quad \lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2\in K,$$

τέτοια ώστε να ισχύει $w=x\otimes y$, τότε, εφαρμόζοντας τους υπολογιστικούς κανόνες τού πορίσματος 3.3.13, λαμβάνουμε

$$e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1=\lambda_1\mu_1(e_1\otimes e_1)+\lambda_1\mu_2(e_1\otimes e_2)+\lambda_2\mu_1(e_2\otimes e_1)+\lambda_2\mu_2(e_2\otimes e_2)$$

ή -ισοδυνάμως-

$$\lambda_1\mu_1(e_1\otimes e_1)+(\lambda_1\mu_2-1_K)(e_1\otimes e_2)+(\lambda_2\mu_1-1_K)(e_2\otimes e_1)+\lambda_2\mu_2(e_2\otimes e_2)=0_W,$$

απ' όπου συνάγουμε ότι:

$$\lambda_1\mu_1=\lambda_1\mu_2-1_K=\lambda_2\mu_1-1_K=\lambda_2\mu_2=0_K,$$

ήτοι ένα σύστημα μη συμβιβαστών ισοτήτων (διότι $1_K\neq 0_K$).

3.4.9 Πόρισμα Έστω ότι οι M και N είναι δυο R-μόδιοι και ότι ο N είναι ελεύθερος έχοντας την οικογένεια $(n_j)_{j\in J}$ ως μια βάση του. Τότε η απεικόνιση $M^{(J)}\longrightarrow M\otimes_R N$, $(m_j)_{j\in J}\longmapsto \sum_{j\in J} m_j\otimes n_j$, είναι ένας ισομορφισμός R-μοδίων και -ως εκ τούτου- κάθε τανυστής $w\in M\otimes_R N$ γράφεται μονοσημάντως υπό τη μορφή

$$w=\sum_{j\in J} m_j\otimes n_j,\ \text{για κάποιο } (m_j)_{j\in J}\in M^{(J)}.$$

Απόδειξη: Η εν λόγω βάση καθορίζει έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$\alpha:\ M^{(J)}\longrightarrow M\otimes_R N\underset{1.6.13}{\cong} M\otimes_R\Big(\bigoplus_{j\in J}Rn_j\Big)\underset{3.4.5}{\cong}\bigoplus_{j\in J}(M\otimes Rn_j)$$

$$\alpha((m_j)_{j\in J}):=\sum_{j\in J} m_j\otimes n_j.$$ Η απεικόνιση

$$\theta:\ \underset{\text{είναι διγραμμική}}{M\times N\longrightarrow M^{(J)}},\quad \theta(m,\sum_{j\in J}\mu_jn_j):=(\mu_jm)_{j\in J},$$ οπότε

(κατά τα 3.3.5, 3.3.7, 3.3.10 και 3.3.11) $\exists!\ \tilde{\theta}\in \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, M^{(J)})$, ούτως ώστε να ισχύει $\tilde{\theta}(m \otimes \sum_{j\in J} \mu_j n_j) = (\mu_j m)_{j\in J}$.

Επειδή (προφανώς) $\alpha \circ \tilde{\theta} = Id_{M\otimes_R N}$ και $\tilde{\theta}\circ\alpha = Id_{M^{(J)}}$, οι $\alpha, \tilde{\theta}$ είναι ισομορφισμοί R-μοδίων (και $\alpha^{-1} = \tilde{\theta}$). Ως εκ τούτου, κάθε $w \in M\otimes_R N$ γράφεται <u>μονοσημάντως</u> υπό τη μορφή

$$w = \sum_{j\in J} m_j \otimes n_j, \text{ για κάποιο } (m_j)_{j\in J} \in M^{(J)},$$

καθότι το $M^{(J)}$ είναι ένα ευθύ άθροισμα $(\cong \bigoplus_{j\in J} M\otimes_R Rn_j)$, βλ. πρόταση 1.5.19, σελ. 35. □

<u>3.4.10. Πόρισμα</u>. Έστω ότι οι M και N είναι δυο <u>ελεύθεροι</u> R-μόδιοι και ο R μια <u>ακεραία περιοχή</u>. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Εάν $m\in M$ και $n \in N$, τότε

$$m\otimes n = 0_{M\otimes_R N} \Leftrightarrow (\text{είτε } m = 0_M \text{ είτε } n = 0_N).$$

(ii) Εάν το $M\otimes_R N$ είναι ο τετριμμένος R-μόδιος, τότε τουλάχιστον ένας εκ των M, N οφείλει να είναι τετριμμένος.

<u>Απόδειξη:</u> (i) Αρκεί να αποδειχθεί μόνον η συνεπαγωγή $(\Rightarrow)$ (πρβλ. πόρισμα 3.3.13 (iv)). Υποθέτουμε ότι η $(m_j)_{j\in J}$ είναι μια βάση τού M και η $(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μια βάση τού N. Τότε

$$\underset{M^{(J)}}{\underset{\cap}{m = \sum_{j\in J}\mu_j m_j}}, \quad \underset{N^{(\Lambda)}}{\underset{\cap}{n = \sum_{\lambda\in\Lambda}\nu_\lambda n_\lambda}} \quad (\text{με τα } \mu_j, \nu_\lambda \in R \text{ ''σχεδόν όλα} = 0_R\text{''})$$

Επομένως, κατά το πόρισμα 3.4.9,

$$0_{M\otimes_R N} = m\otimes n = \sum_{\lambda\in\Lambda}\Big(\sum_{j\in J}(\mu_j\nu_\lambda) m_j\Big)\otimes n_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda}(0_M\otimes n_\lambda)$$

$$\Longrightarrow \sum_{j\in J}(\mu_j\nu_\lambda) m_j = 0_M, \ \forall \lambda\in\Lambda \underset{(m_j)_{j\in J} \text{ γρ. ανεξ.}}{\Longrightarrow} \mu_j\nu_\lambda = 0_R, \ \forall (j,\lambda)\in J\times\Lambda.$$

Ας υποθέσουμε ότι $m \neq 0_M$. Τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας δείκτης $j_0 \in J$, ούτως ώστε να ισχύει $\mu_{j_0} \neq 0_R$. Επειδή ο δακτύλιος R είναι ακεραία περιοχή, $(\mu_{j_0}\nu_\lambda = 0_R, \forall\lambda\in\Lambda) \Rightarrow (\nu_\lambda = 0_R, \forall\lambda\in\Lambda) \Rightarrow n = 0_N$.

Κατ' αναλογίαν, εάν υποθέσουμε ότι $n \neq 0_N$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $m = 0_M$. Άρα τελικώς $(m \otimes n = 0_{M \otimes_R N}) \Leftrightarrow$ (είτε $m = 0_M$ είτε $n = 0_N$).

(ii) Εάν αμφότεροι οι M και N είναι μη τετριμμένοι, τότε υπάρχουν $m \in M \setminus \{0_M\}$ και $n \in N \setminus \{0_N\}$. Τούτο σημαίνει ότι το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_R N$ είναι κατ' ανάγκην μη τετριμμένο, διότι (κατά το (i)) $m \otimes n \neq 0_{M \otimes_R N}$. □

3.4.11. Σημείωση. Τα (i) και (ii) τού πορίσματος 3.4.10 δεν είναι κατ' ανάγκην αληθή όταν οι M, N δεν είναι ελεύθεροι, όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει μέσω τού παραδείγματος 3.3.17 (ii), σελ. 144-145 (πρβλ. 3.2.7 (iii), σελ. 132, και πρόταση 3.2.3, σελ. 129).

§ 3.5 Τανυστικό γινόμενο ομομορφισμών

Η έννοια τού "τανυστικού γινομένου" γενικεύεται κατά τρόπο φυσικό ακόμη και για ομομορφισμούς R-μοδίων.

3.5.1 Πρόταση: Εάν υποθέσουμε ότι οι M, M', N, N' είναι τέσσερεις R-μόδιοι, τότε για κάθε $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ και κάθε $g \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$ υπάρχει ένας μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός

$$\boxed{f \bar{\otimes} g \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')}$$

ο οποίος ικανοποιεί την

$$\boxed{(f \bar{\otimes} g)(m, n) = f(m) \otimes g(n), \quad \forall (m, n) \in M \times N}$$

και καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f \times g"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "f \bar{\otimes} g"] \\ M' \times N' \arrow[r, "\varphi'"'] & M' \otimes_R N' \end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

Εν προκειμένω, η φ (και αντιστοίχως, η φ') συμβολίζει την τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R N$ (και αντιστοίχως, τού $M' \otimes_R N'$).

Απόδειξη: Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\beta : M\times N \longrightarrow M'\otimes_R N',\quad \beta(m,n) := f(m)\otimes g(n),\quad \forall (m,n)\in M\times N.$$

Κανείς ελέγχει εύκολα ότι η β είναι διγραμμική (λόγω των υπολογιστικών κανόνων τού πορίσματος 3.3.13 και τού ότι οι f και g είναι ομομορφισμοί R-μοδίων). Επομένως, κατά τον ορισμό 3.3.5, υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $\tilde{\beta}\in \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, M'\otimes_R N')$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\beta"'] & M\otimes_R N \arrow[d, dashed, "\tilde{\beta}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
& M'\otimes_R N'
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

Αρκεί λοιπόν να θέσουμε $f\bar{\otimes} g := \tilde{\beta}$, διότι η εικόνα $\tilde{\beta}(m\otimes n)$ τού αποσυντιθέμενου τανυστή $m\otimes n$ μέσω τής $\tilde{\beta}$ ισούται με $f(m)\otimes g(n)$ για κάθε $(m,n)\in M\times N$. Επιπροσθέτως, $(f\bar{\otimes} g)(\varphi(m,n)) = (f\bar{\otimes} g)(m\otimes n) = f(m)\otimes g(n)$

$$= \varphi'(f(m), g(n)) = \varphi'((f\times g)(m,n)),$$

για κάθε $(m,n)\in M\times N$, ενώ για οιονδήποτε $\theta\in \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, M'\otimes_R N')$ με αυτήν την ιδιότητα ($:\ \theta\circ\varphi = \varphi'\circ(f\times g)$) έχουμε $\theta|_{Im(\varphi)} = f\bar{\otimes} g|_{Im(\varphi)}$, οπότε κατ' ανάγκην $\theta = f\bar{\otimes} g$, διότι $\mathrm{Lin}(Im(\varphi)) = M\otimes N$. $\square$

3.5.2. Ορισμός Ο ομομορφισμός $f\bar{\otimes} g\in \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, M'\otimes_R N')$ ο ορισθείς μέσω τής προτάσεως 3.5.1 καλείται <u>τανυστικό γινόμενο των f και g</u>.

3.5.3. Σημείωση. Το σύμβολο "$\bar{\otimes}$" εισήχθη αντί τού "$\otimes$" προκειμένου να επιτευχθεί σαφής διάκριση μεταξύ τού ομομορφισμού $f\bar{\otimes} g$ και τού αποσυντιθέμενου τανυστή $f\otimes g\in \mathrm{Hom}_R(M,M')\otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,N')$, ήτοι τού τανυστικού γινομένου των f και g <u>θεωρουμένων ως στοιχείων των μοδίων ομομορφισμών $\mathrm{Hom}_R(M,M')$ και $\mathrm{Hom}_R(N,N')$</u>. Εν γένει, <u>δεν είναι δυνατή η χρήση τού ενός στη θέση τού άλλου</u>, όπως διαπιστώνουμε μέσω τού παραδείγματος 3.7.21. Όμως —εκ παραλλήλου— θα πρέπει να επισημανθεί ότι οι ικανές συνθήκες, υπό τις οποίες ο (κανονιστικός) ομομορφισμός R-μοδίων

$$\mathrm{Hom}_R(M,M')\otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, M'\otimes_R N')$$

καθίσταται ισομορφισμός, είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες από θεωρητικής πλευράς (βλ. θεώρημα 3.7.20, σελ. 183).

3.5.4. Πρόταση. Για οιουσδήποτε R-μοδίους M και N ισχύει η ισότητα

$$\boxed{Id_M \bar{\otimes} Id_N = Id_{M\otimes_R N}}$$

Απόδειξη: Έστω $\varphi : M\times N \longrightarrow M\otimes_R N$ η τανυστική απεικόνιση τού $M\otimes_R N$. Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "Id_M\times Id_N"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M\otimes_R N \arrow[d, "Id_{M\otimes_R N}"] \\
M\times N \arrow[r, "\varphi"'] & M\otimes_R N
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, διότι

$$Id_{M\otimes_R N}(\varphi(m,n)) = Id_{M\otimes_R N}(m\otimes n) = m\otimes n = \varphi(m,n) = \varphi((Id_M\times Id_N)(m,n)),$$

για κάθε $(m,n)\in M\times N$, οπότε η ανωτέρω ισότητα είναι προφανής λόγω τής 3.5.1. □

3.5.5. Πρόταση. Δοθέντων έξι R-μοδίων M, M', M'' και N, N', N'', καθώς και τεσσάρων ομομορφισμών $f\in Hom_R(M,M')$, $f'\in Hom_R(M',M'')$, $g\in Hom_R(N,N')$, $g'\in Hom_R(N',N'')$, έχουμε

$$\boxed{(f'\bar{\otimes} g')\circ(f\bar{\otimes} g) = (f'\circ f)\bar{\otimes}(g'\circ g)}$$

Απόδειξη: Προφανώς, $(f'\times g')\circ(f\times g) = (f'\circ f)\times(g'\circ g)$. Εάν υποθέσουμε ότι οι $\varphi, \varphi', \varphi''$ είναι οι τανυστικές απεικονίσεις των $M\otimes_R N$, $M'\otimes_R N'$ και $M''\otimes_R N''$, αντιστοίχως, τότε, λόγω τής μεταθετικότητας τού διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd}
M\times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f\times g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dd, bend right=60, "(f'\circ f)\times(g'\circ g)"'] & M\otimes_R N \arrow[d, "f\bar{\otimes} g"'] \arrow[dd, bend left=60, "(f'\bar{\otimes} g')\circ(f\bar{\otimes} g)"] \\
M'\times N' \arrow[r, "\varphi'"'] \arrow[d, "f'\times g'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M'\otimes_R N' \arrow[d, "f'\bar{\otimes} g'"'] \\
M''\times N'' \arrow[r, "\varphi''"'] & M''\otimes_R N''
\end{tikzcd}$$

η ανωτέρω ισότητα έπεται άμεσα από την Πρόταση 3.5.1. □

3.5.6. Πρόταση. Έστω ότι οι M, M', N και N' είναι R-μόδιοι και ότι $f\in Hom_R(M,M')$ και $g\in Hom_R(N,N')$. Τότε το τανυστικό γινόμενο $f\bar{\otimes} g$ των f και g έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\operatorname{Im}(f \bar{\otimes} g) = \operatorname{Lin}(\{ f(m) \otimes g(n) \mid (m,n) \in M \times N \})$.

(ii) Εάν αμφότερες οι f, g είναι επιμορφισμοί, τότε και η $f \bar{\otimes} g$ είναι επιμορφισμός.

(iii) Εάν αμφότερες οι f, g είναι ισομορφισμοί, τότε και η $f \bar{\otimes} g$ είναι ισομορφισμός.

<u>Απόδειξη</u>: (i) Εάν η $\varphi : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ είναι η τανυστική απεικόνιση του $M \otimes_R N$, τότε

$$\operatorname{Im}(f \bar{\otimes} g) = (f \bar{\otimes} g)(M \times N) \overset{3.3.6}{=\!=} (f \bar{\otimes} g)(\operatorname{Lin}(\operatorname{Im}(\varphi))) = \operatorname{Lin}((f \bar{\otimes} g)(\varphi(M \times N)))$$
$$= \operatorname{Lin}(\{ (f \bar{\otimes} g)(m \otimes n) \mid (m,n) \in M \times N \}) = \operatorname{Lin}(\{ f(m) \otimes g(n) \mid (m,n) \in M \times N \}).$$

(ii) Υποθέτουμε ότι η $\varphi' : M' \times N' \longrightarrow M' \otimes_R N'$ είναι η τανυστική απεικόνιση του $M' \otimes_R N'$. Κατά το (i) έχουμε $\operatorname{Im}(f \bar{\otimes} g) = \operatorname{Lin}(\operatorname{Im}(\varphi'|_{f(M) \times g(N)}))$. Εάν λοιπόν αμφότερες οι f και g είναι επιμορφισμοί, τότε $f(M) = M'$, $g(N) = N'$, οπότε $\operatorname{Im}(f \bar{\otimes} g) = \operatorname{Lin}(\operatorname{Im}(\varphi')) \overset{3.3.6}{=\!=} M' \otimes_R N'$.

(iii) Εάν οι f και g είναι ισομορφισμοί, τότε διαθέτουν αντίστροφους $f^{-1} \in \operatorname{Hom}_R(M', M)$ και $g^{-1} \in \operatorname{Hom}_R(N', N)$, αντιστοίχως, οπότε

$$\left\{ \begin{array}{l} f \circ f^{-1} = Id_{M'},\ g \circ g^{-1} = Id_{N'} \\ f^{-1} \circ f = Id_M,\ g^{-1} \circ g = Id_N \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (f \circ f^{-1}) \bar{\otimes} (g \circ g^{-1}) = Id_{M'} \bar{\otimes} Id_{N'}, \\ (f^{-1} \circ f) \bar{\otimes} (g^{-1} \circ g) = Id_M \bar{\otimes} Id_N. \end{array} \right\}$$

Χρησιμοποιώντας τις προτάσεις 3.5.4 και 3.5.5 συμπεραίνουμε ότι

$$(f \bar{\otimes} g) \circ (f^{-1} \bar{\otimes} g^{-1}) = Id_{M' \otimes_R N'} \text{ και } (f^{-1} \bar{\otimes} g^{-1}) \circ (f \otimes g) = Id_{M \otimes_R N}.$$

Άρα η $f \bar{\otimes} g$ είναι ισομορφισμός με $(f \bar{\otimes} g)^{-1} = f^{-1} \bar{\otimes} g^{-1}$. $\square$

<u>3.5.7. Σημείωση.</u> Συμπέρασμα ανάλογο των (ii) και (iii) της προτάσεως 3.5.6 δεν ισχύει – εν γένει – και για μονομορφισμούς f και g (πρβλ. 3.6.1, σελ. 170). Ορισμένες ικανές συνθήκες υπό τις οποίες έχουμε διατήρηση της προκειμένης ιδιότητας περιγράφονται στο πόρισμα 3.5.17 (σελ. 161).

<u>3.5.8. Θεώρημα.</u> Έστω M ένας R-μόδιος. Τότε μέσω οιασδήποτε ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων της μορφής

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$$

επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$M \otimes_R N' \xrightarrow{Id_M \bar{\otimes} f} M \otimes_R N \xrightarrow{Id_M \bar{\otimes} g} M \otimes_R N'' \longrightarrow 0.$$

<u>Απόδειξη:</u> (i) $\boxed{Im(Id_M \bar{\otimes} f) \subseteq Ker(Id_M \bar{\otimes} g)}$ Κατά την πρόταση 3.5.5

$$(Id_M \bar{\otimes} g) \circ (Id_M \bar{\otimes} f) = \underbrace{(Id_M \circ Id_M)}_{= Id_M} \bar{\otimes} \underbrace{(g \circ f)}_{= 0 \leftarrow \text{ακρίβεια}} = Id_M \bar{\otimes} 0 = 0.$$

(ii) $\boxed{Ker(Id_M \bar{\otimes} g) \subseteq Im(Id_M \bar{\otimes} f)}$ Θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό

$\pi = \pi_{Im(Id_M \bar{\otimes} f)} : M \otimes_R N \longrightarrow (M \otimes_R N)/Im(Id_M \bar{\otimes} f)$. Λόγω του (i) έχουμε τη δυνατότητα εφαρμογής της καθολικής ιδιότητας 1.4.6 (σελ. 18) του προκειμένου πηλικομοδίου. Συνεπώς, $\exists !\, \theta \in Hom_R((M \otimes_R N)/Im(Id_M \bar{\otimes} f), M \otimes N'')$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes N \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "Id_M \bar{\otimes} g"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
(M \otimes_R N)/Im(Id_M \bar{\otimes} f) \arrow[rr, dashed, "\theta"'] & & M \otimes_R N''
\end{tikzcd}$$
μεταθετικό.

Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι <u>η θ είναι μονομορφισμός</u> (διότι τότε θα έχουμε $Ker(\theta) = Im(Id_M \bar{\otimes} f) = Ker(Id_M \bar{\otimes} g)$ επί τη βάσει του Θεωρήματος 1.3.13, σελ. 13). Δοθέντων δυο στοιχείων $n_1, n_2 \in N$ έχουμε

$$g(n_1) = g(n_2) \Longrightarrow n_1 - n_2 \in Ker(g) \underset{\text{ακρίβεια}}{=} Im(f) \Longrightarrow \exists n' \in N' : n_1 - n_2 = f(n')$$

$$\Longrightarrow m \otimes n_1 - m \otimes n_2 = m \otimes f(n') \in Im(Id_M \bar{\otimes} f), \ \forall m \in M.$$

Επειδή η g είναι (εξ υποθέσεως) επιμορφισμός, ορίζεται καλώς η διγραμμική απεικόνιση $\alpha : M \times N'' \longrightarrow (M \otimes_R N)/Im(Id_M \bar{\otimes} f)$,

$$\alpha(m, n'') := (m \otimes n) + Im(Id_M \bar{\otimes} f), \quad \forall (m, n'') \in M \times N'',$$

όπου $n \in N$, τέτοιο ώστε $g(n) = n''$. Σύμφωνα με την καθολική συνθήκη που πληροί το τανυστικό γινόμενο (βλ. 3.3.5, σελ. 138) υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $\tilde{\alpha} \in Hom_R(M \otimes_R N'', (M \otimes_R N)/Im(Id_M \bar{\otimes} f))$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M \times N'' \arrow[r] \arrow[dr, "\alpha"'] & M \otimes_R N'' \arrow[d, dashed, "\tilde{\alpha}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & (M \otimes_R N)/Im(Id_M \bar{\otimes} f)
\end{tikzcd}$$
μεταθετικό.

Για κάθε $(m,n) \in M \times N$ έχουμε

$$(\tilde{\alpha} \circ \theta)((m \otimes n) + \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \bar{\otimes} f)) = \tilde{\alpha}((\mathrm{Id}_M \bar{\otimes} g)(m \otimes n)) = \tilde{\alpha}(m \otimes g(n))$$

$= \alpha(m, g(n)) = (m \otimes n) + \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \bar{\otimes} f)$. Επομένως, η σύνθεση $\tilde{\alpha} \circ \theta$ ταυτίζεται με την ταυτοτική απεικόνιση επί ενός συστήματος γεννητόρων τού πηλικομοδίου $(M \otimes_R N)/\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \bar{\otimes} f)$. Τελικώς λοιπόν

$$\tilde{\alpha} \circ \theta = \mathrm{Id}_{(M \otimes_R N)/\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \bar{\otimes} f)} \Longrightarrow \text{η } \theta \text{ είναι όντως ενριπτική.}$$

(βλ. Πρόταση 1.2.15 σημειώσεων "Εισαγωγή στην Άλγεβρα", σελ. 12)

(iii) $\boxed{\text{Η } \mathrm{Id}_M \bar{\otimes} g \text{ είναι επιρριπτική.}}$ Έστω τυχόν $n'' \in N''$. Επειδή η g είναι (εξ υποθέσεως) επιρριπτική, υπάρχει κάποιο $n \in N$: $g(n) = n''$, οπότε για κάθε $m \in M$ έχουμε $m \otimes n'' = m \otimes g(n) = (\mathrm{Id}_M \bar{\otimes} g)(m \otimes n) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \bar{\otimes} g)$. Και επειδή η εικόνα $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \bar{\otimes} g)$ περιέχει ένα σύστημα γεννητόρων τού $M \otimes_R N''$, συνάγουμε ότι $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_M \bar{\otimes} g) = M \otimes_R N''$, δηλαδή ότι η $\mathrm{Id}_M \bar{\otimes} g$ είναι επιρριπτική.
[Το (iii) έπεται απ' ευθείας και από την 3.5.6. (ii).] □

Το ακόλουθο θεώρημα μπορεί να ιδωθεί ως "δυϊκό" τού 3.5.8 και η απόδειξή του αφήνεται ως άσκηση για τους αναγνώστες.

3.5.9. Θεώρημα. Έστω N ένας R-μόδιος. Τότε μέσω οιασδήποτε ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{f \bar{\otimes} \mathrm{Id}_N} M \otimes_R N \xrightarrow{g \bar{\otimes} \mathrm{Id}_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0.$$

3.5.10. Σημείωση. Οι επαγόμενες ακριβείς ακολουθίες των Θεωρημάτων 3.5.8 και 3.5.9 δεν είναι πάντοτε βραχείες ακριβείς ακολουθίες ακόμη και όταν οι δοθείσες ακολουθίες "εκκινήσεως" είναι βραχείες ακριβείς ακολουθίες. Επί παραδείγματι, θεωρώντας τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f = -\times k} \mathbb{Z} \xrightarrow{g = \text{φυσικός επιμ.}} \mathbb{Z}_k \longrightarrow 0$$

(βλ. 2.1.3 (iv), σελ. 71), καθώς και την επαγόμενη ακριβή ακολουθία

$$\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_k} \bar{\otimes} f} \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_k} \bar{\otimes} g} \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_k \longrightarrow 0,$$

παρατηρούμε ότι για κάθε $[n]_k \in \mathbb{Z}_k$ και κάθε $m \in \mathbb{Z}$:

$(Id_{\mathbb{Z}_k} \bar{\otimes} f)([n]_k \otimes m) = [n]_k \otimes f(m) = [n_k] \otimes km \overset{3.3.13(iii)}{=\!=} k[n_k] \otimes m$

$= [0]_k \otimes m \underset{3.3.13(iv)}{=\!=\!=} 0_{\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}} \Longrightarrow$ η $Id_{\mathbb{Z}_k} \bar{\otimes} f$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός με πυρήνα τον ολόκληρο τον $\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \underset{3.4.3}{\cong} \mathbb{Z}_k \neq 0 \Longrightarrow$ η $Id_{\mathbb{Z}_k} \bar{\otimes} f$ δεν είναι μονομορφισμός.

3.5.11. Θεώρημα. Έστω M ένας R-μόδιος. Εάν η

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$$

είναι μια βραχεία διασπώμενη ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε και η $0 \longrightarrow M \otimes_R N' \xrightarrow{Id_M \bar{\otimes} f} M \otimes_R N \xrightarrow{Id_M \bar{\otimes} g} M \otimes_R N'' \longrightarrow 0$ είναι ωσαύτως μια βραχεία διασπώμενη ακριβής ακολουθία.

Απόδειξη: Κατά το θεώρημα 2.1.13 (σελ. 77) $\exists\, \alpha \in Hom_R(N, N') : \alpha \circ f = Id_{N'}$. Επομένως, για κάθε $(m,n) \in M \times N$, έχουμε

$$\big((Id_M \bar{\otimes} \alpha) \circ (Id_M \bar{\otimes} f)\big)(m,n) \underset{3.5.5}{=\!=\!=} \big((\underbrace{Id_M \circ Id_M}_{Id_M}) \otimes (\underbrace{\alpha \circ f}_{Id_{N'}})\big)(m,n) = (m,n),$$

ήτοι $(Id_M \bar{\otimes} \alpha) \circ (Id_M \bar{\otimes} f) = Id_{M \otimes_R N'} \Longrightarrow Id_M \bar{\otimes} f$ ενριπτική.

Υπολείπεται η εφαρμογή των Θεωρημάτων 3.5.8 και 2.1.13 για την επαγόμενη ακολουθία. □

Το ακόλουθο θεώρημα μπορεί να ιδωθεί ως "δυϊκό" του 3.5.11 και η απόδειξή του αφήνεται ως άσκηση για τους αναγνώστες.

3.5.12. Θεώρημα. Έστω N ένας R-μόδιος. Εάν η

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

είναι μια βραχεία διασπώμενη ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε και η $0 \longrightarrow M' \otimes_R N \xrightarrow{f \bar{\otimes} Id_N} M \otimes_R N \xrightarrow{g \bar{\otimes} Id_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$ είναι ωσαύτως μια βραχεία διασπώμενη ακριβής ακολουθία.

3.5.13. Ορισμός Ένας R-μόδιος M καλείται <u>ισόπεδος</u> όταν για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $f : N' \to N$ ο επαγόμενος ομομορφισμός

$$Id_M \bar{\otimes} f : M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N$$ είναι μονομορφισμός.

3.5.14 Πρόταση: Έστω M ένας R-μόδιος. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο M είναι ισόπεδος.
(ii) Για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$
αμφότερες οι επαγόμενες ακολουθίες

$$0 \longrightarrow M \otimes_R N' \xrightarrow{Id_M \bar{\otimes} f} M \otimes_R N \xrightarrow{Id_M \bar{\otimes} g} M \otimes_R N'' \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow N' \otimes_R M \xrightarrow{f \bar{\otimes} Id_M} N \otimes_R M \xrightarrow{g \bar{\otimes} Id_M} N'' \otimes_R M \longrightarrow 0$$

είναι ακριβείς.

Απόδειξη: (i) $\Longrightarrow$ (ii). Το ότι η πρώτη επαγόμενη ακολουθία είναι ακριβής έπεται από το Θεώρημα 3.5.8. Η ακρίβεια της δεύτερης έπεται από το Θεώρημα 3.4.1 (σελ. 147) και το Θεώρημα 3.5.9 (σελ. 159).
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Προφανές λόγω της ακριβείας της πρώτης επαγόμενης ακολουθίας. □

3.5.15. Πόρισμα. Ένας R-μόδιος M είναι ισόπεδος $\Leftrightarrow$ για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $f: N' \to N$ αμφότερες οι απεικονίσεις $Id_M \bar{\otimes} f$, $f \bar{\otimes} Id_M$ είναι μονομορφισμοί.

3.5.16. Παράδειγμα Εάν $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, τότε ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_k$ δεν είναι ισόπεδος (βλ. 3.5.10 σε συνδυασμό με το πόρισμα 3.5.15).

3.5.17. Πόρισμα. Ας υποθέσουμε ότι οι M, M', N και N' είναι τέσσερεις R-μόδιοι και ότι $f \in Hom_R(M, M')$ και $g \in Hom_R(N, N')$. Εάν ισχύει μία τουλάχιστον εκ των δύο ακολούθων συνθηκών:
(i) οι M' και N είναι ισόπεδοι,
(ii) οι M και N' είναι ισόπεδοι,
τότε το τανυστικό γινόμενο $f \bar{\otimes} g$ των f και g έχει την εξής ιδιότητα:
Εάν αμφότερες οι f και g είναι μονομορφισμοί, τότε και η απεικόνιση $f \bar{\otimes} g$ είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη: Το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
M \otimes_R N' \arrow[dr, "f \bar{\otimes} Id_{N'}"'] & M \otimes_R N \arrow[l, "Id_M \bar{\otimes} g"'] \arrow[r, "f \bar{\otimes} Id_N"] \arrow[d, "f \bar{\otimes} g"] & M' \otimes_R N \arrow[dl, "Id_{M'} \bar{\otimes} g"] \\
& M' \otimes_R N' &
\end{tikzcd}
$$

είναι προφανώς μεταθετικό, καθότι

$$f \bar{\otimes} g = (Id_{M'} \bar{\otimes} g) \circ (f \bar{\otimes} Id_N) = (f \bar{\otimes} Id_{N'}) \circ (Id_M \bar{\otimes} g),$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής επί τη βάσει του πορίσματος 3.5.15. □

3.5.18. Θεώρημα. Εάν οι $M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$

και $N' \xrightarrow{\gamma} N \xrightarrow{\delta} N'' \to 0$

είναι δυό ακριβείς ακολουθίες R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε η επαγομένη ακολουθία

$$0 \longrightarrow Im(Id_M \bar{\otimes} \gamma) + Im(\alpha \bar{\otimes} Id_N) \xrightarrow{i} M \otimes_R N \xrightarrow{\beta \bar{\otimes} \delta} M'' \otimes_R N'' \longrightarrow 0$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία (όπου i η συνήθης ενθετική απεικόνιση).

Απόδειξη: Θεωρούμε το διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
M' \otimes_R N' \arrow[d, "Id_{M'} \bar{\otimes} \gamma"'] & M \otimes_R N' \arrow[d, "Id_M \bar{\otimes} \gamma"'] & M'' \otimes_R N' \arrow[d, "Id_{M''} \bar{\otimes} \gamma"] & \\
M' \otimes_R N \arrow[r, "\alpha \bar{\otimes} Id_N"] \arrow[d, "Id_{M'} \bar{\otimes} \delta"'] & M \otimes_R N \arrow[r, "\beta \bar{\otimes} Id_N"] \arrow[d, "Id_M \bar{\otimes} \delta"'] \arrow[dr, "\beta \bar{\otimes} \delta"] & M'' \otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, "Id_{M''} \bar{\otimes} \delta"] & 0 \\
M' \otimes_R N'' \arrow[r, "\alpha \bar{\otimes} Id_{N''}"'] \arrow[d] & M \otimes_R N'' \arrow[r, "\beta \bar{\otimes} Id_{N''}"'] \arrow[d] & M'' \otimes_R N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Κατά τα θεωρήματα 3.5.8 και 3.5.9, οι δύο γραμμές και οι τρεις στήλες του είναι ακριβείς. Επιπροσθέτως, λόγω της προτάσεως 3.5.5, το διάγραμμα είναι μεταθετικό. Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι

$$\boxed{Ker(\beta \bar{\otimes} \delta) = Im(Id_M \bar{\otimes} \gamma) + Im(\alpha \bar{\otimes} Id_N)}$$

Λόγω της ακριβείας της μεσαίας στήλης έχουμε

$$(\beta \bar{\otimes} \delta) \circ (Id_M \bar{\otimes} \gamma) = 0$$

και, λόγω της ακριβείας της άνω γραμμής,

$$(\beta \bar{\otimes} \delta) \circ (\alpha \bar{\otimes} Id_N) = 0.$$

Εξ αυτών έπεται ότι $Im(Id_M \bar{\otimes} \gamma) + Im(\alpha \bar{\otimes} Id_N) \subseteq Ker(\beta \bar{\otimes} \delta)$.
Για την απόδειξη τού αντιστρόφου εγκλεισμού θεωρούμε τυχόν $z \in Ker(\beta \bar{\otimes} \delta)$.
Τότε $(Id_M \bar{\otimes} \delta)(z) \in Ker(\beta \bar{\otimes} Id_{N''}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ακρίβεια}}}{=} Im(\alpha \bar{\otimes} Id_{N''})$

$\Longrightarrow \exists x \in M' \otimes_R N'' : (Id_M \bar{\otimes} \delta)(z) = (\alpha \bar{\otimes} Id_{N''})(x)$. Επειδή η $Id_{M'} \bar{\otimes} \delta$ είναι επιρριπτική, $\exists y \in M' \otimes_R N$:

$$(Id_M \bar{\otimes} \delta)(z) = (\alpha \bar{\otimes} Id_{N''})((Id_{M'} \bar{\otimes} \delta)(y)).$$

Θέτοντας $z' := z - (\alpha \bar{\otimes} Id_N)(y)$ έχουμε $z' \in Ker(Id_M \bar{\otimes} \delta) = Im(Id_M \bar{\otimes} \gamma)$, οπότε $z = z' + (\alpha \otimes Id_N(y)) \in Im(Id_M \bar{\otimes} \gamma) + Im(\alpha \bar{\otimes} Id_N)$. $\square$

3.5.19 Πόρισμα Έστω ότι οι M', N' είναι δυο R-μόδιοι, οι M και N δυο μη τετριμμένοι, ισόπεδοι R-μόδιοι και ότι $f \in Hom_R(M, M')$ και $g \in Hom_R(N, N')$. Γράφοντας τις f και g ως συνθέσεις $f = i_f \circ f^+$, $g = i_g \circ g^+$, όπου $i_f : Im(f) \hookrightarrow M'$ και $i_g : Im(g) \hookrightarrow N'$ οι συνήθεις ενθετικές απεικονίσεις και f^+, g^+ όπως στον ορσ. 1.4.7 (σελ. 19), λαμβάνουμε

$$\boxed{Ker(f^+ \bar{\otimes} g^+) \cong M \otimes_R Ker(g) + Ker(f) \otimes_R N}$$

Εάν -επιπροσθέτως- ισχύει μία τουλάχιστον εκ των τριών ακολούθων συνθηκών:
(i) οι M' και $Im(g)$ είναι ισόπεδοι,
(ii) οι $Im(f)$ και N' είναι ισόπεδοι,
(iii) αμφότερες οι f και g είναι επιμορφισμοί,
τότε

$$\boxed{Ker(f \bar{\otimes} g) \cong M \otimes_R Ker(g) + Ker(f) \otimes_R N} \quad (*)$$

Εξάλλου, οσάκις ισχύει η ισότητα (*) και -εκ παραλλήλου- ο δακτύλιος R είναι <u>ακεραία περιοχή</u> και οι $Ker(f)$, M, $Ker(g)$, N <u>ελεύθεροι</u> R-μόδιοι, <u>αμφότερες οι f και g είναι μονομορφισμοί</u> $\Leftrightarrow$ <u>η $f \bar{\otimes} g$ είναι μονομορφισμός.</u>

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.5.18 για τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \to Ker(f) \xrightarrow{j_f} M \xrightarrow{f^+} Im(f) \to 0 \\ 0 \to Ker(g) \xrightarrow{j_g} N \xrightarrow{g^+} Im(g) \to 0 \end{array}\right\}$$

(όπου j_f, j_g οι συνήθεις ενθέσεις των αντίστοιχων πυρήνων), συνάγουμε ότι

$$Ker(f^+ \bar{\otimes} g^+) \cong Im(Id_M \bar{\otimes} j_g) + Im(j_f \bar{\otimes} Id_N)$$
$$\cong M \otimes_R Ker(g^+) + Ker(f^+) \otimes_R N$$

[Επειδή οι M, N υπετέθησαν ισόπεδοι $\overset{}{\underset{3.5.17}{\Longrightarrow}}$ $Id_M \bar{\otimes} j_g$, $j_f \bar{\otimes} Id_N$ μονομορφισμοί $\Longrightarrow$ μπορούμε να ταυτίσουμε τον $Im(Id_M \bar{\otimes} j_g)$ με τον $M \otimes_R Ker(g^+)$ κ.λπ.]

$\Longrightarrow$ $Ker(f^+ \bar{\otimes} g^+) \cong M \otimes_R Ker(g) + Ker(f) \otimes_R N$

(επειδή $Im(j_f) \underset{\text{ακρίβεια}}{=} Ker(f^+)$, $Im(j_g) \underset{\text{ακρίβεια}}{=} Ker(g^+)$, $Ker(f^+) \underset{j_f \text{ μονομ.}}{=} Ker(f)$, $Ker(g^+) \underset{j_g \text{ μονομ.}}{=} Ker(g)$).

Εάν –επιπροσθέτως– πληρούται μία τουλάχιστον εκ των συνθηκών (i), (ii), τότε, σύμφωνα με το πόρισμα 3.5.17, η $i_f \bar{\otimes} i_g$ είναι μονομορφισμός, ενώ εάν πληρούται η (iii), τότε $i_f \bar{\otimes} i_g = Id_{M'} \bar{\otimes} Id_{N'} \underset{3.5.4.}{=\!=} Id_{M' \otimes_R N'}$.
Επειδή λοιπόν

$$f \bar{\otimes} g = (i_f \circ f^+) \bar{\otimes} (i_g \circ g^+) \underset{3.5.5}{=\!=} (i_f \bar{\otimes} i_g) \circ (f^+ \bar{\otimes} g^+)$$

συμπεραίνουμε ότι $Ker(f \bar{\otimes} g) = Ker(f^+ \bar{\otimes} g^+)$ (και στις τρεις περιπτώσεις).
Τέλος, οσάκις ισχύει η (*) και αμφότερες οι f και g είναι μονομορφισμοί, έχουμε $(Ker(f) = \{0_M\}, Ker(g) = \{0_N\}) \Longrightarrow Ker(f \bar{\otimes} g) = \{0_{M \otimes_R N}\}$

$\underset{1.3.4\,(v)}{\Longrightarrow}$ $f \bar{\otimes} g$ μονομορφισμός. Και αντιστρόφως· προϋποθέτοντας ότι ισχύει η (*), ότι ο R είναι ακεραία περιοχή και οι $Ker(f), M, Ker(g), N$ ελεύθεροι, και ότι η $f \bar{\otimes} g$ είναι ένας μονομορφισμός, λαμβάνουμε $Ker(f) \otimes_R N = \{0_{M \otimes_R N}\} = M \otimes_R Ker(g)$.
Επειδή (εξ υποθέσεως) οι M, N δεν είναι τετριμμένοι, αμφότεροι οι μόδιοι $Ker(f)$ και $Ker(g)$ υποχρεούνται να είναι τετριμμένοι σύμφωνα με το πόρισμα 3.4.10 (ii), σελ. 153. Τούτο διασφαλίζει την ενριπτικότητα των f και g (βλ. πρόταση 1.3.4 (v), σελ. 9). □

3.5.20 Θεώρημα Έστω $(M_j)_{j \in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων. Τότε ο $M := \bigoplus_{j \in J} M_j$ είναι ισόπεδος $\Longleftrightarrow$ οι M_j είναι ισόπεδοι, $\forall j \in J$.

Απόδειξη: Έστω $f: N' \longrightarrow N$ ένας μονομορφισμός R-μοδίων. Τότε προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R N' \arrow[r, "Id_M \bar{\otimes} f"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N \arrow[d, "\cong"] \\
\bigoplus_{j \in J} (M_j \otimes_R N') \arrow[r, "\bigoplus_{j\in J}(Id_{M_j} \bar{\otimes} f)"'] & \bigoplus_{j \in J} (M_j \otimes_R N)
\end{tikzcd},$$

όπου τα κατακόρυφα βέλη του συμβολίζουν τους ισομορφισμούς που θεσπίσθηκαν στο Θεώρημα 3.4.5 (σελ. 150). Προφανώς,

ο $Id_M \bar{\otimes} f$ είναι μονομορφισμός $\Longleftrightarrow$ $\left[\bigoplus_{j\in J} (Id_{M_j} \bar{\otimes} f) \text{ μονομορφισμός}\right]$

$\underset{\text{(Βλ. άσκηση 7 του 2ου φυλλαδίου)}}{\Longleftrightarrow}$ $\left[\text{οι } Id_{M_j} \bar{\otimes} f \text{ μονομορφισμοί}, \forall j \in J\right]$. □

3.5.21 Λήμμα. Ο R-μόδιος R είναι ισόπεδος.

Απόδειξη: Έστω $f: N' \longrightarrow N$ ένας μονομορφισμός R-μοδίων. Τότε προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
n' \in & N' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N \arrow[d, "\cong"] & \ni n \\
1_R \otimes n' \in & R \otimes_R N' \arrow[r, "Id_R \bar{\otimes} f"'] & R \otimes_R N & \ni 1_R \otimes n
\end{tikzcd},$$

όπου τα κατακόρυφα βέλη του συμβολίζουν τους ισομορφισμούς που θεσπίσθηκαν στο Θεώρημα 3.4.3 (σελ. 148). Ο ομομορφισμός $Id_R \bar{\otimes} f$ είναι προφανώς μονομορφισμός (ως σύνθεση μονομορφισμών). □

3.5.22. Θεώρημα. Κάθε προβολικός R-μόδιος είναι ισόπεδος.

Απόδειξη: Έστω P ένας προβολικός R-μόδιος. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.6 (σελ. 131) ο P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελευθέρου R-μοδίου F. Επειδή $F \cong R^{(X)} \cong \bigoplus_{x\in X} Rx$ (με $Rx \cong R$, $\forall x \in X$, βλ. 1.6.6 και 1.6.13)
(X σύνολο μη κενό!)

και επειδή ο ίδιος ο R (ως R-μόδιος) είναι ισόπεδος (κατά το λήμμα 3.5.21), ο F είναι ισόπεδος (επί τη βάσει του θεωρήματος 3.5.20). Τέλος, επειδή $\exists$ R-μόδιος P': $F \cong P \oplus P'$, F ισόπεδος $\Longrightarrow$ ο P οφείλει να είναι ισόπεδος (και πάλι βάσει του Θεωρ. 3.5.20). $\square$

3.5.23. Λήμμα. Ας υποθέσουμε ότι οι M και N είναι δυο R-μόδιοι και ότι $m_1,\dots,m_k \in M$, $n_1,\dots,n_k \in N$, με $\sum_{j=1}^{k} m_j \otimes n_j = 0_{M\otimes_R N}$. Τότε υπάρχει ένας πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος M' του M και ένας πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος N' του N, ούτως ώστε να ισχύει $m_1,\dots,m_k \in M'$, $n_1,\dots,n_k \in N'$ και $\sum_{j=1}^{k} m_j \otimes n_j = 0_{M'\otimes_R N'}$.

Απόδειξη: Ταυτίζοντας το τανυστικό γινόμενο $M\otimes_R N$ (με "ακρίβεια ισομορφισμού") με τον πηλικομόδιο $R^{(M\times N)}/\mathcal{F}_{M,N}(R)$ (κάνοντας χρήση του συμβολισμού του εισαχθέντος στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.10), η συνθήκη $\sum_{j=1}^{k} m_j \otimes n_j = 0_{M\otimes_R N}$ ισοδυναμεί με την $\sum_{j=1}^{k} \delta_{(m_j,n_j)} \in \mathcal{F}_{M,N}(R)$.

Τούτο σημαίνει ότι το άθροισμα $\sum_{j=1}^{k} \delta_{(m_j,n_j)}$ θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός (πεπερασμένου πλήθους) στοιχείων της μορφής (i) ή/και (ii) του ορσ. 3.3.9 (σελ. 141), πρβλ. πρόταση 1.2.7 (σελ. 6), δηλ.

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{k} \delta_{(m_j,n_j)} = \sum_{\nu=1}^{\ell} r_\nu \xi_\nu, \quad \text{όπου } r_1,\dots,r_\ell \in R,\ \xi_1,\dots,\xi_\ell \in \mathcal{F}_{M,N}(R).$$

Προσοχή! Για κάθε $(m,n) \in M\times N$ το άθροισμα των συντελεστών του $\delta_{(m,n)}$ που συναντώνται στο αριστερό μέλος της $(*)$ ισούται με το άθροισμα των συντελεστών του $\delta_{(m,n)}$ που συναντώνται στο δεξιό μέλος της $(*)$. Επειδή στην $(*)$ είναι παρόντα μόνον πεπερασμένου πλήθους στοιχεία τῆς βάσεως $\{\delta_{(m,n)} \mid (m,n) \in M \times N\}$, υπάρχει η δυνατότητα επιλογής ενός πεπερασμένως παραγομένου υπομοδίου M' τοῦ M και ενός πεπερασμένως παραγομένου υπομοδίου N' τοῦ N κατά τέτοιον τρόπο, ὥστε

$$(m,n) \in M' \times N' \iff \left(\begin{array}{l}\text{το } \delta_{(m,n)} \text{ εμφανίζεται σε κάποιο}\\ \text{από τα δύο μέλη τῆς } (*)\end{array}\right).$$

Αυτοῦ τοῦ είδους η επιλογή μᾶς διασφαλίζει τα ακόλουθα:

(i) $m_1, \ldots, m_k \in M'$ και $n_1, \ldots, n_k \in N'$,

(ii) $\sum_{j=1}^{k} \delta_{(m_j, n_j)} \in \mathcal{I}_{M',N'}(R)$.

Επειδή $M' \otimes_R N'$ ταυτίζεται (με "ακρίβεια ισομορφισμοῦ") με τον πηλικομόδιο $R^{(M' \times N')} / \mathcal{I}_{M',N'}(R)$, από την (ii) συνάγουμε ότι $\sum_{j=1}^{k} m_j \otimes n_j = 0_{M' \otimes_R N'}$.

□

3.5.24. Πρόταση: Εάν ο M είναι ένας R-μόδιος, για τον οποίο ισχύει ότι κάθε πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιός του περιέχεται σε κάποιον ισόπεδο υπομόδιό του, τότε και ο ίδιος ο M οφείλει να είναι ισόπεδος.

Απόδειξη: Έστω $f: L \to N$ ένας μονομορφισμός R-μοδίων και έστω $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_M \overline{\otimes} f)$. Επειδή $x \in M \otimes_R L$ το x γράφεται ως εξής:

$$x = \sum_{j=1}^{k} m_j \otimes l_j \quad \text{για κάποια} \left\{\begin{array}{l} m_1, \ldots, m_k \in M \\ l_1, \ldots, l_k \in L \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{l}\text{βλ. } 3.3.15\\ \text{σελ. } 143\end{array}\right).$$

Τότε $(\mathrm{Id}_M \overline{\otimes} f)(x) = \sum_{j=1}^{k} m_j \otimes f(l_j) = 0_{M \otimes_R N}$. Κατά το λήμμα 3.5.23 υπάρχει ένας πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος M' τοῦ M και ένας πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος N' τοῦ N, οὕτως ὥστε να ισχύει $m_1, \ldots, m_k \in M'$, $f(l_1), \ldots, f(l_k) \in N'$ και $\sum_{j=1}^{k} m_j \otimes f(l_j) = 0_{M' \otimes_R N'}$.
Εξ υποθέσεως, υπάρχει ένας ισόπεδος υπομόδιος M^* τοῦ M με $M' \subseteq M^*$.
Έστω ότι $i: M' \hookrightarrow M^*$, $h: N' \hookrightarrow N$, $j: M^* \hookrightarrow M$ είναι οι φυσικές ενθέσεις και ότι $y := \sum_{j=1}^{k} m_j \otimes l_j \in M' \otimes_R L$.

Θεωροῦμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & x \in M\otimes_R L \arrow[r, "Id_M \bar{\otimes} f"] & M\otimes_R N & \\
M'\otimes_R L \arrow[ur, "(j\circ i)\bar{\otimes} Id_L"] \arrow[r, "i\bar{\otimes} Id_L"'] & M^*\otimes_R L \arrow[u, "j\bar{\otimes} Id_L"'] \arrow[r, "Id_{M^*}\bar{\otimes} f"'] & M^*\otimes_R N \arrow[u, "j\bar{\otimes} Id_N"] & M'\otimes_R N' \arrow[l, "i\bar{\otimes} k"] \arrow[ul, "(j\circ i)\bar{\otimes} k"']
\end{tikzcd}$$

$y \in M'\otimes_R L$

Επειδή $\left(Id_{M^*}\bar{\otimes} f\right)\left((i\bar{\otimes} Id_L)(y)\right) = \left(Id_{M^*}\bar{\otimes} f\right)\left(\sum_{j=1}^{k} m_j\otimes \ell_j\right)$

$$= \sum_{j=1} m_j\otimes f(\ell_j) = (i\bar{\otimes} k)\left(\sum_{j=1} m_j\otimes f(\ell_j)\right) = (i\bar{\otimes} k)(0_{M'\otimes_R N'}) = 0_{M^*\otimes_R N}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow (i\bar{\otimes} Id_L)(y) \in Ker(Id_{M^*}\bar{\otimes} f) \\ Ker(Id_{M^*}\bar{\otimes} f) \underset{M^* \text{ ισόπεδος}}{=\!=\!=} \{0_{M^*\otimes_R L}\} \end{array}\right\} \Rightarrow (i\bar{\otimes} Id_L)(y) = \{0_{M^*\otimes_R L}\}$$

$$\Longrightarrow x = ((j\circ i)\bar{\otimes} Id_L)(y) = (j\bar{\otimes} Id_L)((i\bar{\otimes} Id_L)(y)) = \underbrace{(j\bar{\otimes} Id_L)(0_{M^*\otimes L})}_{0_{M\otimes_R L}}$$

οπότε $Ker(Id_M \bar{\otimes} f) = \{0_{M\otimes L}\} \underset{1.3.4.(v)}{\Longrightarrow} Id_M\bar{\otimes} f$ μονομορφισμός

$\Downarrow$ 3.5.13

M ισόπεδος. □

$\boxed{\text{3.5.26. Πόρισμα. Ο } \mathbb{Z}\text{-μόδιος } \mathbb{Q} \text{ είναι ισόπεδος, μη προβολικός.}}$

Απόδειξη: Έστω L ένας πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Q}$. Τότε $L = Lin(\{q_1,\dots,q_k\})$ με $q_j = \frac{a_j}{b_j}$, $a_j, b_j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, μκδ$(a_j,b_j)=1$, $\forall j\in\{1,\dots,k\}$. Έστω $c := $ εκπ$(b_1,\dots,b_k)$. Τότε κάθε $\ell\in L$ γράφεται ως ακέραιος γραμμικός συνδυασμός

$$\ell = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j q_j = \sum_{j=1}^{k}\frac{\lambda_j a_j}{b_j} = \frac{1}{c}\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j a_j d_j\right), \text{ όπου } d_j := \frac{c}{b_j} \quad \forall j\in\{1,\dots,k\}.$$

Άρα $L \subseteq \frac{1}{c}\mathbb{Z}$, κι επειδή $\frac{1}{c}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, το L είναι ισόμορφο ενός ιδεώδους τού $\mathbb{Z}$ (βλ. 1.2.3 (iii), σελ. 4). Όμως κάθε ιδεώδες τού $\mathbb{Z}$, θεωρούμενο ως υπομόδιος του $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Z}$, είναι ελεύθερο (βλ. Θεώρημα 2.4.15, σελ. 115). Άρα το I είναι ένας ισόπεδος $\mathbb{Z}$-μόδιος (βλ. πρόταση 3.2.3, σελ. 129, και Θεώρημα 3.5.22, σελ. 166). Ως εκ τούτου, ο ίδιος ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Q}$ είναι ισόπεδος βάσει της προτάσεως 3.5.24. Από την άλλη μεριά, ο $\mathbb{Q}$ δεν είναι προβολικός $\mathbb{Z}$-μόδιος, διότι αν ήταν, θα έπρεπε να είναι ελεύθερος (αφού ο $\mathbb{Z}$ είναι Π.Κ.Ι., βλ. άσκηση 15 (i) του 5ου φυλλαδίου). Εάν ο $\mathbb{Q}$ ήταν ελεύθερος $\mathbb{Z}$-μόδιος, τότε $\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}^{(J)} \cong \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}x_j$. Ο αριθμός 1 θα εγράφετο μονοσημάντως ως $1 = \sum_{j\in J} \lambda_j x_j$, όπου τα $\lambda_j \in \mathbb{Z}$ θα ήταν "σχεδόν όλα" αλλά "όχι όλα" $= 0$ (βλ. Θεώρημα 1.6.10, σελ. 42.) Επιλέγοντας έναν δείκτη $j_0 \in \{1,\ldots,k\}$ με $\lambda_{j_0} \neq 0$ και έναν ακέραιο $\xi \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ με $\xi \nmid \lambda_{j_0}$, το κλάσμα $\frac{1}{\xi} \in \mathbb{Q}$ θα εγράφετο μονοσημάντως ως $\frac{1}{\xi} = \sum_{j\in J} \mu_j x_j$, για κατάλληλα $\mu_j \in \mathbb{Z}$ ("σχεδόν όλα" $= 0$), οπότε θα είχαμε

$$1 = \sum_{j\in J} \lambda_j x_j = \sum_{j\in J} (\xi\mu_j) x_j \underset{\text{μονοσήμαντη έκφραση}}{\Longrightarrow} \lambda_{j_0} = \xi\mu_{j_0} \Rightarrow \xi \mid \lambda_{j_0}.$$

Άτοπο! $\square$

3.5.27. Σημείωση: Με τη βοήθεια της προτάσεως 3.2.3 και του Θεωρήματος 3.5.22 επιτυγχάνεται η ακόλουθη ιεράρχηση των μέχρι τούδε γνωστών μας "ειδικών" κλάσεων R-μοδίων:

$$\left\{\begin{matrix}\text{διανυσματικοί}\\ \text{χώροι}\end{matrix}\right\} \subsetneqq \left\{\begin{matrix}\text{ελεύθεροι}\\ \text{μόδιοι}\end{matrix}\right\} \subsetneqq \left\{\begin{matrix}\text{προβολικοί}\\ \text{μόδιοι}\end{matrix}\right\} \subsetneqq \left\{\begin{matrix}\text{ισόπεδοι}\\ \text{μόδιοι}\end{matrix}\right\} \subsetneqq \{\text{μόδιοι}\}$$

Μάλιστα, γνωρίζουμε και ότι οι ανωτέρω εγκλεισμοί είναι αυστηροί, καθότι:

(i) Κάθε ελεύθερος R-μόδιος με τον R όχι σώμα, δεν είναι R-δ.χ.,

(ii) Ο $\mathbb{Z}_{k\lambda}$-μόδιος $\mathbb{Z}_k$ (όπου $k,\lambda \in \mathbb{Z}$, $k,\lambda \geq 2$) είναι προβολικός, μη ελεύθερος (βλ. 3.2.7 (i)).

(iii) Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Q}$ είναι ισόπεδος, μη προβολικός (βλ. 3.5.26).

(iv) Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_k$ (όπου $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$) δεν είναι ισόπεδος (βλ. 3.5.16).

§ 3.6 Τανυστικό γινόμενο υπομοδίων και πηλικομοδίων

Στην παρούσα ενότητα μελετούμε τη συμπεριφορά τού τανυστικού γινομένου υπομοδίων και πηλικομοδίων δύο δοθέντων R-μοδίων M και N.

Κατ' αρχάς υποθέτουμε ότι ο M' είναι τυχών υπομόδιος ενός R-μοδίου M και ο N' τυχών υπομόδιος ενός R-μοδίου N. Εάν οι $i_{M'}: M' \hookrightarrow M$ και $i_{N'}: N' \hookrightarrow N$ είναι οι συνήθεις ενθετικές απεικονίσεις, τότε τίθεται ευλόγως το ερώτημα τού κατά πόσον η απεικόνιση

$$i_{M'} \bar{\otimes} i_{N'} : M' \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N$$

αποτελεί έναν μονομορφισμό R-μοδίων και -ως εκ τούτου- το κατά πόσον είναι δυνατή μια "φυσική" θεώρηση του $M' \otimes_R N'$ ως υπομοδίου τού $M \otimes_R N$ <u>κατόπιν ταυτίσεως τού</u> (εκ προοιμίου σχηματιζομένου) <u>$M' \otimes_R N'$ με την εικόνα του μέσω της</u> $i_{M'} \bar{\otimes} i_{N'}$. Η απάντηση, σύμφωνα και με τα όσα προαναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, <u>δεν είναι καταφατική</u> εάν δεν πληρούνται ορισμένες επιπρόσθετες προϋποθέσεις!

3.6.1. Παράδειγμα. Εάν $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, $R = \mathbb{Z}$, $M' = M = \mathbb{Z}_k \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ και $N' = k\mathbb{Z} \subsetneqq N = \mathbb{Z}$, τότε $N = \mathbb{Z} \cong N' = k\mathbb{Z}$ (μέσω της $\lambda \mapsto k\lambda$) και, συνακολούθως, $\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \underset{3.4.3}{\cong} \mathbb{Z}_k (\neq 0)$, αλλ' εντούτοις η

$$Id_{M'} \bar{\otimes} i_{N'} : \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} k\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$$

είναι <u>η μηδενική απεικόνιση</u>, διότι για κάθε $k\lambda \in N'$ (όπου $\lambda \in N$) και για κάθε $[\xi]_k \in M'$ έχουμε $(Id_{M'} \bar{\otimes} i_{N'})([\xi]_k \otimes k\lambda) = [\xi]_k \otimes k\lambda = k([\xi]_k \otimes \lambda)$ $= (k[\xi]_k \otimes \lambda) = [k\xi]_k \otimes \lambda = [0]_k \otimes \lambda = 0_{\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}}$. Επομένως, $Ker(Id_{M'} \bar{\otimes} i_{N'}) \neq \{0\}$ και $Im(Id_{M'} \bar{\otimes} i_{N'}) = \{0\} \subsetneqq Im(Id_{M'}) \otimes_{\mathbb{Z}} Im(i_{N'})$.

3.6.2. Θεώρημα. Έστω ότι ο M' είναι ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M, ο N' ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου N, και ότι οι $i_{M'}: M' \hookrightarrow M$, $i_{N'}: N' \hookrightarrow N$, είναι οι συνήθεις ενθετικές απεικονίσεις. Εάν ισχύει μία τουλάχιστον εκ των δύο ακολούθων συνθηκών: (i) οι M' και N είναι ισόπεδοι,
(ii) οι M και N' είναι ισόπεδοι,
τότε η απεικόνιση $i_{M'} \bar{\otimes} i_{N'} : M' \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N$ αποτελεί έναν μονομορφισμό R-μοδίων.

<u>Απόδειξη:</u> Εάν ισχύει μία τουλάχιστον εκ των συνθηκών (i), (ii), τότε η $i_{M'} \bar{\otimes} i_{N'}$ είναι μονομορφισμός βάσει του πορίσματος 3.5.17, σελ. 161. □

Εν συνεχεία στρεφόμαστε σε έναν "μέχρις ισομορφισμού" χαρακτηρισμό του τανυστικού γινομένου δυο πηλικομοδίων.

<u>3.6.3. Θεώρημα.</u> Εάν ο M' είναι υπομόδιος ενός R-μοδίου M και ο N' υπομόδιος ενός R-μοδίου N, τότε υφίσταται ο ισομορφισμός

$$\boxed{M/M' \otimes_R N/N' \cong M \otimes_R N / (\mathrm{Im}(Id_M \bar{\otimes} i_{N'}) + \mathrm{Im}(i_{M'} \bar{\otimes} Id_N))}$$

όπου οι

$i_{M'} : M' \hookrightarrow M$, $i_{N'} : N' \hookrightarrow N$, συμβολίζουν τις συνήθεις ενθετικές απεικονίσεις.

<u>Απόδειξη:</u> Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.5.18 (σελ. 162) για τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow M' \xhookrightarrow{i_{M'}} M \xrightarrow{\pi_{M'}} M/M' \longrightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow N' \xhookrightarrow{i_{N'}} N \xrightarrow{\pi_{N'}} N/N' \longrightarrow 0$$

(όπου $\pi_{M'}$, $\pi_{N'}$ οι φυσικοί επιμορφισμοί) καταλήγουμε στον ανωτέρω ισομορφισμό. □

<u>3.6.4. Πόρισμα.</u> Εάν ο M είναι ένας R-μόδιος και το I ένα ιδεώδες του R, τότε υφίσταται ο ισομορφισμός $\boxed{(R/I) \otimes_R M \cong M/(IM)}$.

<u>Απόδειξη.</u> Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.6.3 λαμβάνουμε

$$(R/I) \otimes_R M \cong (R \otimes_R M)/(\mathrm{Im}(i_I \bar{\otimes} Id_M)) \underset{3.4.3}{\cong} M/(IM). \ \square$$

<u>3.6.5. Πόρισμα.</u> Εάν τα I_1, I_2 είναι δυο ιδεώδη ενός δακτυλίου αναφοράς R, τότε $\boxed{(R/I_1) \otimes_R (R/I_2) \cong R/I_1 + I_2}$

<u>Απόδειξη.</u> Εφαρμόζοντας το θεώρημα 3.6.3 για τους μοδίους $M = N = R$, $M' = I_1$ και $N' = I_2$, λαμβάνουμε $(R/I_1) \otimes_R (R/I_2) \cong (R \otimes_R R)/(R \otimes_R I_2 + I_1 \otimes_R R)$. Κατά το θεώρημα 3.4.3, $R \otimes_R R \cong R$, $R \otimes_R I_2 \cong I_2$, $I_1 \otimes_R R \cong I_1$, απ' όπου έπεται ο ανωτέρω ισομορφισμός. □

3.6.6. Θεώρημα Εάν ο M' είναι υπομόδιος ενός ισόπεδου R-μοδίου M και ο N' υπομόδιος ενός ισόπεδου R-μοδίου N, τότε υφίσταται ο ισομορφισμός

$$\boxed{(M/M')\otimes_R(N/N') \cong (M\otimes_R N)/(M'\otimes_R N + M\otimes_R N')}$$

ο οποίος επάγεται από την $\pi_{M'}\bar{\otimes}\pi_{N'}: M\otimes_R N \longrightarrow (M/M')\otimes_R(N/N')$, όπου $\pi_{M'}: M\to M/M'$, $\pi_{N'}: N\to N/N'$ είναι οι φυσικοί επιμορφισμοί.

Απόδειξη: Επειδή αμφότερες οι $\pi_{M'}, \pi_{N'}$ είναι επιμορφισμοί, η απεικόνιση $\pi_{M'}\bar{\otimes}\pi_{N'}$ είναι επιμορφισμός (βλ. πρόταση 3.5.6 (ii), σελ. 157). Επομένως, σύμφωνα με το 1ο θεώρημα ισομορφισμών μοδίων 1.4.8 (σελ. 19),

$$(M\otimes_R N)/\operatorname{Ker}(\pi_{M'}\bar{\otimes}\pi_{N'}) \cong (M/M')\otimes_R(N/N').$$

Εξ αυτού έπεται ο ανωτέρω ισομορφισμός εάν λάβουμε υπ' όψιν το πόρισμα 3.5.19 (σελ. 163) και το ότι $\operatorname{Ker}(\pi_{M'})=M'$, $\operatorname{Ker}(\pi_{N'})=N'$. □

3.6.7. Πόρισμα Εάν οι M και N είναι δυο ισόπεδοι R-μόδιοι, τότε υφίσταται ο εξής ισομορφισμός R-μοδίων:

$$\boxed{[(M+N)/M]\otimes_R[(M+N)/N] \cong (M\otimes_R N)/((M\cap N)\otimes_R N + M\otimes_R(M\cap N))}$$

Απόδειξη: Σύμφωνα με το 2ο θεώρημα ισομορφισμών μοδίων 1.4.11 (σελ. 20) έχουμε $[(M+N)/M]\otimes_R[(M+N)/N] \cong [N/(M\cap N)]\otimes_R[M/(M\cap N)]$. Υπολείπεται η εφαρμογή του θεωρήματος 3.6.6 για τους $M\cap N, M, M\cap N, N$. □

3.6.8. Πόρισμα. Έστω ότι ο M' είναι υπομόδιος ενός μη τετριμμένου R-μοδίου M και ότι ο N' είναι υπομόδιος ενός μη τετριμμένου R-μοδίου N. Εάν ο δακτύλιος R είναι ακεραία περιοχή, οι M', N' ισόπεδοι και οι $M, M/M', N, N/N'$ ελεύθεροι, τότε ισχύει η διπλή συνεπαγωγή:

$$M'\otimes_R N' = M\otimes_R N \iff (M=M' \text{ και } N=N')$$

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή "$\Longrightarrow$", διότι η "$\Longleftarrow$" είναι προφανής. Επειδή οι M', N' είναι ισόπεδοι, ταυτίζοντας τους $M'\otimes_R N'$ και $M'\otimes_R N$ με τις εικόνες τους μέσω των μονομορφισμών $\mathrm{Id}_{M'}\bar{\otimes}\, i_{N'}$ και

$i_{M'} \overline{\otimes} Id_N$, αντιστοίχως, μπορούμε να γράψουμε
$M \otimes_R N = M' \otimes_R N' \subseteq M' \otimes_R N \subseteq M \otimes_R N \Longrightarrow M' \otimes_R N = M \otimes_R N$.
Επομένως, εφαρμόζοντας το θεώρημα 3.6.6 για τους M', M, $\{0_N\}$, N, λαμβάνουμε $M/M' \otimes_R N \cong (M \otimes_R N)/(M' \otimes_R N) = \{0_{M \otimes_R N}\}$.
Επειδή ο N δεν είναι τετριμμένος, από το πόρισμα 3.4.10 (σελ. 153) συμπεραίνουμε ότι ο M/M' είναι τετριμμένος, οπότε $M = M'$. Κατ' αναλογίαν συμπεραίνουμε ότι $M \otimes_R N' = M \otimes_R N$, απ' όπου έπεται η ισότητα $M' = M$. □

3.6.9. Πόρισμα. Έστω ότι οι M, M', N, N' είναι τέσσερεις R-μόδιοι και $f \in Hom_R(M, M')$, $g \in Hom_R(N, N')$. Εάν ο δακτύλιος R είναι ακεραία περιοχή, οι $Im(f)$, $Im(g)$ ισόπεδοι και οι M', $M'/Im(f)$, N', $N'/Im(g)$ ελεύθεροι, τότε $\boxed{Im(f \overline{\otimes} g) = Im(f) \otimes_R Im(g)}$ και ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Εάν οι M', N' δεν είναι τετριμμένοι, τότε

$$f \overline{\otimes} g \text{ επιμορφισμός} \Leftrightarrow \text{αμφότερες οι } f, g \text{ επιμορφισμοί.}$$

(ii) Εάν κανείς εκ των M, M', N, N' δεν είναι τετριμμένος και εάν -ταυτοχρόνως- οι $Ker(f)$, $Ker(g)$, M, N είναι ελεύθεροι μόδιοι και ισχύει η ισότητα $Ker(f \overline{\otimes} g) = M \otimes_R Ker(g) + Ker(f) \otimes_R N$, τότε

$$f \overline{\otimes} g \text{ ισομορφισμός} \Leftrightarrow \text{αμφότερες οι } f, g \text{ ισομορφισμοί.}$$

Απόδειξη: Επειδή οι $Im(g)$ και M' (ή επειδή, αντιστοίχως, οι $Im(f)$ και N') είναι ισόπεδοι, η απεικόνιση $i_{Im(f)} \overline{\otimes} i_{Im(g)} : Im(f) \otimes_R Im(g) \longrightarrow M' \otimes_R N'$ είναι μονομορφισμός (βλ. πόρισμα 3.5.17, σελ. 161), όπου οι $i_{Im(f)} : Im(f) \hookrightarrow M'$, $i_{Im(g)} : Im(g) \hookrightarrow N'$ συμβολίζουν τις φυσικές ενθετικές απεικονίσεις. Κατά συνέπειαν, ταυτίζοντας το $Im(f) \otimes_R Im(g)$ με την εικόνα του
$(i_{Im(f)} \overline{\otimes} i_{Im(g)})(Im(f) \otimes_R Im(g)) = i_{Im(f)}(Im(f)) \otimes_R i_{Im(g)}(Im(g))$
μέσω της $i_{Im(f)} \overline{\otimes} i_{Im(g)}$, διαπιστώνουμε ότι αυτό ισούται με την εικόνα $Im(f \overline{\otimes} g)$ της $f \overline{\otimes} g$, καθότι και τα δυο τους παράγονται από το σύνολο $\{f(m) \otimes g(n) \mid (m, n) \in M \times N\}$.
(i) Η μία κατεύθυνση του ισχυρισμού έχει αποδειχθεί στην πρόταση 3.5.6 (ii) (σελ. 156-157) χωρίς, μάλιστα, να απαιτείται η εκπλήρωση των ανωτέρω αναγραφομένων προϋποθέσεων. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε τη συνεπαγωγή "$\Rightarrow$".

Υποθέτοντας ότι η $f\bar{\otimes}g$ είναι επιμορφισμός έχουμε

$$M'\otimes_R N' = \mathrm{Im}(f\bar{\otimes}g) \underset{\substack{\text{βάσει του ό,τι έχουμε} \\ \text{αποδείξει προηγουμένως}}}{=\!=\!=\!=} \mathrm{Im}(f)\otimes_R \mathrm{Im}(g).$$

Θέτοντας σε εφαρμογή το πόρισμα 3.6.8 λαμβάνουμε

$(\mathrm{Im}(f)=M'$ και $\mathrm{Im}(g)=N') \Longrightarrow$ αμφότερες οι f και g είναι επιμορφισμοί.

(ii) Όπως είδαμε στην πρόταση 3.5.6 (iii), εάν αμφότερες οι f και g είναι ισομορφισμοί, τότε και η $f\bar{\otimes}g$ είναι ισομορφισμός (και μάλιστα, χωρίς περαιτέρω προαπαιτούμενες συνθήκες). Το αντίστροφο (υπό τις προϋποθέσεις που αναφέρονται στην εκφώνηση του παρόντος πορίσματος) έπεται από τον συνδυασμό του (i) και του πορίσματος 3.5.19 (σελ. 163-164). $\square$

§ 3.7 Συσχετισμός τανυστικών γινομένων και μοδίων ομομορφισμών

Η τελευταία αυτή ενότητα του κεφαλαίου 3 είναι αφιερωμένη στην περιγραφή του συσχετισμού των "Hom" και "$\otimes$".

3.7.1 Λήμμα: Εάν οι M, N, L είναι τρεις R-μόδιοι, τότε υφίσταται ένας ισομορφισμός R-μοδίων

$$\boxed{\mathrm{Bil}_R(M,N;L) \cong \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, L)}$$

Απόδειξη: Κατ' αρχάς το σύνολο $\mathrm{Bil}_R(M,N;L)$ είναι εφοδιασμένο με τη δομή ενός R-μοδίου όντας υπομόδιος του $L^{M\times N}$ (βλ. 1.1.2 (vi), σελ. 2, και 3.3.1, σελ. 137). Έστω $\varphi: M\times N \longrightarrow M\otimes_R N$ η τανυστική απεικόνιση του $M\otimes_R N$. Ορίζουμε ως $\Theta: \mathrm{Bil}_R(M,N;L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, L)$ μέσω του τύπου $\Theta(\beta) := \tilde{\beta}$, $\forall \beta \in \mathrm{Bil}_R(M,N;L)$, όπου $\tilde{\beta}$ είναι ο μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός για τον οποίον ισχύει $\tilde{\beta}\circ\varphi = \beta$ (βλ. 3.3.5, 3.3.7, 3.3.10). Προφανώς, $\Theta \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Bil}_R(M,N;L), \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, L))$ και όταν $\Theta(\beta_1)=\Theta(\beta_2)$ για κάποιες $\beta_1,\beta_2 \in \mathrm{Bil}_R(M,N;L)$, τότε $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_2$ $\Longrightarrow \tilde{\beta}_1\circ\varphi = \tilde{\beta}_2\circ\varphi \Longrightarrow \beta_1=\beta_2$, οπότε η Θ είναι μονομορφισμός. Επίσης, εάν $g \in \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, L)$, τότε $g\circ\varphi \in \mathrm{Bil}_R(M,N;L)$ με $\Theta(g\circ\varphi) = \widetilde{g\circ\varphi} = g$, λόγω του μονοσημάντου του ομομορφισμού που καθιστά

Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "g\circ\varphi"'] & M \otimes_R N \arrow[d, "g"] \arrow[d, dashed, bend left=60, "\widetilde{g\circ\varphi}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & L \end{tikzcd}$$

μεταθετικό (βλ. 3.3.7).

Άρα η Θ είναι <u>και</u> επιμορφισμός. □

<u>3.7.2. Θεώρημα</u>. Εάν οι M, N, L είναι τρεις R-μόδιοι, τότε υφίστανται κανονιστικοί ισομορφισμοί R-μοδίων:

$$\boxed{\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,L)) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Bil}_R(M,N;L) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, phantom, "\|\wr"] & \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, L) \\ & \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(M,L)) & \end{tikzcd}}$$

<u>Απόδειξη:</u> Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$\begin{aligned} \mathrm{Bil}_R(M,N;L) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,L)) \\ \beta &\longmapsto (m \mapsto (n \mapsto \beta(m,n))) \end{aligned}$$

είναι ισομορφισμός έχοντας τον

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,L)) &\longrightarrow \mathrm{Bil}_R(M,N;L) \\ \alpha &\longmapsto ((m,n) \mapsto (\alpha(m))(n)) \end{aligned}$$

ως αντίστροφό του και ότι ο ομομορφισμός R-μοδίων

$$\begin{aligned} \mathrm{Bil}_R(M,N;L) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(M,L)) \\ \beta &\longmapsto (n \mapsto (m \mapsto \beta(m,n))) \end{aligned}$$

είναι ισομορφισμός έχοντας τον

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(M,L)) &\longrightarrow \mathrm{Bil}_R(M,N;L) \\ \alpha &\longmapsto ((m,n) \mapsto (\alpha(n))(m)) \end{aligned}$$

ως αντίστροφό του. Υπολείπεται η εφαρμογή του λήμματος 3.7.1. □

<u>3.7.3. Σημείωση</u>. Εάν οι M, N, L είναι τρεις R-μόδιοι και ν η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \nu : \mathrm{Hom}_R(M,N) \times L &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N\otimes_R L) \\ (f, l) &\longmapsto \nu(f,l) \end{aligned}$$

η οριζόμενη από τον τύπο

$$\nu(f,l)(m) := f(m)\otimes l, \quad \forall (m,l)\in M\times L \text{ και } \forall f\in \mathrm{Hom}_R(M,N),$$

τότε η ν είναι διγραμμική και –ως εκ τούτου– υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων $\tilde{\nu}$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(M,N)\times L \arrow[r] \arrow[dr, "\nu"'] & \mathrm{Hom}_R(M,N)\otimes_R L \arrow[d, "\tilde{\nu}"] \\ & \mathrm{Hom}_R(M, N\otimes_R L) \end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

(Προφανώς, $\tilde{\nu}(f\otimes l)(m) = f(m)\otimes l$.)

3.7.4. Ορισμός. Έστω ότι οι M, N είναι δύο δοθέντες R-μόδιοι. Για οιονδήποτε R-μόδιο L εισάγουμε τους συμβολισμούς

$$\boxed{S(L) := \mathrm{Hom}_R(M,N)\otimes_R L}\ ,\quad \boxed{S'(L) := \mathrm{Hom}_R(M, N\otimes_R L)}$$

και για οιονδήποτε ομομορφισμό R-μοδίων $f: L\to L'$ τους συμβολισμούς

$$\boxed{S(f) := \mathrm{Id}_{\mathrm{Hom}_R(M,N)}\,\overline{\otimes}\, f}\quad \text{και}\quad \boxed{S'(f) := \mathrm{Hom}(\mathrm{Id}_M, \mathrm{Id}_N\overline{\otimes} f)}.$$

Επίσης, αντί $\tilde{\nu}$ (για τον ομομορφισμό τον εισαχθέντα στην 3.7.3) γράφουμε (στην προκειμένη περίπτωση) $\tilde{\nu}_L$ (για να υποδηλώσουμε το ότι ο L είναι αυθαιρέτως επιλεγμένος).

3.7.5. Λήμμα. Έστω ότι οι M, N είναι δύο δοθέντες R-μόδιοι. Τότε για κάθε $f\in\mathrm{Hom}_R(L,L')$ (όπου L, L' τυχόντες R-μόδιοι) το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} S(L) \arrow[r, "\tilde{\nu}_L"] \arrow[d, "S(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S'(L) \arrow[d, "S'(f)"] \\ S(L') \arrow[r, "\tilde{\nu}_{L'}"'] & S'(L') \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη: Για κάθε αποσυντεθειμένο τανυστή $g\otimes l$, όπου $g\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$ και $l\in L$, έχουμε: $(S'(f)\circ\tilde{\nu}_L)(g\otimes l) = S'(f)(\tilde{\nu}_L(g\otimes l))$ με
$S'(f)(\tilde{\nu}_L(g\otimes l)(m)) = S'(f)(g(m)\otimes l) = g(m)\otimes f(l)$, $\forall m\in M$,
και $(\tilde{\nu}_{L'}\circ S(f))(g,l) = \tilde{\nu}_{L'}(g\otimes f(l))$ με
$\tilde{\nu}_{L'}(g\otimes f(l)) = g(m)\otimes f(l)$, $\forall m\in M$. Κατά συνέπειαν,

$$S'(f)\circ\tilde{\nu}_L = \tilde{\nu}_{L'}\circ S(f).$$

□

3.7.6. Λήμμα. Έστω ότι οι M, N είναι δύο δοθέντες R-μόδιοι και ότι ότι ο L είναι ένας R-μόδιος γραφόμενος ως ευθύ άθροισμα $L = L_1 \oplus L_2$ δύο υπομοδίων του L_1 και L_2. Εάν οι $i_1 : L_1 \hookrightarrow L$, $i_2 : L_2 \hookrightarrow L$ είναι οι φυσικές ενθετικές απεικονίσεις, τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
S(L_1) \oplus S(L_2) \arrow[r, "\tilde{\nu}_{L_1} \oplus \tilde{\nu}_{L_2}"] \arrow[d, "S(i_1) \oplus S(i_2)"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S'(L_1) \oplus S'(L_2) \arrow[d, "\cong"', "S'(i_1) \oplus S'(i_2)"] \\
S(L) \arrow[r, "\tilde{\nu}_L"'] & S'(L)
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και τα κατακόρυφα βέλη του υποδηλούν ισομορφισμούς.

Σκιαγράφηση αποδείξεως: Η μεταθετικότητα τού διαγράμματος έπεται από το λήμμα 3.7.5. Η απόδειξη τού ότι οι $S(i_1) \oplus S(i_2)$ και $S'(i_1) \oplus S'(i_2)$ είναι ισομορφισμοί στηρίζεται στον ορισμό τού ευθέος αθροίσματος, στο θεώρημα 3.4.5 (σελ. 150) και στο πόρισμα 3.1.11 (ii) (σελ. 124). $\square$

3.7.8. Ορισμός. Έστω ότι οι N, L είναι δύο δοθέντες R-μόδιοι. Για οιονδήποτε R-μόδιο M εισάγουμε τους συμβολισμούς

$$\boxed{T(M) := \mathrm{Hom}_R(M, N) \otimes_R L}\ , \quad \boxed{T'(M) := \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_R L)}$$

και για οιονδήποτε ομομορφισμό R-μοδίων $f : M \to M'$ τους συμβολισμούς

$$\boxed{T(f) := \mathrm{Hom}(f, \mathrm{Id}_N) \,\overline{\otimes}\, \mathrm{Id}_L}\ , \quad \boxed{T'(f) := \mathrm{Hom}(f, \mathrm{Id}_N \,\overline{\otimes}\, \mathrm{Id}_L)}.$$

Επίσης, αντί $\tilde{\nu}$ (για τον ομομορφισμό τον εισαχθέντα στην 3.7.3) γράφουμε (στην προκειμένη περίπτωση) $\tilde{\nu}_M$ (για να υποδηλώσουμε ότι ο M είναι αυθαιρέτως επιλεγμένος).

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ορισμό 3.7.8, τον ορισμό τού ευθέος αθροίσματος, το θεώρημα 3.1.19 (σελ. 128) και το θεώρημα 3.4.5 (σελ. 150), μπορεί κανείς να αποδείξει τα ακόλουθα λήμματα (κατ' αναλογίαν προς τα λήμματα 3.7.5 και 3.7.6).

3.7.9 Λήμμα. Έστω ότι οι N, L είναι δύο δοθέντες R-μόδιοι. Τότε για κάθε $f \in Hom_R(M, M')$ (όπου M, M' τυχόντες R-μόδιοι) το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T(M') \arrow[r, "\tilde{\nu}_{M'}"] \arrow[d, "T(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T'(M') \arrow[d, "T'(f)"] \\ T(M) \arrow[r, "\tilde{\nu}_M"'] & T'(M) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

3.7.10. Λήμμα. Έστω ότι οι N, L είναι δύο δοθέντες R-μόδιοι και ότι ο M είναι ένας R-μόδιος γραφόμενος ως ευθύ άθροισμα $M = M_1 \oplus M_2$ δυο υπομοδίων του M_1 και M_2. Εάν οι $pr_1 : M \to M_1$, $pr_2 : M \to M_2$ είναι οι φυσικές προβολές τού M επί των M_1, M_2, τότε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} T(M_1) \oplus T(M_2) \arrow[r, dash, "\tilde{\nu}_{M_1} \oplus \tilde{\nu}_{M_2}"] \arrow[d, "T(pr_1) \oplus T(pr_2)"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T'(M_1) \oplus T'(M_2) \arrow[d, "T'(pr_1) \oplus T'(pr_2)", "\cong"'] \\ T(M) \arrow[r, "\tilde{\nu}_M"'] & T'(M) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικότητα και τα κατακόρυφα βέλη του υποδηλούν ισομορφισμούς.

3.7.11. Θεώρημα. Έστω ότι οι M, N, L είναι τρεις (τυχόντες) R-μόδιοι και ότι ο $\boxed{\tilde{\nu} : Hom_R(M, N) \otimes_R L \longrightarrow Hom_R(M, N \otimes_R L)}$ είναι ο ομομορφισμός R-μοδίων ο ορισθείς στην 3.7.3. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Εάν ο L είναι προβολικός, τότε ο $\tilde{\nu}$ είναι μονομορφισμός.

(ii) Εάν ο L είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε ο $\tilde{\nu}$ είναι ισομορφισμός.

(iii) Εάν ο M είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε ο $\tilde{\nu}$ είναι ισομορφισμός.

<u>Απόδειξη:</u> Ας θεωρήσουμε –κατ' αρχάς– τον $\tilde{\nu}$ ως $\tilde{\nu}_L$ ("παγιώνοντας" τους M, N, βλ. 3.7.4) κι ας υποθέσουμε ότι ο L γράφεται ως ευθύ άθροισμα $L_1 \oplus L_2$. Κατά το λήμμα 3.7.6. (σελ. 177) και το πόρισμα 3.1.11 (σελ. 124) ο $\tilde{\nu}_L$ είναι μονομορφισμός (και αντιστοίχως, ισομορφισμός) εάν και μόνον εάν αμφότεροι οι $\tilde{\nu}_{L_1}, \tilde{\nu}_{L_2}$ είναι μονομορφισμοί (και αντιστοίχως, ισομορφισμοί).

(i) Λόγω της ανωτέρω ιδιότητας, αρκεί να αποδειχθεί ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής όταν ο L είναι <u>ελεύθερος</u>. (Ως γνωστόν, ένας R-μόδιος είναι προβολικός εάν και μόνον εάν είναι ευθύς προσθετέος ενός ελευθέρου R-μοδίου. Ως εκ τούτου, δεν βλάπτεται η γενικότητα υποθέτοντας ότι ο L είναι ελεύθερος.) Έστω $(l_j)_{j\in J}$ μια βάση του L. Τότε κάθε τανυστής του $\mathrm{Hom}_R(M,N)\otimes_R L$ γράφεται μονοσημάντως υπό τη μορφή $\sum_{j\in J} f_j \otimes l_j$, για κάποιο $(f_j)_{j\in J} \in \mathrm{Hom}_R(M,N)^{(J)}$ (βλ. πόρισμα 3.4.9, σελ. 152). Η εικόνα του $\sum_{j\in J} f_j \otimes l_j$ μέσω της $\tilde{\nu}$ είναι ο ομομορφισμός $M \ni m \longmapsto \sum_{j\in J} f_j(m)\otimes l_j \in N\otimes_R L$, ο οποίος είναι ο μηδενικός ομομορφισμός εάν και μόνον εάν $f_j(m) = 0_N$, $\forall m \in M$ και $\forall j \in J$, δηλαδή εάν και μόνον εάν $f_j = 0$, $\forall j \in J$. Άρα ο $\tilde{\nu}$ είναι όντως μονομορφισμός.

(ii) Όπως και στο (i), μπορούμε δίχως βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι ο L είναι <u>ελεύθερος</u>. Εάν ο L έχει μια πεπερασμένη βάση $\{l_1,\dots,l_k\}$, τότε, κάνοντας χρήση του αρχικού μας επιχειρήματος και μαθηματικής επαγωγής επί του k, είναι δυνατόν να αναγάγουμε το αποδεικτέο στην περίπτωση κατά την οποία $L = R$. Όμως σε αυτήν την περίπτωση ο $\tilde{\nu}$ είναι <u>προφανώς</u> ισομορφισμός (πρβλ. θεώρημα 3.4.3, σελ. 148).

(iii) Θεωρώντας τον $\tilde{\nu}$ ως $\tilde{\nu}_M$ ("παγιώνοντας" τους N, L, βλ. 3.7.8) και υποθέτοντας ότι ο M γράφεται ως ευθύ άθροισμα $M_1 \oplus M_2$, έχουμε (λόγω του λήμματος 3.7.10) τη δυνατότητα αναγωγής του προβλήματος στην περίπτωση κατά την οποία ο M είναι <u>ελεύθερος</u> R-μόδιος (καθότι $\tilde{\nu}_M$ ισομορφισμός $\Leftrightarrow \tilde{\nu}_{M_1}, \tilde{\nu}_{M_2}$ ισομορφισμοί). Εάν ο M διαθέτει μια πεπερασμένη βάση, τότε, επιχειρηματολογώντας όπως στο (ii), μπορούμε να αναγάγουμε το αποδεικτέο στην περίπτωση κατά την οποία $M = R$. Όμως σε αυτήν την περίπτωση ο $\tilde{\nu}$ είναι <u>προφανώς</u> ισομορφισμός (πρβλ. πρόταση 3.1.1, σελ. 120). □

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή τού Θεωρήματος (βλ. Πόρισμα 3.7.19) περιλαμβάνει την έννοια τού "δυϊκού" ενός R-μοδίου, η οποία γενικεύει την οικεία μας έννοια τού "δυϊκού" ενός διανυσματικού χώρου (που συναντούμε στη Γραμμική Άλγεβρα).

3.7.12. Ορισμός. Εάν ο M είναι ένας R-μόδιος, τότε ο R-μόδιος

$\boxed{M^\vee := \mathrm{Hom}_R(M,R)}$ καλείται ο δυϊκός μόδιος τού M

και ο $\boxed{M^{\vee\vee} := (M^\vee)^\vee}$ ο διπλός δυϊκός μόδιος τού M.

(Τα στοιχεία τού M καλούνται ενίοτε γραμμικές μορφές τού M.)

3.7.13. Λήμμα. Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $(x_j)_{j\in J}$ μια βάση του. Για κάθε $j\in J$ ας συμβολίσουμε ως $x_j^\vee : M \longrightarrow R$ τον (μοναδικό) ομομορφισμό R-μοδίων για τον οποίο ισχύει: $x_j^\vee(x_k) := \underbrace{\delta_{jk}}_{\text{δέλτα Kronecker}} = \begin{cases} 0_R, & \text{εάν } j\neq k, \\ 1_R, & \text{εάν } j=k. \end{cases}$

Τότε το $\{x_j \mid j\in J\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο τού $M^\vee$.

Απόδειξη: Προφανώς, $x_j^\vee \in M^\vee$, $\forall j\in J$, και $x_j^\vee = x_k^\vee \Leftrightarrow j=k$. Εάν $\{j_1,\dots,j_\ell\}\subseteq J$, $\ell\in\mathbb{N}$, και $\sum_{\nu=1}^{\ell}\lambda_\nu x_{j_\nu}^\vee = 0_{M^\vee}$ για κάποια $\lambda_1,\dots,\lambda_\ell\in R$, τότε

$$0_R = \Big(\sum_{\nu=1}^{\ell}\lambda_\nu x_{j_\nu}^\vee\Big)(x_{j_\mu}) = \sum_{\nu=1}^{\ell}\lambda_\nu\big(x_{j_\nu}^\vee(x_{j_\mu})\big) = \lambda_\mu,\ \forall \mu\in\{1,\dots,\ell\},$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

3.7.14. Πόρισμα. Εάν ένα $m\in M$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός $m=\sum_{j\in J}\lambda_j x_j$ (όπου τα λ_j είναι "σχεδόν όλα" $=0_R$), τότε

$$x_j^\vee(m) = \lambda_j \quad , \quad \forall j\in J$$

Απόδειξη: Προφανώς, $x_k^\vee(m) = x_k^\vee\big(\sum_{j\in J}\lambda_j x_j\big) = \sum_{j\in J}\lambda_j(x_k^\vee(x_j)) = \lambda_k, \forall k\in J.$ □

3.7.15 Πόρισμα. Εάν το J είναι πεπερασμένο, ας πούμε το $J=\{1,\dots,k\}$, τότε το σύνολο $\{x_1^\vee,\dots,x_k^\vee\}$ αποτελεί μια βάση τού M.

Απόδειξη: Έστω τυχούσα γραμμική μορφή $f\in M^\vee$ και τυχόν $m\in M$.

Εκφράζοντας το m ως γραμμικό συνδυασμό $m=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x_j$, για κατάλληλα $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in B$, λαμβάνουμε

$$\left(\sum_{j=1}^{k}\left(f(x_j)\,x_j^{\vee}\right)\right)(m)=\sum_{j=1}^{k} f(x_j)\,x_j^{\vee}(m) \underset{3.7.14}{=\!=\!=} \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\, f(x_j)=f(m),$$

οπότε $f=\sum_{j=1}^{k} f(x_j)\,x_j^{\vee}$. Κατά συνέπειαν, $\mathrm{Lin}(\{x_1^{\vee},\dots,x_k^{\vee}\})=M^{\vee}$. Επειδή το σύνολο $\{x_1^{\vee},\dots,x_k^{\vee}\}$ είναι και γραμμικώς ανεξάρτητο (βλ. 3.7.13), ο ισχυρισμός είναι αληθής. $\square$

<u>3.7.16. Ορισμός.</u> Εάν ο M είναι ένας πεπερασμένως παραγόμενος, ελεύθερος B-μόδιος και το σύνολο $X=\{x_1,\dots,x_k\}$ είναι μια βάση του, τότε η βάση $\{x_1^{\vee},\dots,x_k^{\vee}\}$ του δυϊκού του μοδίου $M^{\vee}$ καλείται <u>δυϊκή της X</u>.

<u>3.7.17. Σημείωση.</u> Εάν ο M είναι ένας B-μόδιος, τότε υπάρχει πάντοτε ένας ομομορφισμός $\Phi_M \in \mathrm{Hom}_R(M, M^{\vee\vee})$, ο λεγόμενος <u>κανονικός ομομορφισμός από τον M στον διπλό δυϊκό του $M^{\vee\vee}$</u>, οριζόμενος ως εξής:

$$M \ni m \longmapsto \Phi_M(m)\in M^{\vee\vee} \quad \text{με } \Phi_M(m)(f):=f(m),\ \forall f\in M^{\vee}.$$

Ο Φ_M δεν είναι κατ' ανάγκην ούτε μονομορφισμός ούτε επιμορφισμός. Το ακόλουθο θεώρημα περιγράφει ικανές συνθήκες υπό τις οποίες ο Φ_M είναι μονομορφισμός (και αντιστοίχως, ισομορφισμός).

<u>3.7.18 Θεώρημα.</u> Έστω M ένας B-μόδιος.
(i) Εάν ο M είναι ελεύθερος, τότε ο Φ_M είναι μονομορφισμός.
(ii) Εάν ο M είναι ελεύθερος και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε ο Φ_M είναι ισομορφισμός.

<u>Απόδειξη:</u> (i) Έστω $(x_j)_{j\in J}$ μια βάση του M και έστω $m\in \mathrm{Ker}(\Phi_M)$. Εκφράζοντας το m ως γραμμικό συνδυασμό $m=\sum_{j\in J}\lambda_j x_j$ (όπου οι λ_j είναι "σχεδόν όλοι" $=0_R$), λαμβάνουμε

$$0_{M^{\vee\vee}}=\Phi_M(m)(x_j^{\vee})=x_j^{\vee}(m)\underset{3.7.14}{=}\lambda_j,\ \forall j\in J \Longrightarrow m=0_M,$$ δηλαδή

ο Φ_M είναι όντως ένας μονομορφισμός.

(ii) Ας υποθέσουμε τώρα ότι το J είναι πεπερασμένο, φερ' ειπείν $J=\{1,\dots,k\}$. Επειδή για οιαδήποτε $\mu,\nu\in\{1,\dots,k\}$ ισχύει

$$(x_\mu^\vee)^\vee(x_\nu) = x_\nu^\vee(x_\mu) = \begin{cases} 1_R, & \text{εάν } \mu=\nu,\\ 0_R, & \text{εάν } \mu\neq\nu,\end{cases}$$

το σύνολο $\{(x_1^\vee)^\vee,\dots,(x_k^\vee)^\vee\}$ είναι βάση τού $M^{\vee\vee}$, δυϊκή τής $\{x_1^\vee,\dots,x_k^\vee\}$. Άρα ο Φ_M είναι ισομορφισμός (βάσει τού πορίσματος 1.6.15, σελ. 46). □

Ερχόμαστε τώρα στο προαναγγελθέν πόρισμα τού Θεωρήματος 3.7.11.

3.7.19 Πόρισμα. Για οιουσδήποτε R-μοδίους M, L υφίσταται ένας ομομορφισμός

$$\boxed{M^\vee \otimes_R L \xrightarrow{\eta_M} \mathrm{Hom}_R(M,L)}$$

οριζόμενος (επί τού συνόλου των αποσυντιθέμενων τανυστών) ως εξής:

$$f\otimes l \overset{\eta_M}{\longmapsto} (m\longmapsto f(m)l).$$

(i) Εάν ο L είναι προβολικός, τότε ο η_M είναι μονομορφισμός.

(ii) Εάν ο L είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε ο η_M είναι ισομορφισμός.

(iii) Εάν ο M είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε ο η_M είναι ισομορφισμός.

(iv) Εάν ο M είναι ελεύθερος και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε

$$\boxed{M\otimes_R L \cong \mathrm{Hom}_R(M^\vee, L)}$$

(στέλνοντας το $m\otimes l$ να απεικονισθεί στο $(f\mapsto f(m)l)$.)

Απόδειξη: Τα (i), (ii) και (iii) έπονται από το Θεώρημα 3.7.11 όταν σε αυτό θέσουμε $N:=R$ και λάβουμε υπ' όψιν τον ισομορφισμό $L \xrightarrow{\cong} R\otimes L$ $(l\mapsto 1_R\otimes l)$ τον θεσπισθέντα μέσω τού Θεωρήματος 3.4.3.
(iv) Σε αυτήν την περίπτωση ο $\Phi_M: M\to M^{\vee\vee}$ είναι ισομορφισμός (βλ. Θεώρημα 3.7.18). Αρκεί λοιπόν να θεωρηθεί ο ισομορφισμός $\eta_{M^\vee}\circ(\Phi_M\bar{\otimes}\mathrm{Id}_L)$. □

Εν συνεχεία, θεωρούμε τέσσερεις R-μοδίους M, M', N, N' και τον κανονιστικό ομομορφισμό

$$\boxed{\psi : \mathrm{Hom}_R(M,M') \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R M', N\otimes_R N')}$$

ο οποίος ορίζεται (επί των αποσυντεθέμενων τανυστών) ως εξής:

$$f \otimes g \longmapsto \psi(f\otimes g) := f \,\overline{\otimes}\, g$$

(βλ. σημείωση 3.5.3, σελ. 155).

<u>3.7.20. Θεώρημα.</u> Εάν τουλάχιστον ένα εκ των ζευγών (M,N), (M,M'), (N,N') αποτελείται από προβολικούς, πεπερασμένως παραγόμενους μοδίους, τότε ο ψ είναι <u>ισομορφισμός</u>. (Σε αυτήν την περίπτωση μπορεί κανείς να χρησιμοποιεί το $f\otimes g$ αντί τού $f\,\overline{\otimes}\,g$, και αντιστρόφως.)

<u>Απόδειξη:</u> Ο ψ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση 4 ομομορφισμών R-μοδίων (με τον δεύτερο και τον τέταρτο <u>ισομορφισμούς</u>) ως εξής:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(M,M') \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,N') \arrow[d, "\text{Θεώρημα 3.7.11}"'] \arrow[dddd, bend left, "\psi"] \\
\mathrm{Hom}_R(M, M'\otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,N')) \arrow[d, "\text{Θεώρημα 3.4.1}"', "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,N')\otimes_R M') \arrow[d, "\text{Θεώρημα 3.7.11}"'] \\
\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, N'\otimes M')) \arrow[d, "\text{Θεώρημα 3.7.2}"', "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, M'\otimes_R N')
\end{tikzcd}$$

(Ο έλεγχος τού ότι αυτή η σύνθεση ορίζεται όντως μέσω τού δοθέντος τύπου επί των αποσυντεθέμενων τανυστών αφήνεται ως άσκηση στους αναγνώστες.)

Το ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής έπεται απ' ευθείας από το θεώρημα 3.7.11 για τα ζεύγη (M,N), (M,M'). Για το (N,N') αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\mathrm{Hom}_R(M,M')\otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,N') \overset{3.4.1}{\cong} \mathrm{Hom}_R(N,N')\otimes_R \mathrm{Hom}_R(M,M')$ και ότι μπορούμε –ως εκ τούτου– να εναλλάξουμε τους ρόλους των (M,M') και (N,N') κατά τη δόμηση των εν λόγω συνθέσεων. $\square$

<u>3.7.21. Παράδειγμα.</u> Εν γένει ο ψ ενδέχεται να μην είναι ούτε μονομορφισμός ούτε επιμορφισμός! Επί παραδείγματι, εάν $R=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $I=2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $M=N=R/I\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \underset{(\text{ως πρότυπα})}{\cong} 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $M'=N'=R$ και εάν θεωρήσουμε τον ομομορφισμό $f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ τον οριζόμενο ως εξής: $f(2\lambda+4\mathbb{Z}):=\lambda+4\mathbb{Z}$, $\forall \lambda\in\{0,1\}$, τότε

$$(f\,\overline{\otimes}\,f)(2\lambda_1+4\mathbb{Z},2\lambda_2+4\mathbb{Z})=4\mathbb{Z}=0_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}},\quad \forall \lambda_1,\lambda_2\in\{0,1\},$$

οπότε η $f\,\overline{\otimes}\,f$ είναι <u>η μηδενική απεικόνιση</u>. Κατά συνέπειαν, $f\otimes f\in \mathrm{Ker}(\psi)$. Επειδή

$$(\star)\qquad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

οι τρεις εκ των τεσσάρων αποσυντιθέμενων τανυστών τού

$$(*)\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

είναι ίσοι με $0_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})}$, διότι

ένας (τουλάχιστον) εκ των παραγόντων τους είναι ο μηδενικός ομομορφισμός. Αμφότεροι οι παράγοντες τού τέταρτου αποσυντιθέμενου τανυστή τού $(*)$ οφείλουν, ως εκ τούτου, να είναι ίσοι με τον μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο τού $(\star)$, ήτοι με τον f. Κατά συνέπειαν, αυτός ο τέταρτος αποσυντιθέμενος τανυστής τού $(*)$ ισούται –εκ κατασκευής– με τον $f\otimes f$. Όμως ο $f\otimes f$ είναι κατ' ανάγκην <u>μη μηδενικός</u>, καθόσον

$$2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\cong 2\mathbb{Z}/(4\mathbb{Z}+4\mathbb{Z})2\mathbb{Z}\cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\neq\{0\}.$$

Άρα ο $\mathrm{Ker}(\psi)$ δεν είναι τετριμμένος ($\Leftrightarrow$ <u>ο ψ δεν είναι μονομορφισμός</u>).

Επιπροσθέτως, και ο ίδιος ο ψ είναι μηδενικός, καθότι κάθε ταυτοτής του πεδίου ορισμού του είναι της μορφής $\lambda(f\otimes f)$, $\lambda\in\{0+4\mathbb{Z},2+4\mathbb{Z}\}$, με $\psi((2+4\mathbb{Z})(f\otimes f)) = (2+4\mathbb{Z})\psi(f\otimes f) = (2+4\mathbb{Z})\underbrace{(f\bar{\otimes} f)}_{=0}$.

Από την άλλη μεριά,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$$

$\cong$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\neq\{0\}$, πράγμα που σημαίνει

ότι ο ψ δεν είναι ούτε επιμορφισμός (αφού ο ανωτέρω μόδιος, όντας μη τετριμμένος, διαθέτει ένα στοιχείο που αδυνατεί να ανήκει στην εικόνα του ψ).

3.7.22. Πόρισμα. Για οιουσδήποτε R-μοδίους M,N υφίσταται ένας κανονιστικός ομομορφισμός

$$\boxed{\overline{\psi}: M^{\vee}\otimes_R N^{\vee}\longrightarrow (M\otimes N)^{\vee}\ (\cong \mathrm{Hom}_R(M,N^{\vee}))}$$

Εάν $f\in M^{\vee}$, $g\in N^{\vee}$, τότε

$$\overline{\psi}(f\otimes g)(m\otimes n) = f(m)g(n),\ \forall (m,n)\in M\times N.$$

Επιπροσθέτως, εάν τουλάχιστον ένας εκ των M,N είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε ο $\overline{\psi}$ είναι ισομορφισμός. Σε αυτήν την περίπτωση σχηματίζονται οι ισομορφισμοί

$$\boxed{\mathrm{Bil}_R(M,N;R)\cong (M\otimes_R N)^{\vee}\cong M^{\vee}\otimes_R N^{\vee}}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Bil}_R(M^{\vee},N^{\vee};R)\cong (M^{\vee}\otimes_R N^{\vee})^{\vee}\cong M^{\vee\vee}\otimes_R N^{\vee\vee}}$$

Εάν μάλιστα αμφότεροι οι M,N είναι πεπερασμένως παραγόμενοι και ελεύθεροι, τότε

$$\boxed{\mathrm{Bil}_R(M^{\vee},N^{\vee};R)\cong M\otimes_R N,}$$

δηλαδή το τανυστικό γινόμενο των M και N είναι ισόμορφο με τον R-μόδιο των διγραμμικών απεικονίσεων των οριζομένων επί του $M^{\vee}\times N^{\vee}$, Ενώ η απεικόνιση

$$\varphi : M \times N \longrightarrow Bil_R(M^\vee, N^\vee; R) \ , \ (m,n) \longmapsto \varphi(m,n),$$

όπου

$$\boxed{\varphi(m,n)(f,g) = f(m)\,g(n), \ \forall\ (f,g) \in M^\vee \times N^\vee,}$$

μπορεί να θεωρηθεί ως τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R N$.

<u>Απόδειξη:</u> Οι πρώτοι ισχυρισμοί είναι αληθείς λόγω τού Θεωρήματος 3.7.20 (σελ. 183) όταν κανείς θέσει $M' = N' = R$ και λάβει υπ' όψιν το Θεώρημα 3.4.3 (σελ. 148). Ο τρίτος -κατά σειράν- ισομορφισμός αποδεικνύεται κάνοντας χρήση τού Θεωρήματος 3.7.18 (ii) (σελ. 181). □

<u>3.7.23. Σημείωση</u> (i) Για οιουσδήποτε πεπερασμένως παραγομένους και ελευθέρους R-μοδίους M και N το ζεύγος $(Bil_R(M^\vee, N^\vee; R), \varphi)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας "καλός εκπρόσωπος" τής κλάσεως ισομορφίας των ζευγών $(W \cong M \otimes_R N, \varphi)$ που υλοποιούν το τανυστικό γινόμενό τους (πρβλ. σημείωση 3.3.8 (ii), σελ. 140). Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο χρησιμοποιείται σε ορισμένα βιβλία Γραμμικής Άλγεβρας ως ένας άμεσος και σύντομος <u>ορισμός</u> τού τανυστικού γινομένου δυο διανυσματικών χώρων <u>πεπερασμένης διαστάσεως</u>. (Βλ. π.χ. K. Hoffman, R. Kunze: "Linear Algebra", Second Ed., Prenctice Hall, 1971, §5.6, σελ. 166-168, S. Lang: "Linear Algebra", Second Ed., Addison Wesley, 1972, XIII §1, ή S.K. Berberian: "Linear Algebra", Oxford University Press, 1992, Chapter 13 §1 και ιδιαιτέρως την άσκ. 3, σελ. 316.)

(ii) Το συμπέρασμα περί τής ισομορφίας των $Bil_R(M^\vee, N^\vee; R)$ και $M \otimes_R N$ ισχύει ακόμη και εάν υποτεθεί ότι οι M και N είναι προβολικοί και πεπερασμένως παραγόμενοι. (Βλ. άσκηση 30 τού 6ου φυλλαδίου.)