ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μόδιοι ομολογίας και συνομολογίας αλυσωτών και συναλυσωτών συμπλόκων

Στο παρόν κεφάλαιο ορίζουμε τους μοδίους ομολογίας και συνομολογίας αλυσωτών και συναλυσωτών συμπλόκων, και μελετούμε τις κύριες ιδιότητές τους.

§ 2.1 Ακριβείς ακολουθίες

Ακολουθίες R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων καλούνται "ακριβείς" όταν ο πυρήνας καθενός των υπεισερχόμενων ομομορφισμών ισούται με την εικόνα τού προηγούμενου ομομορφισμού. Τέτοιου είδους ακολουθίες συναντώνται κατά τρόπο φυσικό σε πληθώρα σημαντικών θεωρημάτων τής Ομολογικής Άλγεβρας και τής Αλγεβρικής Τοπολογίας.

2.1.1. Ορισμός. Μια (πεπερασμένη ή μονοπλεύρως ή αμφιπλεύρως απείρως εκτεινόμενη) ακολουθία

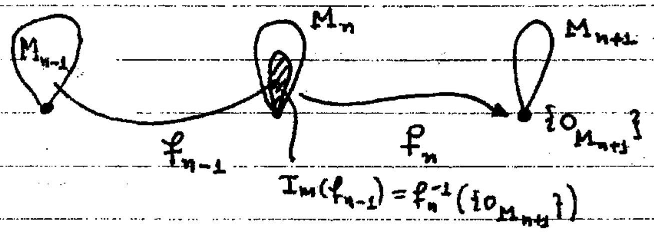
$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων είναι ακριβής στη n-οστή θέση όταν

$$\mathrm{Im}(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n).$$

Η ακολουθία λέγεται ακριβής όταν είναι ακριβής σε κάθε όρο της.

2.1.2 Σημείωση (i) Σχηματικώς η ακρίβεια τής ακολουθίας παρίσταται ως εξής:



(ii) Η συνθήκη $\mathrm{Im}(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$ ισοδυναμεί με τις $\left\{ \begin{array}{l} f_n \circ f_{n-1} = 0 \\ \mathrm{Ker}(f_n) \subseteq \mathrm{Im}(f_{n-1}) \end{array} \right\}$.

(iii) Ο ορισμός 2.1.1 παραμένει εν ισχύ ακόμα και όταν οι δείκτες "κατεβαίνουν", αρκεί ο πυρήνας καθενός ομομορφισμού να ισούται με την εικόνα του προηγουμένου του.

(iv) Οιαδήποτε ακριβής ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \qquad \left(\begin{array}{l} 0 \to M' \text{ η ένθεση} \\ M'' \to 0 \text{ ο τετριμμένος ομομορφισμός} \end{array}\right)$$

καλείται <u>βραχεία ακριβής ακολουθία</u>.

<u>2.1.3. Παραδείγματα</u> (i) Ένας ομομορφισμός R-μοδίων $f: M \to N$ είναι

μονομορφισμός $\iff$ η $0 \to M \xrightarrow{f} N$ είναι ακριβής.

επιμορφισμός $\iff$ η $M \xrightarrow{f} N \to 0$ είναι ακριβής.

ισομορφισμός $\iff$ η $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ είναι ακριβής.

Επίσης, εάν μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\cdots \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{h} \cdots$$

είναι ακριβής, τότε ο f είναι

μονομορφισμός $\iff$ $g = 0$

επιμορφισμός $\iff$ $h = 0$

ισομορφισμός $\iff$ $g = 0$ και $h = 0$

(ii) Εάν η $f: M \to N$ είναι ομομορφισμός R-μοδίων, τότε υφίστανται πάντοτε δύο βραχείες ακριβείς ακολουθίες: η

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \underset{(\text{ένθεση})}{\overset{i}{\hookrightarrow}} M \underset{(\text{φυσικός επιμορφισμός})}{\xrightarrow{\pi_{\mathrm{Ker}(f)}}} \mathrm{Coim}(f) \longrightarrow 0,$$

όπου $\boxed{\mathrm{Coim}(f) := M/\mathrm{Ker}(f)}$ η λεγομένη <u>συνεικόνα</u> του f,

και η

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \underset{(\text{ένθεση})}{\hookrightarrow} N \underset{(\text{φυσικός επιμορφισμός})}{\xrightarrow{\pi_{\mathrm{Im}(f)}}} \mathrm{CoKer}(f) \longrightarrow 0,$$

όπου $\boxed{\mathrm{CoKer}(f) := N/\mathrm{Im}(f)}$ ο λεγόμενος <u>συμπυρήνας</u> του f.

Επίσης, υφίσταται η ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f) \overset{i}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi_{\mathrm{Im}(f)}} \mathrm{CoKer}(f) \longrightarrow 0.$$

(iii) Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Εάν επιλέξουμε έναν γεννήτορα $[a]_k$ τής $\mathbb{Z}_k$ και έναν γεννήτορα $[\beta]_{k^2}$ τής $\mathbb{Z}_{k^2}$, τότε σχηματίζεται μια βραχεία ακριβής ακολουθία $\mathbb{Z}$-μοδίων και ομομορφισμών $\mathbb{Z}$-μοδίων

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_k \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_{k^2} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_k \longrightarrow 0$$

όπου $f([a]_k) := [\beta]_{k^2}$ (επεκτεινόμενη γραμμικώς επί ολοκλήρου τού $\mathbb{Z}_k$, βλ. 1.6.!) και $g([\beta]_{k^2}) := [a]_k$ (επεκτεινόμενη γραμμικώς επί ολοκλήρου τού $\mathbb{Z}_{k^2}$).

(iv) Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Τότε υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f = \cdot k} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_k \longrightarrow 0$$

όπου $f(\xi) := \xi k$, $\forall \xi \in \mathbb{Z}$, και $g(\xi) := [\xi]_k$, $\forall \xi \in \mathbb{Z}$.

(v) Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, και έστω λ ένας διαιρέτης τού k (δηλ. $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \mid k$). Θεωρώντας το ιδεώδες $\lambda \mathbb{Z}_k$ τού δακτυλίου $\mathbb{Z}_k$, έχουμε τη δυνατότητα κατασκευής μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας $\mathbb{Z}_k$-μοδίων και ομομορφισμών $\mathbb{Z}_k$-μοδίων

$$0 \longrightarrow \frac{k}{\lambda} \mathbb{Z}_k \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_k \xrightarrow{g} \lambda \mathbb{Z}_k \longrightarrow 0$$

όπου f είναι η συνήθης ενθετική απεικόνιση και $g([\xi]_k) := \lambda [\xi]_k$, $\forall \xi \in \mathbb{Z}$

$\left(\mathrm{Ker}(g) = \{ [\xi]_k \in \mathbb{Z}_k \mid \lambda [\xi]_k = [0]_k \} = \{ [\xi]_k \in \mathbb{Z}_k \mid \lambda \xi = \nu k, \text{ για κάποιον } \nu \in \{0, 1, \dots, k-1\} \} = \frac{k}{\lambda} \mathbb{Z}_k = \mathrm{Im}(f). \right)$

(vi) Έστω K ένα σώμα. Τότε η βραχεία ακολουθία

$$0 \longrightarrow \langle t \rangle \xrightarrow{f} K[t] \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$$

όπου f η συνήθης ενθετική απεικόνιση και $g(\Phi(t)) :=$ σταθερός όρος τού $\Phi(t)$, $\forall \Phi(t) \in K[t]$, είναι ακριβής τόσον όταν οι όροι της θεωρηθούν K-μόδιοι (= K-διανυσματικοί χώροι) όσον και όταν οι όροι της θεωρηθούν $K[t]$-μόδιοι.

(vii) Έστω R δακτύλιος αναφοράς. Για οιαδήποτε ιδεώδη του I_1, I_2 υπάρχει ακριβής ακολουθία τής μορφής

$$0 \longrightarrow I_1 \cap I_2 \underset{\text{ένθεση}}{\hookrightarrow} R \longrightarrow (R/I_1) \times (R/I_2) \longrightarrow R/(I_1 + I_2) \longrightarrow 0$$

$$r \longmapsto (r + I_1, r + I_2)$$

$$(r_1 + I_1, r_2 + I_2) \longmapsto (r_1 + r_2) + (I_1 + I_2)$$

(viii) Έστω R μια περιοχή με μονοσήμαντη παραγοντοποίηση (ΠΜΠ). Εάν τα $x, y \in R$ έχουν $\mu\kappa\delta(x,y) \underset{\text{συνν.}}{\sim} 1$ (δηλ. είναι σχετικώς πρώτα), τότε υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\ f\ } R \oplus R \xrightarrow{\ g\ } I \longrightarrow 0$$

όπου $I = \langle x, y \rangle$, $f(r) := (ry, rx)$, $\forall r \in R$, και $g(r,s) := rx - sy$, $\forall (r,s) \in R \times R$. Αυτή καλείται ιδιαιτέρως σύμπλοκο του Koszul για τα x, y και παίζει σημαίνοντα ρόλο σε διάφορα Θεωρήματα της Μεταθετικής Άλγεβρας.

Εν συνεχεία, θα αποδείξουμε ορισμένες χρήσιμες προτάσεις που αφορούν σε "συμπληρώσεις" στοιχειωδών διαγραμμάτων, τα οποία συμπεριλαμβάνουν μία ή περισσότερες ακριβείς "γραμμές".

2.1.4. Πρόταση: Δοθέντος ενός διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων της μορφής (χωρίς τον h)

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dl, dashed, "\exists ! h"'] \arrow[d, "\theta"] & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r, "g"'] & L \end{tikzcd}$$

με τη "γραμμή" του ακριβή και $g \circ \theta = 0$, υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων $h : A \to M$, ο οποίος καθιστά το συμπληρωμένο διάγραμμα μεταθετικό.

Απόδειξη: Επειδή $g \circ \theta = 0$, έχουμε $\mathrm{Im}(\theta) \subseteq \mathrm{Ker}(g) \underset{\text{ακρίβεια}}{=} \mathrm{Im}(f)$. Και επειδή ο f είναι κατ' ανάγκην μονομορφισμός (βλ. 2.1.3 (ii)), αρκεί να εφαρμοσθεί το Θεώρημα 1.3.14. □

2.1.5. Πόρισμα. Έστω $f : M \to N$ ένας ομομορφισμός R-μοδίων και έστω $i : \mathrm{Ker}(f) \hookrightarrow M$ η φυσική ένθεση. Τότε

(i) $f \circ i = 0$

(ii) Για κάθε R-μόδιο P και κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $g: P \to M$ με $f \circ g = 0$ υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $\theta \in Hom_R(P, Ker(f))$, ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists ! \theta"'] \arrow[d, "g"] & \\ Ker(f) \arrow[r, hook, "i"'] & M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

(Είναι μάλιστα δυνατόν να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(Ker(f), i)$ χαρακτηρίζεται μονοσημάντως "μέχρις ισομορφισμού" από τις εν λόγω ιδιότητες. Βλ. άσκηση 3 του 4ου φυλλαδίου.)

Απόδειξη. Το (i) είναι προφανές και το (ii) έπεται άμεσα από την Πρόταση 2.1.4. □

"Δυϊκή" της προτάσεως 2.1.4 είναι η εξής:

2.1.6. Πρόταση: Δοθέντος ενός διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων της μορφής (χωρίς το h)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\theta"] & L \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\exists ! h"] & 0 \\ & A & & \end{tikzcd}$$

με τη "γραμμή" του ακριβή και $\theta \circ f = 0$, υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $h \in Hom_R(L, A)$, ο οποίος καθιστά το διάγραμμα μεταθετικό.

Απόδειξη. Επειδή $\theta \circ f = 0$, έχουμε $Im(f) \underset{\text{ακριβεια}}{=} Ker(g) \subseteq Ker(\theta)$. Και επειδή ο g είναι κατ' ανάγκην επιμορφισμός (βλ. 2.1.3 (i)), αρκεί να εφαρμοσθεί το Θεώρημα 1.3.13. □

2.1.7. Πόρισμα. Έστω $f: M \to N$ ένας ομομορφισμός R-μοδίων και έστω $\pi = \pi_{Im(f)}: N \to Coker(f)\ (= N/Im(f))$ ο φυσικός επιμορφισμός.
Τότε (i) $\pi \circ f = 0$
(ii) Για κάθε R-μόδιο P και κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $g: N \to P$ με $g \circ f = 0$ $\exists!\ \theta \in Hom_R(Coker(f), P)$, ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"'] & Coker(f) \arrow[dl, dashed, "\exists!\theta"] \\
& P &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

(Είναι μάλιστα δυνατόν να αποδειχθεί ότι το ζεύγος $(Coker(f), \pi)$ χαρακτηρίζεται μονοσημάντως "μέχρις ισομορφισμού" από τις εν λόγω ιδιότητες. Βλ. άσκηση 4 του $4^{ου}$ φυλλαδίου.)

Απόδειξη. Το (i) είναι προφανές και το (ii) έπεται άμεσα από την πρόταση 2.1.6. □

2.1.8. Πρόταση. Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων (χωρίς τον φ'') της μορφής

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi''"] & 0 \\
N' \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r, "g"'] & N'' &
\end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $\varphi'' \in Hom(M'', N'')$ που το "συμπληρώνει μεταθετικώς" (δηλ. $\varphi'' \circ f = g \circ \varphi$).

Απόδειξη. Έστω $y \in Ker(f)$. Επειδή $Ker(f) = Im(f')$ υπάρχει $x \in M'$: $y = f'(x)$, οπότε $\varphi(y) = \varphi(f'(x)) = (\varphi \circ f')(x) \underset{\text{μεταθ. διαγρ.}}{=} g'(\varphi'(x))$
$\Longrightarrow (g \circ \varphi)(y) = g(\varphi(y)) = (\underbrace{g \circ g'}_{0} \circ \varphi')(x) = 0_{N''}$, απ' όπου έπεται ότι
← ακρίβεια

$\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g\circ f)$. Επειδή ο f είναι επιμορφισμός (βλ. 2.1.3(ii)), αρκεί η εφαρμογή του Θεωρήματος 1.3.13 για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"'] & N^{*} \\ M'' \arrow[ur, dashed, "\varphi''"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

(βάσει του οποίου $\exists!\, \varphi'' \in \mathrm{Hom}_R(M'', N^{*})$ που το "κλείνει") □

2.1.9. Πόρισμα Εάν οι M, N, M', N' είναι R-μόδιοι και οι $f: M' \to M$, $g: N' \to N$, $\varphi: M \to N$, $\varphi': M' \to N'$ ομομορφισμοί R-μοδίων με $\varphi\circ f = g\circ\varphi'$, τότε υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $\underline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{Coker}(g))$, ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{Im}(f)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[d, "\pi_{\mathrm{Im}(g)}"] \\ \mathrm{Coker}(f) \arrow[r, dashed, "\underline{\varphi}"'] & \mathrm{Coker}(g) \end{tikzcd}$$

μεταθετικό.

Απόδειξη. Αρκεί η εφαρμογή της προτάσεως 2.1.8 για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "\pi_{\mathrm{Im}(f)}"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\underline{\varphi}"] & 0 \\ N' \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r, "\pi_{\mathrm{Im}(g)}"'] & \mathrm{Coker}(g) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(Σημειωτέον ότι $\underline{\varphi}(m + \mathrm{Im}(f)) = \varphi(m) + \mathrm{Im}(g)$, $\forall m \in M$.) □

"Δυϊκή" της προτάσεως 2.1.8 είναι η εξής:

2.1.10. Πρόταση: Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων (χωρίς τον φ') της μορφής

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, dashed, "\varphi'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \arrow[d, "\varphi''"] \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "g'"'] & N \arrow[r, "g"'] & N'' \end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $\varphi' \in Hom_R(M', N')$ που το "συμπληρώνει μεταθετικώς" (δηλ. $g' \circ \varphi' = \varphi \circ f'$).

<u>Απόδειξη.</u> 'Εστω $x \in M'$. Τότε $g(\varphi(f'(x)) = (g \circ \varphi \circ f')(x) \underset{\substack{\text{μεταθ.}\\ \text{διαγρ.}}}{=} (\varphi'' \circ \underbrace{f \circ f'}_{=0})(x) = 0_{N''}$

$\Rightarrow (\varphi \circ f')(x) \in Ker(g) = Im(g')$, οπότε $Im(\varphi \circ f') \subseteq Im(g')$.

Επειδή ο g' είναι μονομορφισμός (βλ. 2.1.3(i)), αρκεί η εφαρμογή του θεωρήματος 1.3.14 για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\varphi'"'] \arrow[d, "\varphi \circ f'"] \\
N' \arrow[r, "g'"'] & N
\end{tikzcd}$$

(βάσει του οποίου $\exists!\, \varphi' \in Hom_R(M', N')$ που το "κλείνει".)

$\square$

<u>2.1.11. Πόρισμα.</u> Εάν οι M, M', N, N' είναι R-μόδιοι και οι $f: M \to M'$, $g: N \to N'$, $\varphi: M \to N$, $\varphi': M' \to N'$, ομομορφισμοί R-μοδίων με $\varphi' \circ f = g \circ \varphi$, τότε υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $\bar{\varphi} \in Hom_R(Ker(f), Ker(g))$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[r, dashed, "\bar{\varphi}"] \arrow[d, "i_f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Ker(g) \arrow[d, "i_g"] \\
M \arrow[r, "\varphi"'] & M'
\end{tikzcd}$$

($i_f, i_{f'}$: ενθέσεις)

μεταθετικό.

<u>Απόδειξη.</u> Αρκεί η εφαρμογή της Προτάσεως 2.1.10 για το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ker(f) \arrow[r, "i_f"] \arrow[d, dashed, "\exists!\,\bar{\varphi}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M' \arrow[d, "\varphi'"] \\
0 \arrow[r] & Ker(f') \arrow[r, "i_g"] & M' \arrow[r, "g"] & N'
\end{tikzcd}$$

(Σημειωτέον ότι $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $\forall x \in Ker(f)$)

$\square$

2.1.12 Ορισμός. Μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

διασπάται στη θέση n όταν ο $Ker(f_n)(=Im(f_{n-1}))$ είναι ευθύς προσθετέος του M_n (πρβλ. 1.5.22(ii)). Μια βραχεία ακριβής ακολουθία $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ καλείται *διασπώμενη* όταν διασπάται στον (κεντρικό της όρο) B.

2.1.13 Θεώρημα. Έστω $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία. Τότε οι εξής συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Ο g διαθέτει δεξιό αντίστροφο, ήτοι $\exists\, \beta \in Hom_R(C,B): g\circ\beta = Id_C$.

(ii) Ο f διαθέτει αριστερό αντίστροφο, ήτοι $\exists\, \alpha \in Hom_R(B,A): \alpha\circ f = Id_A$.

(iii) Η εν λόγω ακολουθία είναι διασπώμενη.

[Μάλιστα, ισχύει: $B \cong Im(f) \oplus Ker(\alpha)$ (όπου α όπως στο (ii))

$\cong Ker(g) \oplus Im(\beta)$ (όπου β όπως στο (i))

$\cong A \oplus C$.]

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (iii) Έστω $\varphi: A\oplus C \to B$ ο ομομορφισμός R-μοδίων ο οριζόμενος μέσω του τύπου $\varphi(a,c) := f(a)+\beta(c)$, $\forall (a,c)\in A\oplus C$. Τότε το ακόλουθο διάγραμμα (με ακριβείς γραμμές) είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, hook, "in_A"] \arrow[d, "Id_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A\oplus C \arrow[r, "pr_C"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "Id_C"] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, hook, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Επειδή οι Id_A, Id_C είναι ισομορφισμοί, και η φ θα είναι κατ' ανάγκην ισομορφισμός επί τη βάσει της ασκήσεως 17(ii) του 4ου φυλλαδίου. (Οι λοιποί ισομορφισμοί έπονται από την άσκηση 3 του 2ου φυλλαδίου).

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία είναι διασπώμενη. Τότε $B = Ker(g)\oplus D$, για κάποιον υπομόδιο D του B. Επομένως, κάθε $b\in B$ γράφεται μονοσήμαντα ως άθροισμα $b = y+d$, όπου $y\in Ker(g)$ και $d\in D$. Επειδή η $g: B\to C$ είναι επιρριπτική και $g(b) = g(d)$, και η $g|_D : D\to C$ είναι επιρριπτική. Όμως η $g|_D$ είναι και ενριπτική, διότι $\forall d\in Ker(g|_D)$ έχουμε $0_C = g|_D(d) = g(d)$, οπότε $d\in Ker(g)\cap D = \{0_B\}$. Άρα η $g|_D$ είναι ισομορφισμός και αρκεί να θέσουμε $\beta := (g|_D)^{-1}$.

<u>(ii)⇒(iii)</u> Ορίζοντας την $\psi : B\to A\oplus C$ μέσω τού τύπου $\psi(b) := \alpha(b) + g(b)$, $\forall b\in B$, δείχνουμε —όπως και προηγουμένως— ότι η ψ είναι ισομορφισμός χρησιμοποιώντας τό μεταθετικό διάγραμμα (με ακριβείς γραμμές):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Id_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C \arrow[r] \arrow[d, "Id_C"] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "in_A"'] & A\oplus C \arrow[r, "pr_C"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

<u>(iii)⇒(ii)</u> Έστω ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία είναι διασπώμενη. Τότε $B = Im(f)\oplus E$, για κάποιο υπομόδιο E τού B, και κάθε $b\in B$ γράφεται μονοσήμαντα ως άθροισμα $b = y+e$, όπου $y\in Im(f)$ και $e\in E$. Επειδή ο f είναι μονομορφισμός, η ίνα (αρχέτυπο) $f^{-1}(y)$ είναι μονοσύνολο, ας πούμε $f^{-1}(y) = \{x\}$.
(*φ)

Ορίζοντας την απεικόνιση $\alpha : B\to A$ μέσω τού τύπου $\alpha(b) := \alpha(y+e) := f^{-1}(y)$, παρατηρούμε ότι αυτή είναι ομομορφισμός και ότι $\forall a\in A$: $\alpha(f(a)) = f^{-1}(f(a)) = a \Rightarrow \alpha\circ f = Id_A$. □

<u>2.1.14. Παραδείγματα</u> (i) Ως παράδειγμα μιας μη διασπώμενης βραχείας ακριβούς ακολουθίας αναφέρουμε την

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot\times 2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

(βλ. 2.1.3 (iv)). Ως γνωστόν (βλ. 1.3.12) η $f = \cdot\times 2$ δεν διαθέτει κανέναν ομομορφισμό $\mathbb{Z}$-μοδίων ως αριστερό αντίστροφό της!

(ii) Θεωρώντας τή βραχεία ακριβή ακολουθία 2.1.3 (vi):

$$0 \to \langle t\rangle \xrightarrow{f} K[t] \xrightarrow{g} K \to 0$$

Παρατηρούμε ότι αυτή είναι διασπώμενη ως ακολουθία ομομορφισμών K-μοδίων (= K-διανυσματικών χώρων). Ορίζοντας, επί παραδείγματι, την απεικόνιση $\alpha : K[t] \to \langle t \rangle$, διαπιστώνουμε εύκολα

$$\sum_{j=0}^{\varrho\omega} \lambda_j t^j \mapsto \sum_{j=1}^{\varrho\omega} \lambda_j t^j$$

ότι είναι ομομορφισμός δ.χ. με $\alpha \circ f = \mathrm{Id}_{\langle t \rangle}$.

Ωστόσο, η ίδια ακολουθία, θεωρούμενη ως ακολουθία ομομορφισμών $K[t]$-μοδίων, δεν διασπάται στον $K[t]$. Πράγματι· υποθέτοντας ότι υπάρχει ομομορφισμός $K[t]$-μοδίων $\alpha : K[t] \to \langle t \rangle$ με $\alpha \circ f = \mathrm{Id}_{\langle t \rangle}$, θεωρούμε την εικόνα $\alpha(1_K)$ του 1_K μέσω του α. Επειδή (εξ υποθέσεως) $\alpha|_{\langle t \rangle} = \mathrm{Id}_{\langle t \rangle}$, εάν $\alpha(1_K) = t\,\Phi(t)$ (για κατάλληλο $\Phi(t) \in K[t]$), έχουμε

$$\underset{\substack{\| \\ t}}{\alpha(t)} = \alpha(t \cdot 1_K) \underset{(\alpha\ K[t]\text{-ομ.})}{=} t\,\alpha(1_K) = t^2 \Phi(t) \Rightarrow t = t^2 \Phi(t),$$

πράγμα άτοπο!

Πρόταση 2.1.15 Εάν η $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία και ο C ελεύθερος R-μόδιος, τότε αυτή είναι διασπώμενη.

Απόδειξη: Έστω $(c_j)_{j\in J}$ μια βάση του C. Επειδή ο g είναι επιμορφισμός, $\exists\, b_j \in B : g(b_j) = c_j$, $\forall j \in J$. Εάν επί του συνόλου των στοιχείων της επιλεχθείσας βάσεως ορίσουμε την απεικόνιση φ θέτοντας $\varphi(c_j) := b_j$, $\forall j \in J$, και κατόπιν την επεκτείνουμε γραμμικώς (βλ. Θεώρημα 1.6.14), κατασκευάζουμε έναν ομομορφισμό R-μοδίων $\beta : C \to B$ με $\beta|_{(c_j)_{j\in J}} = \varphi$ και $g \circ \beta = \mathrm{Id}_C$.

Άρα η ανωτέρω βραχεία ακριβής ακολουθία διασπάται στον B σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.13. □

§ 2.2 Τεχνικές χειρισμού μεταθετικών διαγραμμάτων και ακριβών ακολουθιών

Στην παρούσα ενότητα παρατίθεται μια σειρά από χρήσιμα θεωρητικά λήμματα τα οποία αποσκοπούν στη διευκόλυνση των χειρισμών που απαιτούνται κατά την επίλυση προβλημάτων σχετιζομένων με τη μελέτη "μεγάλων" μεταθετικών διαγραμμάτων.

2.2.1. Λήμμα των τεσσάρων Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος R-modules και ομομορφισμών R-modules της μορφής

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[d, "\delta"] \\ A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C' \arrow[r, "h'"'] & D' \end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, ισχύουν τα εξής:

(i) Εάν οι α και γ είναι επιμορφισμοί και ο δ μονομορφισμός, τότε ο β είναι επιμορφισμός.

(ii) Εάν ο α είναι επιμορφισμός και οι β και δ μονομορφισμοί, τότε ο γ είναι μονομορφισμός.

<u>Απόδειξη:</u> (i) Έστω τυχόν $b' \in B'$. Επειδή η γ είναι επιρριπτική, υπάρχει $c \in C$: $g'(b') = \gamma(c)$. Λόγω της μεταθετικότητας στο δεξιό τετράγωνο,

$$\delta(h(c)) = h'(\gamma(c)) = h'(g'(b')) = (\underbrace{h' \circ g'}_{\substack{\| \leftarrow \text{ακριβ.} \\ 0}})(b') = 0_{D'}. \text{ Άρα}$$

$h(c) \in Ker(\delta) = \{0_D\} \Rightarrow h(c) = 0_D \Rightarrow c \in Ker(h) = Im(g)$

$\Rightarrow c = g(b)$, για κάποιο $b \in B$. Λόγω της μεταθετικότητας στο μεσαίο τετράγωνο λαμβάνουμε

$$g'(b') = \gamma(c) = \gamma(g(b)) = g'(\beta(b)) \Rightarrow b' - \beta(b) \in \underset{Im(f')}{\overset{}{Ker(g')}}$$

$\Rightarrow b' - \beta(b) = f'(a')$, για κάποιο $a' \in A'$. Επειδή η α είναι επιρριπτική, υπάρχει $a \in A$: $a' = \alpha(a)$, οπότε, λόγω της μεταθετικότητας στο αριστερό τετράγωνο, έχουμε

$$b' - \beta(b) = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)) \Rightarrow b' = \beta(b) + \beta(f(a)) = \beta(b + f(a)) \in Im(\beta).$$

Κατά συνέπειαν, ο β είναι όντως ένας επιμορφισμός.

(ii) Έστω τυχόν $c \in Ker(\gamma)$. Τότε

$\delta(h(c)) = h'(\gamma(c)) = h'(0_{C'}) = 0_{D'} \Rightarrow h(c) \in Ker(\delta) = \{0_D\}$, οπότε

$c \in Ker(h) = Im(g) \Rightarrow c = g(b)$, για κάποιο $b \in B$. Ως εκ τούτου,

$0_{C'} = \gamma(c) = \gamma(g(b)) = g'(\beta(b)) \Rightarrow \beta(b) \in Ker(g') = Im(f')$

$\Rightarrow \beta(b) = f'(a')$, για κάποιο $a' \in A'$. Επειδή η α είναι εξ υποθέσεως επιρριπτική, $a' = \alpha(a)$, για κάποιο $a \in A$, οπότε

$$\beta(b) = f'(\alpha(a)) = \beta(f(a)) \underset{\beta \text{ μονομ.}}{\Longrightarrow} b = f(a) \Rightarrow c = g(b) = (\underbrace{g \circ f}_{0})(a) = 0_C.$$

Άρα ο γ είναι όντως μονομορφισμός. □

▶ Η ανωτέρω εφαρμοσθείσα τεχνική αποδείξεως είναι γνωστή ως "<u>κυνηγητό διαγράμματος</u>".

2.2.2. Λήμμα των πέντε. Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων της μορφής

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, ισχύουν τα εξής:

(i) Εάν ο α είναι επιμορφισμός και οι β και δ μονομορφισμοί, τότε ο γ είναι μονομορφισμός.

(ii) Εάν οι β και δ είναι επιμορφισμοί και ο ε μονομορφισμός, τότε ο γ είναι επιμορφισμός.

(iii) Εάν οι α, β, δ και ε είναι ισομορφισμοί, τότε και ο γ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. (i) Τούτο έπεται από την εφαρμογή του λήμματος 2.2.1 (ii) για το υποδιάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[d, "\delta"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D'
\end{tikzcd}$$

(ii) Τούτο έπεται από την εφαρμογή του λήμματος 2.2.1 (i) για το υποδιάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\
B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

Τέλος, το (iii) έπεται άμεσα από τα (i) και (ii). □

2.2.3 Πόρισμα (Βραχύ λήμμα των πέντε) Δοθέντος ενός μεταθετικού διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων της μορφής

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, ισχύουν τα εξής:

(i) Εάν οι α, γ είναι μονομορφισμοί, τότε και ο β είναι μονομορφισμός.

(ii) Εάν οι α, γ είναι επιμορφισμοί, τότε και ο β είναι επιμορφισμός.

(iii) Εάν οι α, γ είναι ισομορφισμοί, τότε και ο β είναι ισομορφισμός. □

Εν συνεχεία, θα διατυπώσουμε και αποδείξουμε το λεγόμενο "λήμμα του φιδιού" (γνωστό και ως "λήμμα πυρήνων και συμπυρήνων" ή "λήμμα του ζικ-ζακ (συνδετικού) ομομορφισμού"), μέσω του οποίου κατασκευάζεται η μακρά ακριβής ακολουθία R-μοδίων ομολογίας (που επάγεται από μια βραχεία ακριβή ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων, βλ. 2.3.11.) Επειδή η "κλασική" απόδειξη (μέσω "κυνηγητού διαγράμματος") είναι αρκούντως μακροσκελής (βλ. άσκηση 20 του $4^{ου}$ φυλλαδίου), θα παραθέσουμε εδώ μια διαφορετική, κομψή και σύντομη απόδειξη που οφείλεται στον J. Lambek και κάνει χρήση του "λήμματος των δύο τετραγώνων" (βλ. 2.2.5).

2.2.4. Ορισμός. Έστω # ένα τετράγωνο μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & B \arrow[d, "\beta"] \\
C \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}$$

Ορίζουμε ως <u>λόγο εικόνων</u> (image ratio) <u>τού #</u> τον πηλικομόδιο

$$\mathrm{Im.rat.}(\#) := (\mathrm{Im}(\beta)\cap \mathrm{Im}(g))\big/\mathrm{Im}(g\circ\alpha)$$

Και ως <u>λόγο πυρήνων</u> (kernel ratio) <u>τού #</u> τον πηλικομόδιο

$$\mathrm{Ker.rat.}(\#) := \mathrm{Ker}(g\circ\alpha)\big/(\mathrm{Ker}(\alpha)+\mathrm{Ker}(f))$$

Σημειωτέον ότι για διαγράμματα #′ τής μορφής

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ C \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\#'"] & D \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

(με τα κατακόρυφα βέλη στραμμένα "προς τα άνω") ορίζουμε κατ' αναλογίαν

$$\mathrm{Im.rat.}(\#') := (\mathrm{Im}(\beta)\cap \mathrm{Im}(f))\big/\mathrm{Im}(f\circ\alpha) \quad \text{και} \quad \mathrm{Ker.rat.}(\#') := \mathrm{Ker}(f\circ\alpha)\big/(\mathrm{Ker}(\alpha)+\mathrm{Ker}(g))$$

<u>2.2.5. Λήμμα των δύο τετραγώνων.</u> Για οιοδήποτε μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων αποτελούμενο από δύο τετράγωνα τής μορφής

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "1"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, phantom, "2"] & M'' \arrow[d, "\gamma"] \\ N' \arrow[r, "f'"'] & N \arrow[r, "g'"'] & N'' \end{tikzcd}$$

Και έχον αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς, υφίσταται ένας ισομορφισμός:

$$\boxed{\mathrm{Im.rat.}(1) \cong \mathrm{Ker.rat}(2)}$$

<u>Απόδειξη.</u> Προφανώς, $\mathrm{Im}(\beta)\cap \mathrm{Ker}(g') = \{\beta(m) \mid m\in M \text{ και } g'(\beta(m)) = 0_{N''}\}$ $= \beta(\mathrm{Ker}(g'\circ\beta))$ και $\mathrm{Im}(\beta\circ f) = \beta(\mathrm{Im}(f)) = \beta(\mathrm{Ker}(g)) = \beta(\mathrm{Ker}(\beta)+\mathrm{Ker}(g))$.
Επιπροσθέτως, $\mathrm{Ker}(\beta) \subseteq \mathrm{Ker}(g'\circ\beta)$ (διότι $\forall m\in \mathrm{Ker}(\beta): g'(\beta(m)) = g'(0_N) = 0_{N''}$) και $\mathrm{Ker}(\beta) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)+\mathrm{Ker}(g)$. Κατά συνέπειαν,

$$\mathrm{Ker.rat.}(②) = \mathrm{Ker}(g'\circ\beta)\Big/(\mathrm{Ker}(\beta)+\mathrm{Ker}(g))$$

$$\Big\| \wr \qquad \begin{pmatrix}\text{Κατόπιν εφαρμογής}\\ \text{του } 3^{\text{ου}} \text{ ΘΙΜ 1.4.12}\end{pmatrix}$$

$$\left(\mathrm{Ker}(g'\circ\beta)/\mathrm{Ker}(\beta)\right)\Big/\left((\mathrm{Ker}(\beta)+\mathrm{Ker}(g))/\mathrm{Ker}(\beta)\right)$$

$$\Big\| \wr \qquad \begin{pmatrix}\text{Κατόπιν διπλής εφαρμογής}\\ \text{του } 1^{\text{ου}} \text{ ΘΙΜ 1.4.8}\end{pmatrix}$$

$$\beta(\mathrm{Ker}(g'\circ\beta))\Big/\beta(\mathrm{Ker}(\beta)+\mathrm{Ker}(g))$$

$$\Big\|$$

$$(\mathrm{Im}(\beta)\cap \underbrace{\mathrm{Ker}(g')}_{=\,\mathrm{Im}(f')})\Big/\mathrm{Im}(\beta\circ f) = \mathrm{Im.rat.}(①).$$

$\square$

<u>2.2.6. Σημείωση.</u> Το "λήμμα των δύο τετραγώνων" ($\mathrm{Im.rat}(①) \cong \mathrm{Ker.rat}(②)$) ισχύει ακόμη και για διαγράμματα της μορφής

$$\begin{array}{ccccc} M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' \\ \alpha\uparrow & ① & \uparrow\beta & ② & \uparrow\gamma \\ N' & \xrightarrow[f']{} & N & \xrightarrow[g']{} & N'' \end{array}$$

που στρέφουν τα κατακόρυφα βέλη προς τα άνω, αρκεί οι λόγοι εικόνων και πυρήνων να οριστούν καταλλήλως (όπως εξηγήθηκε στο 2.2.4.)

2.2.7. Το λήμμα του φιδιού Έστω ότι οι M, M', M'' και N, N', N'' είναι δυο τριάδες R-μοδίων και ότι οι

$$\phi: M \to N, \quad \phi': M' \to N', \quad \phi'': M'' \to N''$$

είναι τρεις ομομορφισμοί R-μοδίων, τέτοιοι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \ker(\phi') \arrow[r, "\bar{\alpha}'"] \arrow[d, "i_{\phi'}"] & \ker(\phi) \arrow[r, "\bar{\alpha}''"] \arrow[d, "i_{\phi}"] & \ker(\phi'') \arrow[d, "i_{\phi''}"] \arrow[dddll, bend left] & \\
 & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\phi'"] & M \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, "\phi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\pi_{Im(\phi')}"'] & N \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d, "\pi_{Im(\phi)}"'] & N'' \arrow[d, "\pi_{Im(\phi'')}"] & \\
 & \operatorname{coker}(\phi') \arrow[r, "\underline{\beta}'"'] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\phi) \arrow[r, "\underline{\beta}''"'] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\phi'') \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό με τις μεσαίες του γραμμές ακριβείς. (Εν προκειμένω, οι ομομορφισμοί $\bar{\alpha}', \bar{\alpha}'', \underline{\beta}', \underline{\beta}''$ είναι αυτοί που έχουν ορισθεί μέσω των πορισμάτων 2.1.9 και 2.1.11.) Τότε υπάρχει ομομορφισμός R-μοδίων

$$\Delta : Ker(\phi'') \longrightarrow CoKer(\phi'),$$

ούτως ώστε η προκύπτουσα ακολουθία

$$Ker(\phi') \xrightarrow{\bar{\alpha}'} Ker(\phi) \xrightarrow{\bar{\alpha}''} Ker(\phi'') \xrightarrow{\Delta} CoKer(\phi') \xrightarrow{\underline{\beta}'} CoKer(\phi) \xrightarrow{\underline{\beta}''} CoKer(\phi'')$$

να είναι ακριβής.

Απόδειξη. Αυτή θα γίνει σε πέντε βήματα. (Μόνο στα (i)-(iv) υπεισέρχεται "κυνηγητό διαγράμματος". Το (v) διευθετείται μέσω του λήμματος 2.2.5.)

$\boxed{(i)\ \bar{\alpha}'' \circ \bar{\alpha}' = 0 \ (\Leftrightarrow Im(\bar{\alpha}') \subseteq Ker(\bar{\alpha}''))}$ Έστω τυχόν $y \in Im(\bar{\alpha}'' \circ \bar{\alpha}')$. Τότε $\exists\, x \in Ker(\phi') : \bar{\alpha}'' \circ \bar{\alpha}'(x) = y$. Όμως $i_{\phi''}(y) \in M'' = Im(\alpha'')$

$\Rightarrow \exists\, z \in M : \alpha''(z) = i_{\phi''}(y) = i_{\phi''}((\bar{\alpha}''\circ\bar{\alpha}')(x)) \underset{\substack{\mu\varepsilon\tau\alpha\theta.\\ \delta\iota\alpha\gamma\rho.}}{=} (\alpha''\circ i_{\phi}\circ\bar{\alpha}')(x)$

$\underset{\substack{\mu\varepsilon\tau\alpha\theta.\\ \delta\iota\alpha\gamma\rho.}}{=} (\underbrace{\alpha''\circ\alpha'}_{\overset{\parallel \leftarrow \text{ακρίβεια}}{0}}\circ i_{\phi'})(x) = 0_{M''} \Rightarrow y \in Ker(i_{\phi''}) = \{0_{M''}\}.$

Άρα όντως $\bar{\alpha}''\circ\bar{\alpha}' = 0.$

$\boxed{(ii)\ \ Ker(\bar{\alpha}'') \subseteq Im(\bar{\alpha}')}$. Έστω $x \in Ker(\bar{\alpha}'')$. Τότε

$i_{\phi''}(\bar{\alpha}''(x)) = 0_M \Rightarrow (\alpha''\circ i_{\phi})(x) = 0 \Rightarrow i_{\phi}(x) \in Ker(\alpha'') \overset{\text{ακρίβεια}}{=} Im(\alpha')$

$\Rightarrow \exists\, y \in M' : i_{\phi}(x) = \alpha'(y) \Rightarrow \phi(\alpha'(y)) = \phi(i_{\phi}(x)) = 0_N$

$\Rightarrow \beta'(\phi'(y)) = 0_N \underset{\beta'\ \text{ενριπτική}}{\Longrightarrow} \phi'(y) = 0_{N'} \Rightarrow y \in Ker(\phi') = Im(i_{\phi'})$

$\Rightarrow \exists\, x' \in Ker(\phi') : y = i_{\phi'}(x') \Rightarrow \alpha'(y) = \alpha'(i_{\phi'}(x'))$

$\Rightarrow i_{\phi}(x) = \alpha'(y) \underset{\substack{\mu\varepsilon\tau\alpha\theta.\\ \delta\iota\alpha\gamma\rho.}}{=} (i_{\phi}\circ\bar{\alpha}')(y) \underset{i_{\phi}\ \text{ένριψη}}{\Longrightarrow} x = \bar{\alpha}'(y) \in Im(\bar{\alpha}').$

$\boxed{(iii)\ \ \underline{\beta}''\circ\underline{\beta}' = 0\ (\Leftrightarrow Im(\underline{\beta}') \subseteq Ker(\underline{\beta}''))}$. Έστω $x \in Coker(\phi')$.

Επειδή η $\pi_{Im(\phi')}$ είναι επιρριπτική $\exists\, z \in N' : \pi_{Im(\phi')}(z) = x$.

Άρα $\underline{\beta}''\circ\underline{\beta}'(x) = (\underline{\beta}''\circ\underline{\beta}'\circ\pi_{Im(\phi')})(z) \underset{\substack{\mu\varepsilon\tau\alpha\theta.\\ \delta\iota\alpha\gamma\rho.}}{=} (\underline{\beta}''\circ\pi_{Im(\phi)}\circ\beta')(z)$

$= (\pi_{Im(\phi'')}\circ\underbrace{\beta''\circ\beta'}_{\overset{\parallel \leftarrow \text{ακρίβεια}}{0}})(z) = 0_{Coker\phi}$

Άρα όντως $\underline{\beta}''\circ\underline{\beta}' = 0.$

$\boxed{(iv)\ \ Ker(\underline{\beta}'') \subseteq Im(\underline{\beta}')}$. Έστω τυχόν $x \in Ker(\underline{\beta}'')$, $\pi_{Im(\phi)}$ επιρρίψη $\Big\}\Rightarrow \exists\, y \in N : \pi_{Im(\phi)}(y) = x.$

$\Rightarrow (\underline{\beta}''\circ\pi_{Im(\phi)})(y) = 0 \Rightarrow (\pi_{Im(\phi'')}\circ\beta'')(y) = 0$

$\Rightarrow \beta''(y) \in Ker(\pi_{Im(\phi'')}) = Im(\phi'') \Rightarrow \exists\, \omega \in M'' : \phi''(\omega) = \beta''(y)$, α'' επιρρίψη $\Big\}\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \exists \xi \in M: \omega = \alpha''(\xi) \\ \phi''(\alpha''(\xi)) = \beta''(y)\end{array}\right\} \underset{\substack{\mu\varepsilon\tau\alpha\theta. \\ \delta\iota\alpha\gamma\rho.}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in M: \beta''(\phi(\xi)) = \beta''(y)$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in M: y - \phi(\xi) \in Ker(\beta'') = Im(\beta') \Rightarrow \exists u \in N':$$

$$y - \phi(\xi) = \beta'(u) \underset{\alpha\kappa\rho\acute{\iota}\beta\varepsilon\iota\alpha}{\Longrightarrow} \pi_{Im(\phi)}(y) - \underbrace{\pi_{Im(\phi)}(\phi(\xi))}_{\overset{\leftarrow \alpha\kappa\rho\acute{\iota}\beta\varepsilon\iota\alpha}{=0}} = \pi_{Im(\phi)}(y) = \pi_{Im(\phi)}(\beta'(u)) \underset{\mu\varepsilon\tau\alpha\theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}\tau\eta\tau\alpha}{=} \underline{\beta}'(\pi_{Im(\phi')}(u))$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\exists u \in N' \\ \mu\varepsilon\ \pi_{Im(\phi')}(u) \in N''\ \kappa\alpha\iota\ \underline{\beta}'(\pi_{Im(\phi')}(u)) = \pi_{Im(\phi)}(y) = x.\end{array}\right.$$

Άρα όντως $Ker(\beta'') \subseteq Im(\underline{\beta}')$.

(γ) Για την απόδειξη της υπάρξεως του Δ αρκεί να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\boxed{CoKer(\bar{\alpha}'') \cong Ker(\underline{\beta}')} \quad (*)$$

Πράγματι σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $\Delta := i \circ \pi$, όπου

$$\begin{tikzcd}
Ker(\phi) \arrow[r, "\bar{\alpha}''"] & Ker(\phi'') \arrow[rr, dashed, "\Delta"] \arrow[dr, "\pi=\pi_{Im(\bar{\alpha}'')}"'] & & CoKer(\phi') \arrow[r, "\underline{\beta}'"] & CoKer(\phi) \\
& & CoKer(\bar{\alpha}'') \cong Ker(\underline{\beta}') \arrow[ur, "i\ (\acute{\varepsilon}\nu\theta\varepsilon\sigma\eta)"'] & &
\end{tikzcd}$$

με $Im(\Delta) = i(\pi(Ker(\phi''))) = Ker(\phi'')/Im(\bar{\alpha}'') = CoKer(\bar{\alpha}'') = Ker(\underline{\beta}')$

και $Ker(\Delta) = Ker(i \circ \pi) = \{x \in Ker(\phi'') \mid \pi(x) \in \underset{0_{CoKer(\bar{\alpha}'')}}{\overset{\shortparallel}{Ker(i)}}\} = Im(\bar{\alpha}'')$.

Για την απόδειξη του ισομορφισμού $(*)$ θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων με ακριβείς γραμμές και ακριβείς στήλες:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "1"] & CoKer(\bar{\alpha}'') \arrow[d, "Id"] & \\
 & & & Ker(\phi) \arrow[r, "\bar{\alpha}''"] \arrow[d, "i_\phi"] \arrow[dr, phantom, "3"] & Ker(\phi'') \arrow[r] \arrow[d, "i_{\phi''}"] \arrow[dr, phantom, "2"] & CoKer(\bar{\alpha}'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & M' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\phi'"'] \arrow[dr, phantom, "5"] & M \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, phantom, "4"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "7"] & N' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\pi_{Im(\phi')}"] \arrow[dr, phantom, "6"] & N \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d, "\pi_{Im(\phi)}"] & N'' & & \\
0 \arrow[r] & Ker(\underline{\beta}') \arrow[r, hook] \arrow[d, "Id"] \arrow[dr, phantom, "8"] & CoKer(\phi') \arrow[r, "\underline{\beta}'"] \arrow[d] & CoKer(\phi) & & & \\
 & Ker(\underline{\beta}') \arrow[r] & 0 & & & &
\end{tikzcd}$$

Εκ κατασκευής, $CoKer(\bar{\alpha}'') = Im.rat(1)$. Από τα 2.2.5 και 2.2.6 έχουμε

$$\begin{aligned}
Im.rat(1) &\cong Ker.rat(2) \\
&\cong Im.rat(3) \\
&\cong Ker.rat(4) \\
&\cong Im.rat(5) \\
&\cong Ker.rat(6) \\
&\cong Im.rat(7) \\
&\cong Ker.rat(8) \underset{(\text{εκ κατασκευής})}{=\!=} Ker(\underline{\beta}') \Rightarrow \eta\ (*)
\end{aligned}$$

ισχύει. □

2.2.8 Παρατήρηση. (i) Εάν ο $\bar{\alpha}'$ είναι μονομορφισμός, τότε και ο α' θα είναι μονομορφισμός. Τούτο έπεται από την εφαρμογή του λήμματος των τεσσάρων (2.2.1) στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Ker(\phi') \arrow[r, hook] \arrow[d, "\bar{\alpha}'"] & M' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "\alpha'"] & N' \arrow[d, "\beta'\ (\text{μονομορφισμός})"] \\
0 \arrow[r] & Ker(\phi) \arrow[r, hook] & M \arrow[r, "\phi"] & N
\end{tikzcd}$$

(Και αντιστοίχως, εάν ο α' είναι επιμορφισμός, τότε και ο $\bar{\alpha}'$ είναι επιμορφισμός.)

(ii) Εάν ο $\underline{\beta}''$ είναι επιμορφισμός, τότε και ο β'' είναι επιμορφισμός.
(Και αντιστοίχως, εάν ο β'' είναι μονομορφισμός, τότε και ο $\underline{\beta}''$ είναι μονομορφισμός.)
Τούτο έπεται από την εφαρμογή τού λήμματος των τεσσάρων (2.2.1) στο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xrightarrow{\phi} & N & \twoheadrightarrow & \mathrm{CoKer}(\phi) & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle \alpha''\ (\text{επιμορφισμός})}\downarrow & G & \downarrow{\scriptstyle \beta''} & G & \downarrow{\scriptstyle \underline{\beta}''} & G & \| \\ M'' & \xrightarrow[\phi'']{} & N'' & \twoheadrightarrow & \mathrm{CoKer}(\phi'') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(iii) Εάν ο ϕ' είναι επιμορφισμός, τότε προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$\mathrm{Ker}(\phi') \xrightarrow[\overline{\alpha}']{} \mathrm{Ker}(\phi) \xrightarrow[\overline{\alpha}'']{} \mathrm{Ker}(\phi'') \longrightarrow 0$$

(iv) Εάν ο ϕ'' είναι μονομορφισμός, τότε προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \mathrm{CoKer}(\phi') \xrightarrow[\underline{\beta}']{} \mathrm{CoKer}(\phi) \xrightarrow[\underline{\beta}'']{} \mathrm{CoKer}(\phi''). \quad \square$$

Θα κλείσουμε την παρούσα ενότητα με την απόδειξη ενός σημαντικού λήμματος, το οποίο (σε συνδυασμό με το λήμμα τού εξαγώνου, βλ. ασκήσεις **22** και **23** τού $4^{ου}$ φυλλαδίου) οδηγεί στην απόδειξη τής υπάρξεως μιας χαρακτηριστικής ακριβούς ακολουθίας, παρέχοντάς μας την αλγεβρική εκδοχή τής λεγομένης *ακριβούς ακολουθίας των Mayer και Vietoris* που συναντούμε στην Αλγεβρική Τοπολογία.

[Για την πρωτότυπη δημοσίευσή του, βλ. το άρθρο των M.G. Barratt και J.H.C Whitehead: *The first non-vanishing group of an* (n+1)*-ad*, Proc. of London Math. Soc., Vol. **6**, 1956, 417-439.]

2.2.9 Λήμμα των Barratt και Whitehead. Για οιοδήποτε μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots \xrightarrow{h_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{f_n} & B_n & \xrightarrow{g_n} & C_n & \xrightarrow{h_n} & A_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & B_{n-1} & \longrightarrow \cdots \\ & {\scriptstyle \alpha_n}\downarrow & G & {\scriptstyle \beta_n}\downarrow & G & {\scriptstyle \gamma_n}\downarrow\cong & G & {\scriptstyle \alpha_{n-1}}\downarrow & G & {\scriptstyle \beta_{n-1}}\downarrow & \\ \cdots \xrightarrow[h'_{n+1}]{} & A'_n & \xrightarrow[f'_n]{} & B'_n & \xrightarrow[g'_n]{} & C'_n & \xrightarrow[h'_n]{} & A'_{n-1} & \xrightarrow[f'_{n-1}]{} & B'_{n-1} & \longrightarrow \cdots \end{array}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς και τον γ_n ισομορφισμό, $\forall n \in \mathbb{Z}$, υφίσταται μια ακριβής ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} A_n \xrightarrow{\psi_n} A'_n \oplus B_n \xrightarrow{\varphi_n} B'_n \xrightarrow{\Delta_n} A_{n-1} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \cdots$$

όπου
$$\begin{cases} A_n \ni x \longmapsto \psi_n(x) := (\alpha_n(x), f_n(x)) \in A'_n \oplus B_n, \\ A'_n \oplus B_n \ni (x,y) \longmapsto \varphi_n(x,y) := -\beta_n(y) + f'_n(x) \in B'_n \\ \Delta_n := h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ g'_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

<u>Απόδειξη:</u> Σε έξι βήματα, μέσω κυνηγητού διαγράμματος.

$\boxed{(i)\ \ \psi_n \circ \Delta_{n+1} = 0}$ Προφανώς, $f_n \circ \Delta_{n+1} = \underbrace{f_n \circ h_{n+1}}_{\overset{\text{ακρίβεια}}{=0}} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1} = 0$

και $\alpha_n \circ \Delta_{n+1} = \alpha_n \circ h_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g'_{n+1}$

$$\underset{\text{μεταθ. διαγρ.}}{=} h'_{n+1} \circ \underbrace{\gamma_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1}}_{Id_{C'}} \circ g'_{n+1} = h'_{n+1} \circ g'_{n+1} \underset{\text{ακρίβεια}}{=} 0. \text{ Άρα } \psi_n \circ \Delta_{n+1} = 0.$$

$\boxed{(ii)\ Ker(\psi_n) \subseteq Im(\Delta_{n+1})}$ Εάν $x \in Ker(\psi_n)$, τότε $x \in Ker(\alpha_n) \cap Ker(f_n)$.

Επειδή $Ker(f_n) = Im(h_{n+1})$, υπάρχει κάποιο $z \in C_{n+1}$: $x = h_{n+1}(z)$
Επειδή ο γ_{n+1}^{-1} είναι επιμορφισμός, υπάρχει κάποιο $z' \in C'_{n+1}$: $z = \gamma_{n+1}^{-1}(z')$ $\Big\} \Rightarrow$

$$0_{A'_n} = \alpha_n(x) = \alpha_n(h_{n+1}(\gamma_{n+1}^{-1}(z'))) = (\alpha_n \circ h_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1})(z') \underset{\text{μεταθ. διαγρ.}}{=} (h'_{n+1} \circ \gamma_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1})(z')$$

$= h'_{n+1}(z') \Longrightarrow z' \in Ker(h'_{n+1}) \underset{\text{ακρίβεια}}{=} Im(g'_{n+1})$, οπότε υπάρχει κάποιο $w \in B'_{n+1}$:

$z' = g'_{n+1}(w)$. Κατά συνέπεια, $x = (h_{n+1} \circ \gamma_{n+1}^{-1} \circ g_{n+1})(w) = \Delta_{n+1}(w) \in Im(\Delta_{n+1})$.

$\boxed{(iii)\ \ \varphi_n \circ \psi_n = 0}$ Για κάθε $x \in A_n$ έχουμε:

$$\varphi_n(\psi_n(x)) = \varphi_n((\alpha_n(x), f_n(x))) = -\beta_n(f_n(x)) + f'_n(\alpha_n(x))$$
$$= (\underbrace{f'_n \circ \alpha_n - \beta_n \circ f_n}_{=0 \text{ (λόγω ακρίβειας)}})(x) = 0. \text{ Άρα } \varphi_n \circ \psi_n = 0.$$

$\boxed{\text{(iv)}\ \ Ker(\varphi_n) \subseteq Im(\psi_n)}$ Έστω τυχόν στοιχείο $(x,y) \in Ker(\varphi_n)$.

Τότε $f'_n(x) = \beta_n(y) \Rightarrow 0_{C'_n} \underset{\text{ακρίβεια}}{=} g'_n(f'_n(x)) = g'_n(\beta_n(y)) \underset{\substack{\text{μεταθ.}\\ \text{διαγρ.}}}{=\!=} \gamma_n(g_n(y)) \Bigg\} \underset{\gamma_n \text{ μονομορφισμός}}{\Rightarrow}$

$g_n(y) = 0_{C_n} \Rightarrow y \in Ker(g_n) \underset{\text{ακρίβεια}}{=\!=} Im(f_n)$, οπότε $\exists\, z \in A_n : y = f_n(z)$.

Αυτό σημαίνει ότι

$$f'_n(x) = \beta_n(y) = \beta_n(f_n(z)) \underset{\substack{\text{μεταθ.}\\ \text{διαγρ.}}}{=\!=} f'_n(\alpha_n(z)) \Rightarrow x - \alpha_n(z) \in Ker(f'_n) \underset{\text{ακρίβεια}}{=} Im(h'_{n+1}).$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Επομένως, } \exists\, w \in C'_{n+1} : x - \alpha_n(z) = h'_{n+1}(w) \\ \text{Επιπροσθέτως, ο } \gamma_{n+1} \text{ είναι επιμορφισμός, οπότε } \exists\, u \in C_{n+1} : w = \gamma_{n+1}(u) \\ \qquad\qquad h'_{n+1} \circ \gamma_{n+1} \underset{\substack{\text{μεταθετικότητα}\\ \text{διαγράμματος}}}{=} \alpha_n \circ h_{n+1} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \alpha_n(z + h_{n+1}(u)) \quad (1)$$

Από την άλλη μεριά, επειδή $f_n \circ h_{n+1} \overset{\text{ακρίβεια}}{=} 0$, μπορούμε να γράψουμε το y ως $y = f_n(z) = f_n(z + h_{n+1}(u))$ (2). Από τις (1) και (2) έπεται ότι $(x,y) \in Im(\psi_n)$.

$\boxed{\text{(v)}\ \ \Delta_n \circ \varphi_n = 0}$ Για κάθε $(x,y) \in A'_n \oplus B_n$ έχουμε

$$\Delta_n(\varphi_n(x,y)) = \Delta_n(f'_n(x) - \beta_n(y)) \underset{\Delta_n \text{ ομομ.}}{=\!=} \Delta_n(f'_n(x)) - \Delta_n(\beta_n(y))$$

$$=\!= (h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ \underbrace{g'_n \circ f'_n}_{\substack{\| \\ 0}})(x) - (h_n \circ \gamma_n^{-1} \circ \underbrace{g'_n \circ \beta_n}_{\substack{\| \\ \gamma_n^{-1} \circ g_n}})(y) = -(\underbrace{h_n \circ g_n}_{\substack{\| \\ 0}})(y) = 0_{A_{n-1}}.$$

ακρίβεια $\rightarrow$ ... μεταθετικότητα διαγράμματος $\rightarrow$ ... ακρίβεια $\rightarrow$

$\boxed{\text{(vi)}\ \ Ker(\Delta_n) \subseteq Im(\varphi_n)}$ Έστω τυχόν $x \in Ker(\Delta_n)$. Τότε έχουμε

$h_n(\gamma_n^{-1}(g'_n(x))) = 0_{A_{n-1}} \Rightarrow \gamma_n^{-1}(g'_n(x)) \in Ker(h_n) \overset{\text{ακρίβεια}}{=} Im(g_n)$, οπότε $\exists\, y \in B_n$:

$$\gamma_n^{-1}(g'_n(x)) = g_n(y) \underset{\gamma_n \text{ ισομορφισμός}}{\Longrightarrow} g'_n(x) = (\gamma_n \circ g_n)(y) \underset{\substack{\text{μεταθετικότητα}\\ \text{διαγράμματος}}}{=\!=} (g'_n \circ \beta_n)(y)$$

$\Longrightarrow x - \beta_n(y) \in Ker(g'_n) \overset{\text{ακρίβεια}}{=} Im(f'_n)$, οπότε $\exists\, w \in A'_n : x - \beta_n(y) = f'_n(w)$,

απ' όπου έπεται ότι $x = \beta_n(y) + f'_n(w) = -\beta_n(-y) + f'_n(w) \in Im(\varphi_n)$. $\square$

§ 2.3 Αλυσωτά και συναλυσωτά σύμπλοκα και μόδιοι ομολογίας και συνομολογίας

Έστω $\ldots \xrightarrow{d_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots$ (*)
μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων με κατιόν σύνολο δεικτών. Ως γνωστόν (βλ. 2.1.1, 2.1.2 (ii),(iii)), η (*) είναι ακριβής $\Leftrightarrow$ $d_n \circ d_{n+1} = 0$ και $Ker(d_n) \subseteq Im(d_{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
Η έννοια τού "αλυσωτού συμπλόκου" γενικεύει την έννοια τής ακριβούς ακολουθίας ως εξής:

<u>2.3.1 Ορισμός</u> Μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής (*) καλείται <u>αλυσωτό σύμπλοκο</u> (ή <u>ημιακριβής ακολουθία με κατιόν σύνολο δεικτών</u>) όταν $d_n \circ d_{n+1} = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Συντομογραφία για την (*): $M_\bullet := (M_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.
Οι ομομορφισμοί $d_n^{M_\bullet} := d_n$, $n \in \mathbb{Z}$, καλούνται ενίοτε <u>συνοριακοί τελεστές</u> ή <u>διαφορικά</u> τού αλυσωτού συμπλόκου $M_\bullet$ (που είναι όροι κληρονομηθέντες από την κλασική Συνδυαστική Τοπολογία).

<u>2.3.2 Ορισμός</u> Έστω $M_\bullet = (M_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο τής μορφής (*). Θέτουμε
$$\begin{cases} B_n(M_\bullet) := Im(d_{n+1}) \\ Z_n(M_\bullet) := Ker(d_n) \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$
Προφανώς, αμφότεροι οι $B_n(M_\bullet)$, $Z_n(M_\bullet)$ είναι υπομόδιοι τού R-μοδίου M_n και $B_n(M_\bullet) \subseteq Z_n(M_\bullet)$. Τα στοιχεία τού $B_n(M_\bullet)$ καλούνται <u>n-οστά σύνορα</u> και τα στοιχεία τού $Z_n(M_\bullet)$ <u>n-οστά κυκλήματα</u> τού αλυσωτού συμπλόκου $M_\bullet$.
(Πρόκειται και πάλι για "παραδοσιακή" ορολογία τοπολογικής προελεύσεως.)
Ο πηλικομόδιος
$$\boxed{H_n(M_\bullet) := Z_n(M_\bullet) / B_n(M_\bullet)}$$
καλείται <u>n-οστός μόδιος ομολογίας τού αλυσωτού συμπλόκου $M_\bullet$</u>.

<u>2.3.3 Σημείωση</u> Προφανώς, $H_n(M_\bullet) = 0_{Z_n(M_\bullet)/B_n(M_\bullet)} = B_n(M_\bullet)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, εάν και μόνον εάν η (*) είναι ακριβής. Ως εκ τούτου, <u>οι μόδιοι ομολογίας ενός αλυσωτού συμπλόκου εκφράζουν το πόσο "απέχει" αυτό από το να είναι μια ακριβής ακολουθία.</u>

2.3.4. Παράδειγμα Έστω K ένα σώμα και έστω $K^{\infty} := K^{\mathbb{N}}$ το αριθμησίμως άπειρο γινόμενο αντιτύπων τού K (= σύνολο των ακολουθιών στοιχείων τού K με σύνολο δεικτών τους τους θετικούς ακεραίους). Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ μπορούμε να ταυτίζουμε το $K^{\nu} := \underbrace{K \times \cdots \times K}_{\nu \text{ φορές}}$ με τον υπόχωρο τού K^{∞} τον αποτελούμενο από τις ακολουθίες που έχουν τους j-οστούς όρους τους ίσους με το 0_K, για κάθε $j \in \mathbb{N}$, $j \geq \nu+1$. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\begin{cases} e_1 := (1_K, 0_K, \ldots, 0_K, 0_K, \ldots) \\ e_2 := (0_K, 1_K, \ldots, 0_K, 0_K, \ldots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_j := (0_K, 0_K, \ldots, \underset{\uparrow \atop j\text{-οστή θέση}}{1_K}, 0_K, 0_K, \ldots) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

και (για σταθεροποιημένον $n \in \mathbb{Z}$) τους ομομορφισμούς K-διανυσματικών χώρων

$$d_n : K^n \longrightarrow K^{n-1}$$

τους οριζόμενους μέσω τού τύπου $d_n(e_j) := \begin{cases} 0_K, & \forall j \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ e_1, & \text{όταν } j = n, \end{cases}$

(επί τής βάσεως $\{e_1, \ldots, e_n\}$ τού K^n) και γραμμικής επεκτάσεως (βλ. 1.6.14), όταν $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, και $d_n := 0$ (μηδενικός ομομορφισμός) όταν $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq 1$. Κατ' αυτόν τον τρόπο σχηματίζεται ένα αλυσωτό σύμπλοκο $(K^n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ [όπου $K^n := \{0_K\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \leq 0$]:

$$\cdots \longrightarrow K^{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} K^n \xrightarrow{d_n} K^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_3} K^2 \xrightarrow{d_2} K \xrightarrow{d_1} 0_K \longrightarrow 0_K \longrightarrow \cdots$$

με

$$Z_n((K^n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = \operatorname{Ker}(d_n) = \begin{cases} \operatorname{Lin}(\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}), & \text{όταν } n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2, \\ K, & \text{όταν } n = 1, \\ \{0_K\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z},\ n \leq 0, \end{cases}$$

και

$$B_n((K^n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = \operatorname{Im}(d_{n+1}) = \begin{cases} \operatorname{Lin}(\{e_1\}), & \text{όταν } n \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1, \\ \{0_K\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z},\ n \leq 0. \end{cases}$$

Προφανώς,

$$\boxed{H_n((K^n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}) \cong \begin{cases} K^{n-2}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z},\ n \geq 3 \\ \{0_K\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z},\ n \leq 2 \end{cases}}$$

2.3.5. Ορισμός Έστω ότι τα

$$M_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$
$$M'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \cdots \longrightarrow M'_{n+1} \xrightarrow{d'_{n+1}} M'_n \xrightarrow{d'_n} M'_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Μια απεικόνιση $f_\bullet : M_\bullet \to M'_\bullet$ είναι μια ακολουθία απεικονίσεων $(f_n : M_n \to M'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (Κατ' αναλογίαν ορίζουμε τη σύνθεση $(g\circ f)_\bullet : M_\bullet \to M''_\bullet$ δυο απεικονίσεων αλυσωτών συμπλόκων $f_\bullet : M_\bullet \to M'_\bullet$ και $g_\bullet : M'_\bullet \to M''_\bullet$ ως την οικογένεια $(g_n \circ f_n : M_n \to M''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.) Μια απεικόνιση αλυσωτών συμπλόκων $f_\bullet : M_\bullet \to M'_\bullet$ καλείται αλυσωτός μετασχηματισμός όταν για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ η $f_n : M_n \to M'_n$ είναι ομομορφισμός R-μοδίων και (ταυτοχρόνως) το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ M'_n \arrow[r, "d'_n"'] & M'_{n-1} \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

2.3.6. Πρόταση. Για κάθε αλυσωτό μετασχηματισμό $f_\bullet : M_\bullet \to M'_\bullet$ ισχύει $f_n(Z_n(M_\bullet)) \subseteq Z_n(M'_\bullet)$ και $f_n(B_n(M_\bullet)) \subseteq B_n(M'_\bullet)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$. Ως εκ τούτου, επάγεται ένας μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός

$$\boxed{H_n(f_\bullet) : H_n(M_\bullet) \longrightarrow H_n(M'_\bullet)},$$

ούτως ώστε $\pi_{B_n(M'_\bullet)} \circ (f_n|Z_n(M_\bullet)) = H_n(f_\bullet) \circ \pi_{B_n(M_\bullet)}$.

Απόδειξη. Εξ ορισμού το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & M'_n \arrow[r, "d'_n"'] & M'_{n-1} \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό και $d_n \circ d_{n+1} = 0$, $d'_n \circ d'_{n+1} = 0$, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Έστω $x \in Z_n(M_\bullet) = Ker(d_n)$. Τότε $d_n(x) = 0_{M_{n-1}} \Rightarrow d'_n(f_n(x)) = f_{n-1}(d_n(x)) = 0_{M'_{n-1}}$
$\Longrightarrow f_n(x) \in Ker(d'_n) =: Z_n(M'_\bullet)$. Άρα $f_n(Z_n(M_\bullet)) \subseteq Z_n(M'_\bullet)$.

Έστω $y \in Im(d_{n+1}) =: B_n(M_\bullet)$. Τότε υπάρχει κάποιο $z \in M_{n+1}$ με $y = d_{n+1}(z)$, οπότε $f_n(y) = f_n(d_{n+1}(z)) = d'_{n+1}(f_{n+1}(z)) \in Im(d'_{n+1}) =: B_n(M'_\bullet)$.

Η ύπαρξη του $H_n(f_\bullet)$ έπεται από το πόρισμα 1.4.5:

$$\begin{tikzcd} Z_n(M_\bullet) \arrow[r, "f_n|_{Z_n(M_\bullet)}"] \arrow[d, "\pi_{B_n(M_\bullet)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_n(M'_\bullet) \arrow[d, "\pi_{B_n(M'_\bullet)}"] \\ H_n(M_\bullet) \arrow[r, dashed, "H_n(f_\bullet)"'] & H_n(M'_\bullet) \end{tikzcd}$$

(Μάλιστα ο $H_n(f_\bullet)$ ορίζεται από τον τύπο $H_n(f_\bullet)(x+B_n(M_\bullet)):=f_n(x)+B_n(M'_\bullet)$.) □

2.3.7. Πρόταση. Εάν οι $f_\bullet: M'_\bullet \to M_\bullet$, $g_\bullet: M_\bullet \to M''_\bullet$ είναι αλυσωτοί μετασχηματισμοί αλυσωτών συμπλόκων (όπου $M_\bullet=(M_n,d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $M'_\bullet=(M'_n,d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $M''_\bullet=(M''_n,d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$), τότε

$$\boxed{H_n((g\circ f)_\bullet)=H_n(g_\bullet)\circ H_n(f_\bullet),\ \forall n\in\mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη. Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"] \arrow[dd, bend right=60, "(g\circ f)_{n+1} = g_{n+1}\circ f_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M'_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dd, bend left=60, "(g\circ f)_n = g_n\circ f_n"] \\ M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_{n-1} \arrow[d, "g_{n-1}"] \\ M''_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"'] & M''_n \arrow[r, "d''_n"'] & M''_{n-1} \end{tikzcd}$$

έπεται ότι $\forall\, x+B_n(M'_\bullet)\in H_n(M'_\bullet)$:

$$\begin{aligned} H_n((g\circ f)_\bullet)(x+B_n(M'_\bullet)) &= (g_n\circ f_n)(x)+B_n(M''_\bullet) \\ &= H_n(g_\bullet)\,(f_n(x)+B_n(M_\bullet)) \\ &= (H_n(g_\bullet)\circ H_n(f_\bullet))(x+B_n(M'_\bullet)). \end{aligned}$$ □

2.3.8. Πρόταση. Έστω $M_\bullet=(M_n,d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο και έστω $Id_\bullet: M_\bullet\to M_\bullet$ ο ταυτοτικός αλυσωτός μετασχηματισμός $Id_\bullet=(Id_{M_n}: M_n\to M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Τότε

$$\boxed{H_n(Id_\bullet)=Id_{H_n(M_\bullet)},\ \forall n\in\mathbb{Z}.}$$

<u>Απόδειξη.</u> Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$
\begin{tikzcd}
M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "Id_{M_{n+1}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "Id_{M_n}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[d, "Id_{M_{n-1}}"] \\
M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & M_n \arrow[r, "d_n"] & M_{n-1}
\end{tikzcd}
$$

λαμβάνουμε $\forall x + B_n(M_\bullet) \in H_n(M_\bullet)$:

$$H_n(Id_\bullet)(x + B_n(M_\bullet)) = x + B_n(M_\bullet) = Id_{H_n(M_\bullet)}(x + B_n(M_\bullet)),$$

οπότε πράγματι $H_n(Id_\bullet) = Id_{H_n(M_\bullet)}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. $\square$

<u>2.3.9 Ορισμός</u> Μια ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων και αλυσωτών μετασχηματισμών της μορφής $0 \longrightarrow M'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} M''_\bullet \longrightarrow 0$ (όπου εδώ το "0" παριστά ένα αλυσωτό σύμπλοκο αποτελούμενο μόνο από τετριμμένους R-modules και τετριμμένους ομομορφισμούς) καλείται <u>βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων</u> όταν η $0 \longrightarrow M'_n \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{g_n} M''_n \longrightarrow 0$ είναι βραχεία ακριβής ακολουθία (υπό την έννοια του 2.1.2 (iv)) <u>για κάθε $n \in \mathbb{Z}$</u>.

<u>2.3.10 Λήμμα</u> Έστω $0 \longrightarrow M'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} M''_\bullet \longrightarrow 0$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. Τότε η

$$H_n(M'_\bullet) \xrightarrow[H_n(f_\bullet)]{} H_n(M_\bullet) \xrightarrow[H_n(g_\bullet)]{} H_n(M''_\bullet)$$

είναι ακριβής, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

<u>Απόδειξη.</u> Εάν $M_\bullet = (M_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $M'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $M''_\bullet = (M''_n, d''_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, θεωρούμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "g_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "g_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M''_{n+1} \arrow[r, "d''_{n+1}"'] \arrow[d] & M''_n \arrow[r, "d''_n"'] \arrow[d] & M''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{(i)\quad H_n(g_\bullet)\circ H_n(f_\bullet)=0}$ Για κάθε $x+B_n(M'_\bullet)\in H_n(M'_\bullet)$ ($x\in Z_n(M'_\bullet)$) έχουμε $(H_n(g_\bullet)\circ H_n(f_\bullet))(x+B_n(M'_\bullet)) \underset{2.3.7}{=} H_n((g\circ f_\bullet))(x+B_n(M'_\bullet))$

$= \underbrace{(g_n\circ f_n)}_{\overset{\text{ακρίβεια}}{=}\,0}(x)+B_n(M''_\bullet) = B_n(M''_\bullet) = 0_{H_n(M''_\bullet)}$.

$\boxed{(ii)\quad Ker(H_n(g_\bullet))\subseteq Im(H_n(f_\bullet))}$ Έστω τυχόν $y+B_n(M_\bullet)\in Ker(H_n(g_\bullet))$ ($y\in Z_n(M_\bullet)$). Τότε έχουμε

$H_n(g_\bullet)(y+B_n(M_\bullet))=B_n(M''_\bullet) \Rightarrow g_n(y)\in B_n(M''_\bullet)=Im(d''_{n+1})$, οπότε υπάρχει κάποιο $z\in M''_{n+1}$: $g_n(y)=d''_{n+1}(z)$

g_{n+1} επιμορφισμός $\Rightarrow \exists\, w\in M_{n+1}$: $g_{n+1}(w)=z$ $\Big\} \Rightarrow \underbrace{(d''_{n+1}\circ g_{n+1})}_{\substack{\text{μεταθετικότητα} \\ \text{διαγράμματος}}\ \| \ g_n\circ d_{n+1}}(w)=g_n(y)$

$\Longrightarrow y-d_{n+1}(w)\in Ker(g_n) \overset{\text{ακρίβεια}}{=\!=} Im(f_n)$, δηλ. $\exists\, x\in M'_n$: $f_n(x)=y-d_{n+1}(w)$

$\Longrightarrow f_n(x)+B_n(M_\bullet)=(y-\underbrace{d_{n+1}(w)}_{\in\, B_n(M_\bullet)})+B_n(M_\bullet)=y+B_n(M_\bullet)$.

Αυτό σημαίνει ότι $y+B_n(M_\bullet)=H_n(f_\bullet)(x+B_n(M'_\bullet))\in Im(H_n(f_\bullet))$. □

2.3.11. Θεώρημα Έστω $0\to M'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} M_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} M''_\bullet \to 0$ (*) μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. Τότε για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ η απεικόνιση

$$\partial_n=\partial_n^{(*)}: H_n(M''_\bullet)\longrightarrow H_{n-1}(M'_\bullet)$$
$$x+B_n(M''_\bullet)\longmapsto f_{n-1}^{-1}(d_n(g_n^{-1}(x)))+B_{n-1}(M'_\bullet)$$

είναι καλώς ορισμένη, αποτελεί ομομορφισμό R-μοδίων (τον λεγόμενο <u>συνδετικό ομομορφισμό</u> για την (*)), ενώ η επαγόμενη ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\cdots\xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(M'_\bullet)\xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(M_\bullet)\xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(M''_\bullet)\xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(M'_\bullet)\longrightarrow\cdots$$

είναι ακριβής (και ονομάζεται <u>μακρά ακριβής ακολουθία ομολογίας για την (*)</u>).

<u>Απόδειξη.</u> (i) Η ακρίβεια στον $H_n(M_\cdot)$ έχει ήδη αποδειχθεί στο λήμμα 2.3.10.

(ii) Εισάγονται οι συντομογραφίες
$$\begin{cases} N_n := \operatorname{coker}(d_{n+1}) \ (= M_n/B_n(M_\cdot)) \\ N'_n := \operatorname{coker}(d'_{n+1}) \ (= M'_n/B_n(M'_\cdot)) \\ N''_n := \operatorname{coker}(d''_{n+1}) \ (= M''_n/B_n(M''_\cdot)) \end{cases}$$

Επειδή τα $M_\cdot, M'_\cdot, M''_\cdot$ είναι αλυσωτά σύμπλοκα, έχουμε
$B_n(M_\cdot) \subseteq Z_n(M_\cdot) = \operatorname{Ker}(d_n)$, $B_n(M'_\cdot) \subseteq Z_n(M'_\cdot) = \operatorname{Ker}(d'_n)$, $B_n(M''_\cdot) \subseteq Z_n(M''_\cdot)$,
οπότε κατά το πόρισμα 1.4.6. υπάρχουν ομομορφισμοί $\tilde{d}_n, \tilde{d}'_n, \tilde{d}''_n$ (μονοσημάντως ορισμένοι), οι οποίοι καθιστούν τα κάτωθι διαγράμματα μεταθετικά:

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[d, "\pi_n := \pi_{B_n(M_\cdot)}"'] \arrow[dr, "d_n"] & \\ N_n \arrow[r, dashed, "\tilde{d}_n"'] & Z_{n-1}(M_\cdot) \subseteq M_{n-1} \end{tikzcd}$$
$\tilde{d}_n(x + B_n(M_\cdot)) = d_n(x)$

$$\begin{tikzcd} M'_n \arrow[d, "\pi'_n"'] \arrow[dr, "d'_n"] & \\ N'_n \arrow[r, dashed, "\tilde{d}'_n"'] & Z_{n-1}(M'_\cdot) \subseteq M'_{n-1} \end{tikzcd}$$
$\tilde{d}'_n(x + B_n(M'_\cdot)) = d'_n(x)$

$$\begin{tikzcd} M''_n \arrow[d, "\pi''_n"'] \arrow[dr, "d''_n"] & \\ N''_n \arrow[r, dashed, "\tilde{d}''_n"'] & Z_{n-1}(M''_\cdot) \subseteq M''_{n-1} \end{tikzcd}$$
$\tilde{d}''_n(x + B_n(M''_\cdot)) = d''_n(x)$.

(Σημείωση: Επειδή π_n, π'_n, π''_n είναι επιμορφισμοί, έχουμε $\begin{Bmatrix} \operatorname{Im}(d_n) = \operatorname{Im}(\tilde{d}_n) \\ \operatorname{Im}(d'_n) = \operatorname{Im}(\tilde{d}'_n) \\ \operatorname{Im}(d''_n) = \operatorname{Im}(\tilde{d}''_n) \end{Bmatrix}$)

(iii) Κατά το πόρισμα 2.1.9 (και λόγω της ακρίβειας της $0 \to M'_n \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{g_n} M''_n \to 0$) υφίσταται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα R-modules και ομομορφισμών R-modules:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\pi_{\operatorname{Im}(d'_{n+1})}"'] & M_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\pi_{\operatorname{Im}(d_{n+1})}"] & M''_n \arrow[r] \arrow[d, "\pi_{\operatorname{Im}(d''_{n+1})}"] & 0 \\ & N'_n \arrow[r, "\underline{f_n}"'] & N_n \arrow[r, "\underline{g_n}"'] & N''_n & \end{tikzcd}$$

με την άνω του γραμμή ακριβή. Επειδή
$$\left.\begin{array}{c} \underline{g_n} \circ \pi_{\operatorname{Im}(d_{n+1})} \\ \| \\ \underbrace{\underbrace{\pi_{\operatorname{Im}(d''_{n+1})}}_{\text{επιμ.}} \circ \underbrace{g_n}_{\text{επιμ.}}}_{\text{επιμ.}} \end{array}\right\} \text{έχουμε } \underline{g_n} \circ \pi_{\operatorname{Im}(d_{n+1})} \text{ επιμ.} \Downarrow \boxed{\underline{g_n} \text{ επιμορφισμός}}$$

(Πρβλ. Σημειώσεις Εισαγωγή στην Άλγεβρα, Πρόταση 1.2.15, σελ. 12)

(iv) Κατά το πόρισμα 2.1.11 (και λόγω της ακρίβειας της $0 \to M'_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{g_{n-1}} M''_{n-1} \to 0$) υφίσταται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα R-modules και ομομορφισμών R-modules

$$\begin{tikzcd}
 & Z_{n-1}(M'_\bullet) \arrow[r, "\overline{f}_{n-1}"] \arrow[d, hook, "i_{d'_{n-1}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{n-1}(M_\bullet) \arrow[r, "\overline{g}_{n-1}"] \arrow[d, hook, "i_{d_{n-1}}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{n-1}(M''_\bullet) \arrow[d, hook, "i_{d''_{n-1}}"] & \\
0 \arrow[r] & M'_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"'] & M_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"'] & M''_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

με την κάτω γραμμή του ακριβή. Επειδή

$i_{d_{n-1}} \circ \overline{f}_{n-1} = \underbrace{\underbrace{f_{n-1}}_{\text{μονομ.}} \circ \underbrace{i_{d'_{n-1}}}_{\text{μονομ.}}}_{\text{μονομορφισμός}}$ | $\left.i_{d_{n-1}} \circ \overline{f}_{n-1} \text{ μονομορφισμός}\right\} \Rightarrow \boxed{\overline{f}_{n-1} \text{ μονομορφισμός}}$

(v) Από τα (iii), (iv) και τα (i), (ii), (iii), (iv) του 2.2.7 προκύπτει το εξής μεταθετικό διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd}
 & N'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "\widetilde{d}'_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "\widetilde{d}_n"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N''_n \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d}''_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(M'_\bullet) \arrow[r, "\overline{f}_{n-1}"'] & Z_{n-1}(M_\bullet) \arrow[r, "\overline{g}_{n-1}"'] & Z_{n-1}(M''_\bullet) &
\end{tikzcd}$$

με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς!

[Απόδειξη μεταθετικότητος: $\forall x \in M'_n$ έχουμε

$\widetilde{d}_n(\underline{f}_n(x + B_n(M'_\bullet))) = \widetilde{d}_n(f_n(x) + B_n(M_\bullet)) = d_n(f_n(x)) \underset{\substack{\text{μεταθ.}\\2.3.5}}{=} f_{n-1}(\underbrace{d'_n(x)}_{\in\, Z_{n-1}(M'_\bullet) \supseteq B_{n-1}(M'_\bullet)})$

$= \overline{f}_{n-1}(d'_n(x)) = \overline{f}_{n-1}(\widetilde{d}'_n(x + B_n(M'_\bullet)))$,

οπότε $\widetilde{d}_n \circ \underline{f}_n = \overline{f}_{n-1} \circ \widetilde{d}'_n$.

Επίσης, $\forall x \in M_n$ έχουμε

$\widetilde{d}''_n(\underline{g}_n(x + B_n(M_\bullet))) = \widetilde{d}''_n(g_n(x) + B_n(M''_\bullet)) = d''_n(g_n(x)) \underset{\text{μεταθ.}}{=} g_{n-1}(\underbrace{d_n(x)}_{\in\, Z_{n-1}(M_\bullet) \supseteq B_{n-1}(M_\bullet)})$

$= \overline{g}_{n-1}(d_n(x)) = \overline{g}_{n-1}(\widetilde{d}_n(x + B_n(M_\bullet)))$,

οπότε $\widetilde{d}''_n \circ g_n = \overline{g}_{n-1} \circ \widetilde{d}_n$.]

(vi) Εφαρμόζοντας το λήμμα του φιδιού 2.2.7 στο διάγραμμα που κατασκευάσθηκε στο (v) λαμβάνουμε ως οφιοειδή συνδετικό ομομορφισμό κάποιον $\partial_n : \mathrm{Ker}(\widetilde{d}''_n) \longrightarrow \mathrm{CoKer}(\widetilde{d}'_n)$.

Εν συνεχεία, ταυτίζουμε τους πυρήνες και συμπυρήνες που συμπεριλαμβάνονται στο διάγραμμα με τους επιθυμητούς μοδίους ομολογίας ως εξής:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Ker}(\tilde{d}'_n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ker}(\tilde{d}_n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Ker}(\tilde{d}''_n) \arrow[d, hook] \arrow[dddll, "\partial_n"'] & \\
 & N'_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & N_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & N''_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}(M'_\bullet) \arrow[r, "\bar{f}_{n-1}"'] \arrow[d] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{n-1}(M_\bullet) \arrow[r, "\bar{g}_{n-1}"'] \arrow[d] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_{n-1}(M''_\bullet) \arrow[d] & \\
 & \operatorname{CoKer}(\tilde{d}'_n) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \operatorname{CoKer}(\tilde{d}_n) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \operatorname{CoKer}(\tilde{d}''_n) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(\tilde{d}_n) &= \{x + B_n(M_\bullet) \in N_n \mid \tilde{d}_n(x + B_n(M_\bullet)) = 0_{M_{n-1}}\} \\
&= \{x + B_n(M_\bullet) \in N_n \mid d_n(x) = 0_{M_{n-1}}\} \\
&= \{x + B_n(M_\bullet) \in N_n \mid x \in \operatorname{Ker}(d_n) = Z_n(M_\bullet)\} \\
&= Z_n(M_\bullet)/B_n(M_\bullet) = H_n(M_\bullet).
\end{aligned}
$$

Κατ' αναλογίαν δείχνεται ότι $\operatorname{Ker}(\tilde{d}'_n) = H_n(M'_\bullet)$, $\operatorname{Ker}(\tilde{d}''_n) = H_n(M''_\bullet)$.

Από την άλλη μεριά, $\operatorname{CoKer}(\tilde{d}_n) = Z_{n-1}(M_\bullet)/\operatorname{Im}(\tilde{d}_n) \underset{(ii)}{=} \underbrace{Z_{n-1}(M_\bullet)/\operatorname{Im}(d_n)}_{H_{n-1}(M_\bullet)}$,

Κατ' αναλογίαν δείχνεται ότι $\begin{cases} \operatorname{CoKer}(\tilde{d}'_n) = H_{n-1}(M'_\bullet) \\ \operatorname{CoKer}(\tilde{d}''_n) = H_{n-1}(M''_\bullet) \end{cases}$

(vii) Τελικές παρατηρήσεις: Είναι εύκολο να αποδεχθεί ότι οι ομομορφισμοί $H_n(f_\bullet)$, $H_n(g_\bullet)$ συμπληρώνουν μεταθετικώς τα δύο άνω τετράγωνα και οι $H_{n-1}(f_\bullet)$, $H_{n-1}(g_\bullet)$ τα δύο κάτω τετράγωνα τού διαγράμματος τού (vi), οπότε λόγω τής ιδιότητας τού μονοσημάντου (βλ. Πορίσματα 2.1.9 και 2.1.11), είναι αυτοί που θα πρέπει να εγγραφούν στην άνω και κάτω γραμμή τού διαγράμματος. Τέλος, και ο οφιοειδής ομομορφισμός είναι μονοσημάντως ορισμένος (με εξαίρεση τη σύνθεσή του με κάποιον ισομορφισμό), οπότε ως ∂_n μπορεί όντως (δίχως βλάβη τής γενικότητας) να ληφθεί ο ομομορφισμός με τον τύπο ορισμού που δίδεται στην εκφώνηση τού θεωρήματος (πρβλ. άσκηση 20 τού 4ου φυλλαδίου). $\square$

<u>2.3.12. Ορισμός</u> Έστω $M_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο. Εάν για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ το M'_n παριστά έναν υπομόδιο τού R-μοδίου M_n και εάν (ταυτοχρόνως) ισχύει ο εγκλεισμός $d_n(M'_n) \subseteq M'_{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, τότε το αλυσωτό σύμπλοκο $M'_\bullet := (M'_n, d_n|_{M'_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ ονομάζεται <u>υποσύμπλοκο τού $M_\bullet$</u>, ενώ το αλυσωτό σύμπλοκο $M_\bullet/M'_\bullet := (M_n/M'_n, d_n^{\pi\eta\lambda.})_{n\in\mathbb{Z}}$ όπου $d_n^{\pi\eta\lambda.}$ είναι ο μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[d] \\ M_n/M'_n \arrow[r, dashed, "d_n^{\pi\eta\lambda.}"'] & M_{n-1}/M'_{n-1} \end{tikzcd}$$

μεταθετικό (πρβλ. πόρισμα 1.4.5, σελ. 17), καλείται <u>πηλικοσύμπλοκο τού $M_\bullet$ ως προς το $M'_\bullet$</u>.

<u>2.3.13. Σημείωση</u> Επειδή για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ η βραχεία ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$0 \longrightarrow M'_n \overset{i_n}{\hookrightarrow} M_n \overset{p_n}{\twoheadrightarrow} M_n/M'_n \longrightarrow 0$$

(όπου i_n η φυσική ένθεση και $p_n := \pi_{M'_n}$) είναι ακριβής, προκύπτει μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων

$$0 \longrightarrow M'_\bullet \overset{i_\bullet}{\hookrightarrow} M_\bullet \overset{p_\bullet}{\twoheadrightarrow} M_\bullet/M'_\bullet \longrightarrow 0,$$

η οποία (σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.11) επάγει τη μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας:

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(M_\bullet/M'_\bullet) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(M'_\bullet) \xrightarrow{H_n(i_\bullet)} H_n(M_\bullet) \xrightarrow{H_n(p_\bullet)} H_n(M_\bullet/M'_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

<u>2.3.14. Ορισμός</u> Εάν η $(M_{j,\bullet} = (M_{j,n}, d_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}})_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια αλυσωτών συμπλόκων, τότε τόσο το $\bigoplus_{j\in J} M_{j,\bullet} := (\bigoplus_{j\in J} M_{j,n}, \bigoplus_{j\in J} d_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ όσο και το $\prod_{j\in J} M_{j,\bullet} := (\prod_{j\in J} M_{j,n}, \prod_{j\in J} d_{j,n})_{n\in\mathbb{Z}}$ (πρβλ. άσκηση 7 τού 2ου φυλλαδίου) είναι αλυσωτά σύμπλοκα. Το μεν πρώτο καλείται <u>ευθύ άθροισμα</u>, το δε δεύτερο <u>ευθύ γινόμενο</u> των μελών τής εν λόγω οικογενείας.

<u>2.3.15 Άσκηση</u> Να αποδειχθεί ότι οι (λ-οστές) ενθέσεις

$$in_{\lambda,\bullet} : M_{\lambda,\bullet} \hookrightarrow \bigoplus_{j\in J} M_{j,\bullet} \quad (\lambda\in J) \quad (\text{πρβλ. } 1.5.12)$$

και (λ-οστές) προβολές

$$pr_{\lambda,\bullet} : \prod_{j\in J} M_{j,\bullet} \twoheadrightarrow M_{\lambda,\bullet} \quad (\lambda\in J) \quad (\text{πρβλ. } 1.5.4)$$

επάγουν ισομορφισμούς R-μοδίων

$$\boxed{\bigoplus_{j\in J} H_n(M_{j,\bullet}) \xrightarrow[\bigoplus_{j\in J} H_n(in_{j,\bullet})]{\cong} H_n\Big(\bigoplus_{j\in J} M_{j,\bullet}\Big)}$$

και

$$\boxed{H_n\Big(\prod_{j\in J} M_{j,\bullet}\Big) \xrightarrow[\prod_{j\in J} H_n(pr_{j,\bullet})]{\cong} \prod_{j\in J} H_n(M_{j,\bullet})}$$

αντιστοίχως, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Αρκεί να αποδειχθεί ότι το $H_n(\bigoplus_{j\in J} M_{j,\bullet})$ (και αντιστοίχως, το $H_n(\prod_{j\in J} M_{j,\bullet})$) αποτελεί συγκινόμενο (και αντιστοίχως, γινόμενο) τής οικογενείας R-μοδίων $(H_n(M_{j,\bullet}))_{j\in J}$ (βλ. 1.5.9 και 1.5.1, αντιστοίχως) και να χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα τού μονοσημάντου "μέχρις ισομορφισμού" (βλ. Θεωρήματα 1.5.11 και 1.5.3, αντιστοίχως). Ενας άλλος τρόπος αποδείξεως περιλαμβάνει τη χρήση των ισομορφισμών τής ασκήσεως 8 τού 2ου φυλλαδίου. □

Εν συνεχεία, υποθέτομε ότι το $M_\bullet=(M_n,d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ένα αλυσωτό σύμπλοκο και ότι τα $M'_\bullet$, $M''_\bullet$ είναι δυο υποσύμπλοκά του (υπό την έννοια τού ορισμού 2.3.12). Τότε τόσο το $M'_\bullet\cap M''_\bullet := (M'_n\cap M''_n, d_n|_{M'_n\cap M''_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ όσο και το $M'_\bullet+M''_\bullet := (M'_n+M''_n, d_n|_{M'_n+M''_n})$ είναι υποσύμπλοκα τού $M_\bullet$ και ισχύει το εξής:

2.3.16 Θεώρημα (Αλγεβρική εκδοχή τής μακράς ακριβούς ακολουθίας των Mayer και Vietoris)
Υφίστανται δύο ακριβείς μακρές ακολουθίες R-μοδίων ομολογίας (και καταλλήλων ομομορφισμών μεταξύ αυτών) τής μορφής:

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{n+1}} H_{n+1}(M'_\bullet+M''_\bullet) \xrightarrow{\psi_n} H_n(M'_\bullet\cap M''_\bullet) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(M'_\bullet\oplus M''_\bullet) \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(M'_\bullet+M''_\bullet)\to\cdots$$

$$H_n(M'_\bullet\oplus M''_\bullet) \underset{(2.3.15)}{\cong} H_n(M'_\bullet)\oplus H_n(M''_\bullet)$$

και

$$\cdots \xrightarrow{\Delta'_{n+1}} H_{n+1}(M'_\bullet+M''_\bullet) \xrightarrow{\psi'_n} H_n(M'_\bullet\cap M''_\bullet) \xrightarrow{\varphi'_n} H_n(M''_\bullet\oplus M'_\bullet) \xrightarrow{\Delta'_n} H_{n-1}(M'_\bullet+M''_\bullet)\to\cdots$$

$$H_n(M''_\bullet\oplus M'_\bullet) \underset{(2.3.15)}{\cong} H_n(M''_\bullet)\oplus H_n(M'_\bullet)$$

όπου $\Delta'_n=-\Delta_n$, $\forall n\in\mathbb{Z}$.

<u>Απόδειξη</u>: Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις πέντε βραχείες ακριβείς ακολουθίες αλυσωτών συμπλόκων (βλ. 2.3.13),

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[dd] & & & \\
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 \arrow[dl] & & \\
 & & & M'_\bullet\cap M''_\bullet \arrow[ddl, hook, "i_{1\bullet}"'] \arrow[ddr, "i_{2\bullet}"] \arrow[ddd, hook, "i_{5\bullet}"] & & & \\
 & 0 \arrow[dr] & & & & 0 \arrow[dl] & \\
 & & M'_\bullet \arrow[dl, "p_{1\bullet}"'] \arrow[dr, hook, "i_{3\bullet}"] & & M''_\bullet \arrow[dl, "i_{4\bullet}"'] \arrow[dr, "p_{2\bullet}"] & & \\
 & M'_\bullet/(M'_\bullet\cap M''_\bullet) \arrow[dl] \arrow[dd, hook, "k'_\bullet"', "\cong"] \arrow[dddrr, dashed, hook, "j_{1\bullet}"] & & M'_\bullet+M''_\bullet \arrow[ddll, "p_{4\bullet}"'] \arrow[ddrr, "p_{3\bullet}"] \arrow[ddd, "p_{5\bullet}"] & & M''_\bullet/(M'_\bullet\cap M''_\bullet) \arrow[dr] \arrow[dd, hook, "k''_\bullet", "\cong"'] \arrow[dddll, dashed, hook, "j_{2\bullet}"'] & \\
0 & & & & & & 0 \\
 & (M'_\bullet+M''_\bullet)/M''_\bullet \arrow[ddl] & & & & (M'_\bullet+M''_\bullet)/M'_\bullet \arrow[ddr] & \\
 & & & (M'_\bullet+M''_\bullet)/(M'_\bullet\cap M''_\bullet) \arrow[dd] & & & \\
0 & & & & & & 0 \\
 & & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

οι οποίες προκύπτουν από την (κατά φυσικό τρόπο) δόμηση των πηλικοσυμπλόκων $M'_\bullet/(M'_\bullet\cap M''_\bullet)$, $M''_\bullet/(M'_\bullet\cap M''_\bullet)$, $(M'_\bullet+M''_\bullet)/M'_\bullet$, $(M'_\bullet+M''_\bullet)/M''_\bullet$, $(M'_\bullet+M''_\bullet)/(M'_\bullet\cap M''_\bullet)$, (και έχουν αριθμηθεί κατ' αυτήν τη σειρά), καθώς και τις εμφυτεύσεις $j_{1\bullet}, j_{2\bullet}$ και τους ισομορφισμούς $k'_\bullet$, $k''_\bullet$ (τους απορρέοντες από το 2º Θεώρημα ισομορφισμών μοδίων 1.4.11), έχουμε τη δυνατότητα μεταβάσεώς μας στις αντίστοιχες μακρές ακριβείς ακολουθίες ομολογίας κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 2.3.11. Το "μεγάλο" διάγραμμα αλληλοεμπλεκομένων ακολουθιών που σχηματίζεται είναι το εξής:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
{} \arrow[dr, "\partial_{n+1}^{(2)}"] & \vdots \arrow[d, "\partial_{n+1}^{(5)}"] & {} \arrow[dl, "\partial_{n+1}^{(1)}"'] \\
& H_n(M'_\bullet \cap M''_\bullet) \arrow[dl, "H_n(i_{1\bullet})"'] \arrow[dr, "H_n(i_{2\bullet})"] \arrow[d, "H_n(i_{5\bullet})"] & \\
H_n(M'_\bullet) \arrow[dr, "H_n(i_{3\bullet})"'] \arrow[dddd, bend right=60, "H_n(p_{1\bullet})"'] & & H_n(M''_\bullet) \arrow[dl, "H_n(i_{4\bullet})"] \arrow[dddd, bend left=60, "H_n(p_{2\bullet})"] \\
& H_n(M'_\bullet + M''_\bullet) \arrow[dl, "H_n(p_{4\bullet})"'] \arrow[dr, "H_n(p_{3\bullet})"] \arrow[dd, "H_n(p_{5\bullet})"] & \\
H_n((M'_\bullet + M''_\bullet)/M''_\bullet) \arrow[dddd, bend right=60, "\partial_n^{(4)}"'] & & H_n((M'_\bullet + M''_\bullet)/M'_\bullet) \arrow[dddd, bend left=60, "\partial_n^{(3)}"] \\
& H_n(M'_\bullet + M''_\bullet / M'_\bullet \cap M''_\bullet) \arrow[ul, "H_n(j_{1\bullet}) \circ H_n(k'^{-1}_\bullet)"] \arrow[ur, "H_n(j_{2\bullet}) \circ H_n(k''^{-1}_\bullet)"'] \arrow[dd, "\partial_n^{(5)}"] & \\
H_n(M'_\bullet / M'_\bullet \cap M''_\bullet) \arrow[uu, "H_n(k'_\bullet)", "\cong"'] \arrow[ur, "H_n(j_{1\bullet})"'] \arrow[dr, "\partial_n^{(1)}"'] & & H_n(M''_\bullet / M'_\bullet \cap M''_\bullet) \arrow[uu, "\cong", "H_n(k''_\bullet)"'] \arrow[ul, "H_n(j_{2\bullet})"] \arrow[dl, "\partial_n^{(2)}"] \\
& H_{n-1}(M'_\bullet \cap M''_\bullet) \arrow[dl, "H_{n-1}(i_{2\bullet})"'] \arrow[dr, "H_{n-1}(i_{1\bullet})"] \arrow[d, "H_{n-1}(i_{5\bullet})"] & \\
H_{n-1}(M''_\bullet) & \vdots & H_{n-1}(M'_\bullet)
\end{tikzcd}
$$

Εν προκειμένω, οι $\partial_n^{(j)}$, $1 \le j \le 5$, είναι οι συνδετικοί ομομορφισμοί των πέντε επαγομένων μακρών ακριβών ακολουθιών ομολογίας. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι όλα τα τρίγωνα τού ανωτέρω διαγράμματος είναι μεταθετικά (άσκηση!). Για την αποπεράτωση τής αποδείξεως (και περαιτέρω επεξηγήσεις περί τού τρόπου ορισμού των $\Delta_n, \Delta'_n, \psi_n, \psi'_n, \varphi_n, \varphi'_n$) οι αναγνώστες παραπέμπονται στην άσκηση **23** τού $4^{\text{ου}}$ φυλλαδίου. □

2.3.17. Ορισμός. Έστω $\cdots \xrightarrow{d^{n-2}} M^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} M^{n} \xrightarrow{d^{n}} M^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$ μια ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων (με ανιόν σύνολο δεικτών και με τους δείκτες αναγραφόμενους "εν είδει δυνάμεων"). Τότε αυτή καλείται *συναλυσωτό σύμπλοκο* (ή *ημιακριβής ακολουθία με ανιόν σύνολο δεικτών*) όταν $d^{n} \circ d^{n-1} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, και συμβολίζεται –εν συντομία– ως $M^{\bullet} := (M^{n}, d^{n})_{n \in \mathbb{Z}}$. Οι ομομορφισμοί $d^{n}_{M^{\bullet}} = d^{n}$, $n \in \mathbb{Z}$, καλούνται ενίοτε *συσσυνοριακοί τελεστές* ή *συνδιαφορικά* τού συναλυσωτού συμπλόκου $M^{\bullet}$.

2.3.18 Ορισμός. Έστω $M^{\bullet} = (M^{n}, d^{n})_{n \in \mathbb{Z}}$ ένα συναλυσωτό σύμπλοκο. Θέτουμε $B^{n}(M^{\bullet}) := \mathrm{Im}(d^{n-1})$, $Z^{n}(M^{\bullet}) := \mathrm{Ker}(d^{n})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
Προφανώς, αμφότεροι οι $B^{n}(M^{\bullet})$, $Z^{n}(M^{\bullet})$ είναι υπομόδιοι τού R-μοδίου M^{n} και $B^{n}(M^{\bullet}) \subseteq Z^{n}(M^{\bullet})$. Τα στοιχεία τού $B^{n}(M^{\bullet})$ καλούνται *n-οστά συσσύνορα* και τα στοιχεία τού $Z^{n}(M^{\bullet})$ *n-οστά συγκυκλήματα* τού συναλυσωτού συμπλόκου $M^{\bullet}$.
Ο πηλικομόδιος

$$\boxed{H^{n}(M^{\bullet}) := Z^{n}(M^{\bullet}) / B^{n}(M^{\bullet})}$$

καλείται *n-οστός μόδιος συνομολογίας* τού συναλυσωτού συμπλόκου $M^{\bullet}$.

2.3.19. Ορισμός. Έστω ότι τα $M^{\bullet} = (M^{n}, d^{n})_{n \in \mathbb{Z}}$, $M'^{\bullet} = (M'^{n}, d'^{n})_{n \in \mathbb{Z}}$, είναι δυο συναλυσωτά σύμπλοκα. Μια *απεικόνιση* $f^{\bullet} : M^{\bullet} \to M'^{\bullet}$ είναι μια ακολουθία απεικονίσεων $(f^{n} : M^{n} \to M'^{n})_{n \in \mathbb{Z}}$. (Κατ' αναλογίαν, ορίζεται η *σύνθεση* $(g \circ f)^{\bullet} : M^{\bullet} \to M''^{\bullet}$ δυο απεικονίσεων συναλυσωτών συμπλόκων $f^{\bullet} : M^{\bullet} \to M'^{\bullet}$ και $g^{\bullet} : M'^{\bullet} \to M''^{\bullet}$ ως η οικογένεια $(g^{n} \circ f^{n} : M^{n} \to M''^{n})_{n \in \mathbb{Z}}$.)
Μια απεικόνιση συναλυσωτών συμπλόκων $f^{\bullet} : M^{\bullet} \to M'^{\bullet}$ καλείται *συναλυσωτός μετασχηματισμός* όταν για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η $f^{n} : M^{n} \to M'^{n}$ είναι ομομορφισμός R-μοδίων και (ταυτοχρόνως) το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M^{n} \arrow[r, "f^{n}"] \arrow[d, "d^{n}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M'^{n} \arrow[d, "d'^{n}"] \\
M^{n+1} \arrow[r, "f^{n+1}"'] & M'^{n+1}
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

2.3.20. Πρόταση. Για κάθε συναλυσωτό μετασχηματισμό $f^\bullet : M^\bullet \to M'^\bullet$ ισχύει $f^n(Z^n(M^\bullet)) \subseteq Z^n(M'^\bullet)$ και $f^n(B^n(M^\bullet)) \subseteq B^n(M'^\bullet)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Ως εκ τούτου, επάγεται ένας μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων

$$\boxed{H^n(f^\bullet) : H^n(M^\bullet) \longrightarrow H^n(M'^\bullet)},$$

ούτως ώστε $\pi_{B^n(M'^\bullet)} \circ (f^n|_{Z^n(M^\bullet)}) = H^n(f^\bullet) \circ \pi_{B^n(M^\bullet)}$.

Απόδειξη: Άσκηση (πρβλ. 2.3.6). □

2.3.21 Πρόταση. Εάν οι $f^\bullet : M'^\bullet \to M^\bullet$, $g^\bullet : M^\bullet \to M''^\bullet$ είναι συναλυσωτοί μετασχηματισμοί, τότε $\boxed{H^n((g\circ f)^\bullet) = H^n(g^\bullet)\circ H_n(f^\bullet),\ \forall n\in\mathbb{Z}}$

Απόδειξη: Άσκηση (πρβλ. 2.3.7). □

2.3.22. Πρόταση. Έστω $M^\bullet = (M^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα συναλυσωτό σύμπλοκο και έστω $Id^\bullet : M^\bullet \to M^\bullet$ ο ταυτοτικός συναλυσωτός μετασχηματισμός $Id^\bullet = (Id^{M^n} : M^n \to M^n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Τότε $\boxed{H^n(Id^\bullet) = Id_{H^n(M^\bullet)},\ \forall n\in\mathbb{Z}.}$

Απόδειξη: Άσκηση (πρβλ. 2.3.8). □

2.3.23. Ορισμός. Μια ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων και συναλυσωτών μετασχηματισμών της μορφής $0 \longrightarrow M'^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M''^\bullet \longrightarrow 0$ (όπου εδώ το "0" παριστά ένα συναλυσωτό σύμπλοκο απαρτιζόμενο μόνον από τετριμμένους R-μοδίους και τετριμμένους ομομορφισμούς) καλείται <u>βραχεία ακριβής ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων</u> όταν η $0 \longrightarrow M'^n \xrightarrow{f^n} M^n \xrightarrow{g^n} M''^n \longrightarrow 0$ είναι βραχεία ακριβής ακολουθία (υπό την έννοια του 2.1.2 (iv)) <u>για κάθε $n\in\mathbb{Z}$</u>.

2.3.24. Θεώρημα Έστω (*) $0 \longrightarrow M'^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M''^\bullet \longrightarrow 0$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων. Τότε για κάθε $n\in\mathbb{Z}$ υπάρχει <u>συνδετικός ομομορφισμός</u> R-μοδίων

$$\boxed{\partial^n = \partial^n_* : H^n(M''^\bullet) \longrightarrow H^{n+1}(M'^\bullet)},$$

τέτοιος ώστε η επαγόμενη ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων

$$\boxed{\cdots \xrightarrow{\partial^{n-1}} H^n(M'^{\bullet}) \xrightarrow{H^n(f^{\bullet})} H^n(M^{\bullet}) \xrightarrow{H^n(g^{\bullet})} H^n(M''^{\bullet}) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(M'^{\bullet}) \longrightarrow \cdots}$$

να είναι ακριβής. (Πρόκειται για τη μακρά ακολουθία συνομολογίας για την ⊛).

Απόδειξη: Άσκηση (Πρβλ. 2.3.10 και 2.3.11). □

2.3.25. Σημείωση. Αναλόγως παραλλάσσονται και οι διατυπώσεις των ορισμών 2.3.12, 2.3.14 και η απόδειξη τού 2.3.16 για συναλυσωτά σύμπλοκα και μοδίους συνομολογίας. Παρατηρούμε ότι κάθε συναλυσωτό σύμπλοκο $M^{\bullet} = (M^n, d^n)$ μπορεί να μετατραπεί σε ένα αλυσωτό σύμπλοκο $N_{\bullet} = (N_n, \delta_n)$ με $H^{-n}(M^{\bullet}) = H_n(N_{\bullet})$ όταν κανείς θέσει

$$N_n := M^{-n} \quad \text{και} \quad \delta_n := d^{-n}.$$

(Παρομοίως μετατρέπει κανείς ένα αλυσωτό σύμπλοκο σε συναλυσωτό.) Είναι λοιπόν εύλογο το ερώτημα τού γιατί να χρησιμοποιούνται αμφότερες οι έννοιες αλυσωτό και συναλυσωτό σύμπλοκο, και μόδιοι ομολογίας και συνομολογίας, αντιστοίχως. Ο κύριος λόγος χρησιμοποιήσεως αμφοτέρων είναι: αφ' ενός μεν ότι ημιακριβείς ακολουθίες με ανιόν σύνολο δεικτών συναντώνται συχνά στην Άλγεβρα, ενώ ημιακριβείς ακολουθίες με κατιόν σύνολο δεικτών συναντώνται συχνά στην Αλγεβρική Τοπολογία, αφ' ετέρου δε ότι οι ομάδες (ή οι μόδιοι) συνομολογίας που χειρίζεται κανείς στην Αλγεβρική Τοπολογία δεν προέρχονται από απλή αλλαγή προσήμου δεικτών των ομάδων (ή μοδίων) ομολογίας ενός αλυσωτού συμπλόκου, αλλά από την εφαρμογή τού συναρτητή Hom_R σε κάποιο κατάλληλο αλυσωτό σύμπλοκο (όπως, παραδείγματος χάριν, στο σύμπλοκο των ιδιαζουσών αλυσίδων ενός τοπολογικού χώρου με συντελεστές ειλημμένους από τον R.) Ως εκ τούτου, επέρχεται μετάβαση από συναλλοίωτους σε ανταλλοίωτους συναρτητές (στην κατηγορία των R-μοδίων)!

Εάν τα $M_\cdot$, $M'_\cdot$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\cdot, g_\cdot : M_\cdot \to M'_\cdot$ αλυσωτοί μετασχηματισμοί πότε έχουμε $H_n(f_\cdot) = H_n(g_\cdot)$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$; Μια ικανή συνθήκη (προς τούτο) διασφαλίζεται μέσω εισαγωγής της έννοιας της ομοτοπίας.

2.4.1. Ορισμός. Έστω ότι τα $M_\cdot = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $M'_\cdot = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\cdot, g_\cdot : M_\cdot \to M'_\cdot$ ονομάζονται (αλυσωτώς) ομότοποι όταν υπάρχει μια ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων $h_n : M_n \to M'_{n+1}$, $n\in\mathbb{Z}$, για την οποία ισχύει η ισότητα

$$\boxed{f_n - g_n = d'_{n+1}\circ h_n + h_{n-1}\circ d_n, \ \forall n\in\mathbb{Z}}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[dl, "h_{n+1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & M_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] & \cdots \arrow[dl, "h_{n-2}"'] \\
\cdots \arrow[r] & M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"'] & M'_n \arrow[r, "d'_n"'] & M'_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Συμβολισμός: $\boxed{h_\cdot : f_\cdot \simeq g_\cdot}$ (Εν προκειμένω, η ακολουθία $h_\cdot = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται αλυσωτή ομοτοπία)

2.4.2. Σημείωση. Όταν $h_\cdot : Id_{M_\cdot} \simeq 0_\cdot$, τότε η $h_\cdot$ καλείται συστέλλουσα ομοτοπία (για το $M_\cdot$) και το ίδιο το $M_\cdot$ συσταλτό αλυσωτό σύμπλοκο.

2.4.3. Ορισμός. Δυο αλυσωτά σύμπλοκα $M_\cdot$ και $M'_\cdot$ ονομάζονται ομοτοπικώς ισοδύναμα όταν υπάρχουν αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\cdot : M_\cdot \to M'_\cdot$ και $g_\cdot : M'_\cdot \to M_\cdot$, τέτοιοι ώστε να ισχύει $(g\circ f)_\cdot \simeq Id_{M_\cdot}$ και $(f\circ g)_\cdot \simeq Id_{M'_\cdot}$. (Τέτοιοι αλυσωτοί μετασχηματισμοί ονομάζονται αλυσωτές ισοδυναμίες.)

2.4.4. Πρόταση: Η σχέση ομοτοπίας αλυσωτών μετασχηματισμών (βλ. 2.4.1) αποτελεί μια σχέση ισοδυναμίας (υπό τη συνήθη έννοια).

Απόδειξη: Έστω ότι τα $M_\cdot = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $M'_\cdot = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και ότι οι $f_\cdot, g_\cdot, k_\cdot : M_\cdot \to M'_\cdot$ είναι τυχόντες αλυσωτοί μετασχηματισμοί.

(i) Προφανώς, $h_\cdot : f_\cdot \simeq f_\cdot$, εάν θέσουμε $h_n = 0$, $\forall n\in\mathbb{Z}$.
Άρα η "$\simeq$" είναι ανακλαστική.

(ii) Υποθέτοντας ότι $h_\cdot : f_\cdot \simeq g_\cdot$, διαπιστώνουμε ότι $(-h_\cdot) : g_\cdot \simeq f_\cdot$, οπότε η "$\simeq$" είναι συμμετρική.

(iii) Εάν υποθέσουμε ότι $h_{1\cdot} : f_\cdot \simeq g_\cdot$ και $h_{2\cdot} : g_\cdot \simeq k_\cdot$, τότε διαπιστώνουμε εύκολα ότι $(h_{1\cdot}+h_{2\cdot}) =: (h_1+h_2)_\cdot : f_\cdot \simeq k_\cdot$, οπότε η "$\simeq$" είναι και μεταβατική. □

2.4.5. Πρόταση. Εάν τα $M_\cdot = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $M'_\cdot = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\cdot, g_\cdot : M_\cdot \to M'_\cdot$ δυο αλυσωτοί μετασχηματισμοί, τότε ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:

$$\left(f_\cdot \simeq g_\cdot \Longrightarrow H_n(f_\cdot) = H_n(g_\cdot),\ \forall n\in\mathbb{Z} \right)$$

Απόδειξη. Εάν $h_\cdot : f_\cdot \simeq g_\cdot$, τότε για οποιοδήποτε $x \in Z_n(M_\cdot)$, $n\in\mathbb{Z}$, έχουμε

$$f_n(x+B_n(M_\cdot)) - g_n(x+B_n(M_\cdot)) = \big(f_n(x)-g_n(x)\big) + B_n(M'_\cdot)$$
$$= \big(d'_{n+1}(h_n(x)) - h_{n-1}(d_n(x))\big) + B_n(M'_\cdot) = B_n(M'_\cdot) = 0_{H_n(M'_\cdot)}$$

$$\left[\begin{array}{l} x\in Z_n(M_\cdot) \Rightarrow d_n(x) = 0_{M_{n-1}} \\ d'_{n+1}(h_n(x)) \in \mathrm{Im}(d'_{n+1}) = B_n(M'_\cdot) \end{array}\right]$$

Άρα $H_n(f_\cdot - g_\cdot) = H_n(f_\cdot) - H_n(g_\cdot) = 0$. □

2.4.6. Σημείωση. Η αντίστροφη συνεπαγωγή "$\Leftarrow$" δεν είναι πάντοτε αληθής. Επί παραδείγματι, θεωρώντας δύο αντίτυπα τού ίδιου αλυσωτού συμπλόκου $M_\cdot$ (πρβλ. 2.1.3 (iv)), όπου

$$\begin{tikzcd}
 & & & & M_{n+1} \arrow[d, equal] & M_n \arrow[d, equal] & M_{n-1} \arrow[d, equal] & & & \\
M_\cdot : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot\times 2"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, dotted] & \mathbb{Z} \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] \arrow[dl, dashed, "h_n"'] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, dashed, "h_{n-1}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dotted] & 0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
M_\cdot : \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot\times 2"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r, two heads, "p"'] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\
 & & & & M_{n+1} & M_n & M_{n+1} & & &
\end{tikzcd}$$

(για κάποιον παγιωμένο $n\in\mathbb{Z}$), $\quad (p(k) := [k]_2)$

και

$$f_j := \begin{cases} \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}, & \text{όταν } j\in\{n,n+1\} \\ \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_2}, & \text{όταν } j = n-1 \\ 0, & \text{όταν } j\notin\{n-1,n,n+1\} \end{cases} \qquad g_j := \begin{cases} \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}, & \text{όταν } j = n+1 \\ \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_2}, & \text{όταν } j = n-1 \\ 0, & \text{όταν } j\notin\{n-1,n+1\} \end{cases}$$

$\forall j\in\mathbb{Z}$, και υποθέσουμε ότι $\exists\ h_j : M_j \to M_{j+1}$ (ομομορφισμός $\mathbb{Z}$-μοδίων) $\forall j\in\mathbb{Z}$, ούτως ώστε $h_\cdot : f_\cdot \simeq g_\cdot$, τότε κατ' ανάγκην $h_j = 0$, $\forall j\in\mathbb{Z}\setminus\{n-1,n\}$.

$$\text{και} \quad \begin{cases} 0 = f_{n-1} - g_{n-1} = p \circ h_{n-1}, & (1) \\ Id_{\mathbb{Z}} = f_n - g_n = (\times 2) \circ h_n + h_{n-1} \circ p, & (2) \\ 0 = f_{n+1} - g_{n+1} = h_n \circ (\times 2) & (3) \end{cases}$$

Επομένως, $(3) \Rightarrow 2\mathbb{Z} = Im(\times 2) \subseteq Ker(h_n) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underset{\underset{2h_n(k)}{\|}}{h_n(2k)} = 0, \forall k \in \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \text{ ακ. περιοχή} \end{array} \right\} \Rightarrow h_n = 0.$ (4)

Απο τις (2) και (4) έπεται ότι

$$\left. \begin{array}{r} h_{n-1} \circ p = Id_{\mathbb{Z}} \\ (1) \Rightarrow \quad p \circ h_{n-1} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p \circ (h_{n-1} \circ p) = p \circ Id_{\mathbb{Z}} = p \\ \quad \| \\ (\underbrace{p \circ h_{n-1}}_{=0}) \circ p \end{array} \right| \Rightarrow p = 0 \quad \text{άτοπο!}$$

Απο την άλλη μεριά, $H_n(M_\bullet) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$, οπότε $H_n(f_\bullet) = 0 = H_n(g_\bullet)$.

2.4.7. Πρόταση. Έστω ότι τα $M_\bullet$ και $M'_\bullet$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Εάν τα $M_\bullet$ και $M'_\bullet$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα και $f_\bullet : M_\bullet \longrightarrow M'_\bullet$ μια αλυσωτή ισοδυναμία (βλ. 2.4.3), τότε

$$\boxed{H_n(M_\bullet) \xrightarrow[H_n(f_\bullet)]{\cong} H_n(M'_\bullet), \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Απόδειξη: Εξ ορισμού υπάρχει και ένας αλυσωτός μετασχηματισμός (:αλυσωτή ισοδυναμία) $g_\bullet : M'_\bullet \to M_\bullet$ με $(g \circ f)_\bullet \simeq Id_{M_\bullet}$ και $(f \circ g)_\bullet \simeq Id_{M'_\bullet}$.
Σύμφωνα με τις προτάσεις 2.3.7, 2.3.8 και 2.4.5 έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet) = H_n((g \circ f)_\bullet) = Id_{H_n(M_\bullet)} \\ H_n(f_\bullet) \circ H_n(g_\bullet) = H_n((f \circ g)_\bullet) = Id_{H_n(M'_\bullet)} \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{οι } H_n(f_\bullet) \text{ και } H_n(g_\bullet)$$

είναι ισομορφισμοί R-μοδίων (με $H_n(f_\bullet)^{-1} = H_n(g_\bullet)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$). □

2.4.8. Σημείωση. Εάν τα $M_\bullet$ και $M'_\bullet$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : M_\bullet \to M'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός με την ιδιότητα

$$H_n(M_\bullet) \xrightarrow[H_n(f_\bullet)]{\cong} H_n(M'_\bullet), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

τότε <u>δεν</u> ισχύει εν γένει το αντίστροφο της προτάσεως 2.4.7, δηλαδή ο $f_\bullet$ <u>δεν είναι κατ' ανάγκην αλυσωτή ισοδυναμία</u>. Ωστόσο, μια ικανή συνθήκη για να ισχύει και το αντίστροφο δίδεται στο Θεώρημα 2.4.20.

2.4.9. Ορισμός. Εάν τα $M_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $M'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : M_\bullet \to M'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε η ακολουθία $C(f)_\bullet := (C(f)_n, d^f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου $C(f)_n := M_{n-1} \oplus M'_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, και

$$d^f_n : C(f)_n \longrightarrow C(f)_{n-1}, \quad d^f_n(x,y) := (-d_{n-1}(x),\ d'_n(y) + f_{n-1}(x)),$$

είναι ο <u>αλγεβρικός κώνος ο επαγόμενος από τον $f_\bullet$</u>.

2.4.10. Λήμμα Η ανωτέρω ακολουθία $C(f)_\bullet$ αποτελεί αλυσωτό σύμπλοκο.

Απόδειξη: Προφανώς, η d^f_n είναι ομομορφισμός R-modules, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Επίσης, για οιαδήποτε $n \in \mathbb{Z}$, $x \in M_{n-1}$ και $y \in M'_n$ έχουμε

$$(d^f_{n-1} \circ d^f_n)(x,y) = d^f_{n-1}(-d_{n-1}(x),\ d'_n(y) + f_{n-1}(x))$$

$$= (-d_{n-2}(-d_{n-1}(x)),\ d'_{n-1}(d'_n(y) + f_{n-1}(x)) + f_{n-2}(-d_{n-1}(x)))$$

$$= (\underbrace{(d_{n-2}\circ d_{n-1})}_{\substack{\| \leftarrow M_\bullet \text{ αλυσωτό σύμπλοκο} \\ 0}}(x),\ \underbrace{(d'_{n-1}\circ d'_n)}_{\substack{\| \leftarrow M'_\bullet \text{ αλυσωτό σύμπλοκο} \\ 0}}(y) + \underbrace{(d'_{n-1}\circ f_{n-1} - f_{n-2}\circ d_{n-1})}_{\substack{\| \leftarrow \text{ διότι ο } f_\bullet \text{ είναι αλυσωτός μετασχηματισμός} \\ 0}}(x)) = (0_{M_{n-2}}, 0_{M'_{n-1}}).$$

Άρα η $C(f)_\bullet$ είναι όντως ένα αλυσωτό σύμπλοκο. □

2.4.11. Πρόταση. Εάν τα $M_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $M'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα, $f_\bullet : M_\bullet \to M'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός και

$$j_\bullet = (j_n : M'_n \to C(f)_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ y \mapsto (0_{M_{n-1}}, y), \qquad p_\bullet = (p_n : C(f)_n \to M_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}},\ (x,y) \mapsto y,$$

τότε η μακρά ακολουθία R-modules ομολογίας

$$\boxed{\cdots \longrightarrow H_{n+1}(C(f)_\bullet) \xrightarrow{H_{n+1}(p_\bullet)} H_n(M_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(M'_\bullet) \xrightarrow{H_n(j_\bullet)} H_n(C(f)_\bullet) \xrightarrow{H_n(p_\bullet)} \cdots}$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η (*) $0 \longrightarrow M'_\bullet \xrightarrow{j_\bullet} C(f)_\bullet \xrightarrow{p_\bullet} M_{\bullet-1} \longrightarrow 0$ είναι βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.3.11 κατασκευάζουμε τη μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας για την (*).

Λαμβάνοντας υπ' όψιν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dll, dashed, "f_n"'] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & M_{n-1} \arrow[dll, dashed, "f_{n-1}"] \\
 & M'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, hook, "j_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M'_n \arrow[r, "d'_n"] \arrow[d, hook, "j_n"] & M'_{n-1} & & \\
 & C(f)_{n+1} \arrow[r, "d^f_{n+1}"'] \arrow[d, two heads, "p_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C(f)_n \arrow[d, two heads, "p_n"] & & & \\
M_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"'] & M_n \arrow[r, "d_n"'] \arrow[d] & M_{n-1} \arrow[d] & & & \\
 & 0 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

αρκεί να δειχθεί ότι ο συνδετικός ομομορφισμός $\partial_n : H_n(M_\cdot) \longrightarrow \underset{(n+1)-1}{\overset{\shortparallel}{H_n}}(M'_\cdot)$ της

$$\cdots \xrightarrow{H_{n+1}(j_\cdot)} H_{n+1}(C(f)_\cdot) \xrightarrow{H_{n+1}(p_\cdot)} H_n(M_\cdot) \xrightarrow{\partial_n} H_n(M'_\cdot) \xrightarrow{H_n(j_\cdot)} \cdots$$

ταυτίζεται με τον ομομορφισμό R-μοδίων $H_n(f_\cdot)$ τον επαγόμενον από τον $f_\cdot$.
Για οιοδήποτε $x \in Z_n(M_\cdot)$ έχουμε $x = p_{n+1}(x,y)$, για κάποιο $y \in M'_{n+1}$ (καθότι ο p_{n+1} είναι επιμορφισμός). Κατά συνέπειαν,

$$0_{M_{n-1}} = (d_n \circ p_{n+1})(x,y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{μεταθετικότητα} \\ \text{διαγράμματος}}}{=\!=} (p_n \circ d^f_{n+1})(x,y) = p_n(\underbrace{-d_n(x)}_{\substack{\shortparallel \\ 0_{M_{n-1}}}}, d'_{n+1}(y) + f_n(x))$$

$$\Longrightarrow (0_{M_{n-1}}, d'_{n+1}(y) + f_n(x)) \in Ker(p_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ακρίβεια}}}{=\!=} Im(j_n), \text{ οπότε}$$

$$j_n(d'_{n+1}(y) + f_n(x)) = (0_{M_{n-1}}, d'_{n+1}(y) + f_n(x)) \text{ με } d'_{n+1}(y) + f_n(x) \in M'_n.$$

Τούτο σημαίνει ότι

$$d'_n(d'_{n+1}(y) + f_n(x)) = \underbrace{(d'_n \circ d'_{n+1})}_{\substack{\shortparallel \\ 0}}(y) + (d'_n \circ f_n)(x) \underset{\substack{\text{μεταθετικότητα} \\ \text{διαγράμματος}}}{=\!=\!=\!=} (f_{n-1} \circ d_n)(x)$$

$M'_\cdot$ αλυσωτό σύμπλοκο $\longrightarrow 0$

$$\Longrightarrow \partial_n(x + B_n(M_\cdot)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{για τον ορισ. του } \partial_n \\ \text{βλ. } 2.3.11}}{=\!=} \overset{\substack{B_n(M'_\cdot) \\ \cup\!\shortmid}}{(d'_{n+1}(y)} + f_n(x)) + B_n(M'_\cdot) = \underbrace{f_n(x) + B_n(M'_\cdot)}_{\substack{\text{βλ. } 2.3.6 \to \,\shortparallel \\ H_n(f_\cdot)(x + B_n(M_\cdot))}}.$$

□

2.4.12 Πρόταση. Εάν τα $M_\cdot=(M_n,d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $M'_\cdot=(M'_n,d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\cdot: M_\cdot \to M'_\cdot$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\boxed{\left(H_n(f_\cdot) \text{ ισομορφισμοί}, \forall n\in\mathbb{Z}\right) \Longrightarrow \left(H_n(C(f)_\cdot)=0, \forall n\in\mathbb{Z}\right)}$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την μακρά ακριβή ακολουθία της προτάσεως 2.4.11. Εάν οι $H_n(f_\cdot)$ είναι ισομορφισμοί, $\forall n\in\mathbb{Z}$, τότε $H_n(p_\cdot)=0$ και $H_n(j_\cdot)=0$, $\forall n\in\mathbb{Z}$ (βλ. 2.1.3(ii)) $\left[\text{διότι } Im(H_n(p_\cdot))=\{0_{H_{n-1}(M_\cdot)}\}=Ker(H_{n-1}(f_\cdot)),\ Ker(H_n(j_\cdot))=H_n(M'_\cdot)=Im(H_n(f_\cdot))\right]$. Για να αποδειχθεί ότι $H_n(C(f)_\cdot)=0$ αρκεί να αποδειχθεί ότι $(x,y)\in B_n(C(f)_\cdot)$, $\forall (x,y)\in Z_n(C(f)_\cdot)$.

Έστω λοιπόν τυχόν $(x,y)\in Z_n(C(f)_\cdot)=Ker(d^f_n)$. Τότε

$$(0_{M_{n-1}},0_{M'_n})=d^f_n(x,y)=(-d_{n-1}(x),\ d'_n(y)+f_{n-1}(x))$$
$$\Longrightarrow\quad x\in Z_{n-1}(M_\cdot) \text{ και } d'_n(y)+f_{n-1}(x)=0_{M'_n}\ (1)$$

Επειδή $Im(H_n(p_\cdot))=\{0_{H_{n-1}(M_\cdot)}\}\Rightarrow H_n(p_\cdot)((x,y)+B_n(C(f)_\cdot))=B_{n-1}(M_\cdot)$
$$\Longrightarrow p_n(x,y)+B_{n-1}(M_\cdot)=B_{n-1}(M_\cdot)\Longrightarrow x\in B_{n-1}(M_\cdot)=Im(d_n)\Rightarrow \exists x'\in M_n: d_n(x')=x,\ (2)$$

από τις (1) και (2) έπεται ότι

$$d'_n(y)+(f_{n-1}\circ d_n)(x')=0_{M'_{n-1}} \underset{\substack{\text{μεταθετικότητα}\\ \text{διαγράμματος}}}{\Longrightarrow} d'_n(y)+(d'_n\circ f_n)(x')=0_{M'_{n-1}}$$

$$\Longrightarrow y+f_n(x')\in Ker(d'_n)=:Z_n(M'_\cdot)\Longrightarrow (y+f_n(x'))+B_n(M'_\cdot)\in \underset{\substack{\parallel\\ Ker(H_n(j_\cdot))}}{H_n(M'_\cdot)}$$

$$\left.\Longrightarrow \underbrace{H_n(j_\cdot)\left((y+f_n(x'))+B_n(M'_\cdot)\right)}_{\substack{\parallel\\ j_n(y+f_n(x'))+B_n(C(f)_\cdot)}}=0_{H_n(C(f)_\cdot)}=B_n(C(f)_\cdot)\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (0_{M_{n-1}},\ y+f_n(x'))\in B_n(C(f)_\cdot):=Im(d^f_{n+1})\Rightarrow \exists (z,w)\in M_n\oplus M'_{n+1}:$$
$$\underset{\substack{\parallel\\ (-d_n(z),\ d'_{n+1}(w)+f_n(z))}}{d^f_{n+1}(z,w)}=(0_{M_{n-1}},\ y+f_n(x'))\Rightarrow d_n(z)=0_{M_{n-1}} \text{ και } \underset{\substack{\parallel\\ y+f_n(x'),\\ (3)}}{d'_{n+1}(w)+f_n(z)}$$

οπότε
$$d^f_{n+1}(z-x',w)=(-d_n(z-x'),\ d'_{n+1}(w)+f_n(z-x'))$$
$$=(\underset{\substack{\parallel\\ 0_{M_{n-1}}}}{-d_n(z)}+d_n(x'),\ d'_{n+1}(w)+f_n(z)-f_n(x'))\ (4)$$

Από τις (3) και (4) έπεται ότι
$$(x,y)=(d_n(x'),y)=d^f_{n+1}(z-x',w)\in B_n(C(f)_\cdot).$$
□

Για την απόδειξη του κυρίου Θεωρήματος της παρούσας ενότητας (βλ. 2.4.20) θα χρειασθούμε την πρόταξη ορισμένων ακόμη προπαρασκευαστικών θεωρητικών αποτελεσμάτων.

2.4.13. Λήμμα 'Εστω M ένας R-μόδιος. Εάν τα U', U'' και W είναι υπομόδιοι του M με $M = U' + U''$, $(u''_j)_{j\in J}$ ένα σύστημα γεννητόρων του $(U'+W)\cap U''$ και $(u'_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια στοιχείων του U' με $z_j := u'_j + u''_j \in W$, τότε $W = (U'\cap W) + \sum_{j\in J} R z_j$.

Απόδειξη.
Αρκεί να αποδειχθεί ότι κάθε στοιχείο του W ανήκει στο $(U'\cap W) + \sum_{j\in J} R z_j$.
'Εστω τυχόν $x \in W$. Τότε υπάρχουν στοιχεία $u' \in U'$, $u'' \in U''$, τέτοια ώστε $x = u' + u''$. Προφανώς, $u'' \in (U'+W)\cap U''$ και υπάρχουν στοιχεία $(r_j)_{j\in J}$ του R: $u'' = \sum_{j\in J} r_j u''_j$ (εννοείται "σχεδόν όλα $= 0''_R$").
Ως εκ τούτου,

$$x = u' + \sum_{j\in J} r_j u''_j = u' + \sum_{j\in J} r_j (u'_j + u''_j) - \sum_{j\in J} r_j u'_j = u' + \sum_{j\in J} r_j z_j - \sum_{j\in J} r_j u'_j.$$

Θέτοντας $x' := u' - \sum_{j\in J} r_j u'_j$, έχουμε $x' \in U'$ και $x = x' + \sum_{j\in J} r_j z_j \in W$, οπότε $x' \in U'\cap W$. Αλλά τούτο σημαίνει ότι $x \in (U'\cap W) + \sum_{j\in J} R z_j$. □

2.4.14. Σημείωση: 'Οταν στο λήμμα 2.4.13 έχουμε την ειδική περίπτωση όπου $U'' = Rx_1$, για κάποιο $x_1 \in M$, τότε το

$$I(W) := \{ r\in R \mid r x_1 \in U' + W \}$$

είναι ένα ιδεώδες του R. Εάν το $I(W)$ παράγεται από την οικογένεια $(a_j)_{j\in J}$, τότε προφανώς η οικογένεια $(u''_j)_{j\in J}$, $u''_j := a_j x_1$, παράγει τον μόδιο $(U'+W)\cap Rx_1$.

Το ακόλουθο θεώρημα γενικεύει την πρόταση 1.6.35.

2.4.15. Θεώρημα. Εάν ο M είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος, όπου R ΠΚΙ, τότε κάθε υπομόδιος τού M είναι ελεύθερος.

Απόδειξη. Έστω X μια βάση τού και έστω W τυχών υπομόδιός του.

Έστω $\mathcal{F} := \{ \overset{\text{διατ.}}{\text{ζεύγη}}\, (Y, Z) \mid \begin{array}{l} Y \text{ υποσύνολο τού } X \text{ και} \\ Z \text{ μια βάση τού } \mathrm{Lin}(Y) \cap W \end{array} \}$. Το $\mathcal{F}$ εφοδιάζεται με τη σχέση (μερικής) διατάξεως "$\leq$" ως εξής:

$$(Y_1, Z_1) \leq (Y_2, Z_2) \overset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} Y_1 \subseteq Y_2 \text{ και } Z_1 \subseteq Z_2.$$

(Το $(\mathcal{F}, \leq)$ είναι επαγωγικώς διατεταγμένο βάσει αυτού τού ορισμού.)

Προφανώς, $\mathcal{F} \neq \phi$, διότι $(\phi, \phi) \in \mathcal{F}$. Διαχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

ⓐ Εάν το X είναι πεπερασμένο, τότε το $\mathcal{F}$ διαθέτει μεγιστοτικό στοιχείο. Πράγματι: επιλέγουμε ένα ζεύγος $(Y^*, Z^*) \in \mathcal{F}$, ούτως ώστε να ισχύει $\mathrm{card}(Y^*) = \max\{\mathrm{card}(Y) \mid (Y, Z) \in \mathcal{F}\}$. Για οιοδήποτε $(Y, Z) \in \mathcal{F}$, για το οποίο ισχύει $(Y^*, Z^*) \leq (Y, Z)$, έχουμε $Y^* = Y$. Επιπροσθέτως, το Z^*, όντας βάση τού $\mathrm{Lin}(Y^*) \cap W = \mathrm{Lin}(Y) \cap W$, δεν περιέχεται γνησίως σε καμία άλλη βάση τού $\mathrm{Lin}(Y) \cap W$, οπότε $Z^* = Z$. Άρα το (Y^*, Z^*) είναι ένα μεγιστοτικό στοιχείο τού $\mathcal{F}$.

ⓑ Εάν το X είναι άπειρο, τότε το $\mathcal{F}$ διαθέτει (ωσαύτως) μεγιστοτικό στοιχείο. Θα εφαρμόσουμε το λήμμα τού Zorn. Έστω $\mathcal{F}'$ ένα ολικώς διατεταγμένο υποσύνολο τού $\mathcal{F}$ (ως προς την "$\leq$"). Θέτουμε $\Gamma := \bigcup\{Y \mid (Y, Z) \in \mathcal{F}'\}$ και $\Delta := \bigcup\{Z \mid (Y, Z) \in \mathcal{F}'\}$. Τα στοιχεία τού Δ (λόγω τής συγκρισιμότητας όλων των στοιχείων $(Y, Z) \in \mathcal{F}'$) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και παράγουν τον $\mathrm{Lin}(\Gamma) \cap W$, διότι

$$\left(\bigcup\{\mathrm{Lin}(Y) \mid (Y, Z) \in \mathcal{F}'\}\right) \cap W = \bigcap\{\mathrm{Lin}(Y) \cap W \mid (Y, Z) \in \mathcal{F}'\}.$$

Άρα το ζεύγος (Γ, Δ) είναι ένα άνω φράγμα τού $\mathcal{F}'$ εντός τού $\mathcal{F}$. Κατά το λήμμα τού Zorn, υπάρχει (και σε αυτήν την περίπτωση) κάποιο μεγιστοτικό στοιχείο (Y^*, Z^*) τού $\mathcal{F}$ (ανήκον στο $\mathcal{F}$).

Από τούδε και εις το εξής θεωρούμε ένα μεγιστοτικό στοιχείο $(Y^*, Z^*)^{\in \mathcal{F}}$ τού $\mathcal{F}$ (χωρίς να ενδιαφερόμαστε για το εάν εμπίπτουμε στην περίπτωση ⓐ ή ⓑ).

▶ Ισχυρισμός: $\boxed{Y^* = X}$ (Εάν αποδειχθεί αυτός ο ισχυρισμός αληθής, τότε το Z^* είναι μια βάση τού $\mathrm{Lin}(Y^*)\cap W = \mathrm{Lin}(X)\cap W = M\cap W = W$ και ο W ελεύθερος R-μόδιος) Ας υποθέσουμε ότι $Y^* \subsetneqq X$ και ας επιλέξουμε ένα στοιχείο $x_1 \in X \setminus Y^*$. Εάν η τομή $(\mathrm{Lin}(Y^*)+Rx_1)\cap W$ διέθετε κάποια βάση $Z' \supseteq Z^*$, τότε θα είχαμε $(Y^*, Z^*) \lneqq (Y^*\cup\{x_1\}, Z') \in \mathcal{F}$, κάτι που θα αντέκειτο προς την υπόθεσή μας. Ως εκ τούτου, αρκεί να θεωρήσουμε μόνον το $(\mathrm{Lin}(Y^*)+Rx_1)\cap W$ και -δίχως βλάβη της γενικότητας- να θέσουμε $M := \mathrm{Lin}(Y^*)+Rx_1$ και $U' := \mathrm{Lin}(Y^*)$, $U'' := Rx_1$. Το επιθυμητό "άτοπο" θα παρουσιασθεί (βάσει των προαναφερθέντων) αποδεικνύοντας την ύπαρξη μιας βάσεως Z' τού W η οποία επεκτείνει τη βάση Z^* τού $U'\cap W$.

Υιοθετούμε τους συμβολισμούς τους εισαχθέντες στο λήμμα 2.4.13 και στη σημείωση 2.4.14. Ας υποθέσουμε ότι το $I(W) = \{r\in R \mid rx_1 \in U' + W\}$ δεν είναι το τετριμμένο ιδεώδες τού R. Επειδή ο R είναι εξ υποθέσεως ΠΚΙ, υπάρχει $a_1 \in R\setminus\{0_R\}$: $I(W) = Ra_1$. Από το ορισμό τού $I(W)$ έπεται η ύπαρξη ενός $u_1' \in U'$ με $z_1 := u_1' + a_1 x_1 \in W$. Σύμφωνα με το λήμμα 2.4.13, $W = (U'\cap W) + Rz_1$. Θέτουμε $Z' := Z^* \cup \{z_1\}$. Προφανώς, $\mathrm{Lin}(Z') = W$. Θα δείξουμε ότι το Z' είναι και γραμμικώς ανεξάρτητο. Εάν $r \in R$ και $\{r_z \mid z\in Z^*\}$ μια οικογένεια στοιχείων τού R με "σχεδόν όλα τα r_z ίσα με 0_R", και υποθέσουμε ότι

$$rz_1 + \sum_{z\in Z^*} r_z z = 0_M \Rightarrow rz_1 = -\sum_{z\in Z^*} r_z z \in \underbrace{\mathrm{Lin}(Z^*)}_{U'\cap W},$$

τότε, επειδή

$$\left.\begin{array}{l} rz_1 = ru_1' + ra_1x_1 \Rightarrow ra_1x_1 \in U' = \mathrm{Lin}(Y^*) \\ Y^*\cup\{x_1\} \text{ γραμμικώς ανεξάρτητο} \end{array}\right\} \Rightarrow ra_1 = 0_R$$

$$\xRightarrow[R \text{ ακ.π.}]{a_1 \neq 0_R} r = 0_R, \text{ έχουμε } \left.\begin{array}{l} \sum_{z\in Z^*} r_z z = 0_M \\ Z^* \text{ γραμμικώς ανεξ.} \end{array}\right\} \Rightarrow r_z = 0_R,\ \forall z \in Z^*.$$

Άρα το Z' αποτελεί βάση τού W. Άτοπο!

Κατά συνέπειαν, ο ως άνω ισχυρισμός είναι αληθής και ο W είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος. □

<u>2.4.16. Ορισμός</u> Ένα αλυσωτό σύμπλοκο $M_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ καλείται <u>ελεύθερο</u> όταν οι R-μόδιοι M_n είναι ελεύθεροι για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

<u>2.4.17. Θεώρημα</u> Έστω $M_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα ελεύθερο αλυσωτό σύμπλοκο, όπου R π.κ.ι. Τότε το $M_\bullet$ είναι συσταλτό (βλ. 2.4.2) $\Longleftrightarrow$ $H_n(M_\bullet) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

<u>Απόδειξη:</u> ($\Longrightarrow$) Εάν το $M_\bullet$ είναι συσταλτό, τότε $\exists\, h_\bullet : Id_{M_\bullet} \simeq 0_\bullet$, οπότε $H_n(M_\bullet) \underset{2.3.8}{=\!=} H_n(Id_\bullet)(H_n(M_\bullet)) \underset{2.4.5}{=\!=} H_n(0_\bullet)(H_n(M_\bullet)) = 0$.

($\Longleftarrow$) Εάν $H_n(M_\bullet) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, τότε $Z_n(M_\bullet) = B_n(M_\bullet)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, οπότε σχηματίζεται η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ Z_n(M_\bullet)}}{B_n(M_\bullet)} \underset{(\text{ένθεση})}{\hookrightarrow} M_n \xrightarrow{d_n} \underset{\substack{\parallel \\ Im(d_n) \subseteq M_{n-1}}}{B_{n-1}(M_\bullet)} \longrightarrow 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Επειδή ο M_{n-1} είναι (εξ υποθέσεως) ελεύθερος R-μόδιος (και R π.κ.ι.), <u>και</u> ο $B_{n-1}(M_\bullet)$ είναι ελεύθερος (σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.15). Η πρόταση 2.1.15 μας πληροφορεί ότι η ως άνω βραχεία ακριβής ακολουθία είναι διασπώμενη. Τούτο (επί τη βάσει του Θεωρήματος 2.1.13) σημαίνει ότι υπάρχει $s_{n-1} \in Hom_R(B_{n-1}(M_\bullet), M_n)$ με $d_n \circ s_{n-1} = Id_{B_{n-1}(M_\bullet)}$. Ως εκ τούτου, ορίζεται καλώς ο ομομορφισμός R-μοδίων $h_n : M_n \to M_{n+1}$ μέσω του τύπου $h_n := s_n \circ (Id_{M_n} - s_{n-1} \circ d_n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Επειδή $d_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = d_{n+1} \circ s_n \circ (Id_{M_n} - s_{n-1} \circ d_n)$
$+ s_{n-1} \circ (Id_{M_{n-1}} - s_{n-2} \circ d_{n-1}) \circ d_n$

$$= \underbrace{d_{n+1} \circ s_n}_{\substack{\parallel \\ Id_{B_n(M_\bullet)}}} - \cancel{\underbrace{d_{n+1} \circ s_n}_{\substack{\parallel \\ Id_{B_n(M_\bullet)}}} \circ s_{n-1} \circ d_n} + \cancel{s_{n-1} \circ d_n} - s_{n-1} \circ s_{n-2} \circ \underbrace{d_{n-1} \circ d_n}_{\substack{M_\bullet \text{ αλυσωτό σύμπλοκο} \to \parallel \\ 0}}$$

$$= \underset{\substack{\parallel \\ Z_n(M_\bullet)}}{Id_{B_n(M_\bullet)}} - 0,$$ έχουμε $h_\bullet : Id_{M_\bullet} \simeq 0$. $\square$

2.4.18. Σημείωση. Εάν οι M_1, M_2, N_1, N_2 είναι τέσσερας R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M_1 \oplus M_2, N_1 \oplus N_2)$, τότε η εικόνα $f(x,y)$ ενός στοιχείου $(x,y) \in M_1 \oplus M_2$ μπορεί να γραφεί ως διατεταγμένο ζεύγος στον $N_1 \oplus N_2$ υπό την μορφή $f(x,y) = (\alpha(x)+\beta(y), \gamma(x)+\delta(y))$, όπου

$\alpha : M_1 \to N_1$, $\beta : M_2 \to N_1$, $\gamma : M_1 \to N_2$, $\delta : M_2 \to N_2$,

καταλλήλως επιλεγόμενοι ομομορφισμοί R-μοδίων. Πράγματι· Θεωρώντας τὸ διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[rrr, "\alpha"] \arrow[dr, "in_1"'] & & & N_1 \\
& M_1 \oplus M_2 \arrow[r, "f"'] & N_1 \oplus N_2 \arrow[ur, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
M_2 \arrow[ur, "in_2"'] \arrow[rrr, "\delta"'] & & & N_2
\end{tikzcd}$$

αρκεί να θέσουμε $\begin{cases} \alpha := pr_1 \circ f \circ in_1, & \beta := pr_1 \circ f \circ in_2, \\ \gamma := pr_2 \circ f \circ in_1, & \delta := pr_2 \circ f \circ in_2. \end{cases}$

Συνήθης συμβολισμός (εν είδει πίνακα): $f(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \gamma(x) \\ \beta(y) & \delta(y) \end{pmatrix}$.

2.4.19 Θεώρημα Εάν τα $M_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $M'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο ελεύθερα αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : M_\bullet \to M'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός. Εάν ο R είναι ΠΚΙ, τότε $\left(H_n(C(f)_\bullet) = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \right) \Longrightarrow \left(\text{ο } f_\bullet \text{ είναι αλυσωτή ισοδυναμία (βλ. 2.4.3)} \right)$

Απόδειξη: Εάν $H_n(C(f)_\bullet) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, τότε (κατά το Θεώρημα 2.4.17) υπάρχει μια συστέλλουσα ομοτοπία $h_\bullet : \mathrm{Id}_{C(f)_\bullet} \simeq 0$, ήτοι μια ακολουθία ομομορφισμών R-μοδίων $\left(h_n : \underset{M_{n-1}\oplus M'_n}{\overset{\|}{C(f)_n}} \longrightarrow \underset{M_n \oplus M'_{n+1}}{\overset{\|}{C(f)_{n+1}}} \right)_{n\in\mathbb{Z}}$, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$d^f_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d^f_n = \mathrm{Id}_{C(f)_n}, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Βάσει των όσων προαναφέρθησαν στη σημείωση 2.4.18, ορίζονται κατά τρόπο φυσικό ομομορφισμοί $\begin{cases} \alpha_{n-1} : M_{n-1} \to M_n, & \beta_n : M'_n \to M_n, \\ \gamma_{n-1} : M_{n-1} \to M'_{n+1}, & \delta_n : M'_n \to M'_{n+1}, \end{cases}$

με $\quad h_n(x,y) = (\alpha_{n-1}(x) + \beta_n(y),\ \gamma_{n-1}(x) + \delta_n(y))$.

Προφανώς,

$$d_{n+1}^{f}(h_n(x,y)) = (-d_n(\alpha_{n-1}(x)+\beta_n(y)),\ d'_{n+1}(\gamma_{n-1}(x)) + d'_{n+1}(\delta_n(y)) + f_n(\alpha_{n-1}(x)+\beta_n(y))) \qquad (2)$$

και

$$\begin{aligned} h_{n-1}(d_n^{f}(x,y)) &= h_{n-1}(-d_{n-1}(x),\ d'_n(y) + f_{n-1}(x)) \\ &= (-\alpha_{n-2}(d_{n-1}(x)) + \beta_{n-1}(d'_n(y)) + \beta_{n-1}(f_{n-1}(x)),\ -\gamma_{n-2}(d_{n-1}(y)) + \delta_{n-1}(d_{n-1}(y) + f_{n-1}(x))) \end{aligned} \qquad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2) και (3), και λαμβάνοντας υπ' όψιν την (1) συμπεραίνουμε τα ακόλουθα:

(i) Για $x = 0_{M_{n-1}}$, y τυχόν:

$$(0_{M_{n-1}}, y) = (-d_n(\beta_n(y)) + \beta_{n-1}(d'_n(y)),\ d'_{n+1}(\delta_n(y)) + f_n(\beta_n(y)) + \delta_{n-1}(d'_n(y)))$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \beta_{n-1} \circ d'_n = d_n \circ \beta_n,\ \forall n \in \mathbb{Z} & \Longleftrightarrow \text{ η } \beta_\bullet = (\beta_n)_{n\in\mathbb{Z}} : M'_\bullet \to M_\bullet \text{ είναι αλυσωτός μετασχηματισμός} \quad (4) \\ d'_{n+1} \circ \delta_n + \delta_{n-1} \circ d'_n = Id_{M'_n} - f_n \circ \beta_n \quad (5) \end{cases}$$

(ii) Για $y = 0_{M'_n}$, x τυχόν:

$$(x, 0_{M'_n}) = (-d_n(\alpha_{n-1}(x)) - \alpha_{n-2}(d_{n-1}(x)) + \beta_{n-1}(f_{n-1}(x)),\ \ldots)$$

Εξισώνοντας τις πρώτες συντεταγμένες λαμβάνουμε:

$-d_n \circ \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} \circ d_{n-1} = Id_{M_{n-1}} - \beta_{n-1} \circ f_{n-1}$ (και ανεβάζοντας τους δείκτες κατά 1)

$-d_{n+1} \circ \alpha_n - \alpha_{n-1} \circ d_n = Id_{M_n} - \beta_n \circ f_n \quad (6)$

Από τις (4), (5) και (6) έπεται ότι $\left\{ \begin{array}{l} (f \circ \beta)_\bullet \simeq Id_{M'_\bullet} \\ (\beta \circ f)_\bullet \simeq Id_{M_\bullet} \end{array} \right\} \Longrightarrow f_\bullet$ αλυσωτή ισοδυναμία. □

2.4.20. Θεώρημα. Εάν τα $M_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $M'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο ελεύθερα αλυσωτά σύμπλοκα, $f_\bullet : M_\bullet \to M'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός και R ΠΚΙ, τότε ($f_\bullet$ είναι αλυσωτή ισοδυναμία) $\Longleftrightarrow$ ($H_n(f_\bullet)$ ισομορφισμός, $\forall n \in \mathbb{Z}$)

Απόδειξη: ($\Longrightarrow$) Βλ. Πρόταση 2.4.7, σελ. 110.

($\Longleftarrow$) ($H_n(f_\bullet)$ ισομορφισμός, $\forall n \in \mathbb{Z}$) $\underset{2.4.12}{\Longrightarrow}$ ($H_n(C(f)_\bullet) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$) $\underset{2.4.19}{\Longrightarrow}$ $f_\bullet$ αλυσωτή ισοδυναμία. □