Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Θεωρία Αριθμών (M 202)**

Εξέταση Σεπτεμβρίου 2010 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το *θεμελιώδες θεώρημα τής Αριθμητικής*.

ΘΕΜΑ 2ο Εάν $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και οι $a_1, \ldots, a_n$ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι με

$$|a_1| = p_1^{\alpha_{1,1}} \cdots p_k^{\alpha_{1,k}}, \ldots\ldots, \; |a_n| = p_1^{\alpha_{n,1}} \cdots p_k^{\alpha_{n,k}},$$

όπου οι $p_1, \ldots, p_k$ ($k \in \mathbb{N}$) είναι διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί και οι $\alpha_{j,l}$, $j \in \{1, ..., n\}$, $l \in \{1, ..., k\}$, μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, να αποδειχθεί ότι

$$\text{εκπ}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{l=1}^{k} p_l^{\max\{\alpha_{1,l}, \ldots, \alpha_{n,l}\}}.$$

ΘΕΜΑ 3ο Εάν ο p είναι ένας πρώτος αριθμός, να αποδειχθεί ότι

$$a^p \equiv a \,(\operatorname{mod} p)\,, \forall a \in \mathbb{Z}.$$

ΘΕΜΑ 4ο Να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Δοθέντων ενός $m \in \mathbb{N}$ και δυο ακεραίων a, b, $a \neq 0$, η γραμμική ισοτιμία

$$ax \equiv b (\operatorname{mod} m) \qquad (\star)$$

διαθέτει λύσεις $x \in \mathbb{Z}$ κατά μόδιο m εάν και μόνον εάν $\text{μκδ}\,(a, m) | \, b$.

(ii) Όταν $\text{μκδ}\,(a, m) | \, b$, η ισοτιμία $(\star)$ διαθέτει ακριβώς $\text{μκδ}(a, m)$ σαφώς διακεκριμένες λύσεις $x \in \mathbb{Z}$ κατά μόδιο m, οι οποίες είναι τής μορφής

$$x = x_0 + k \, \frac{m}{\text{μκδ}\,(a, m)}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, \text{μκδ}\,(a, m) - 1\},$$

όπου x_0 μια ειδική λύση τής $(\star)$.

(iii) Μία ειδική λύση τής $(\star)$ είναι η $x_0 := a^{\varphi(m)-1} b$, όπου φ η συνάρτηση τού Euler.

ΘΕΜΑ 5ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί ο *τύπος αντιστροφής τού Möbius*.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο Εάν ο p είναι ένας περιττός πρώτος αριθμός, να αποδειχθεί ότι

$$\sum_{j=1}^{p-1} j^p \equiv 0 \,(\operatorname{mod} p)\,.$$

ΘΕΜΑ 7ο Εάν ο p είναι ένας περιττός πρώτος αριθμός, να αποδειχθεί ότι

$$\prod_{j=0}^{\frac{p-3}{2}} (2j+1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \,(\operatorname{mod} p)\,.$$

(*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί καταλλήλως το θεώρημα τού Wilson.)

ΘΕΜΑ 8ο Να προσδιορισθούν οι λύσεις τής γραμμικής ισοτιμίας

$$540x \equiv 18 (\mathrm{mod}\, 462).$$

ΘΕΜΑ 9ο Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ που διαθέτει ακριβώς r πρώτους (διακεκριμένους) διαιρέτες ισχύει η ισότητα

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^r,$$

όπου μ η συνάρτηση τού Möbius.

ΘΕΜΑ 10ο Για ποιους πρώτους αριθμούς p το σύμβολο Legendre $\left(\frac{5}{p}\right)$ ισούται με 1;

- **Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.**
- **Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες**.
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως οι σημειώσεις θα παραμείνουν κλειστές.**
- **Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.**
- **Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).**
- **Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!