

- ΘΕΜΑ 1ο** (i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί λεπτομερώς το πρώτο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων.
(ii) Έστω R ο δακτύλιος

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid c = 0 \right\}$$

και

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid a = c = d = 0 \right\}.$$

Να αποδειχθεί ότι το I είναι ένα ιδεώδες του R και ότι

$$R/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- ΘΕΜΑ 2ο** (i) Ως γνωστόν, ο δακτύλιος $R = \mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών είναι Π.Κ.Ι., οπότε κάθε ιδεώδες του είναι κύριο. Έστω I το ακόλουθο (μη τετριμμένο) ιδεώδες του \mathbb{Z} :

$$I := \langle \{ m^5 - m \mid m \in \mathbb{Z} \} \rangle.$$

Να προσδιορισθεί ο μονοσημάντως ορισμένος θετικός ακέραιος n για τον οποίο $I = \langle n \rangle$.

- (ii) Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \left\{ a + ib\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \subsetneq \mathbb{C},$$

δεν είναι Π.Κ.Ι.

- ΘΕΜΑ 3ο** (i) Να αποδειχθεί ότι κάθε ευκλείδεια περιοχή είναι Π.Κ.Ι.
(ii) Να αποδειχθεί ότι ο δακτύλιος των ακεραίων του Gauss είναι ευκλείδεια περιοχή.

- ΘΕΜΑ 4ο** Δίνεται μια αθέριια περιοχή R και τρία στοιχεία a, b, c της R . Να αποδείξετε ότι αν $ab = 1$ και το c διαιρεί το b , τότε το c δεν είναι ανάγωγο στην R .

- ΘΕΜΑ 5ο** Δίνεται το πολυώνυμο

$$f(x) = 2x^8 + f_7(x) + f_6(x) + f_5(x) \in \mathbb{Z}[x],$$

όπου

$$f_n(x) = 2^n x^n + 4.$$

Να απαντήσετε τις παρακάτω δύο ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

- (i) Είναι το $f(x)$ ανάγωγο στον $\mathbb{Z}[x]$;
(ii) Είναι το $f(x)$ ανάγωγο στον $\mathbb{Q}[x]$;

ΘΕΜΑ 6ο (i) Αν ισχύει ότι κάθε ανάγωγο στοιχείο μιας ακέραιας περιοχής είναι πρώτο, να το αποδείξετε. Αν δεν ισχύει, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

(ii) Αν ισχύει ότι κάθε πρώτο στοιχείο μιας ακέραιας περιοχής είναι ανάγωγο, να το αποδείξετε. Αν δεν ισχύει, να δώσετε αντιπαράδειγμα.

-
- Να απαντηθούν το πολύ 5 θέματα από τα 1-6.
 - Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει δύο μονάδες.
 - Κατά τη διάρκεια τής εξέτασης βιβλία και σημειώσεις θα παραμείνουν κλειστά.
 - Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
 - Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους των εξεταστών).
 - Κατά τη διάρκεια τής εξέτασης δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφική σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!