

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

- ΘΕΜΑ 1ο** (i) Να διατυπωθεί το 1ο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων. Εν συνεχεία, να διατυπωθεί και να αποδειχθεί (με κάθε λεπτομέρεια) το 2ο θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων.
(ii) Υποθέτοντας ότι ο R είναι ένας δακτύλιος και τα I, J δυο ιδεώδη του να αποδειχθούν οι ισομορφισμοί:

$$I / (I \cap J) \cong (I + J) / J$$

και

$$(I + J) / (I \cap J) \cong ((I + J) / I) \times ((I + J) / J) \cong (J / (I \cap J)) \times (I / (I \cap J)).$$

- ΘΕΜΑ 2ο** (i) Να προσδιοριστεί επακριβώς η πολλαπλασιαστική ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων τού δακτυλίου $\text{Mat}_{n \times n}(R)$ των $n \times n$ πινάκων, οι εγγραφές των οποίων είναι ειλημμένες από έναν μεταθετικό, μη τετριμμένο 1-δακτύλιο R .
(ii) Να αποδειχθεί ότι ο $\text{Mat}_{n \times n}(R)$ είναι ένας απλός δακτύλιος.

ΘΕΜΑ 3ο Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα βάσεως τού Hilbert.

ΘΕΜΑ 4ο Να αποδειχθεί το *λήμμα τού Gauss*: Υποτιθεμένου ότι R είναι μια Π.Μ.Π., το γινόμενο $\varphi(X)\psi(X)$ δυο πολωνύμων $\varphi(X), \psi(X) \in R[X] \setminus \{0_{R[X]}\}$ είναι πρωταρχικό πολώνυμο εάν και μόνον καθένα εξ αυτών είναι πρωταρχικό πολώνυμο.

ΘΕΜΑ 5ο Έστω R μια ακεραία περιοχή. Να αποδειχθεί ότι η R είναι περιοχή με παραγοντοποίηση όταν πληροί τη *συνθήκη των αλυσίδων γνησίων διαιρετών*.

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο Έστω K ένα σώμα. Ως γνωστόν, ο δακτύλιος $K[[X]]$ είναι Π.Κ.Ι. Να αποδειχθεί ότι, επιπροσθέτως, ισχύει το *εξής*: Για κάθε μη τετριμμένο ιδεώδες I τού $K[[X]]$ υπάρχει κάποιος $k \in \mathbb{N}_0$, τέτοιος ώστε να ισχύει $I = \langle X^k \rangle$.

ΘΕΜΑ 7ο (i) Δοθέντων n ιδεωδών I_1, I_2, \dots, I_n ενός μεταθετικού δακτυλίου R με μοναδιαίο στοιχείο (όπου $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), τέτοιων ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$I_j + I_k = R, \forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq j, k \leq n, j \neq k,$$

να αποδειχθεί ότι $I_1 I_2 \cdots I_n = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$. [*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί μαθηματική επαγωγή ως προς το n , σε συνδυασμό με γνωστά θεωρητικά αποτελέσματα.]

(ii) Να αποδειχθεί ότι $K[X] / \langle X - a \rangle \cong K$, για κάθε σώμα K και για κάθε $a \in K$.

(iii) Εάν τα a_1, \dots, a_n είναι n σαφώς διακεκριμένα στοιχεία ενός σώματος K (όπου $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) και

$$\varphi(X) := (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_n) \in K[X],$$

να αποδειχθεί ότι $K[X] / \langle \varphi(X) \rangle \cong K^n$. [*Υπόδειξη*: Να γίνει κατάλληλη χρήση των (i) και (ii), σε συνδυασμό με γνωστά θεωρητικά αποτελέσματα.]

- ΘΕΜΑ 8ο** (i) Για ποιους πρώτους αριθμούς p ισχύει η ισότητα $|x^2 - 11y^2| = p$ για κάποιους $x, y \in \mathbb{Z}$;
(ii) Για ποιους πρώτους αριθμούς p ισχύει η ισότητα $x^2 + xy + 3y^2 = p$ για κάποιους $x, y \in \mathbb{Z}$;

ΘΕΜΑ 9ο Να προσδιορισθούν οι λύσεις $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ τής εξισώσεως $y^2 = x^3 - 11$.

ΘΕΜΑ 10ο (i) Δίδεται το πολυώνυμο

$$\varphi(X) := 2X^2 - 2X + 3 \in \mathbb{Z}[X].$$

Θεωρώντας την περιοχή $\mathbb{Z}[X]$ ως υποπεριοχή τής $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}][X]$, να αποδειχθεί ότι το $\varphi(X)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο υπεράνω τής $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(ii) Είναι το $\varphi(X)$ ανάγωγο και υπεράνω τού σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$;

-
- Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.
 - Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.
 - Η εξέταση χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος της οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θεωρητικά θέματα τής επιλογής τους (από τα 1-5), χωρίς να χρησιμοποιούν σημειώσεις ή βιβλία. Ύστερα από την αποπεράτωση αυτής τής διαδικασίας παραδίδουν τις κόλλες τους στον επιτηρητή και (προκειμένου να μεταβούν στο δεύτερο μέρος τής εξετάσεως) λαμβάνουν άλλες κόλλες.
 - Στο δεύτερο μέρος οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θέματα τής επιλογής τους (από τα 6-10) που σχετίζονται με τις εφαρμογές, έχοντας εκ παραλλήλου τη δυνατότητα χρησιμοποιήσεως των σημειώσεων τού διδάξαντος ή/και των βιβλίων που διανεμήθησαν για την παρακολούθηση τού μαθήματος.
 - Εντός των γραπτών οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
 - Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστή).
 - Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφική σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!