

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1ο Να διατυπωθεί το *λήμμα του Zorn* και να αποδειχθεί μέσω αυτού ότι κάθε γνήσιο ιδεώδες I ενός μη τετριμμένου δακτυλίου R με μοναδιαίο στοιχείο περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες τού R .

ΘΕΜΑ 2ο (i) Να αποδειχθεί ότι κάθε ακεραία περιοχή, η οποία διαθέτει μόνον έναν πεπερασμένο αριθμό ιδεωδών, είναι σώμα.

(ii) Να αποδειχθεί ότι κάθε ευκλείδεια περιοχή είναι Π.Κ.Ι.

ΘΕΜΑ 3ο Έστω m ένας άκεραιο αριθμός στερούμενος τετραγώνων. Να αποδειχθεί ότι η τετραγωνική αριθμητική περιοχή

$$\mathbb{Z}[\sqrt{m}] = \{a + b\sqrt{m} \in \mathbb{Z} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$$

είναι ναιτεριανή περιοχή.

ΘΕΜΑ 4ο Έστω R μια ακεραία περιοχή. Να αποδειχθεί ότι ένα $q \in R \setminus (R^\times \cup \{0_R\})$ είναι ανάγωγο στοιχείο τής R εάν και μόνον εάν το κύριο ιδεώδες $\langle q \rangle$ είναι ένα μεγιστικό στοιχείο τού συνόλου όλων των γνήσιων μη τετριμμένων κυρίων ιδεωδών τής R (ως προς τον συνήθη συνολοθεωρητικό εγκλεισμό).

ΘΕΜΑ 5ο Έστω R μια ακεραία περιοχή. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία των ακολούθων συνθηκών:

(i) Η R είναι Π.Μ.Π.

(ii) Η R είναι περιοχή με παραγοντοποίηση και κάθε στοιχείο $q \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ είναι πρώτο εάν και μόνον εάν είναι ανάγωγο.

(iii) Κάθε $a \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$ διαθέτει σύντροφο παριστώμενο ως γινόμενο πεπερασμένου πλήθους πρώτων στοιχείων τής R .

ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΘΕΜΑ 6ο Έστω ότι ο m είναι ένας φυσικός αριθμός ≥ 5 με $\sqrt{m} \notin \mathbb{Z}$ και ότι ο p είναι ένας πρώτος αριθμός ο οποίος ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες: $p < m$, $p \mid m + 1$, $p^2 \nmid m + 1$. Εάν

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b\sqrt{m} \\ -b\sqrt{m} & a \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

και

$$J_p := \left\{ \begin{pmatrix} x & (py+x)\sqrt{m} \\ -(py+x)\sqrt{m} & x \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\},$$

να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το σύνολο R αποτελεί έναν μεταθετικό υποδακτύλιο τού $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ με μοναδιαίο στοιχείο του το $1_R = 1_{\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})}$ (ως προς τις συνήθεις πράξεις).

(ii) Ο R είναι ακεραία περιοχή.

(iii) Το σύνολο J_p είναι ένα ιδεώδες τού R .

(iv) Το J_p δεν είναι κύριο ιδεώδες (οπότε ο R δεν είναι Π.Κ.Ι.).

ΘΕΜΑ 7ο (α) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, και έστω $I_n := \langle n, X \rangle$ το ιδεώδες του $\mathbb{Z}[X]$ το παραγόμενο από τα n και X . Να αποδειχθεί ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) Το I_n είναι μεγιστικό ιδεώδες του $\mathbb{Z}[X]$.

(ii) Το I_n είναι πρώτο ιδεώδες του $\mathbb{Z}[X]$.

(iii) Ο n είναι πρώτος αριθμός.

(β) Δίδονται τα εξής ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbb{Q}[X_1, X_2]$:

(i) $\langle X_1^2 \rangle$,

(iii) $\langle X_1 + X_2 \rangle$,

(ii) $\langle X_1 - 2, X_2 - 3 \rangle$,

(iv) $\langle X_1 X_2 \rangle$.

Ποια εξ αυτών είναι πρώτα και ποια μεγιστικά;

ΘΕΜΑ 8ο (i) Για ποιους πρώτους αριθμούς p ισχύει η ισότητα $|x^2 - 11y^2| = p$ για κάποιους $x, y \in \mathbb{Z}$;

(ii) Για ποιους πρώτους αριθμούς p ισχύει η ισότητα $x^2 + xy + 3y^2 = p$ για κάποιους $x, y \in \mathbb{Z}$;

ΘΕΜΑ 9ο Να προσδιορισθούν οι λύσεις $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ τής εξίσωσης $y^2 = x^3 - 11$.

ΘΕΜΑ 10ο (i) Δίδεται το πολυώνυμο

$$\varphi(X) := 2X^2 - 2X + 3 \in \mathbb{Z}[X].$$

Θεωρώντας την περιοχή $\mathbb{Z}[X]$ ως υποπεριοχή τής $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}][X]$, να αποδειχθεί ότι το $\varphi(X)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο υπεράνω τής $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(ii) Είναι το $\varphi(X)$ ανάγωγο και υπεράνω του σώματος $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$;

- Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.
- Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.
- Η εξέταση χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος της οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θεωρητικά θέματα τής επιλογής τους (από τα 1-5), χωρίς να χρησιμοποιούν σημειώσεις ή βιβλία. Ύστερα από την αποπεράτωση αυτής τής διαδικασίας παραδίδουν τις κόλλες τους στον επιτηρητή και (προκειμένου να μεταβούν στο δεύτερο μέρος τής εξέτασεως) λαμβάνουν άλλες κόλλες.
- Στο δεύτερο μέρος οι εξεταζόμενοι δίδουν τις απαντήσεις μόνον στα θέματα τής επιλογής τους (από τα 6-10) που σχετίζονται με τις εφαρμογές, έχοντας εκ παραλλήλου τη δυνατότητα χρησιμοποιήσεως των σημειώσεων του διδάξαντος ή/και των βιβλίων που διανεμήθησαν για την παρακολούθηση του μαθήματος.
- Εντός των γραπτών οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
- Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).
- Κατά τη διάρκεια τής εξέτασεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!