Δ. Ι. Νταής

Περί Κανονικών Πολυέδρων

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΜΙΛΙΩΝ ΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΠΤΥΧΙΑΚΟΥΣ ΦΟΙΤΗΤΕΣ

ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α′ (14 Δεκεμβρίου 2000)

1 Κανονικά Πολύγωνα

Ήδη στο σχολικό βιβλίο τής Α και Β Λυκείου συναντούμε τα εξής θεωρήματα.

(1.1) Θεώρημα. *Εάν χωρίσουμε έναν κύκλο σε ίσα τόξα, τότε τα άκρα αυτών των τόξων αποτελούν κορυφές πολυγώνου που έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους.*

(1.2) Ορισμός. Ένα (κυρτό) πολύγωνο λέγεται **κανονικό** όταν έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες μεταξύ τους.

(1.3) Θεώρημα. *Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός (κυρτού) n-γώνου ισούται με*

$$(n-2)\,\pi$$

(1.4) Πόρισμα. *Σε κάθε κανονικό n-γωνο, καθεμιά από τις (εσωτερικές) γωνίες του ισούται με*

$$\frac{(n-2)\,\pi}{n}$$

(1.5) Θεώρημα. *Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον, ομόκεντρο τού πρώτου.*

(1.6) Πόρισμα. *Δυο κανονικά πολύγωνα, με τον ίδιο αριθμό πλευρών, είναι όμοια.*

Το επόμενο θεώρημα, το οποίο δεν ήταν γνωστό στην αρχαιότητα, περιγράφει λεπτομερώς την ικανή και αναγκαία συνθήκη για την κατασκευασιμότητα ενός κανονικού n-γώνου με αποκλειστική χρήση *κανόνα* και *διαβήτη*, και οφείλεται στον μέγα γερμανό μαθηματικό Carl Friedrich Gauss (30/4/1777-23/2/1855). Η απόδειξή του παρουσιάζεται εντός των πλαισίων τής παραδόσεως τής «Θεωρίας Galois» τού τετάρτου έτους.

(1.7) Θεώρημα. (C. F. Gauss) *Ένα κανονικό n-γωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη εάν και μόνον εάν το n είναι τής μορφής*

$$n = 2^r,\ r \in \mathbb{N},\ \ \textit{ή}\ \ n = 2^r \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_s,\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ s \in \mathbb{N},$$

όπου οι $p_1, p_2, \ldots, p_s$ είναι σαφώς διακεκριμένοι πρώτοι αριθμοί τής μορφής

$$p_i = 2^{2^{r_i}} + 1,\ r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Η κατασκευή τού κανονικού 3-γώνου και 5-γώνου με κανόνα και διαβήτη ήταν γνωστή από την αρχαιότητα. Ο Gauss περιέγραψε μια τέτοια *διεξοδική* κατασκευή τού κανονικού 17-γώνου μόλις σε ηλικία 19 ετών (το 1796). Λέγεται μάλιστα πως ο ενθουσιασμός του γι' αυτό του το κατόρθωμα υπήρξε τόσο μεγάλος, ώστε αποφάσισε να ασχοληθεί τελικώς με τα Μαθηματικά. Το 1832 ο F.J. Richelot (6/11/1808-31/3/1875) παρουσίασε σε μια σειρά από εργασίες την ανάλογη κατασκευή τού κανονικού 257-γώνου.

Εξάλλου οι ως άνω εμφανιζόμενοι αριθμοί έχουν μια ιδιαίτερη αξία, δεδομένου ότι, από ιστορική σκοπιά, είναι τουλάχιστον τόσο σημαντικοί όσο και οι τέλειοι αριθμοί και οι αριθμοί τού Mersenne, που συναντήσατε ήδη στη «Θεωρία Αριθμών» τού πρώτου έτους.

(1.8) Ορισμός. (Αριθμοί τού Fermat) Οι αριθμοί

$$F_k := 2^{2^k} + 1,\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

ονομάζονται **αριθμοί τού Fermat** (20/8/1601-12/1/1665).

Ο ίδιος ο Fermat διατύπωσε το 1640 την εικασία, ότι όλοι οι αριθμοί F_k είναι πρώτοι, πράγμα το οποίο βεβαίως ισχύει για τους

$$\begin{aligned} F_0 &= 2^{2^0} + 1 = 3 \\ F_1 &= 2^{2^1} + 1 = 5 \\ F_2 &= 2^{2^2} + 1 = 17 \\ F_3 &= 2^{2^3} + 1 = 257 \\ F_4 &= 2^{2^4} + 1 = 65537, \end{aligned}$$

όχι όμως και για τον $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297$, διότι, όπως έδειξε ο L. Euler (15/4/1707-18/9/1783) σε μία από τις πρώτες αριθμοθεωρητικές του εργασίες (1732),

$$F_5 = 641 \times 6700417.$$

Αργότερα ο Euler απέδειξε και το εξής:

(1.9) Θεώρημα. *Κάθε πρώτος αριθμός, ο οποίος διαιρεί έναν* $F_k,\ k \geq 2$, *οφείλει να είναι τής μορφής*

$$\lambda \cdot 2^{k+2} + 1,\ \lambda \in \mathbb{N}.$$

Βασιζόμενος σε αυτό ανακάλυψε ότι

$$19 \cdot 2^{9450} \mid F_{9448}\ , \quad 5 \cdot 2^{23473} \mid F_{23471}\ .$$

(1.10) Θεώρημα. (T. Pepin, 1877) *Ο F_k είναι πρώτος εάν και μόνον εάν δεν διαιρεί τον αριθμό*

$$3^{2^{2^k-1}}+1$$

Χρησιμοποιώντας το ως άνω κριτήριο τού Pepin, οι J.R. Morehead A.E. Western απέδειξαν το 1905 ότι και ο F_7 δεν είναι πρώτος. Επί τού παρόντος (2000) οι *μόνοι* γνώστοι πρώτοι αριθμοί Fermat εξακολουθούν να είναι οι $F_0, ..., F_4$. Το ότι ο F_k δεν είναι πρώτος έχει αποδειχτεί για όλους τους $5 \leq k \leq 23$, αλλά και για πολλούς άλλους διάσπαρτους αριθμούς έως τον $k = 213319$. Είναι μάλιστα εντυπωσιακό το ότι η *πλήρης* παραγοντοποίηση των F_9, F_{10}, F_{11} κατέστη δυνατή μόλις πριν από λίγα χρόνια: τού F_9 από τους A.K. Lenstra, H.W. Lenstra Jr., M.S. Manasse και J.M. Pollard (το 1990), τού F_{10} από τον R. Brent (20/10/1995) και τού F_{11} από τους Brent και Morain (το 1988).

2 Κανονικά Πολύεδρα και Πολύτοπα

Για κάθε $n \geq 3$ υπάρχουν κανονικά n-γωνα, ενώ δυο οποιαδήποτε n-γωνα οφείλουν να είναι όμοια μεταξύ τους. Ακόμη είδαμε ότι υπάρχουν ειδικά, αλλ' εντούτοις απειροπληθή, n-γωνα που κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη. Τι συμβαίνει άραγε στην αμέσως επομένη διάσταση 3 (ή και στις ανώτερες διαστάσεις); Υπάρχουν και εδώ άπειρα κανονικά πολύεδρα (αντιστοίχως, πολύτοπα) ως προς ομοιότητα;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό, η οποία, εκ πρώτης όψεως, θα μπορούσε να προκαλέσει μια αναπάντεχη έκπληξη, **δεν είναι** καταφατική. Τούτο οφείλεται στη «διαφορετική συμπεριφορά» που επιδεικνύουν ανάλογα προβλήματα «αλλάζοντας διάσταση», καθώς και στη γενίκευση των ορισμών. Η «κανονικότητα» ενός πολυτόπου σε διαστάσεις ≥ 3 είναι πράγματι συνθήκη ιδιαζόντως «περιοριστική». Αλλ' ας πάρουμε τους απαραίτητους ορισμούς από την αρχή.

(2.1) Ορισμός. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο n-χώρο $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένο με τη συνήθη *στάθμη*

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} = (x_1, ..., x_d) \longmapsto \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \in \mathbb{R},$$

και με τη συνήθη *μετρική*

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \in \mathbb{R}.$$

Μια απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται **ισομετρία** (ή **ευκλείδεια κίνηση**) όταν

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(2.2) Ορισμός. Μια απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ονομάζεται $\frac{1}{\varrho}$**-ομοιότητα**, $\varrho > 0$, όταν η απεικόνιση

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \longmapsto \frac{f(\mathbf{x})}{\varrho} \in \mathbb{R}^n$$

είναι μια ισομετρία.

(2.3) Ορισμός. Υποθέτουμε ότι τα A και B είναι δυο υποσύνολα τού χώρου $\mathbb{R}^n$ και ότι η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια απεικόνιση, για την οποία ισχύει $f(A) = B$. Όταν η f είναι μια ισομετρία, τότε λέμε πως τα A και B είναι μεταξύ τους **ισόμοια** (congruent). Όταν η f είναι μια ομοιότητα, τότε λέμε πως τα A και B είναι μεταξύ τους **όμοια** (similar).

(2.4) Ορισμός. Έστω M ένα πεπερασμένο σύνολο τού $\mathbb{R}^n$. Η **κυρτή θήκη**

$$P = \mathrm{conv}\,(M) := \left\{ \sum_{m\in M} \lambda_m\, m \;\middle|\; \lambda_m \in \mathbb{R}_{\geq 0} \;\text{ και }\; \sum_{m\in M} \lambda_m = 1 \right\}$$

τού M καλείται **κυρτό πολύτοπο**. Υπάρχει ένα μονοσημάντως ορισμένο ελάχιστο υποσύνολο M' τού M, τέτοιο ώστε $P = \mathrm{conv}(M')$. Τα στοιχεία αυτού τού M' είναι οι **κορυφές** τού P. Η **διάσταση** d τού P είναι η διάσταση τού συσχετικού υποχώρου τού παραγομένου από το M. (Κάθε δισδιάστατο κυρτό πολύτοπο λέγεται (κυρτό) **πολύγωνο**. Κάθε τρισδιάστατο κυρτό πολύτοπο λέγεται (κυρτό) **πολύεδρο**).

(2.5) Ορισμός. Ένας **κλειστός ημίχωρος** H τού $\mathbb{R}^n$ προσδιορίζεται από μια γραμμική απεικόνιση $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και έναν πραγματικό αριθμό γ,

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) \leq \gamma\}\,.$$

Το **σύνορο** ∂H ενός τέτοιου H ορίζεται ως το

$$\partial H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) = \gamma\}\,.$$

Ο κλειστός ημίχωρος H περιέχει ένα πεπερασμένο σύνολο M τού $\mathbb{R}^n$ εάν και μόνον εάν περιέχει το κυρτό πολύτοπο $P = \mathrm{conv}(M)$. Σε αυτήν την περίπτωση, το σύνολο

$$\partial H \cap P = \mathrm{conv}\,(\partial H \cap M)$$

καλείται **πλευρά** τού P, που αποτελεί κι αυτή ένα (όχι αναγκαίως μη κενό) κυρτό πολύτοπο. Κάθε μηδενοδιάστατη πλευρά ενός κυρτού πολυτόπου απαρτίζεται από μία ακριβώς κορυφή του. Οι μονοδιάστατες πλευρές ενός κυρτού πολυτόπου ονομάζονται **ακμές**, ενώ οι $(d-1)$-διάστατες πλευρές ενός d-διάστατου κυρτού πολυτόπου P ονομάζονται **έδρες** τού P.

(2.6) Ορισμός. Έστω P ένα κυρτό πολύτοπο εντός τού $\mathbb{R}^n$. Εάν η F είναι μια πλευρά τού P και G μια πλευρά τού F, τότε η G είναι μια πλευρά και τού P. Μια πεπερασμένη ακολουθία $F_0, F_1, \ldots, F_{k-1}, F_k$ καλείται **σημαία πλευρών** τού P όταν η F_i αποτελεί μια πλευρά τής F_{i+1} για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Μια σημαία πλευρών τού P λέγεται **πλήρης σημαία** όταν $\dim(F_i) = i$ και $k = \dim(P)$. (Σημειωτέον ότι κάθε σημαία πλευρών τού P περιέχεται σε μια πλήρη σημαία.)

(2.7) Ορισμός. Έστω $\mathbf{v}$ μια κορυφή ένός κυρτού πολυτόπου P και έστω H ένας ημίχωρος, ο οποίος περιέχει όλες τις κορυφές τού P πλην τής $\mathbf{v}$. Τότε η τομή

$$Q = P \cap \partial H$$

αποτελεί ένα κυρτό πολύτοπο, το οποίο ονομάζεται ιδιαιτέρως **κορυφαίο σχήμα τού** P **ως προς την** $\mathbf{v}$ (vertex figure at $\mathbf{v}$).

(2.8) Πρόταση. *Για κάθε k-διάστατη πλευρά F τού P, που περιέχει την κορυφή $\mathbf{v}$, η τομή $F \cap \partial H$ είναι μια $(k-1)$-διάστατη πλευρά τού Q. Το σύνολο $F \cap \partial H$ αποτελεί το κορυφαίο σχήμα τού κυρτού πολυτόπου F ως προς την $\mathbf{v}$. Γενικότερα, υπάρχει μια αμφίρριψη* (1-1 *και επί απεικόνιση*):

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{πλευρές τού } P \textit{ που} \\ \textit{περιέχουν την κορυφή } \mathbf{v} \end{array} \right\} \ni F \longmapsto F \cap \partial H \in \left\{ \begin{array}{c} \textit{πλευρές τού} \\ \textit{κορυφαίου σχήματος } Q \end{array} \right\},$$

η οποία στέλνει τις σημαίες να απεικονισθούν σε σημαίες (*και προς τις δύο κατευθύνσεις*).

(2.9) Ορισμός. Έστω $\mathbf{0}$ ένα οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο ενός d-διαστάτου κυρτού πολυτόπου $P \subset \mathbb{R}^d$ (που θα το θεωρήσουμε ως «σημείο αναφοράς» μας, όπως θεωρούμε για το ίδιο το $\mathbb{R}^d$ την «απαρχή των αξόνων» του). Το **πολικό** P_r° τού P *ως προς την* $(d-1)$-*διάστατη σφαίρα με ακτίνα* r *και κέντρο το* $\mathbf{0}$ είναι το d-διάστατο κυρτό πολύτοπο[1]

$$P_r^\circ := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq r^2, \;\; \forall \mathbf{y}, \;\; \mathbf{y} \in P \right\}.$$

Το διπλό πολικό $(P_r^\circ)_r^\circ = P$ τού P (ως προς την ίδια ακτίνα r) μάς ξαναδίνει το P. Η πολικότητα έχει ως συνέπεια τον καθορισμό ένος είδους «δυϊσμού» μεταξύ των πλευρών τού P και των πλευρών τού P_r°. Πράγματι· εάν η F είναι μια k-διάστατη πλευρά τού P, τότε το

$$F^\Delta := \left\{ \mathbf{x} \in P_r^\circ \;\middle|\; \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = r^2, \;\; \forall \mathbf{y}, \;\; \mathbf{y} \in F \right\}$$

[1] Εδώ με $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ συμβολίζουμε το σύνηθες (ευκλείδειο) *εσωτερικό γινόμενο* των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$.

αποτελεί μια $(d-k-1)$-διάστατη πλευρά τού P_r°, ενώ $\left(F^\Delta\right)^\Delta = F$. Εξάλλου, εάν οι F και G είναι δυο πλευρές τού P, τότε

$$F \subseteq G \Longrightarrow F^\Delta \supseteq G^\Delta.$$

Σημειωτέον ότι η ομοιότητα

$$\mathbb{R}^d \ni \mathbf{x} \longmapsto r^2\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$$

στέλνει το πολικό P_1° να απεικονισθεί στο πολικό P_r°, οπότε, όταν εργαζόμαστε «ως προς ομοιότητα», είναι αρκετό η όποια επιχειρηματολογία μας να χρησιμοποιεί τη «μοναδιαία» σφαίρα. Επίσης, θα πρέπει να αναφερθεί ότι εάν η $\mathbf{v}$ είναι μια κορυφή τού P, τότε η έδρα $\{\mathbf{v}\}^\Delta$ τού P_r° κείται επί ενός υπερεπιπέδου L τού $\mathbb{R}^d$, το οποίο είναι κάθετο ως προς το διάνυσμα $\mathbf{v}$, ενώ η απόσταση ℓ τού $\mathbf{0}$ από το L υπολογίζεται από την ισότητα

$$\frac{\ell}{r} = \frac{r}{\|\mathbf{v}\|}\ .$$

(2.10) Ορισμός. Κάθε ισομετρία, η οποία μεταφέρει ένα κυρτό πολύτοπο P στον εαυτό του, ονομάζεται **αυτομορφισμός**[2] τού P. Κάθε αυτομορφισμός ενός P μετατάσσει τις κορυφές τού P κατά μονοσήμαντο τρόπο. Εάν το $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_q\}$ είναι το σύνολο των κορυφών ενός κυρτού πολυτόπου P, τότε το **κέντρο**

$$c := \frac{\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_q}{q}$$

τού P είναι ένα σημείο, το οποίο παραμένει *σταθερό* ως προς *κάθε* αυτομορφισμό τού P.

(2.11) Λήμμα. *Κάθε αυτομορφισμός ενός κυρτού πολυτόπου P μεταφέρει σημαίες (κι αντιστοίχως, πλήρεις σημαίες) πλευρών του σε σημαίες (κι αντιστοίχως, πλήρεις σημαίες) πλευρών του.*

(2.12) Ορισμός. (Η «κανονικότητα» σε οιεσδήποτε διαστάσεις) Ένα κυρτό πολύτοπο P λέγεται **κανονικό** όταν για δυο οιεσδήποτε πλήρεις σημαίες (πλευρών του) υπάρχει πάντοτε ένας αυτομορφισμός τού P, ο οποίος στέλνει τη μία να απεικονισθεί στην άλλη.

(2.13) Λήμμα. *Κάθε πλευρά ενός κανονικού κυρτού πολυτόπου αποτελεί αφ' εαυτής ένα κανονικό κυρτό πολύτοπο. Επίσης, όλες οι πλευρές ιδίας διαστάσεως (ενός κανονικού κυρτού πολυτόπου) είναι μεταξύ τους ισόμοιες.*

[2] Το σύνολο των αυτομορφισμών τού P συγκροτεί, ως προς τη σύνθεση απεικονίσεων, μια ομάδα, την επονομαζόμενη **ομάδα αυτομορφισμών** τού P.

(2.14) Λήμμα. *Έστω P ένα κανονικό κυρτό πολύτοπο. Για κάθε (δυνατή) παγιωμένη διάσταση k, τα κέντρα c των k-διάστατων πλευρών F τού P απέχουν την ίδια απόσταση r_k από το κέντρο, ας το πούμε (τώρα) $\mathbf{0}$, τού P.*

(2.15) Παρατήρηση. Σημειωτέον ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{0}\,c}$ είναι κάθετο προς την (εκάστοτε θεωρούμενη) πλευρά F, η δε $r = r_0$ καλείται **ακτίνα περιγραφής**[3] για το P.

(2.16) Πρόταση. (Κριτήριο κανονικότητας) *Ένα κυρτό πολύτοπο P είναι κανονικό εάν και μόνον εάν υπάρχει μια κορυφή $\mathbf{v}$ τού P, ούτως ώστε να πληρούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

(α) *Για κάθε κορυφή $\mathbf{v}' \neq \mathbf{v}$ τού P υπάρχει ένας αυτομορφισμός τού P, ο οποίος μεταφέρει το σημείο $\mathbf{v}$ στο σημείο $\mathbf{v}'$.*

(β) *Υπάρχει ένα κανονικό κορυφαίο σχήμα Q τού P ως προς το $\mathbf{v}$.*

(γ) *Για κάθε αυτομορφισμό φ τής Q υπάρχει ένας αυτομορφισμός f τού P, τέτοιος ώστε*

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \ \ \textit{και} \quad f|_Q = \varphi.$$

(2.17) Ορισμός. («Έξοχα κορυφαία σχήματα») Έστω P ένα d-διάστατο κανονικό κυρτό πολύτοπο. Ας υποθέσουμε πως το $\mathbf{v}$ είναι μια κορυφή του. Τότε όλες οι ακμές του, που ξεκινούν από την $\mathbf{v}$, απολήγουν σε κορυφές, οι οποίες κείνται επί ενός υπερεπιπέδου L καθέτου προς το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{0}\,\mathbf{v}}$. Η κυρτή θήκη αυτών των κορυφών, των ευρισκομένων επί τού L, καλείται **το έξοχο κορυφαίο σχήμα τού P ως προς την** $\mathbf{v}$ (excellent vertex figure at $\mathbf{v}$).

(2.18) Πρόταση. *Όλα τα έξοχα κορυφαία σχήματα ενός d-διαστάτου κανονικού κυρτού πολυτόπου είναι μεταξύ τους ισόμοια $(d-1)$-διάστατα κανονικά κυρτά πολύτοπα.*

(2.19) Ορισμός. (Σύμβολο τού Schläfli) Τα μόνα δισδιάστατα κυρτά πολύτοπα είναι τα p-γωνα, όπου $p = 3, 4, \ldots$ Ορίζουμε το $\{p\}$ ως το σύμβολο Schläfli[4] ενός (τυχόντος) p-γώνου. Στη διάσταση 3, ορίζουμε το $\{p, q\}$ ως το σύμβολο Schläfli ενός κανονικού πολυέδρου, όταν αυτό έχει ως έδρες του p-γωνα και ως έξοχα κορυφαία του σχήματα q-γωνα. Σε ανώτερες διαστάσεις, ο ορισμός γίνεται *επαγωγικά* : **Το σύμβολο Schläfli** ενός κανονικού κυρτού $(d+1)$-διάστατου πολυτόπου P είναι το $\{p_1, p_2, \ldots, p_d\}$ όταν οι δισδιάστατες πλευρές του είναι p_1-γωνα και τα έξοχα κορυφαία σχήματά του διαθέτουν ως σύμβολο Schläfli το $\{p_2, \ldots, p_d\}$. (Όμοια κανονικά κυρτά πολύτοπα διαθέτουν το ίδιο σύμβολο τού Schläfli.)

[3] Αυτή είναι η ακτίνα τής σφαίρας τής περιγεγραμμένης περί το P με κέντρο της το $\mathbf{0}$. Φυσικά, μπορεί κανείς να δείξει πως υπάρχει και μια ομόκεντρή της «εγγεγραμμένη» σφαίρα (εντός τού P). Έτσι το θεώρημα (1.5) γενικεύεται για όλες τις διαστάσεις.

[4] Schläfli, Ludwig (15/1/1814-20/3/1895). Ελβετός μαθηματικός. Υπήρξε καθηγητής τού Πανεπιστημίου τής Βέρνης από το 1853. Το κύριο τμήμα τής έρευνάς του είναι αφιερωμένο στην Πολυδιάστατη Γεωμετρία και στην κλασική Μιγαδική Ανάλυση.

(2.20) Ορισμός. Έστω P ένα κανονικό κυρτό πολύτοπο, με το μήκος καθεμιάς των ακμών του ίσο με ℓ και με ακτίνα περιγραφής ίση με r. Τότε το

$$s(P) := \frac{\ell}{2r}$$

καλείται **χαρακτηριστικός λόγος** τού P. (Προφανώς $0 < s(P) < 1$).

(2.21) Λήμμα. *Όμοια κανονικά κυρτά πολύτοπα διαθέτουν ταυτόσημους χαρακτηριστικούς λόγους.*

(2.22) Λήμμα. *Εάν το P είναι ένα κανονικό p-γωνο, τότε*

$$s(P) = \sin\left(\frac{\pi}{p}\right).$$

(2.23) Λήμμα. *Έστω P ένα κανονικό κυρτό πολύτοπο. Ας υποθέσουμε πως οι δισδιάστατες πλευρές τού P είναι p-γωνα και πως το Q είναι ένα έξοχο κορυφαίο σχήμα τού P. Τότε έχουμε*

$$s(P)^2 = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}{s\left(Q\right)^2} \tag{1}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πως το Q είναι ένα έξοχο κορυφαίο σχήμα τού P ως προς την κορυφή $\mathbf{v}$ τού P, $\mathbf{v}'$ μια κορυφή τού Q, $\mathbf{0}$ το κέντρο τού P, c το κέντρο τού Q και θ η γωνία $\frac{1}{2}\sphericalangle(\mathbf{v}\ \mathbf{0}\ \mathbf{v}')$. Τότε

$$\sin\left(\theta\right) = \frac{\text{μήκος τής απέναντι πλευράς}}{\text{μήκος τής υποτείνουσας}} = \frac{\ell}{2r} \tag{2}$$

και

$$\cos\left(\theta\right) = \frac{\text{μήκος τής παρακείμενης πλευράς}}{\text{μήκος τής υποτείνουσας}} = \frac{r'}{\ell},$$

όπου $r' := \|\mathbf{v}' - c\|$. Επομένως,

$$s(P)^2 = 1 - \left(\frac{r'}{\ell}\right)^2 \tag{3}$$

Όμως κάθε ακμή τού Q αποτελεί ένα κορυφαίο σχήμα μιας δισδιάστατης πλευράς τού P, η οποία περιέχει την κορυφή $\mathbf{v}$ (βλ. πρόταση (2.8)). Επομένως το μήκος ℓ' τής κάθε ακμής τού Q ισούται με

$$\ell' = 2\ell \cdot \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \tag{4}$$

Από τις (2), (3) και (4) συνάγουμε τελικώς την ισότητα

$$s(P)^2 = 1 - \left(\frac{2r' \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)}{\ell'}\right)^2 = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\left(\frac{2r'}{\ell'}\right)^2,$$

ήτοι την (1), διότι $s(Q) = \frac{\ell'}{2r'}$. $\square$

Από το λήμμα αυτό συνάγεται (μέσω επαγωγής) ότι ο χαρακτηριστικός λόγος $s(P)$ εξαρτάται μόνον από το σύμβολο Schläfli τού P. Μάλιστα ισχύει και το ακόλουθο, πιο ισχυρό:

(2.24) Θεώρημα. *Δυο κανονικά κυρτά πολύτοπα είναι όμοια μεταξύ τους* ***εάν και μόνον εάν*** *διαθέτουν το ίδιο σύμβολο τού* Schläfli.

Επειδή η ταξινόμηση των κανονικών κυρτών πολυτόπων θα γίνει «ως προς ομοιότητα», μπορούμε από εδώ και στο εξής να ταυτίζουμε κάθε σύμβολο Schläfli με έναν εκπρόσωπο τής προκειμένης κλάσης ισοδυναμίας (ομοιότητας).

(2.25) Πρόταση. *Οι k-διάστατες πλευρές τού πολυτόπου με σύμβολο* Schläfli *το* $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$ *είναι το πολύτοπο με σύμβολο* Schläfli *το* $\{p_1, \ldots, p_{k-1}\}$.

(2.26) Ορισμός. Εάν το P είναι ένα κανονικό κυρτό πολύτοπο, τότε κάθε πολικό του P° ως προς μια σφαίρα με κέντρο της το κέντρο τού P λέγεται **δυϊκό** τού P. Όλα τα πολύτοπα τα δυϊκά τού P είναι μεταξύ τους όμοια κανονικά κυρτά πολύτοπα. Τα P και P° διαθέτουν το ίδιο κέντρο και την ίδια ομάδα αυτομορφισμών. Ένα ειδικό (εντελώς «φυσικό») δυϊκό τού P είναι αυτό που σχηματίζεται ως κυρτή θήκη των κέντρων όλων των εδρών τού P.

(2.27) Πρόταση. *Κάθε δυϊκό τού πολυτόπου με σύμβολο* Schläfli *το* $\{p_1, \ldots, p_{d-1}\}$ *είναι ένα πολύτοπο με σύμβολο* Schläfli *το* $\{p_{d-1}, \ldots, p_1\}$.

(2.28) Θεώρημα. (Ταξινόμηση κανονικών πολυτόπων ως προς ομοιότητα) *Τα μόνα σύμβολα τού* Schläfli*, τα οποία μπορεί να έχει ένα κανονικό πολύτοπο στη διάσταση* $d = 3$ *είναι τα*

Σύμβολα Schläfli	$\{3,3\}$	$\{3,4\}$	$\{4,3\}$	$\{3,5\}$	$\{5,3\}$
$s(P)^2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{6}$

στη διάσταση $d = 4$ *τα*

Σύμβολα Schläfli	$\{3,3,3\}$	$\{3,3,4\}$	$\{4,3,3\}$	$\{3,4,3\}$	$\{3,3,5\}$	$\{5,3,3\}$
$s(P)^2$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$	$\frac{7-3\sqrt{5}}{16}$

και σε διαστάσεις $d \geq 5$ τα

Σύμβολα Schläfli	$\{3,3,\ldots,3,3\}$	$\{3,3,\ldots 3,4\}$	$\{4,3,\ldots,3,3\}$
$s(P)^2$	$\frac{d+1}{2d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{d+1}$

Σημειωτέον ότι υπάρχουν πολύτοπα για όλα αυτά τα επιτρεπτά σύμβολα Schläfli. *Ειδικότερα, για $d=3$, αυτά είναι τα Πλατωνικά Στερεά* [5]:

Πλατωνικά Στερεά	*Τετράεδρο* $\{3,3\}$	*Οκτάεδρο* $\{3,4\}$	*Κύβος* $\{4,3\}$	*Εικοσάεδρο* $\{3,5\}$	*Δωδεκάεδρο* $\{5,3\}$
πλήθος κορυφών	4	6	8	12	20
πλήθος ακμών	6	12	12	30	30
πλήθος εδρών	4	8	6	20	12

Το οκτάεδρο είναι δυϊκό τού κύβου και το εικοσάεδρο είναι δυϊκό τού δωδεκαέδρου.

Απόδειξη. Ο τύπος (1) δίνει τις ανισότητες

$$\frac{1}{4} = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) < s\left(Q\right)^2 \tag{5}$$

(διότι $p \geq 3$), για το κανονικό κυρτό πολύτοπο P με σύμβολο Schläfli το $\{p, q_2, \ldots, q_{d-1}\}$ και με κορυφαία σχήματα Q με σύμβολο Schläfli το $\{q_2, \ldots, q_{d-1}\}$. Ξεκινώντας από τη διάσταση $d=3$, όπου το P έχει σύμβολο Schläfli το $\{p,q\}$, έχουμε $Q = \{q\}$ και $s(Q) = \sin\left(\frac{\pi}{q}\right)$, οπότε οι (5) μάς δίνουν

$$\frac{1}{4} \leq \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) < \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right) \tag{6}$$

[5] Οι «φυσικοί» εκπρόσωποι των Πλατωνικών Στερεών είναι οι ακόλουθοι. Ως τετράεδρο παίρνουμε αυτό που σχηματίζεται από την κυρτή θήκη των σημείων (κορυφών) $(1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,-1)$, ως οκτάεδρο την κυρτή θήκη των σημείων $(0,0,\pm1)$, $(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$, ως κύβο την κυρτή θήκη των σημείων $(\pm1,\pm1,\pm1)$, ως εικοσάεδρο την κυρτή θήκη των σημείων $(0,\pm\tau,\pm1)$, $(\pm1,0,\pm\tau)$, $(\pm\tau,\pm1,0)$, και ως δωδεκάεδρο την κυρτή θήκη των σημείων $(\pm1,\pm1,\pm1)$, $(0,\pm\tau^{-1},\pm\tau)$, $(\pm\tau,0,\pm\tau^{-1})$, $(\pm\tau^{-1},\pm\tau,0)$, όπου $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Οι ανισότητες (6) έχουν (ως προς p και q) ακριβώς τις 5 λύσεις τού πρώτου μας καταλόγου. Μεταβαίνοντας στη διάσταση $d = 4$, σε πολύτοπα P με σύμβολο Schläfli το $\{p, q, r\}$, τότε το $\{q, r\}$ οφείλει να βρίσκεται μεταξύ των πολυέδρων τού πρώτου καταλόγου με χαρακτηριστικό λόγο s^2 και

$$\frac{1}{4} \leq \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) < s^2,$$

συνθήκες που μας οδηγούν στις τιμές που δίνουμε στον δεύτερο κατάλογο. Κατ' αναλογίαν, σε διαστάσεις $d \geq 5$ υπάρχουν μόνο τρεις δυνατότητες· αυτές τού τρίτου καταλόγου. Ο τελευταίος ισχυρισμός αφήνεται ως άσκηση. $\square$

3 Τοπολογικώς κανονικά πολύεδρα

Στην τελευταία αυτή ενότητα θα διαπιστώσουμε ότι τα Πλατωνικά Στερεά υλοποιούν και τα πολύεδρα εκείνα, τα οποία είναι «τοπολογικώς κανονικά». Τούτο σημαίνει ότι τα συναντούμε εκ νέου, ακόμη και όταν «αποκηρύσσουμε» την ομοιότητα (ουσιαστικώς την ίδια τη «μετρική» μας) και την αντικαταθιστούμε απλώς και μόνον με την «τοπολογική ισοδυναμία[6]» (ως κριτήριο ταξινομήσεως).

(3.1) Ορισμός. Ένα σύστημα πολυγώνων εντός τού τρισδιαστάτου Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται **τοπολογικό πολύεδρο** όταν πληρούνται οι εξής συνθήκες:

(α) Κάθε πλευρά των πολυγώνων τού συστήματος αποτελεί κοινή πλευρά ακριβώς δύο πολυγώνων τού εν λόγω συστήματος.

(β) Όταν P_1 και P_2 είναι δυο τυχόντα πολύγωνα τού συστήματος, $\mathbf{v}_1$ ένα σημείο τού P_1 και $\mathbf{v}_2$ ένα σημείο τού P_2, τότε υπάρχει μια πολυγωνική γραμμή (από τον εν λόγω σύστημα) που συνδέει το $\mathbf{v}_1$ με το $\mathbf{v}_2$.

Οι κορυφές και οι πλευρές των πολυγώνων ενός τοπολογικού πολυέδρου ονομάζονται **κορυφές** και **ακμές**, αντιστοίχως, τού πολυέδρου. Κάθε πολύγωνο ενός τοπολογικού πολυέδρου ορίζει μια **έδρα** του.

(3.2) Θεώρημα. (Τύπος τού Euler) *Έστω P ένα τοπολογικό πολύεδρο. Ας συμβολίσουμε με K το πλήθος των κορυφών του, με E το πλήθος των εδρών του και με A το πλήθος των ακμών του. Εάν το P είναι ομοιομορφικό (τοπολογικώς ισοδύναμο) με τη*

[6] Η **τοπολογική ισοδυναμία** (ήτοι η ύπαρξη ενός **ομοιομορφισμού**) σας είναι γνωστή από το μάθημα τής «Εισαγωγής στην Τοπολογία» τού δευτέρου έτους.

σφαίρα, τότε ισχύει η σχέση

$$\boxed{K + E = A + 2} \tag{7}$$

(3.3) Ορισμός. Ένα τοπολογικό πολύεδρο, το οποίο είναι ομοιομορφικό με τη σφαίρα, ονομάζεται **τοπολογικώς κανονικό πολύεδρο** όταν έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) Όλες οι έδρες του διαθέτουν το ίδιο πλήθος ακμών.

(β) Από κάθε κορυφή του διέρχεται το ίδιο πλήθος εδρών (και, κατά συνέπειαν, και το ίδιο πλήθος ακμών). [Στον ορισμό αυτό δεν υπεισέρχεται βεβαίως καμία έννοια σχετιζόμενη με τη μετρική.]

(3.4) Θεώρημα. *Τα τοπολογικώς κανονικά πολύεδρα με πλήθος κορυφών K, με πλήθος εδρών E και με πλήθος ακμών A, υποχρεούνται να ανήκουν στην κλάση των τοπολογικών πολυέδρων με τα εξής K, A και E:*

K	4	6	8	12	20
A	6	12	12	30	30
E	4	8	6	20	12

Απόδειξη. Έστω P ένα τοπολογικώς κανονικό πολύεδρο. Υποθέτουμε ότι n είναι ο αριθμός των ακμών καθεμιάς έδρας τού P και ότι m είναι το πλήθος των εδρών τού P που διέρχονται από καθεμιά κορυφή του. Επειδή κάθε ακμή περιέχεται σε ακριβώς δύο έδρες, έχουμε

$$nE = 2A \tag{8}$$

Εξάλλου, αφού κάθε ακμή περιέχει ακριβώς δύο κορυφές, ισχύει και η ισότητα

$$mK = 2A \tag{9}$$

Επομένως, οι (7), (8) και (9) μάς δίνουν τη σχέση

$$2 = K - A + E = \frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = A\left(\frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n}\right) \Longrightarrow \frac{1}{A} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \tag{10}$$

Στη συνέχεια θα προβούμε σε διαχωρισμό περιπτώσεων, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις προφανείς περιοριστικές συνθήκες

$$A \geq 3, \quad n \geq 3, \quad m \geq 3.$$

Πρώτη περίπτωση: $n = 3$ (τα πολύγωνα είναι τρίγωνα).

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{A} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{m} - \frac{1}{6} > 0 \Longrightarrow \frac{2}{3} > \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Longrightarrow \frac{3}{2} < m < 6.$$

Επομένως, $m \in \{3, 4, 5\}$, οπότε βάσει τής (10) παίρνουμε

$$(A, n, m) \in \{(6, 3, 3), (12, 3, 4), (30, 3, 5)\} \Rightarrow (K, A, E) \in \{(4, 6, 4), (6, 12, 8), (12, 30, 20)\}.$$

Δεύτερη περίπτωση: $n = 4$ (τα πολύγωνα είναι τετράγωνα).

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{A} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{m} - \frac{1}{4} > 0 \Longrightarrow \frac{3}{4} > \frac{1}{m} > \frac{1}{4} \Longrightarrow \frac{4}{3} < m < 4,$$

που σημαίνει κατ' ανάγκην, ότι $m = 3$ και $(K, A, E) = (8, 12, 6)$.

Τρίτη περίπτωση: $n = 5$ (τα πολύγωνα είναι πεντάγωνα).

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{A} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{m} - \frac{3}{10} > 0 \Longrightarrow \frac{4}{5} > \frac{1}{m} > \frac{3}{10} \Longrightarrow \frac{5}{4} < m < \frac{10}{3},$$

που σημαίνει κατ' ανάγκην, ότι $m = 3$ και $(K, A, E) = (20, 30, 12)$.

Τέταρτη περίπτωση: $n \geq 6$. Η ανισοϊσότητα αυτή είναι αδύνατη, διότι

$$0 < \frac{1}{A} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{m} - \frac{1}{3} \Longrightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{3} \Longrightarrow m < 3,$$

πράγμα που δεν μπορεί να συμβεί. $\square$