

ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ**ΘΕΜΑ 1ο** Έστω ότι $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:(i) Εάν η $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

(ii) Εάν η $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια τεμαχιδόν C^1 -καμπύλη και εάν η $f : [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \sup \{|f(z)| : z \in [\gamma]\},$$

όπου $L(\gamma)$ το μήκος της γ .**ΘΕΜΑ 2ο** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα του *Goursat*.**ΘΕΜΑ 3ο** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα του *Rouché*.**ΘΕΜΑ 4ο** Να διατυπωθεί το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας και να δοθεί (τουλάχιστον) μία απόδειξη αυτού.**ΘΕΜΑ 5ο** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα των *Casorati* και *Weierstrass*.**ΘΕΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ****ΘΕΜΑ 6ο** Να προσδιορισθεί η ακτίνα συγκλίσεως των κατωτέρω δυναμοσειρών:

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}.$$

ΘΕΜΑ 7ο (i) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2} dz, \quad \text{όπου } \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(ii) Να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

ΘΕΜΑ 8ο Έστω $f : D(0; 1) \rightarrow \mathbb{C}$ μια ολόμορφη συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}, \quad \text{για κάθε θετικό ακέραιο } n.$$

Τι συμπέρασμα μπορεί κανείς να εξαγάγει για την f ;

ΘΕΜΑ 9ο Εάν η $f : D(0; 1) \rightarrow D(0; 1)$ είναι μια ολόμορφη συνάρτηση, να αποδειχθεί ότι $|f'(0)| \leq 1$.

ΘΕΜΑ 10ο Εάν η f είναι μια ακεραία συνάρτηση και εάν υποθεθεί ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $M, R > 0$, καθώς και ένας θετικός ακέραιος n , ούτως ώστε να ισχύει

$$|f(z)| \leq M |z|^n, \text{ για κάθε μιγαδικό αριθμό } z \text{ με } |z| > R,$$

να αποδειχθεί ότι η f είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n .

-
- Να απαντηθούν το πολύ 3 θέματα ανήκοντα σε μία εκ των δύο παρατιθέμενων κατηγοριών θεμάτων και το πολύ 2 θέματα ανήκοντα στην άλλη.
 - Κάθε ορθώς απαντηθέν θέμα θα λαμβάνει 2 μονάδες.
 - Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως οι σημειώσεις και τα βιβλία θα παραμείνουν κλειστά.
 - Εντός τού γραπτού οι εξεταζόμενοι οφείλουν να αναγράφουν ρητώς σε ποιο εκ των δοθέντων θεμάτων απαντούν.
 - Η χρήση πολύ δυσανάγνωστης γραφής ή/και μη αναγνωρίσιμων μαθηματικών συμβόλων ενδέχεται να οδηγήσει σε μείωση τού βαθμού (λόγω αδυναμίας διορθώσεως εκ μέρους τού εξεταστού).
 - Κατά τη διάρκεια τής εξετάσεως δεν επιτρέπονται συζητήσεις μεταξύ των εξεταζομένων, αντιγραφή ή αδικαιολόγητη υπέρβαση τού ορισθέντος χρόνου για την απάντηση των θεμάτων. (Κάτι τέτοιο θα είχε ως συνέπεια ειδική μονογραφή σημάνσεως τού γραπτού και συνακόλουθο μηδενισμό του.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!