Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών **Μιγαδική Ανάλυση (Μ 211)**

Εξέταση Ιουλίου 2007 **Εξεταστής: Δημήτριος Νταής**

ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο Βλ. θεώρημα 2.3.1 (από τις σημειώσεις παραδόσεων τού διδάσκοντος).

ΘΕΜΑ 2ο Βλ. θεώρημα 4.3.9.

ΘΕΜΑ 3ο Βλ. 4.4.11 και 6.4.9.

ΘΕΜΑ 4ο Βλ. θεώρημα 5.1.2.

ΘΕΜΑ 5ο Βλ. θεώρημα 5.2.4.

ΘΕΜΑ 6ο (i) Έστω $w_n := \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$. Τότε $w_{n+1} = \frac{(z+2)^n}{(n+2)^3 4^{n+1}}$. Κατά συνέπειαν, σε οποιοδήποτε σημείο εκτός τού $z = -2$ (όπου η δοθείσα σειρά προφανώς συγκλίνει), έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(z+2)}{4} \frac{(n+1)^3}{(n+2)^3} \right| = \frac{|z+2|}{4}.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει (απολύτως) όταν $\frac{|z+2|}{4} < 1$, δηλαδή όταν $|z+2| < 4$, ενώ αποκλίνει όταν $|z+2| > 4$ (βλ. κριτήριο τού λόγου 1.9.5). Σημειωτέον ότι το $z = -2$ ικανοποιεί την ανισότητα $|z+2| < 4$. Αρκεί λοιπόν να εξετασθεί η δοθείσα σειρά ως προς τη σύγκλιση στα σημεία $z \in C(-2;4)$. Επειδή (σε αυτήν την περίπτωση)

$$\left| \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} \right| = \frac{|z+2|^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} = \frac{4^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} = \frac{1}{4(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

και $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^3} \right| < \infty$ συνάγουμε ότι αυτή συγκλίνει (απολύτως και -ως εκ τούτου- και σημειακώς, βλ. 1.9.3) σε *κάθε σημείο* τού κύκλου $C(-2;4)$. Τελικό συμπέρασμα: Η δοθείσα σειρά συγκλίνει *εάν και μόνον εάν* $z \in \overline{D(-2;4)}$.

(ii) Προφανώς, $|z^3+1| \geq |z^3| - 1$ και $|e^{2z}| = e^{2\mathrm{Re}(z)} \leq e^{2|z|}$ (βλ. 1.1.15 (iv), 3.3.6 (i) και 3.3.8). Άρα για $|z| = 3$ έχουμε

$$\left| \frac{e^{2z}}{z^3+1} \right| \leq \frac{e^6}{3^3-1} = \frac{e^6}{26}.$$

Από το θεώρημα 4.2.23 λαμβάνουμε

$$\left| \int_{C(0;3)} \frac{e^{2z}}{z^3+1} dz \right| < \mathrm{L}(C(0;3)) \sup \left\{ \left| \frac{e^{2z}}{z^3+1} \right| : z \in C(0;3) \right\} \leq 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{e^6}{26} = \frac{3\pi}{13} e^6 < \frac{3\pi}{12} e^6 = \frac{\pi e^6}{4}.$$

(iii) Η συνάρτηση $f(z) := \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} = \frac{e^z}{(z-\pi i)^2 (z+\pi i)^2}$ διαθέτει ως μεμονωμένα ιδιώματα μόνον δύο πόλους (τάξεως 2), ήτοι τους $z = \pm \pi i$. Κατά την πρόταση 6.1.3 (iii),

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{\pi i}(f) &= \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left((z-\pi i)^2 f(z) \right) \Big|_{z=\pi i} = \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{(z+\pi i)^2} \right) \Big|_{z=\pi i} \\ &= \left(\frac{e^z}{(z+\pi i)^2} - \frac{2e^z}{(z+\pi i)^3} \right) \Big|_{z=\pi i} = \frac{\pi + i}{4\pi^3}. \end{aligned}$$

Κατ' αναλογίαν,

$$\mathrm{Res}_{-\pi i}(f) = \frac{\pi - i}{4\pi^3}.$$

Επειδή

$$\operatorname{ind}_{C(0;4)}(\pi i) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0;4)} \frac{1}{\zeta - \pi i} d\zeta = 1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0;4)} \frac{1}{\zeta + \pi i} d\zeta = \operatorname{ind}_{C(0;4)}(-\pi i)$$

(βλ. 4.2.16 και 6.2.1), δυνάμει τού θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων 6.4.1 λαμβάνουμε

$$\int\limits_{C(0;4)} \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} dz = 2\pi i (\mathrm{Res}_{\pi i}(f) + \mathrm{Res}_{-\pi i}(f)) = 2\pi i \left(\frac{\pi + i}{4\pi^3} + \frac{\pi - i}{4\pi^3} \right) = \frac{i}{\pi}.$$

(iv) Εάν $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε (πρβλ. 3.3.1, 3.3.2):

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\frac{1}{z})^n \Longrightarrow e^{\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\frac{2}{z})^n \\ &\Longrightarrow \quad z^k e^{\frac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{k-n} = z^k + 2z^{k-1} + \frac{2^2}{2!} z^{k-2} + \cdots + \frac{2^k}{k!} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^{k-n}, \end{aligned}$$

οπότε η συνάρτηση $z \longmapsto z^k e^{\frac{2}{z}}$ έχει το 0 ως το μόνο (μεμονωμένο) ιδίωμά της. Μάλιστα, κατά το θεώρημα 5.3.11 (iii), αυτό είναι *ουσιώδες ιδίωμα*. Επειδή

$$\operatorname{ind}_{C(0;1)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(\mathbf{0};1)} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 1$$

(βλ. 4.2.16 και 6.2.1), δυνάμει τού θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων 6.4.1 λαμβάνουμε

$$\int\limits_{C(0;1)} z^k e^{\frac{2}{z}} dz = 2\pi i (\mathrm{Res}_0 (z^k e^{\frac{2}{z}})) = 2\pi i \left(\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \right) = \frac{2^{k+2} \pi i}{(k+1)!}.$$

ΘΕΜΑ 7ο Έστω $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ ένα πολυώνυμο βαθμού $\deg(P(z)) = 3$ με τις θέσεις μηδενισμού του ρ_1,ρ_2,ρ_3 διαφορετικές ανά δύο και ευρισκόμενες στον κλειστό δίσκο $\overline{D(0;1)}$. Τότε το $P(z)$ θα γράφεται υπό τη μορφή $P(z) = \xi(z-\rho_1)(z-\rho_2)(z-\rho_3)$, για κάποιον $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Προφανώς,

$$\frac{1}{(z-\rho_1)(z-\rho_2)} = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \left(\frac{1}{z-\rho_1} - \frac{1}{z-\rho_2} \right)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-\rho_1)(z-\rho_2)(z-\rho_3)} &= \frac{1}{\rho_1-\rho_2} \left(\frac{1}{z-\rho_1} - \frac{1}{z-\rho_2} \right) \frac{1}{z-\rho_3} \\ &= \frac{1}{\rho_1-\rho_2} \left(\frac{1}{(z-\rho_1)(z-\rho_3)} - \frac{1}{(z-\rho_2)(z-\rho_3)} \right) \\ &= \frac{1}{\rho_1-\rho_2} \left(\frac{1}{\rho_1-\rho_3} \left(\frac{1}{z-\rho_1} - \frac{1}{z-\rho_3} \right) - \frac{1}{\rho_2-\rho_3} \left(\frac{1}{z-\rho_2} - \frac{1}{z-\rho_3} \right) \right) \\ &= \tfrac{1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)} \left(\frac{1}{z-\rho_1} - \frac{1}{z-\rho_3} \right) - \tfrac{1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)} \left(\frac{1}{z-\rho_2} - \frac{1}{z-\rho_3} \right) \end{aligned}$$

Εάν για κάθε $j \in \{1,2,3\}$ εφαρμόσουμε τον ολοκληρωτικό τύπο τού Cauchy (βλ. 4.4.1)

$$\int\limits_{C(0;r)} \frac{f(z)}{z-\rho_j} dz = f(\rho_j)$$

για τη *σταθερή συνάρτηση* $f(z) := 1, \forall z \in G$, όπου G τυχόν χωρίο τού $\mathbb{C}$ με $\overline{D(0;r)} \subset G$, $r > 1$, λαμβάνουμε

$$\int\limits_{C(0;r)} \frac{1}{z-\rho_j} dz = 2\pi i.$$

Επειδή (για $\gamma(t) := re^{it},\ \forall t \in [0, 2\pi]$)

$$\int_\gamma \frac{1}{P(z)} dz = \frac{1}{\xi} \int_\gamma \frac{1}{(z-\rho_1)(z-\rho_2)(z-\rho_3)} dz$$

$$= \frac{1}{\xi}\left(\tfrac{1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)} \int_{C(0;r)} \left(\frac{1}{z-\rho_1} - \frac{1}{z-\rho_3} \right) dz - \tfrac{1}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)} \int_{C(0;r)} \left(\frac{1}{z-\rho_2} - \frac{1}{z-\rho_3} \right) dz \right),$$

έχουμε τελικώς $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{P(z)} dz = 0.$

ΘΕΜΑ 8ο Έστω f μια ακεραία συνάρτηση με $\left|f^{(2)}(z)\right| \leq |z|^2,\ \forall z \in \mathbb{C}$. Ας υποθέσουμε ότι η f αναπτύσσεται ως δυναμοσειρά περί το 0 ως εξής: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$. Τότε

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n z^{n-1} \Longrightarrow f''(z) = f^{(2)}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\alpha_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n,$$

όπου $\beta_n := (n+2)(n+1)\alpha_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}_0$. Οι «εκτιμήσεις Cauchy» για την $f^{(2)}$ (βλ. πορίσματα 3.2.5 και 4.4.7) γράφονται ως ακολούθως:

$$|\beta_n| \leq \frac{\sup\left\{\left|f^{(2)}(z)\right| : z \in \overline{D(0;r)}\right\}}{r^n}.$$

Επειδή $\left|f^{(2)}(z)\right| \leq |z|^2$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, από την ανωτέρω ανισοϊσότητα έπεται ότι

$$|\beta_n| \leq \frac{r^2}{r^n} = r^{2-n},$$

για κάθε $r > 0$. Εάν $n > 2$, τότε $\lim_{r\to\infty} r^{2-n} = 0$. Κατά συνέπειαν,

$$\beta_n = 0,\ \forall n > 2 \Longrightarrow \alpha_{n+2} = 0,\ \forall n > 2 \Longrightarrow \alpha_n = 0,\ \forall n > 4.$$

Εάν $n = 1$, τότε

$$|\beta_1| \leq r \Longrightarrow |\beta_1| \leq \lim_{r\to 0} r = 0 \Longrightarrow \beta_1 = 0 \Longrightarrow \alpha_3 = 0.$$

Επιπροσθέτως, $\left|f^{(2)}(0)\right| \leq |0|^2 = 0 \Longrightarrow f^{(2)}(0) = 0 \Longrightarrow \alpha_2 = 0$. Άρα

$$f(z) = a + bz + cz^4,$$

όπου $a = \alpha_0, b = \alpha_1, c = \alpha_4$. Τέλος, για $n = 2$, έχουμε

$$|\beta_2| \leq 1 \Longrightarrow |4 \cdot 3 \cdot \alpha_4| \leq 1 \Longrightarrow |c| = |\alpha_4| \leq \frac{1}{12}.$$

ΘΕΜΑ 9ο Έστω $f \in \mathcal{O}(D(0;2))$. Υποθέτουμε ότι

$$f(x)^4 - 2f(x)^2x^2 + x^4 = 0,\ \forall x \in (0,1),$$

και ότι

$$\int_\gamma \frac{f(z)z^2}{z-1} dz = 1,$$

όπου $\gamma(t) := re^{it},\ \forall t \in [0, 2\pi], 1 < r < 2$. Από την πρώτη ισότητα συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει

$$(f(x)^2 - x^2)^2 = 0 \Longrightarrow f(x)^2 - x^2 = (f(x) - x)(f(x) + x) = 0,$$

οπότε για κάθε $x \in (0,1)$ είτε $f(x) = x$ είτε $f(x) = -x$.

(α) Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι ισχύει κάτι πιο ισχυρό: Είτε $f(x) = x$ για κάθε $x \in (0,1)$ είτε $f(x) = -x$ για κάθε $x \in (0,1)$. Πράγματι· εάν υπήρχαν $x_1, x_2 \in (0,1)$, $x_1 \neq x_2$, με $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = -x_2$, και υποθέταμε (δίχως βλάβη τής γενικότητας) ότι $x_1 < x_2$, τότε (από την ιδιότητα τής ενδιαμέσου τιμής, βλ. 1.7.12) θα υπήρχε κάποιο $x_0 \in (x_1, x_2)$, τετοιο ώστε να ισχύει $f(x_0) = 0$ (καθότι $0 \in (-x_2, x_1)$). Τούτο όμως θα ήταν άτοπο, διότι κατ' ανάγκην $x_0 = 0 \notin (x_1, x_2)$.

(β) Κατόπιν τούτου αποδεικνύουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει $f(x) = -x$ για κάθε $x \in (0,1)$. Πράγματι· εάν υποθέταμε ότι αυτό είναι αληθές, τότε, εφαρμόζοντας τον ολοκληρωτικό τύπο τού Cauchy (βλ. 4.4.1) για τη συνάρτηση $h : D(0;2) \longrightarrow \mathbb{C}$, $h(z) := f(z)z^2$, θα είχαμε

$$1 = \int\limits_{C(0;r)} \frac{f(z)z^2}{z-1} dz = \int\limits_{C(0;r)} \frac{h(z)}{z-1} dz = h(1) = f(1) \Longrightarrow f(1) = 1.$$

Η f, ως ολόμορφη, είναι και συνεχής (βλ. 2.2.9), οπότε θα καταλήγαμε στην ακόλουθη αντίφαση:

$$-1 = \lim_{x \to 1}(-x) = \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1.$$

(γ) Από τα (α) και (β) γνωρίζουμε ότι για τη συνάρτηση $f \in \mathcal{O}(D(0;2))$ ισχύει $f(x) = x$ για κάθε $x \in (0,1)$. Έστω $g := \mathrm{Id}_{D(0;2)}$. Τότε $g \in \mathcal{O}(D(0;2))$ και

$$(0,1) \subset Z(f-g) := \{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z)\}.$$

Αρκεί λοιπόν να αποδειχθεί ότι

$$Z(f-g)' \cap D(0;2) \neq \varnothing,$$

δηλαδή ότι το $Z(f-g)$ έχει κάποιο σημείο συσσωρεύσεως ανήκον στον ανοικτό δίσκο $D(0;2)$, διότι τότε $f(z) = g(z) = z, \forall z \in D(0;2)$, επί τη βάσει *τού θεωρήματος τής ταυτίσεως* 4.6.3. Προς τούτο θεωρούμε την ακολουθία $z_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$, $n \geq 3$. Προφανώς,

$$z_n \in (0,1) \smallsetminus \{\tfrac{1}{2}\} \subset Z(f-g) \smallsetminus \{\tfrac{1}{2}\}, \quad \forall n \geq 3,$$

και $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \frac{1}{2} \in D(0;2)$, οπότε $\frac{1}{2} \in Z(f-g)' \cap D(0;2)$ (βλ. πρόταση 1.5.9).

ΘΕΜΑ 10ο (i) Ζητείται να προσδιορισθεί το πλήθος των θέσεων μηδενισμού (συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων τους) τής συναρτήσεως $f(z) = 3z^4 - 7z + 2$ εντός τής δακτυλιακής περιοχής

$$D(0;1,\frac{3}{2}) = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \frac{3}{2} \right\}.$$

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = \frac{3}{2}$ έχουμε

$$|-7z + 2| \leq 7|z| + 2 = \frac{21}{2} + 2 = \frac{25}{2} < 3\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \left|3z^4\right|.$$

Κατά το θεώρημα 6.4.8 τού Rouché,

$$\sharp\left(Z(f)|_{D(0;\frac{3}{2})} \right) = \sharp\left(Z(3z^4)|_{D(0;\frac{3}{2})} \right) = 4.$$

Εξάλλου, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| = 1$ έχουμε

$$\left|3z^4 + 2\right| \leq 3|z|^4 + 2 = 3 + 2 = 5 < 7 = |-7z|.$$

Κατά το θεώρημα 6.4.8 τού Rouché,

$$\sharp\left(Z(f)|_{D(0;1)} \right) = \sharp\left(Z(-7z)|_{D(0;1)} \right) = 1.$$

Επιπροσθέτως, από την ανωτέρω ανοσότητα συμπεραίνουμε ότι η $f(z)$ δεν διαθέτει καμία θέση μηδενισμού ανήκουσα στον κύκλο $C(0;1)$. Άρα τελικώς

$$\sharp\left(Z(f)|_{D(0;1,\frac{3}{2})}\right) = 4 - 1 = 3.$$

(ii) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geq 2$ έχουμε

$$|P(z)| = \left|z^3(z^4-5)+7\right| \geq |z|^3\left|z^4-5\right| - 7 \geq |z|^3\left(|z|^4-5\right) - 7 \geq 8\cdot(16-5) - 7 = 81 > 0,$$

οπότε όλες οι θέσεις μηδενισμού τού πολυωνύμου $P(z) = z^7 - 5z^3 + 7$ ανήκουν στον ανοικτό δίσκο $D(0;2)$ και -ως εκ τούτου- $k \leq 2$. Έστω $f(z) := -5z^3 + 7$ και $g(z) := z^7$. Για κάθε $z \in C(0;1)$ έχουμε

$$|g(z)| = \left|z^7\right| = |z|^7 = 1 < 7 - 5 = 7 - 5\,|z|^3 \leq \left|7 - 5z^3\right| = \left|-5z^3 + 7\right| = |f(z)|\,.$$

Κατά το θεώρημα 6.4.8 τού Rouché,

$$\sharp\left(Z(P)|_{D(0;1)}\right) = \sharp\left(Z(f+g)|_{D(0;1)}\right) = \sharp\left(Z(f)|_{D(0;1)}\right) = 3 < 7.$$

Άρα τελικώς $k = 2$.
