ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ:
8ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να προσδιορισθούν όλες οι ακέραιες συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει η ισότητα

$$f(x) = e^x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Έστω G ένα χωρίο τού $\mathbb{C}$. Εάν $f \in \mathcal{O}(G)$ και υπάρχει $a \in G$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$|f(a)| \leq |f(z)|\,, \ \ \forall z \in G,$$

να αποδειχθεί ότι είτε $f(a) = 0$ είτε η f είναι σταθερή.

3. Καθεμιά των ακολούθων συναρτήσεων έχει μεμονωμένο ιδίωμα στο $z = 0$.
(i) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$,
(ii) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$,
(iii) $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z}$,
(iv) $f(z) = e^{z^{-1}}$,
(v) $f(z) = \dfrac{\log(z+1)}{z^2}$,
(vi) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(z-1)}$.
Να εξετασθεί το κατά πόσον αυτό το σημείο είναι πόλος, αιρόμενο ή ουσιώδες ιδίωμα.

4. Έστω $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ μια συνάρτηση. Εάν $f \in \mathcal{O}(A \smallsetminus S)$, όπου το S αποτελείται αποκλειστικώς από πόλους, να αποδειχθεί ότι το S δεν διαθέτει κανένα σημείο συσσωρεύσεως εντός τού A.

5. Έστω f μια συνάρτηση έχουσα ουσιώδες ιδίωμα σε κάποιο σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$. Εάν $c \in \mathbb{C}$ και $\varepsilon > 0$, να αποδειχθεί ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει κάποιο $a \in D(c;\varepsilon)$, ούτως ώστε η εξίσωση $f(z) = a$ να διαθέτει άπειρες λύσεις εντός τού $D(z_0;\delta)$.

6. Έστω f μια ακεραία μη σταθερή συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι για κάθε πραγματικό $c > 0$ ισχύει η ισότητα

$$\overline{\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < c\}} = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq c\}\,.$$

7. Εάν $R > 0$, $f \in \mathcal{O}(D(0;R))$ μη σταθερή και $0 \leq r < R$, να αποδειχθεί ότι η

$$r \longmapsto M(r) := \max\{\operatorname{Re} f(z) : z \in C(0;R)\}$$

είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

8. Έστω ότι το $G \neq \varnothing$ είναι ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{C}$ και ότι $f \in \mathcal{O}(G)$. Εάν υποτεθεί ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $M > 0$, τέτοιος ώστε για κάθε $w \in \partial G$ να ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \sup |f(z_n)| \leq M$$

για κάθε ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων τού G που συγκλίνει προς το w, να αποδειχθεί ότι

$$|f(z)| \leq M, \ \ \forall z \in G.$$

9. Έστω f μια ακεραία συνάρτηση. Εάν

$$S_n(f,\zeta)(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\zeta)}{k!}(z-\zeta)^k$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $\zeta \in \mathbb{C}$, να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\zeta\in L} \sup_{z\in K} |S_n(f,\zeta)(z) - f(z)| = 0$$

για οιοδήποτε ζεύγος συμπαγών υποσυνόλων L, K τού $\mathbb{C}$.

10. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$ που περιέχει το 0 και έστω $R > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\overline{D(0;R)} \subset U$. Εάν $f \in \mathcal{O}(U)$ και

$$|f(z)| \leq M, \;\; \forall z \in \overline{D(0;R)}, \qquad f(0) \neq 0,$$

να αποδειχθεί ότι

$$\sharp Z\left(f|_{D(0;\frac{R}{3})} \right) \leq \frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{M}{|f(0)|} \right).$$

[*Υπόδειξη*: Εάν οι $z_1, \ldots, z_n$ είναι οι θέσεις μηδενισμού τής f στον ανοικτό δίσκο $D(0;\frac{R}{3})$, να θεωρηθεί η συνάρτηση

$$g(z) := f(z) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{-1},$$

και να χρησιμοποιηθεί το ότι $g(0) = f(0)$.]