# ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ:

# 7ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

**1**. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}dz$, όπου $\gamma(t) = e^{it},\ \ \forall t \in [0, 2\pi]$.

(ii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz$, όπου $\gamma(t) = a + re^{it},\ \ \forall t \in [0, 2\pi]$.

(iii) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}dz$, όπου $n \in \mathbb{N}$ και $\gamma(t) = e^{it},\ \ \forall t \in [0, 2\pi]$.

(iv) $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}dz$, όπου $\gamma(t) = 2e^{it},\ \ \forall t \in [0, 2\pi]$.

**2**. Έστω $I(r) := \displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}dz$, όπου $\gamma(t) = re^{it},\ \ \forall t \in [0, \pi]$, και $r$ θετικός πραγματικός αριθμός. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{r \longrightarrow +\infty} I(r) = 0.$$

**3**. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

**4**. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

**5**. Να αποδειχθεί ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $a > 1$ ισχύει

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a+\cos\theta}d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

**6**. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}dx = 0.$$

**7**. Να υπολογισθούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$,

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{(a+\cos\theta)^2}d\theta$, όπου $a$ πραγματικός αριθμός $> 1$.

**8**. Έστω $R > 0$ και $f \in \mathcal{O}(\overline{D(0;R)})$ με $f(0) = 0,\ f'(0) \neq 0$ και $f(z) \neq 0$ για κάθε $z$, τέτοιο ώστε $0 < |z| \leq R$. Εάν

$$g : D(0;\rho) \longrightarrow \mathbb{C},\ \ g(w) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0;R)} \frac{zf'(z)}{f(z) - w} dz,$$

όπου $\rho := \min\{|f(z)| : z \in C(0;R)\} > 0$, να αποδειχθεί ότι $g \in \mathcal{O}(D(0;\rho))$.

**9**. Έστω $f \in \mathcal{O}(\overline{D(0;1)})$ με $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in C(0;1)$. Να προσδιορισθεί το πλήθος των λύσεων τής εξισώσεως $f(z) - z^n = 0$ (συνυπολογίζοντας τις πολλαπλότητες των θέσεων μηδενισμού) όταν $n$ είναι οιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός.

**10**. Εάν $0 < r < R$ και $A := \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$, να αποδειχθεί η ύπαρξη ενός $\varepsilon > 0$, τέτοιου ώστε για κάθε πολυώνυμο $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ να ισχύει

$$\sup\left\{\left|P(z) - \frac{1}{z}\right| : z \in A\right\} \geq \varepsilon.$$

[*Σημείωση*: Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $A \ni z \longmapsto \frac{1}{z}$ δεν μπορεί να αποτελεί ομοιόμορφο όριο πολυωνύμων οριζομένων επί τού $A$.]