ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ:
6ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εάν η $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι μια ακεραία συνάρτηση και $|f'(z)| \leq |z|$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$, να αποδειχθεί ότι $f(z) = a + bz^2$, για κάποιους $a, b \in \mathbb{C}$ με $|b| \leq \frac{1}{2}$.

2. Να αποδειχθεί ότι κάθε ακεραία συνάρτηση $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$f(z) = f(z+1) = f(z+i) = 0, \;\; \forall z \in \mathbb{C},$$

είναι σταθερή.

3. Να αποδειχθεί ότι κάθε ακεραία συνάρτηση $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, για την οποία ισχύει είτε $|f(z)| \leq 1$ είτε $|f'(z)| \leq 1, \; \forall z \in \mathbb{C}$, είναι ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού.

4. Να αποδειχθεί ότι για κάθε αναλυτική συνάρτηση $f : \overline{D(0;1)} \longrightarrow \mathbb{C}$ υπάρχει κάποιος $n \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε να ισχύει $f(\frac{1}{n}) \neq \frac{1}{n+1}$.

5. Εάν η δυναμοσειρά $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ έχει ακτίνα συγκλίσεως R, να αποδειχθεί η ύπαρξη ενός $z_0 \in C(0; R)$, ούτως ώστε η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ να μην συγκλίνει.

6. Υποθέτοντας ότι $f, g \in \mathcal{O}(U)$, όπου U ένα ανοικτό υπερσύνολο ενός συμπαγούς χωρίου G, να αποδειχθεί η ισότητα

$$\max\{|f(z)| + |g(z)| : z \in G\} = \max\{|f(z)| + |g(z)| : z \in \partial G\}.$$

[*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση $f(z)e^{i\alpha} + g(z)e^{i\beta}$ για κατάλληλα $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.]

7. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$. Εάν $f, g \in \mathcal{O}(U)$ και $f(z)g(z) = 0, \; \forall z \in U$, να αποδειχθεί ότι είτε $f(z) = 0, \; \forall z \in U$, είτε $g(z) = 0, \; \forall z \in U$.

8. Εάν $f \in \mathcal{O}(D(0;1))$ και η f είναι συνεχής στο $\overline{D(0;1)}$, και -ταυτοχρόνως- υπάρχει τόξο $I \subset C(0;1)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $f|_I \equiv 0$, να αποδειχθεί ότι $f|_{\overline{D(0;1)}} \equiv 0$.

9. Να προσδιορισθεί το ανάπτυγμα σε σειρά Laurent

(i) τής συναρτήσεως $\dfrac{1}{z^4 + z^2}$ περί το 0, και

(ii) τής συναρτήσεως $\dfrac{1}{z^2 - 4}$ περί το 2.

10. Εάν η f είναι μια αναλυτική συνάρτηση με πεδίο ορισμού της το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ και ισχύει η ισότητα $f(-z) = -f(z), \; \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, να αποδειχθεί ότι όλοι οι άρτιοι όροι τού αναπτύγματος τής f ως σειράς Laurent περί το 0 είναι ίσοι με το 0.

11. Εάν η f είναι μια αναλυτική συνάρτηση σε μια ανοικτή γειτονιά D ενός σημείου $z_0 \in \mathbb{C}$ εξαιρουμένων των όρων μιας ακολουθίας $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z_0$, και εάν οι εν λόγω όροι αποτελούν πόλους τής f, να αποδειχθεί ότι η εικόνα $f(D)$ τής D μέσω τής f είναι πυκνή στο μιγαδικό επίπεδο (δηλαδή $\overline{f(D)} = \mathbb{C}$). [*Υπόδειξη*: Να υποτεθεί -όπως και στην απόδειξη τού θεωρήματος των Casorati και Weierstrass- ότι $|f(z) - w| \geq \varepsilon$ και να θεωρηθεί η συνάρτηση $g(z) := \frac{1}{f(z) - w}$.]

12. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα $f(\mathbb{C})$ τού μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$ μέσω μιας μη σταθερής ακεραίας συναρτήσεως f είναι πυκνή στο $\mathbb{C}$. [*Υπόδειξη*: Εάν η f δεν είναι πολυώνυμο, να θεωρηθεί η συνάρτηση $f(\frac{1}{z})$.]

13. Να υπολογισθούν βάσει τού θεωρήματος ολοκληρωτικών υπολοίπων τα κάτωθι ολοκληρώματα:

$$\int\limits_{C(0;2)} \frac{1}{(z-4)(z^3-1)} dz, \quad \int\limits_{C(0;1)} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz.$$

14. Να υπολογισθούν τα εξής ολοκληρώματα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2} dx, \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+9\right)} dx.$$

15. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int\limits_{\mathcal{E}} \frac{e^2}{\left(z^2+2\right)^3} dz,$$

όπου $\mathcal{E}$ είναι η ευθεία $z(t) := 1 + it,\ t \in \mathbb{R}$.