ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ:
5ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Να υπολογισθεί η ακτίνα συγκλίσεως των ακολούθων δυναμοσειρών:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$,

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, z^n$,

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n\, z^n$.

2. Έστω $f : D(0;1) \longrightarrow \mathbb{C}$ μια ολόμορφη συνάρτηση με $\sup_{z \in D(0;1)} |f(z)| \leq M$, όπου M κάποιος θετικός πραγματικός αριθμός. Να αποδειχθεί ότι

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq M, \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

3. Να δοθεί παράδειγμα δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ με ακτίνα συγκλίσεως 1, για την οποία να υπάρχουν σημεία $z_1, z_2 \in C(0;1)$, ούτως ώστε η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_1^n$ να συγκλίνει, ενώ η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_2^n$ να αποκλίνει.

4. Να αναπτυχθεί ως δυναμοσειρά περί το 0 καθεμιά των εξής συναρτήσεων:

(i) $\frac{1}{1-z^2}$,

(ii) $\frac{z}{1-z^2}$,

(iii) $\frac{\sin z}{z}$.

5. (i) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $z \in \mathbb{C} : |z+1| < 1$ ισχύει η ισότητα

$$\frac{1}{z} = -\sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n$$

κάνοντας χρήση τής ταυτότητας

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+1)-1}.$$

(ii) Με τη βοήθεια τής ανωτέρω ταυτότητας να αποδειχθεί ότι για κάθε $z \in \mathbb{C} : |z+1| < 1$ ισχύει η ισότητα

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,(z+1)^n\,.$$

6. Να αποδειχθεί ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι ακέραιες:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^2}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{((2n+1)!)^{\frac{1}{2}}}$.

7. Εάν η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία ακεραίων συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει ομοιομόρφως στα συμπαγή υποσύνολα τού $\mathbb{C}$ προς μια ακεραία συνάρτηση f, να αποδειχθεί ότι η f_n' συγκλίνει ομοιομόρφως στα συμπαγή σύνολα τού $\mathbb{C}$ προς την f'.

8. Εάν $R > 0$, $f \in \mathcal{O}(D(0;R))$ με την f συνεχή στον κλειστό δίσκο $\overline{D(0;R)}$ και εάν υποτεθεί ότι $f(0) = 0$, να αποδειχθεί ότι

$$\left|f(re^{i\theta})\right| \leq \frac{rM}{R}, \quad \forall r \in \mathbb{R} : 0 \leq r \leq R,$$

όπου $M := \max\{|f(z)| : z \in C(0;R)\}$.

9. Εάν οι f, g είναι δυο ακέραιες συναρτήσεις και

$$|f(z)| \leq |g(z)|\,, \;\; \forall z \in \mathbb{C},$$

να αποδειχθεί ότι $f(z) = cg(z)$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και για κάποιο $c \in \mathbb{C}$.

10. Έστω f μια ακεραία συνάρτηση. Υποθέτοντας ότι

$$|f(z)| \leq A + B\,|z|^k\,, \; \forall z \in \mathbb{C},$$

όπου A, B, k θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι η f είναι ένα πολυώνυμο.