ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ:
3ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εάν $k \in \mathbb{N}$ και $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$, να αποδειχθεί ότι το σύνολο

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_k z_k}{z_1 + z_2 + \cdots + z_k}\ ,\ \ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j > 0 \right\}$$

είναι κυρτό.

2. Εάν $z_0 \in \mathbb{C}$ και οι r_1, r_2 είναι δυο θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $r_2 > r_1$, να αποδειχθεί ότι η δακτυλιακή περιοχή

$$D(z_0; r_1, r_2) := \{\, z \in \mathbb{C} |\, r_1 < |z - z_0| < r_2 \}$$

περί το z_0 είναι ένα χωρίο.

3. Εάν $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{0}\}$, να αποδειχθεί η ασυνέχεια τής συναρτήσεως $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(z) := \begin{cases} z^2, & \text{όταν } z \neq z_0, \\ 0, & \text{όταν } z = z_0, \end{cases}$$

στο σημείο z_0.

4. Να εξετασθούν ως προς τη συνέχεια οι ακόλουθες συναρτήσεις στο σημείο $z_0 = \mathbf{0}$:

(i) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(z) := \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}, & \text{όταν } z \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \text{όταν } z = \mathbf{0}, \end{cases}$$

(ii) $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(z) := \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}(z^2)^2}{|z^2|}, & \text{όταν } z \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \text{όταν } z = \mathbf{0}, \end{cases}$$

5. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(z) := \begin{cases} 0, & \text{όταν } |z| \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{p}{q}, & \text{όταν } |z| = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ \ p, q \in \mathbb{N},\ \ \text{μκδ}(p, q) = 1, \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $\{\mathbf{0}\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ και ασυνεχής στο συμπλήρωμά του.

6. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f : D(\mathbf{0}; 1) \longrightarrow \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(z) := \frac{1}{1 - z}$$

είναι συνεχής, αλλά δεν ομοιομόρφως συνεχής στον ανοικτό δίσκο $D(\mathbf{0}; 1)$.

7. Να αποδειχθεί ότι οι εξής σειρές συγκλίνουν:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n n$, (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

8. Να αποδειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ είναι συγκλίνουσα, αλλά όχι και απολύτως συγκλίνουσα.

9. Ένας άπειρος πίνακας $(w_{\mu\,\nu})_{\mu,\nu\in\mathbb{N}_0}$ μιγαδικών αριθμών ονομάζεται *πίνακας Toeplitz* όταν πληρούνται οι εξής συνθήκες:

α) Υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $M > 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |w_{\mu\,\nu}| \leq M, \quad \forall \mu \geq 0.$$

β) $\lim_{\mu\to\infty} w_{\mu\,\nu} = 0$ για όλους τους ακεραίους $\nu \geq 0$,

γ) Το όριο των αθροισμάτων στηλών ισούται με

$$\lim_{\mu\to\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\mu\,\nu} \right) = 1.$$

Εάν ο $(w_{\mu\,\nu})_{\mu,\nu\in\mathbb{N}_0}$ είναι ένας πίνακας Toeplitz, να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\zeta_n \in \mathbb{C}$, υπάρχουν όλα τα όρια

$$z_\mu := \sum_{\nu=0}^{\infty} w_{\mu\,\nu}\,\zeta_\nu, \quad \forall \mu \geq 0.$$

(ii) Η ακολουθία $(z_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}_0}$ είναι συγκλίνουσα και

$$\lim_{\mu\to\infty} z_\mu = \lim_{\nu\to\infty} \zeta_\nu.$$

10. Να αποδειχθεί μέσω τού κριτηρίου τού Weierstrass ότι οι εξής σειρές συγκλίνουν ομοιομόρφως: (i) Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$ στον $\overline{D(\mathbf{0};1)}$ και (ii) η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+z^2}$ στη δακτυλιακή περιοχή $D(\mathbf{0};1,2)$.