# ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ:

# 2ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

**1.** Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

(i) Το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ είναι ένα ανοικτό, μη κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$.

(ii) Το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq 1\}$ είναι ένα κλειστό, μη ανοικτό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$.

(iii) Το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cup \{i\}$ δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$.

**2.** Εάν $A := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z-3| < 1\}$, να αποδειχθεί ότι αμφότερα τα σύνολα $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ και $\{z \in \mathbb{C} : |z-3| < 1\}$ είναι *και* ανοικτά *και* κλειστά *σχετικώς προς το* $A$.

**3.** Εάν $A \subseteq \mathbb{C}$, να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\overline{\mathbb{C} \setminus A} = \mathbb{C} \setminus A^\circ$,

(ii) $(\mathbb{C} \setminus A)^\circ = \mathbb{C} \setminus \overline{A}$,

(iii) $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$, και

(iv) τα τρία σύνολα $A^\circ$, $\partial A$ και $(\mathbb{C} \setminus A)^\circ$ είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο, και

$$A^\circ \cup \partial A \cup (\mathbb{C} \setminus A)^\circ = \mathbb{C}.$$

**4.** Εάν $A, B \subseteq \mathbb{C}$, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Εάν $A \subseteq B$, τότε $A^\circ \subseteq B^\circ$ και $\overline{A} \subseteq \overline{B}$,

(ii) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$, $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$, και

(iii) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

**5.** Εάν $A, B \subseteq \mathbb{C}$, να αποδειχθούν τα εξής:

(i) Εάν $A \subseteq B$, τότε $A' \subseteq B'$,

(ii) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$, και

(iii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

**6.** Έστω $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z \in \mathbb{C}$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n \to \infty} \overline{z_n} = \overline{z}.$$

**7.** Να προσδιορισθεί το όριο τής ακολουθίας $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου

$$z_n := \frac{\sqrt{n} + i\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} - i\sqrt{n+2}}.$$

**8.** Να προσδιορισθεί το όριο τής ακολουθίας $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, όπου

$$z_n := 1 + \sum_{j=1}^{n} \left[ r^j \left( \cos(j\theta) + i \sin(j\theta) \right) \right], \quad r \in (0,1),\ n \in \mathbb{N}.$$

**9.** Έστω $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών, για την οποία ισχύει

$$z_n = az_{n-1} + \frac{b}{z_{n-1}},$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ με $a + b = 1$. Να αποδειχθεί ότι η $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει όταν $\mathrm{Re}(z_n) = 0$, ενώ όταν συγκλίνει, τότε

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \begin{cases} 1, & \text{όταν } \mathrm{Re}(z_n) > 0, \\ -1, & \text{όταν } \mathrm{Re}(z_n) < 0. \end{cases}$$

**10.** Έστω $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}$ και έστω $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών, για την οποία ισχύει $|w_n| > 0$,

$$\frac{|w_1 + w_2 + \cdots + w_n|}{|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|} > k, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

όπου $k \in \mathbb{R}, \;\; k > 0$, και $\lim\limits_{n\to\infty}(|w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|) = +\infty$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{w_1z_1 + w_2z_2 + \cdots + w_nz_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}\right) = z.$$