ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ:

1ος ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Εάν $w = a + bi \in \mathbb{C}$, να επιλυθεί η εξίσωση $z^2 = w$. [*Διευκρίνιση*: Ζητείται προσδιορισμός των λύσεών της συναρτήσει των πραγματικών αριθμών a και b.]

2. Να προσδιορισθούν οι λύσεις τής *γενικής δευτεροβαθμίου εξισώσεως* (με μιγαδικούς συντελεστές): $az^2 + bz + c = 0 \quad (a \in \mathbb{C}\smallsetminus\{0\},\ b, c \in \mathbb{C})$.

3. (i) Να λυθεί εντός τού $\mathbb{C}$ η εξίσωση $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = 1$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Να λυθεί εντός τού $\mathbb{C}$ η εξίσωση $\left(1 + \sqrt{1 - z^2}\right)^n - \left(1 - \sqrt{1 - z^2}\right)^n = 0$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

4. Να αποδειχθούν οι ακόλουθες *ταυτότητες* (στις οποίες υπεισέρχονται μιγαδικοί αριθμοί):

(i) Άθροισμα όρων *γεωμετρικής προόδου*:

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}, \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall z \in \mathbb{C}\smallsetminus\{1\}).$$

(ii) Χρήσιμη γενίκευση τής (i):

$$\frac{z^n - w^n}{z - w} = z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1}, \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \wedge (\forall z, w \in \mathbb{C} : \ z \neq w\}).$$

(iii) Άθροισμα συνημιτόνων *διαδοχικών πολλαπλασίων* ενός $\theta \in \mathbb{C}\smallsetminus\{\, 2m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$:

$$\sum_{j=0}^{n} \cos(j\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta]}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(iv) Άθροισμα ημιτόνων *διαδοχικών πολλαπλασίων* ενός $\theta \in \mathbb{C}\smallsetminus\{\, 2m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \sin(j\theta) = \frac{\sin[(n+1)\frac{\theta}{2}]\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos(\frac{\theta}{2}) - \cos[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta]}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

5. Εάν τα $\{z_1, \ldots, z_n\}, \{w_1, \ldots, w_n\}$ είναι δυο σύνολα n μιγαδικών αριθμών (το καθένα), όπου $n \geq 1$, να αποδειχθεί η λεγόμενη *ταυτότητα τού Lagrange*:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} |z_j\overline{w}_k - z_k\overline{w}_j|^2 .$$

Εξ αυτής έπεται (προφανώς) η λεγομένη *ανισότητα των Cauchy και Schwarz*:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k w_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right).$$

6. Εστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $P(z) = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j \in \mathbb{C}[z]$ ένα (μη σταθερό) πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές και με το 1 ως συντελεστή τού μεγιστοβαθμίου όρου του. Εάν ο w είναι ένας μιγαδικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $P(w) = 0$, να αποδειχθεί ότι

$$|w| < 1 + \left(\sum_{j=0}^{n-1} |c_j|\right).$$

7. Να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία των ακολούθων συνόλων τού μιγαδικού επιπέδου:

(i) $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = |z-b|\}$, όπου $a, b \in \mathbb{C}$ και $a \neq b$,

(ii) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \mathrm{Re}(iz) \leq 1\}$,

(iii) $\{z \in \mathbb{C} : |z| + \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$.

8. *Εξίσωση κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο.* Να γραφεί αναλυτικώς η εξίσωση που ορίζει κύκλο κέντρου $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνας $r > 0$.

9. Δοθέντων δύο σημείων $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$, και ενός πραγματικού θετικού αριθμού ρ, να αποδειχθεί (κάνοντας χρήση τής ασκήσεως **8**) ότι ο γεωμετρικός τόπος

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| = \rho\, |z - z_2|\}, \quad \rho \neq 1,$$

είναι ένας κύκλος. (Ο εν λόγω κύκλος ονομάζεται *Απολλώνιος κύκλος* με λόγο $\rho = \frac{\rho}{1}$.) Εν συνεχεία, να προσδιορισθούν το κέντρο και η ακτίνα αυτού συναρτήσει των z_1, z_2 και ρ.

10. Να αποδειχθεί ότι ένα τρίγωνο κείμενο επί τού μιγαδικού επιπέδου και έχον τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 ως κορυφές του είναι *ισόπλευρο* εάν και μόνον εάν ισχύει η ισότητα

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$