15/12/2006

5ο φυλλάδιο ασκήσεων

$\boxed{2}$ $f: D(0,1) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

$$\left(\begin{array}{l} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \\ \sup_{|z| \le r} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - f(z) \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \\ 0 < r < 1 \end{array} \right)$$

Αν $\sup_{z \in D} |f(z)| \le M$ τότε $|a_n| \le M$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

Λύση

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n!}{2\pi i \cdot n!} \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{(z-0)^{n+1}} dz$$

Για τυχόν $0 < r < 1$

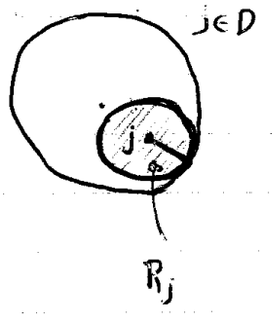
$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{\sup_{z \in D} |f(z)|}{r^{n+1}} = \frac{\sup_{z \in D} |f(z)|}{r^n}$$

$$\boxed{|a_n| \le \frac{\sup_{|z|<1} |f(z)|}{r^n}} \quad \forall 0 < r < 1$$

Αφήνοντας το $r \to 1$, λαμβάνουμε

$$|a_n| \le \sup_{|z|<1} |f(z)| \le M, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Παρατήρηση:



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(j)}{n!}}_{a_n(j)} (z-j)^n$$

$$R_j = \operatorname{dist}(1, C(0,1))$$

$$a_n(j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(j,r)} \frac{f(z)}{(z-j)^{n+1}} dj$$

άρα $|a_n(j)| \le \dfrac{\sup\limits_{z\in D(j,r)} |f(z)|}{r^n} \le \dfrac{M}{r^n}$

$0 < r < R_j$

Αφήνοντας το $r \to R_j$

Έχουμε: $\boxed{|a_n(j)| \le \dfrac{M}{R_j^n}}$ $\forall n = 1, 2, \dots$

$\boxed{3}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, με ακτίνα συγκλίσεως 1

$|z_1| = |z_2| = 1$ (Βρείτε z_1, z_2)

Δείξτε: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_1^n$ συγκλίνει

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_2^n$ αποκλίνει

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \forall |z| < 1$$

$\underline{c_n = 1}$

Για $z_2 = 1$

$$\sum_{k=1}^{n} z_2^k = \sum_{k=1}^{n} 1 \longrightarrow +\infty.$$

$\boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n+1}}$ με ακτίνα συγκλίσεως 1

$z_1 = 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$ αποκλίνει

$z_2 = -1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ συγκλίνει

$\boxed{1}$ (i) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}}$

$a_n = \frac{1}{n}$

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$

$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n}} = 1$

(ii) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n}$

$\sqrt[n]{n!} \to +\infty$

$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n!}} = 0$

(iii) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n}$

$\sqrt[n]{n^2} \to 1$

$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n^2}} = 1$

$\boxed{7}$ $f_n \to f$ ομοιόμορφα για συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{C}$.
Δείξτε: $f_n' \to f'$ $\left(f_n, f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\right)$

<u>Απόδειξη:</u>
Έστω $K \subset \mathbb{C}$ συμπαγές. Τότε $K \subset \overline{D(0,R)}$ για R μεγάλο.
Πρέπει να δείξουμε ότι: $\sup_{z \in K} |f_n'(z) - f'(z)| \to 0$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\sup_{z \in D(0,R)} |f_n'(z) - f'(z)| \to 0$.

Έστω $z \in \overline{D(0,R)}$

$|f_n'(z) - f'(z)| = |(f_n - f)'(z)| \leq \frac{\sup_{|w-z| \leq r} |f_n(w) - f(w)|}{r} \leq$

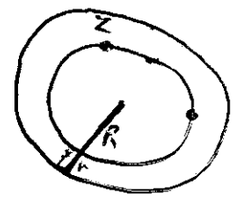
$C(z,r)$

$$\left(f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(\zeta,r)} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\, dz \right)$$

$$\left(\left| \frac{g^{(n)}(z)}{n!} \right| \leq \frac{\sup_{|w-z|\leq R} |g(w)|}{R^n} \right)$$

εκτιμήσεις Cauchy

g ακέραια



$$\leq \frac{\sup_{|w|\leq R+r} |f_n(w) - f(w)|}{r}$$

$\forall z \in \overline{D(0,R)}$ ισχύει ότι

$$\sup_{z\in \overline{D(0,R)}} |f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{\sup_{|w|\leq R+r} |f_n(w) - f(w)|}{r} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\boxed{10}$ $|f(z)| \leq A + B|z|^k$, $A, B, k > 0$

$\forall z \in \mathbb{C}$, f ακέραια

Δείξτε ότι: f είναι πολυώνυμο.

<u>Απόδειξη:</u>

Τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Για να δείξουμε ότι η f είναι πολυώνυμο, αρκεί να δείξουμε ότι $a_n = 0$ από κάποιο n και πέρα.

εκτιμήσεις Cauchy

$$|a_n| \leq \frac{\sup_{|z|\leq R} |f(z)|}{R^n}$$

$$\leq \frac{A + BR^k}{R^n} \qquad \forall R > 0$$

$\forall n = 0, 1, 2$

Τότε για κάθε $n > k$ έχουμε:

$$|a_n| \leq \frac{A + B \cdot R^k}{R^n}, \quad \forall R > 0$$

Αφήνοντας το $R \to +\infty$,

$$\frac{A}{R^n} \to 0, \quad \frac{BR^k}{R^n} \to 0$$

Άρα $|a_n| = 0 \quad \forall n > k$

άρα $a_n = 0 \quad \forall n > k$.

$\boxed{9}$ Αν f, g ακέραιες και $|f(z)| \leq |g(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Τότε $\exists c \in \mathbb{C}$, ώστε $f(z) = c\, g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

<u>Απόδειξη:</u>

Αν z_0 θ.μ. της g, και αφού $|f(z_0)| \leq |g(z_0)|$, τότε το z_0 είναι θ.μ και της f.

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι αν z_0 θ.μ. της g τάξεως m τότε z_0 θ.μ. της f τάξεως τουλάχιστον m.

Εξ αυτού έπεται το ζητούμενο. (θ.μ. = θέση μηδενισμού.)

$\boxed{8}$ Λήμμα Schwartz.