ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΟΘΕΝΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ 1-5 Οι αποδείξεις τους είχαν παρουσιασθεί στις παραδόσεις τού μαθήματος. $\square$

ΘΕΜΑ 6ο (i) Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_{\mathbf{A}}(\mathsf{X}) := \det(\mathbf{A} - \mathsf{X}\mathbf{I}_n)$ τού $\mathbf{A}$ είναι το

$$\chi_{\mathbf{A}}(\mathsf{X}) = (-1)^n \mathsf{X}^n + \alpha_{n-1}\mathsf{X}^{n-1} + \cdots + \alpha_1\mathsf{X} + \det(\mathbf{A})$$

και ότι $\mathbf{C} := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{A} - a\mathbf{I}_n)^2 + b^2\mathbf{I}_n = (\mathbf{A} - a\mathbf{I}_n)^2 - (ib\mathbf{I}_n)^2 = (\mathbf{A} - a\mathbf{I}_n - ib\mathbf{I}_n)(\mathbf{A} - a\mathbf{I}_n + ib\mathbf{I}_n)\\
&\Longrightarrow \det((\mathbf{A} - a\mathbf{I}_n)^2 + b^2\mathbf{I}_n) = \det(\mathbf{A} - (a+ib)\mathbf{I}_n)\det(\mathbf{A} - (a-ib)\mathbf{I}_n)\\
&\Longrightarrow \det((\mathbf{A} - a\mathbf{I}_n)^2 + b^2\mathbf{I}_n) = \chi_{\mathbf{A}}(a+ib)\chi_{\mathbf{A}}(a-ib)
\end{aligned}$$

και

$$\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{C}) = (-1)^n \mathbf{C}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{C}^{n-1} + \cdots + \alpha_1\mathbf{C} + \det(\mathbf{A})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές τού πίνακα $\mathbf{C}$ είναι οι $a + ib$ και $a - ib$, καθόσον

$$\chi_{\mathbf{C}}(\mathsf{Y}) = \mu_{\mathbf{C}}(\mathsf{Y}) = \mathsf{Y}^2 - 2a\mathsf{Y} + a^2 + b^2 = (\mathsf{Y} - (a+ib))(\mathsf{Y} - (a-ib))$$

και είναι διαγώνιος όταν $b = 0$ και διαγωνιοποιήσιμος υπεράνω τού $\mathbb{C}$ όταν $b \neq 0$ (δυνάμει τού 2ου κριτηρίου διαγωνιοποιησιμότητας). Συγκεκριμένα,

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}, \text{ όπου } \mathbf{P} := \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix},\ \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}.$$

Επομένως,

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{C}^j\cdot\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} (a+ib)^j & 0 \\ 0 & (a-ib)^j \end{pmatrix},\ \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

και, ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\cdot\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{C})\cdot\mathbf{P}^{-1} = \chi_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}\\
&\Rightarrow \det(\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{C})) = \det(\mathbf{P}\cdot\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{C})\cdot\mathbf{P}^{-1}) = \det(\chi_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix})\\
&= \det\begin{pmatrix} \chi_{\mathbf{A}}(a+ib) & 0 \\ 0 & \chi_{\mathbf{A}}(a-ib) \end{pmatrix} = \chi_{\mathbf{A}}(a+ib)\chi_{\mathbf{A}}(a-ib)\\
&= \det((\mathbf{A} - a\mathbf{I}_n)^2 + b^2\mathbf{I}_n),
\end{aligned}$$

οπότε ο αρχικός ισχυρισμός είναι όντως αληθής.

(ii) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ η ακολουθία πραγματικών αριθμών, οι όροι τής οποίας ικανοποιούν τις συνθήκες

$$a_0 = 2,\ a_1 = 8 + \sqrt{7},\ a_n = \sqrt{3}a_{n-1} + 5a_{n-2},\ n \geq 2.$$

Θέτοντας $\mathbf{U}_n := \binom{a_n}{a_{n-1}}$ και

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{A}\cdot\mathbf{U}_{n-1} = \mathbf{A}^2\cdot\mathbf{U}_{n-2} = \cdots = \mathbf{A}^{n-1}\cdot\mathbf{U}_1 = \mathbf{A}^{n-1}\cdot\binom{8+\sqrt{7}}{2}$$

και ότι οι ιδιοτιμές τού $\mathbf{A}$ είναι οι

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{23},\ \ \lambda_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{23},$$

στις οποίες αντιστοιχούν οι ιδιόχωροι τού $\mathbf{A}$

$$\mathrm{I\Delta X}(\mathbf{A};\lambda_1) = \mathrm{Lin}(\{(\lambda_1,1)\}),\ \ \mathrm{I\Delta X}(\mathbf{A};\lambda_2) = \mathrm{Lin}(\{(\lambda_2,1)\}).$$

Άρα ο $\mathbf{A}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος. Συγκεκριμένα,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{-1},\ \text{όπου}\ \mathbf{P} := \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix},\ \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{P} &\Rightarrow \mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{P}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}\cdot\mathbf{P} \\ \Rightarrow \mathbf{A}^{n-1} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}\cdot\tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{A}^{n-1} &= \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^n-\lambda_2^n & \lambda_1\lambda_2^n-\lambda_2\lambda_1^n \\ \lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1} & \lambda_1\lambda_2^{n-1}-\lambda_2\lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπειαν,

$$\mathbf{U}_n = \binom{a_n}{a_{n-1}} = \mathbf{A}^{n-1}\cdot\binom{8+\sqrt{7}}{2} \Rightarrow a_n = \tfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1^n(8+\sqrt{7}-2\lambda_2)+\lambda_2^n(2\lambda_1-8-\sqrt{7})\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \tfrac{1}{\sqrt{23}}\left((\tfrac{1}{2}\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\sqrt{23})^n(8+\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{23}))+(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\sqrt{23})^n(\sqrt{3}+\sqrt{23}-8-\sqrt{7})\right)$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$. □

<u>ΘΕΜΑ 7ο</u> Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο τού πίνακα

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

είναι το $\chi_{\mathbf{A}}(\mathsf{X}) = -(\mathsf{X}-1)^3$, οπότε ο $\mathbf{A}$ είναι τριγωνικοποιήσιμος υπεράνω τού $\mathbb{Q}$. Ο προσδιορισμός ενός $\mathbf{P}\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$, ώστε ο $\mathbf{P}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{P}^{-1}$ να είναι άνω τριγωνικός, γίνεται (σε δύο βήματα) μέσω τής μεθόδου που παρουσιάσθηκε στις παραδόσεις.

Βήμα 1ο. Θεωρούμε τη συνήθη διατεταγμένη βάση $\mathcal{B}_1 := (\mathbf{e}_1^{[3]},\mathbf{e}_2^{[3]},\mathbf{e}_3^{[3]})$ τού $U_1 := \mathbb{Q}^3$. Επειδή $\mathrm{I\Delta X}(\mathbf{A};1) = \mathrm{Lin}(\{(1,-1,1)\})$, θέτουμε $\mathbf{v}_1 := (1,-1,1)$, $j_1 = 1$, και αποκτούμε μια νέα βάση $\mathcal{B}_2 := (\mathbf{v}_1,\mathbf{e}_2^{[3]},\mathbf{e}_3^{[3]})$ τού U_1. Εν συνεχεία, θέτουμε

$$\mathbf{Q}_1 := \mathbf{T}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ \ \text{με}\ \ \mathbf{Q}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και $\mathbf{A}_2 := \mathbf{M}^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2}(f_{\mathbf{A}})$, και παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_1^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right),\ \mathbf{A}_2' := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Βήμα 2ο. Εκκινούμε από τη διατεταγμενη βάση $\mathcal{B}_2' := (\mathbf{e}_2^{[3]}, \mathbf{e}_3^{[3]})$ τού γραμμικού υποχώρου $U_2 := \mathrm{Lin}(\{\mathbf{e}_2^{[3]}, \mathbf{e}_3^{[3]}\})$ τού U_1 και από τον $f_{\mathbf{A}}|_{U_2} \in \mathrm{End}_K(U_2)$. Προφανώς,

$$\chi_{\mathbf{A}_2'}(\mathsf{X}) = \chi_{f_{\mathbf{A}}|_{U_2}}(\mathsf{X}) = (\mathsf{X}-1)^2\,.$$

Επειδή ΙΔΧ$(f_{\mathbf{A}}|_{U_2}\,; 1) = \mathrm{Lin}(\{(0,1,-1)\}) \subseteq U_1$ θέτουμε $\mathbf{v}_2 := (0,1,-1)$, $j_2 := 2$, και επεκτείνουμε την $\mathcal{B}_3' := (\mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3^{[3]})$ σε μια νέα διατεταγμένη βάση $\mathcal{B}_3 := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3^{[3]})$ τού $\mathbb{Q}^3$. Κατόπιν τούτου θέτουμε

$$\mathbf{Q}_2 := \mathbf{T}^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ με } \mathbf{Q}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

όπου

$$\mathbf{Q}_2^{-1} = \mathbf{T}^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_1} = \mathbf{T}^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1} \cdot \mathbf{T}^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

και $\mathbf{A}_3 := \mathbf{M}^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_3}(f_{\mathbf{A}})$. Ο $\mathbf{A}$ τριγωνικοποιείται (όπως ήταν αναμενόμενο) μέσω τού $\mathbf{P} := \mathbf{Q}_2$, καθόσον

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

(με $\mathbf{A}_3' = (1)$). □

ΘΕΜΑ 8ο Το χαρακτηριστικό (και αντιστοίχως, το ελάχιστο) πολυώνυμο τού πίνακα

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$

είναι το $\chi_{\mathbf{A}}(\mathsf{X}) = -(\mathsf{X}-2)^3$ (και αντιστοίχως, το $\mu_{\mathbf{A}}(\mathsf{X}) = (\mathsf{X}-2)^2$). Προφανώς, $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{A}})$, όπου $\mathcal{E} := (\mathbf{e}_1^{[3]}, \mathbf{e}_2^{[3]}, \mathbf{e}_3^{[3]})$ η συνήθης διατεταγμένη βάση τού $\mathbb{Q}^3$ και

$$f_{\mathbf{A}} : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3,\ (x,y,z) \mapsto f_{\mathbf{A}}(x,y,z) := (x,y,z)\mathbf{A}^{\intercal} = (x+y, -x+3y, -x+y+2z)\,.$$

Από τη γενική θεωρία είναι γνωστό ότι υπάρχει μια διατεταγμένη βάση $\mathcal{B}$ τού $\mathbb{Q}^3$, τέτοια ώστε

$$\mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_{\mathbf{A}}) = \bigoplus_{j=1}^{t} \mathbf{J}_{r_j}(2),$$

με $r_1 = 2, r_2 \geq \cdots \geq r_t \geq 1$ και $r_1 + \cdots + r_t = 3$. Επομένως $t = 2$, $r_1 = 2$ και $r_2 = 1$. Άρα η η διευθετημένη μορφή Jordan τού $\mathbf{A}$ είναι κατ' ανάγκην ο (μέχρις αναδιατάξεως των δύο ευθέων προσθετέων μονοσημάντως ορισμένος) πίνακας

$$\mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_{\mathbf{A}}) = \mathbf{J}_2(2) \oplus \mathbf{J}_1(2) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

και

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f_{\mathbf{A}}) = \mathbf{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{T}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \mathbf{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f_{\mathbf{A}}) \cdot (\mathbf{T}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}})^{-1}.$$

Ως εκ τούτου,

$$\mathbf{A}^{\nu}=\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}\cdot\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2\end{array}\right)^{\nu}\cdot(\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1},\ \forall\nu\in\mathbb{N}.$$

Υπολογίζοντας τις πρώτες δυνάμεις τού $\mathbf{J}_2(2)$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 4 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2\cdot 2\\ 0 & 2^2\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 8 & 12\\ 0 & 8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^2\cdot 3\\ 0 & 2^3\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 16 & 32\\ 0 & 16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^4 & 2^3\cdot 4\\ 0 & 2^4\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^5 &= \begin{pmatrix} 32 & 80\\ 0 & 32\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^5 & 2^4\cdot 5\\ 0 & 2^5\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

εικάζουμε και αποδεικνύουμε (άμεσα με τη βοήθεια μαθηματικής επαγωγής) ότι

$$\mathbf{J}_2(2)^{\nu}=\begin{pmatrix} 2^{\nu} & 2^{\nu-1}\nu\\ 0 & 2^{\nu}\end{pmatrix},$$

οπότε

$$\mathbf{A}^{\nu}=\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}\cdot\left(\begin{array}{cc|c} 2^{\nu} & 2^{\nu-1}\nu & 0\\ 0 & 2^{\nu} & 0\\ \hline 0 & 0 & 2^{\nu}\end{array}\right)\cdot(\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1},\ \forall\nu\in\mathbb{N}.$$

Αρκεί λοιπόν να προσδιορισθεί μια κατάλληλη $\mathcal{B}$. (Αυτό μπορεί να γίνει *χωρίς* να καταφύγουμε στη γενική θεωρία.) Αφού έχουμε δύο στοιχειώδεις πίνακες Jordan, αυτή η διατεταγμένη βάση είναι φυσική σύζευξη $\mathcal{B}=(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$ δύο μικρότερων, με την $\mathcal{B}_1$ έχουσα πληθικό αριθμό 2 και την $\mathcal{B}_2$ έχουσα πληθικό αριθμό 1. Εάν $\mathcal{B}_1=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)$ και $\mathcal{B}_2=(\mathbf{v}_3)$, αρκεί να απαιτήσουμε από το $\mathbf{v}_1$ να ανήκει στην τομή

$$\mathrm{Im}(f_{\mathbf{A}}-2\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^3})\cap \mathrm{I\Delta X}(f_{\mathbf{A}};2), \text{όπου } \mathrm{I\Delta X}(f_{\mathbf{A}};2)=\mathrm{Lin}(\{(1,1,0),(0,0,1)\})$$

και από το $\mathbf{v}_2$ να μην ανήκει στον $\mathrm{Lin}(\{\mathbf{v}_1\})$ και να ικανοποιεί τη συνθήκη $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}_2)=2\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1$. Μια φυσική επιλογή είναι η εξής: $\mathbf{v}_1=(1,1,1)$ και $\mathbf{v}_2=(1,2,1)$. Για να σχηματίσουμε τη $\mathcal{B}$ απομένει να επιλέξουμε ένα $\mathbf{v}_3\in\mathrm{I\Delta X}(f_{\mathbf{A}};2)$, τέτοιο ώστε το $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Π.χ., το $\mathbf{v}_3=(1,1,0)$ είναι επιτρεπτό. Ο αντίστοιχος πίνακας μεταβάσεως από την $\mathcal{B}$ στην $\mathcal{E}$ είναι ο

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}, \text{ με αντίστροφό του τον } (\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Κατά συνέπειαν,

$$\mathbf{A}^{\nu}=\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}\cdot\left(\begin{array}{cc|c} 2^{\nu} & 2^{\nu-1}\nu & 0\\ 0 & 2^{\nu} & 0\\ \hline 0 & 0 & 2^{\nu}\end{array}\right)\cdot(\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1}=\begin{pmatrix} 2^{\nu}-2^{\nu-1}\nu & 2^{\nu-1}\nu & 0\\ -2^{\nu-1}\nu & 2^{\nu-1}\nu+2^{\nu} & 0\\ -2^{\nu-1}\nu & 2^{\nu-1}\nu & 2^{\nu}\end{pmatrix}$$

για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$. □

<u>ΘΕΜΑ 9ο</u> (i) Εάν $\mathbf{v}_1:=1,\mathbf{v}_2:=\mathsf{X}$ και $\mathbf{v}_3:=\mathsf{X}^2$, τότε εκκινώντας από τη βάση $\mathcal{B}:=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ κατασκευάζουμε (μέσω τής μεθόδου των Gram και Schmidt) μια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}'=\{\mathbf{v}_1',\mathbf{v}_2',\mathbf{v}_3'\}$ τού $\mathbb{R}[\mathsf{X}]_{\leq 2}$ θέτοντας διαδοχικώς

$$\mathbf{v}_1'=\tfrac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1,\ \ \mathbf{w}_2=\mathbf{v}_2-\left\langle\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1'\right\rangle\mathbf{v}_1',\ \ \mathbf{v}_2'=\tfrac{1}{\|\mathbf{w}_2\|}\mathbf{w}_2$$

και

$$\mathbf{w}_3=\mathbf{v}_3-\left\langle\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_2'\right\rangle\mathbf{v}_2'-\left\langle\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1'\right\rangle\mathbf{v}_1',\ \ \mathbf{v}_3'=\tfrac{1}{\|\mathbf{w}_3\|}\mathbf{w}_3.$$

Προφανώς, $\mathbf{v}_1' = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = 1$,

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' \rangle \mathbf{v}_1' = \mathsf{X} - \left(\int_0^1 (t\cdot 1)dt\right)\cdot 1 = \mathsf{X} - \left[\tfrac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \mathsf{X} - \tfrac{1}{2},$$

και

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}_2\|^2 &= \langle \mathsf{X} - \tfrac{1}{2}, \mathsf{X} - \tfrac{1}{2}\rangle = \textstyle\int_0^1 (t-\tfrac{1}{2})^2 d(t-\tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{1}{3}\left[(t-\tfrac{1}{2})^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}\left(\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^3 - \left(0-\tfrac{1}{2}\right)^3\right) = \tfrac{1}{12} \Rightarrow \|\mathbf{w}_2\| = \tfrac{1}{2\sqrt{3}},\end{aligned}$$

οπότε $\mathbf{v}_2' = \frac{1}{\|\mathbf{w}_2\|}\mathbf{w}_2 = 2\sqrt{3}(\mathsf{X} - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}(2\mathsf{X}-1)$. Επιπροσθέτως,

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2'\rangle \mathbf{v}_2' - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1'\rangle \mathbf{v}_1' \\ &= \mathsf{X}^2 - \left\langle \mathsf{X}^2, \sqrt{3}(2\mathsf{X}-1)\right\rangle (\sqrt{3}(2\mathsf{X}-1)) - \langle \mathsf{X}^2, 1\rangle,\end{aligned}$$

όπου $\langle \mathsf{X}^2, \sqrt{3}(2\mathsf{X}-1)\rangle (\sqrt{3}(2\mathsf{X}-1)) = 3\langle \mathsf{X}^2, 2\mathsf{X}-1\rangle (2\mathsf{X}-1)$ με

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{X}^2, 2\mathsf{X}-1\rangle &= \int_0^1 t^2(2t-1)dt = 2\int_0^1 t^3 dt - \int_0^1 t^2 dt \\ &= 2\left[\tfrac{1}{4}t^4\right]_0^1 - \left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}\end{aligned}$$

και $\langle \mathsf{X}^2, 1\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$, οπότε

$$\mathbf{w}_3 = \mathsf{X}^2 - \tfrac{1}{2}(2\mathsf{X}-1) - \tfrac{1}{3} = \mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + \tfrac{1}{6}$$

και

$$\begin{aligned}\|\mathbf{w}_3\|^2 &= \langle \mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + \tfrac{1}{6}, \mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + \tfrac{1}{6}\rangle = \textstyle\int_0^1 (t^2 - t + \tfrac{1}{6})^2 dt \\ &= \textstyle\int_0^1 (t^4 - 2t^3 + \tfrac{4}{3}t^2 - \tfrac{1}{3}t + \tfrac{1}{36})dt \\ &= \left[\tfrac{1}{5}t^5\right]_0^1 - 2\left[\tfrac{1}{4}t^4\right]_0^1 + \tfrac{4}{3}\left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 - \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{2}t^2\right]_0^1 + \tfrac{1}{36}\left[t\right]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{36} = \tfrac{1}{180} \Rightarrow \|\mathbf{w}_3\| = \tfrac{1}{\sqrt{180}}.\end{aligned}$$

Εν κατακλείδι, $\mathbf{v}_3' = \frac{1}{\|\mathbf{w}_3\|}\mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{180}}(\mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + \frac{1}{6})$ και

$$\mathcal{B}' = \{1, \sqrt{3}(2\mathsf{X}-1), \tfrac{1}{\sqrt{180}}(\mathsf{X}^2 - \mathsf{X} + \tfrac{1}{6})\}.$$

(ii) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Η απεικόνιση

$$\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \ni (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \longmapsto \langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle := \mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*) \in \mathbb{C},$$

όπου $\mathbf{B}^* := (\overline{\mathbf{B}})^{\mathsf{T}}$, αποτελεί ένα εσωτερικό γινόμενο (δηλαδή μια ερμιτιανή, θετικώς ορισμένη ημίολη μορφή) επί τού $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Πράγματι[1]·

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}, \mathbf{B}+\mathbf{C}\rangle &= \mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})^*) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}^*+\mathbf{C}^*)) \\ &= \mathrm{tr}((\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*) + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^*)) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*) + \mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^*) = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B}\rangle + \langle \mathbf{A}, \mathbf{C}\rangle\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}+\mathbf{B}, \mathbf{C}\rangle &= \mathrm{tr}((\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}^*) = \mathrm{tr}((\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^*) + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}^*)) \\ &= \mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^*) + \mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}^*) = \langle \mathbf{A}, \mathbf{C}\rangle + \langle \mathbf{B}, \mathbf{C}\rangle\end{aligned}$$

[1] Εάν $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ και $\mathbf{B} = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$, τότε

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n (a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$$

και $\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})$.

για οιουσδήποτε $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Επίσης,

$$\langle \lambda\mathbf{A},\mathbf{B}\rangle = \mathrm{tr}((\lambda\mathbf{A})\cdot\mathbf{B}^*) = \mathrm{tr}(\lambda(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*)) = \lambda\,\mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*) = \lambda\,\langle \mathbf{A},\mathbf{B}\rangle\,,$$
$$\langle \mathbf{A},\lambda\mathbf{B}\rangle = \mathrm{tr}((\mathbf{A}\cdot(\lambda\mathbf{B})^*) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\overline{\lambda}(\mathbf{B}^*)) = \mathrm{tr}(\overline{\lambda}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*)) = \overline{\lambda}\,\langle \mathbf{A},\mathbf{B}\rangle\,,$$

για οιουσδήποτε $\mathbf{A},\mathbf{B}\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ και οιοδήποτε $\lambda\in\mathbb{C}$. Η $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι ερμιτιανή, διότι

$$\overline{\langle \mathbf{B},\mathbf{A}\rangle} = \overline{\mathrm{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^*)} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^*) = \langle \mathbf{A},\mathbf{B}\rangle\,,\ \forall(\mathbf{A},\mathbf{B})\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})^2,$$

και θετικώς ορισμένη, διότι για κάθε $\mathbf{A}=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$

$$\langle \mathbf{A},\mathbf{A}\rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^*) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{a}_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\in\mathbb{R}_{\geq 0}$$

και $\langle \mathbf{A},\mathbf{A}\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}=\mathbf{0}_{n\times n}$. Τέλος, για τα στοιχεία τής συνήθους βάσεως

$$\mathfrak{E} := \{\,\mathbf{E}_{ij}|\,1\leq i,j\leq n\}\ \ (\mathbf{E}_{ij} := (\delta_{\mu i}\delta_{\nu j})_{1\leq\mu,\nu\leq n}\,,\ \forall\,(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}).$$

τού $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ έχουμε

$$\langle \mathbf{E}_{ij},\mathbf{E}_{rs}\rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{E}_{ij}\cdot{\mathbf{E}_{rs}}^*) = \mathrm{tr}(\mathbf{E}_{ij}\cdot\mathbf{E}_{sr}) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } i=r,\ j=s, \\ 0, & \text{εν εναντία περιπτώσει,}\end{cases}$$

οπότε η $\mathfrak{E}$ είναι ορθοκανονική ως προς το $\langle\cdot,\cdot\rangle$. □

ΘΕΜΑ 10ο (i) $f\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, διότι για οιαδήποτε $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}\in V$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) &= 2\left(\sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\rangle\,\mathbf{u}_i\right) - (\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) \\ &= \left(2\left(\sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}_1\rangle\,\mathbf{u}_i\right)-\mathbf{v}_1\right) + \left(2\left(\sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}_2\rangle\,\mathbf{u}_i\right)-\mathbf{v}_2\right) \\ &= f(\mathbf{v}_1)+f(\mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

και

$$f(\lambda\mathbf{v}) = 2\left(\sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\lambda\mathbf{v}\rangle\,\mathbf{u}_i\right) - \lambda\mathbf{v} = \lambda\left(2\left(\sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle\,\mathbf{u}_i\right)-\mathbf{v}\right) = \lambda f(\mathbf{v}).$$

(ii) Κατ' αρχάς, $\|f(\mathbf{v})\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2$ για κάθε $\mathbf{v}\in V$. Πράγματι·

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{v})\|^2 &= \left\|2\left(\sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle\,\mathbf{u}_i\right)-\mathbf{v}\right\|^2 \\ &= \left\|2\left(\sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle\,\mathbf{u}_i\right)\right\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\left\langle 2\left(\sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle\,\mathbf{u}_i\right),\mathbf{v}\right\rangle \\ &= 4\left\|\sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle\,\mathbf{u}_i\right\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 4\left\langle \sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle\,\mathbf{u}_i,\mathbf{v}\right\rangle \end{aligned}$$

από τον πυθαγόρειο τύπο, όπου (λόγω διγραμμικότητας τού εσωτερικού γινομένου)

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle\,\mathbf{u}_i,\mathbf{v}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle\,\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle^2\,.$$

Επίσης, επαγωγικώς αποδεικνύεται ότι

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle\,\mathbf{u}_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle^2\,\|\mathbf{u}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\langle \mathbf{u}_i,\mathbf{v}\rangle^2\,,$$

διότι (εξ υποθέσεως) $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle = 1$ και $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ για $i \neq j$. Άρα

$$\|f(\mathbf{v})\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2\,,\ \ \forall \mathbf{v} \in V. \tag{*}$$

Εν συνεχεία, για κάθε ζεύγος $(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \in V \times V$ έχουμε (λόγω τού (i), τής διγραμμικότητας τού εσωτερικού γινομένου και τής (*) για το $\mathbf{v} - \mathbf{v}'$)

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v}) \rangle - 2\left\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v}') \right\rangle + \left\langle f(\mathbf{v}'), f(\mathbf{v}') \right\rangle &= \left\langle f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}'), f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}') \right\rangle \\ &= \left\| f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}') \right\|^2 \\ &= \left\| f(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \right\|^2 = \left\| \mathbf{v} - \mathbf{v}' \right\|^2 \\ &= \left\langle \mathbf{v} - \mathbf{v}', \mathbf{v} - \mathbf{v}' \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - 2\left\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \right\rangle + \left\langle \mathbf{v}', \mathbf{v}' \right\rangle, \end{aligned}$$

οπότε από τις ισότητες

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v}) \rangle &= \|f(\mathbf{v})\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle\,, \\ \left\langle f(\mathbf{v}'), f(\mathbf{v}') \right\rangle &= \left\| f(\mathbf{v}') \right\|^2 = \left\| \mathbf{v}' \right\|^2 = \left\langle \mathbf{v}', \mathbf{v}' \right\rangle \end{aligned}$$

έπεται τελικώς ότι $\langle f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v}') \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle$.

(iii) Στην περίπτωση όπου $V = \mathbb{R}^3$,

$$U = \mathrm{Lin}(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}),\ \ \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1^{[3]},\ \ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_2^{[3]},$$

και $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, έχουμε για κάθε $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= 2\left(\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle \mathbf{u}_2\right) - \mathbf{v} = 2\left(\left\langle \mathbf{e}_1^{[3]}, \mathbf{v} \right\rangle \mathbf{e}_1^{[3]} + \left\langle \mathbf{e}_2^{[3]}, \mathbf{v} \right\rangle \mathbf{e}_2^{[3]}\right) - \mathbf{v} \\ &= 2x\mathbf{e}_1^{[3]} + 2y\mathbf{e}_2^{[3]} - (x\mathbf{e}_1^{[3]} + y\mathbf{e}_2^{[3]} + z\mathbf{e}_3^{[3]}) = x\mathbf{e}_1^{[3]} + y\mathbf{e}_2^{[3]} - z\mathbf{e}_3^{[3]} \\ &= (x, y, -z), \end{aligned}$$

οπότε η f εκφράζει γεωμετρικώς τον κατοπτρισμό τού $\mathbf{v} = (x, y, z)$ ως προς το επίπεδο U. $\square$
