ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ SEIFERT ΚΑΙ VAN KAMPEN

Μάριος Βελιβασάκης

1 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΟΜΑΔΩΝ

Ορισμός 1.1. Έστω G μια ομάδα και έστω H μια ορθόθετη υποομάδα της. Τότε ο επιμορφισμός ομάδων $\pi : G \to G/H$ που δίδεται από τον τύπο

$$\pi(g) := gH, \text{ για κάθε } g \in G,$$

καλείται **φυσικός επιμορφισμός**. Προφανώς, ο πυρήνας τού φυσικού επιμορφισμού π είναι η υποομάδα H τής G.

Θεώρημα 1.2 (Πρώτο θεώρημα ισομορφισμών ομάδων). *Εάν G, G' είναι δυο ομάδες και $\varphi : G \to G'$ ένας ομομορφισμός, τότε ο πυρήνας $\ker\varphi$ αποτελεί μια ορθόθετη υποομάδα τής G και ορίζεται ισομορφισμός*

$$G/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}(\varphi)$$

μέσω τής απεικονίσεως $x\mathrm{Ker}\varphi \mapsto \varphi(x)$, για κάθε $x \in G$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς, ο πυρήνας $\ker\varphi$ αποτελεί υποομάδα τής G. Έστω $x \in \ker\varphi$ και έστω $g \in G$. Τότε

$$\varphi(gxg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(x)\varphi(g)^{-1} = e_{G'} \Rightarrow gxg^{-1} \in \mathrm{Ker}\varphi,$$

οπότε άμεσα έπεται ότι ο πυρήνας αποτελεί ορθόθετη υποομάδα τής G. Εν συνεχεία, θεωρούμε δύο πλευρικές κλάσεις $x\mathrm{Ker}\varphi$ και $y\mathrm{Ker}\varphi$, ίσες μεταξύ τους. Τότε $y^{-1}x \in \mathrm{Ker}\varphi$, οπότε

$$\varphi(y^{-1}x) = e_{G'} \Rightarrow \varphi(y)^{-1}\varphi(x) = e_{G'} \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y).$$

Συνεπώς ορίζεται καλώς απεικόνιση $\Psi : G/\mathrm{Ker}\varphi \to G'$, με τύπο $\Psi(x\ker\varphi) := \varphi(x)$. Η Ψ είναι ενριπτική, διότι

$$\begin{aligned}
\Psi(x\mathrm{Ker}\varphi) = \Psi(y\mathrm{Ker}\varphi) &\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \varphi(y)^{-1}\varphi(x) = e_{G'} \\
&\Rightarrow \varphi(y^{-1}x) = e_{G'} \Rightarrow y^{-1}x \in \mathrm{Ker}\varphi \\
&\Rightarrow x\mathrm{Ker}\varphi = y\mathrm{Ker}\varphi.
\end{aligned}$$

Τέλος, είναι προφανές ότι $\mathrm{Im}(\Psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$, οπότε υπάρχει ισομορφισμός, τέτοιος ώστε να ισχύει $G/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}(\varphi)$. □

Θεώρημα 1.3 (Θεώρημα παραγοντοποιήσεως ομάδων). *Έστω ότι G, H είναι δυο ομάδες, $\varphi : G \to H$ ένας ομομορφισμός και N μια ορθόθετη υποομάδα τής G. Εάν η $\pi : G \to G/N$ παριστά τον φυσικό επιμορφισμό (βλ. 1.1) και $N \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\psi : G/N \to H$, τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να καθίσταται μεταθετικό (ήτοι $\psi \circ \pi = \varphi$) :*

$$\begin{tikzcd}
G/N \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\
G \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & H
\end{tikzcd}$$

Επιπροσθέτως, ο ψ είναι επιμορφισμός εάν και μόνον εάν ο φ είναι επιμορφισμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε την $\psi : G/N \to H$ μέσω τού τύπου $\psi(Ng) = \varphi(g)$, για κάθε $g \in G$. Η ψ είναι καλώς ορισμένη απεικόνιση: Πράγματι·εάν $g_1, g_2 \in G$ με $Ng_1 = Ng_2$, τότε $g_1g_2^{-1} \in N$ και εξ υποθέσεως $N \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$. Συνεπώς,

$$e_H = \varphi(g_1g_2^{-1}) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} \Rightarrow \psi(Ng_1) = \varphi(g_1) = \varphi(g_2) = \psi(Ng_2).$$

Επιπροσθέτως, η ψ είναι ομομορφισμός ομάδων, διότι

$$\psi(g_1Ng_2N) = \psi(g_1g_2N) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(g_1N)\psi(g_2N).$$

Από τον ορισμό τού ψ είναι προφανές τόσον ότι $\psi \circ \pi = \varphi$ όσον και ότι αυτός είναι ο μοναδικός ομομορφισμός ομάδων που καθιστά το διάγραμμα μεταθετικό. Τέλος, επειδή ο π είναι εξ ορισμού επιμορφισμός, έπεται άμεσα ότι $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$, οπότε ο ψ είναι επιμορφισμός εάν και μόνον εάν ο φ είναι επιμορφισμός. ☐

2 ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΟΜΑΔΕΣ

Ορισμός 2.1. Έστω τυχόν σύνολο $X \neq \varnothing$. Ορίζουμε ως **ελεύθερη ομάδα επί τού** X κάθε ζεύγος $(\mathcal{F}, f)$ αποτελούμενο από μια ομάδα $\mathcal{F}$ και μια απεικόνιση $f : X \to \mathcal{F}$, το οποίο πληροί την ακόλουθη καθολική ιδιότητα :

> Για κάθε ομάδα G και για κάθε απεικόνιση $g : X \to G$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $h : \mathcal{F} \to G$, ούτως ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & G
\end{tikzcd}$$

Ενίοτε καλούμε το ζεύγος $(\mathcal{F}, f)$ **ελεύθερη ομάδα με βάση το** X.

Πρόταση 2.2. *Έστω $X \neq \varnothing$ ένα σύνολο. Εάν το $(\mathcal{F}, f)$ είναι μια ελεύθερη ομάδα επί τού X, τότε αυτή είναι μονοσημάντως καθορισμένη (από το σύνολο X) μέχρις ισομορφισμού ομάδων.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι τα ζεύγη $(\mathcal{F}, f)$ και $(\mathcal{F}', f')$ είναι δυο ελεύθερες ομάδες επί τού συνόλου X. Δυνάμει τής καθολικής ιδιότητας τού ορισμού 2.1 υπάρχουν μοναδικοί ομομορφισμοί $h : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ και $h' : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$, οι οποίοι καθιστούν τα ακόλουθα διαγράμματα μεταθετικά :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f'"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{F}'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}' \arrow[dr, dashed, "h'"] & \\
X \arrow[u, "f'"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

Ως εκ τούτου, $(h' \circ h) \circ f = h' \circ (h \circ f) = h' \circ f' = f$, οπότε διαθέτουμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[dr, dashed, "h'\circ h"] & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

Επιπροσθέτως, για τον ταυτοτικό ομομορφισμό $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ προφανώς ισχύει $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}} \circ f = f$, οπότε, βάσει τού μονοσημάντου τής καθολικής ιδιότητας για το ζεύγος $(\mathcal{F}, f)$, έχουμε κατ' ανάγκην $h' \circ h = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των $\mathcal{F}$ και $\mathcal{F}'$ λαμβάνουμε $h \circ h' = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}'}$, οπότε τελικώς $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$. □

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, εάν υπάρχει μια ελεύθερη ομάδα επί ενός μη κενού συνόλου X, τότε αυτή είναι *μονοσημάντως καθορισμένη* μέχρις ισομορφισμού. Απομένει λοιπόν η απόδειξη τής *υπάρξεως* μιας ελεύθερης ομάδας $(\mathcal{F}, f)$.

Θεωρούμε δυο σύνολα X, X^{-1} τέτοια ώστε $X \cap X^{-1} = \varnothing$ και για τα οποία υπάρχει μια αμφίρριψη

$$f : X \longrightarrow X^{-1}, \;\; x \longmapsto x^{-1}.$$

Εάν $x \in X$, τότε με τον συμβολισμό x^1 εννοούμε το x και με το x^0 εννοούμε το 1.

Ορισμός 2.3. Καλούμε **λέξη** (ειλημμένη από το "αλφάβητο" X) κάθε ακολουθία $w = (a_1, a_2, ...)$, όπου $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$ τέτοια, ώστε να υπάρχει $n \in \mathbb{N}_0$ με $a_i = 1, \forall i > n$. Ειδικότερα, η σταθερή ακολουθία $(1, 1, ...)$ καλείται **κενή λέξη** και συμβολίζεται ως "1".

Επειδή, τώρα, κάθε λέξη περιέχει πεπερασμένου πλήθους γράμματα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον εξής (πιο "διευκολυντικό") συμβολισμό:

$$w = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n},$$

όπου $x_i \in X$, $\varepsilon_i \in \{1, -1, 0\}$, για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$. Μάλιστα, ορίζουμε τη διαδοχική παράθεση $\underbrace{x^1 x^1 \cdots x^1}_{\text{n φορές}}$ (όπου $n > 0$) ως x^n και τη διαδοχική παράθεση $\underbrace{x^{-1} x^{-1} \cdots x^{-1}}_{\text{n φορές}}$ ως x^{-n}. Άρα για κάθε λέξη μπορούμε να δώσουμε τον πιο γενικό συμβολισμό:

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}, \;\; x_i \in X, \; n \in \mathbb{Z} \;\; \text{για κάθε } \; i \in \{1, ..., k\}.$$

Ορισμός 2.4. Μια λέξη $w = x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$ θα καλείται **ανηγμένη** όταν είτε είναι η κενή λέξη είτε για κάθε $i \in \{1, ..., k-1\}$ ισχύει $x_i \neq x_{i+1}$ και $n_i \neq 0$. Θα συμβολίζουμε εφεξής το σύνολο των ανηγμένων λέξεων τού X ως $\mathcal{F}(X)$.

Ας υποθέσουμε ότι $w_1 = x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$ και $w_2 = y_1^{m_1} \cdots y_\ell^{m_\ell}$ είναι δυο ανηγμένες λέξεις. Ορίζουμε τότε ως "διαδοχική παράθεσή τους" την:

$$w_1 w_2 := x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} y_1^{m_1} \cdots y_\ell^{m_\ell}.$$

Η λέξη $w_1 w_2$ που προκύπτει δεν είναι κατ' ανάγκην ανηγμένη, διότι ενδέχεται το τελευταίο σύμβολο τής w_1 να συμπίπτει με το πρώτο σύμβολο τής w_2. Επιπροσθέτως, είναι προφανές ότι από μια τυχούσα λέξη w μπορεί να προκύψει πάντοτε μια ανηγμένη λέξη $\overline{w}$, εάν κανείς συλλέξει όλες τις δυνάμεις (εν ανάγκη με επανάληψη τής ανωτέρω διαδικασίας). Το φυσικό ερώτημα που τίθεται είναι το κατά πόσον, για μια δεδομένη λέξη w, αυτή η διαδικασία οδηγεί σε μια μονοσημάντως ορισμένη ανηγμένη λέξη $\overline{w}$. Το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι πάντοτε ανεξάρτητο τής ενδιάμεσης διαδικασίας.

Θεώρημα 2.5. *Κάθε λέξη w απλοποιείται σε μία και μόνον ανηγμένη λέξη $\overline{w}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε το σύνολο των ανηγμένων λέξεων $\mathcal{F}(X)$ τού X και για κάθε $x \in X$ ορίζουμε απεικόνιση

$$\varphi_x : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X),\ w \longmapsto \varphi_x(w) := \overline{xw}, \quad \text{για κάθε} \quad w \in \mathcal{F}(X).$$

Επειδή εξ υποθέσεως το w είναι μια ανηγμένη λέξη, συνάγουμε ότι

$$\varphi_x \circ \varphi_{x^{-1}}(w) = \varphi_x(\overline{x^{-1}w}) = \overline{x\overline{x^{-1}w}} = \overline{w} = w,$$

και ότι

$$\varphi_{x^{-1}} \circ \varphi_x(w) = \varphi_{x^{-1}}(\overline{xw}) = \overline{x^{-1}\overline{xw}} = \overline{w} = w.$$

Επομένως, $\varphi_x \circ \varphi_{x^{-1}} = \varphi_{x^{-1}} \circ \varphi_x = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(X)}$, οπότε η απεικόνιση φ_x αποτελεί μια αμφίρριψη τού συνόλου $\mathcal{F}(X)$ επί τού εαυτού του. Ως εκ τούτου, $\varphi_x \in \mathfrak{S}_{\mathcal{F}(X)}$ για κάθε $x \in X$, όπου $\mathfrak{S}_{\mathcal{F}(X)}$ η ομάδα των μετατάξεων τού συνόλου $\mathcal{F}(X)$.

Κατά συνέπειαν, εάν η $u = x_1^{n_1} \cdots x_s^{n_s}$ είναι τυχούσα λέξη (όχι κατ' ανάγκην ανηγμένη), τότε έχουμε τη δυνατότητα ορισμού τής συνθέσεως (μετατάξεων):

$$\varphi_u := (\varphi_{x_1})^{n_1} \cdots (\varphi_{x_s})^{n_s} \in \mathfrak{S}_{\mathcal{F}(X)}.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η u είναι τυχούσα λέξη και ότι αυτή απλοποιείται κατά κάποιον τρόπο καθιστάμενη μια ανηγμένη λέξη w. Τότε προφανώς θα ισχύει $\varphi_u = \varphi_w$. Εάν λοιπόν η ίδια λέξη u απλοποιείται με δύο διαφορετικούς τρόπους σε ανηγμένες λέξεις v και w θα έχουμε $\varphi_v = \varphi_u = \varphi_w$. Εξάλλου, για την (εξ ορισμού ανηγμένη) κενή λέξη 1 θα ισχύουν οι ισότητες

$$\varphi_v(1) = v \ \text{ και } \ \varphi_w(1) = w.$$

Ειδικότερα, $v = w$, οπότε η απλοποίηση τής λέξεως u είναι πράγματι μονοσημάντως ορισμένη. □

Όπως έχουμε ήδη επισημάνει, εάν οι w_1 και w_2 είναι δυο ανηγμένες λέξεις ειλημμένες από το X, τότε η διαδοχική παράθεση τους w_1w_2 δεν είναι κατ' ανάγκην μια ανηγμένη λέξη. Ωστόσο, βάσει τού θεωρήματος 2.5 αυτή απλοποιείται εκ νέου σε μία και μόνον ανηγμένη λέξη $\overline{w_1w_2}$. Ως εκ τούτου, είναι φυσικό να ορίσουμε επί τού συνόλου $\mathcal{F}(X)$ την πράξη:

$$w_1 * w_2 := \overline{w_1w_2}.$$

Το σύνολο $\mathcal{F}(X)$, εφοδιασμένο με την ανωτέρω πράξη, αποτελεί ομάδα. Πράγματι· ως ουδέτερο στοιχείο της διαθέτει την κενή λέξη (η οποία είναι εξ ορισμού ανηγμένη), ενώ το αντίστροφο μιας λέξεως $w_1 = x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά η ανηγμένη λέξη $x_k^{-n_k} \cdots x_1^{-n_1}$. Τέλος, η προσεταιριστικότητα τής πράξεως έπεται άμεσα από το θεώρημα 2.5 και από το γεγονός ότι οι λέξεις

$$w_1 * (w_2 * w_3) = \overline{w_1(\overline{w_2w_3})} \quad \text{και} \quad (w_1 * w_2) * w_3 = \overline{(\overline{w_1w_2})w_3}$$

προκύπτουν ως δύο διαφορετικές αναγωγές τής ίδιας λέξεως $w_1w_2w_3$.

Θεώρημα 2.6. *Έστω ότι το X είναι ένα μη κενό σύνολο, $\mathcal{F}(X)$ η ομάδα και $f : X \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ η απεικόνιση με τύπο $f(x) := x^1$ για κάθε $x \in X$. Τότε το ζεύγος $(\mathcal{F}(X), f)$ αποτελεί μια ελεύθερη ομάδα επί τού X.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $(G, \cdot)$ τυχούσα ομάδα και έστω $g : X \longrightarrow G$ τυχούσα απεικόνιση. Ορίζουμε την $h : \mathcal{F}(X) \longrightarrow G$ μέσω τού τύπου

$$h(x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}) := g(x_1)^{n_1} \cdots g(x_k)^{n_k}$$

για κάθε ανηγμένη λέξη $x_1^{n_1} \cdots x_n^{n_k}$ διάφορη τού 1 και θέτουμε $h(1) := e_G$.

Κατ' αρχάς η h είναι καλώς ορισμένη απεικόνιση (βάσει τού θεωρήματος 2.5) και αποτελεί προφανώς έναν ομομορφισμό ομάδων. Επιπροσθέτως, για κάθε $x \in X$ παρατηρούμε ότι ισχύει

$$h \circ f(x) = h(x^1) = g(x)^1 = g(x).$$

Με άλλα λόγια, διαθέτουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & G \end{tikzcd}$$

Τέλος, εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιος ομομορφισμός $h' : \mathcal{F}(X) \longrightarrow G$, ο οποίος επίσης καθιστά το ανωτέρω διάγραμμα μεταθετικό, τότε για κάθε $x \in X$ θα ισχύει

$$h'(x^1) = h' \circ f(x) = g(x) = h \circ f(x) = h(x^1).$$

Ως εκ τούτου, οι ομομορφισμοί h και h' θα ταυτίζονται επί τού συνόλου X, το οποίο παράγει την ομάδα $\mathcal{F}(X)$. Συνεπώς θα ταυτίζονται επί ολοκλήρου τής $\mathcal{F}(X)$, οπότε $h = h'$. Βάσει τής καθολικής ιδιότητας τού ορισμού 2.1 αυτό σημαίνει ότι το ζεύγος $(\mathcal{F}(X), f)$ αποτελεί πράγματι μια ελεύθερη ομάδα επί τού X.

3 ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΟΜΑΔΩΝ

Ορισμός 3.1. Έστω G μια ομάδα και έστω $A \subseteq G$ ένα υποσύνολό της. Ορίζουμε το **ορθόθετο έγκλεισμα τού A εντός τής G** ως την υποομάδα

$$\mathrm{ncl}(A) := \bigcap \{H \subseteq G : \ H \lhd G \ \text{ και } \ A \subseteq H\} \lhd G.$$

Προφανώς, το ορθόθετο έγκλεισμα $\mathrm{ncl}(A)$ είναι η *ελάχιστη* ορθόθετη υποομάδα τής G που περιέχει το υποσύνολο A.

Ορισμός 3.2. Έστω ότι η G είναι μια ομάδα, X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}(X)$ ένα υποσύνολο τής ελεύθερης ομάδας επί τού X. Λέμε ότι η G διαθέτει την **παράσταση** $G = \langle X \mid \mathcal{R} \rangle$ όταν

$$G = \mathcal{F}(X)/\mathrm{ncl}(\mathcal{R}),$$

όπου $\mathrm{ncl}(\mathcal{R})$ είναι το ορθόθετο έγκλεισμα τού συνόλου $\mathcal{R}$ εντός τής $\mathcal{F}(X)$. Τα στοιχεία τού συνόλου X καλούνται **γεννήτορες**, ενώ τα στοιχεία τού συνόλου $\mathcal{R}$, (**ορίζουσες**) **σχέσεις**. Στην ειδική περίπτωση όπου τα σύνολα X και $\mathcal{R}$ είναι πεπερασμένα, ας πούμε $X = \{x_1, ..., x_n\}$ και $\mathcal{R} = \{r_1, ..., r_s\}$, γράφουμε

$$G = \langle x_1, ..., x_n \mid r_1, ..., r_s \rangle$$

και καλούμε την ομάδα G **πεπερασμένως παραστάσιμη**.

Παρατήρηση 3.3. Ας υποθέσουμε ότι η G είναι μια ομάδα με παράσταση $G = \langle x_1, ..., x_n \mid r_1, ..., r_s \rangle$ και ας ορίσουμε τα σύνολα

$$X := \{x_1, ..., x_n\}, \ \ \mathcal{R} := \{r_1, ..., r_s\}.$$

(i) Πολλές φορές αναγράφουμε τις σχέσεις τής παραστάσεως ως ισότητες τής μορφής

$$G = \langle x_1, ..., x_n \,|\, r_1 = 1, ..., r_s = 1 \rangle,$$

όπου το $1 \in \mathcal{F}(x_1, ..., x_n)$ αναπαριστά την κενή λέξη.

(ii) Επειδή $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}(x_1, ..., x_n)$, οι σχέσεις τής παραστάσεως είναι λέξεις δομούμενες από τα σύμβολα $x_1, ..., x_n$. Είθισται λοιπόν να αναγράφουμε ένα τέτοιο στοιχείο $r \in \mathcal{R}$ ως $r = r(x_1, ..., x_n)$.

(iii) Έστω ότι η H είναι μια ομάδα και ότι $h_1, ..., h_n \in H$. Εάν $r = r(x_1, ..., x_n) \in \mathcal{R}$, τότε ως $r(h_1, ..., h_n)$ θα συμβολίζουμε το στοιχείο τής H που προκύπτει από τη λέξη $r(x_1, ..., x_n)$ κατόπιν αντικαταστάσεων των x_i με τα h_i, για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$.

Θεώρημα 3.4 (Von Dyck). *Έστω ότι οι G και H είναι δυο ομάδες. Ας υποθέσουμε ότι $H = \langle h_1, ..., h_n \rangle$, για κάποια $h_1, ..., h_n \in H$ και ότι η G διαθέτει την παράσταση $G = \langle x_1, ..., x_n \,|\, r_1, ..., r_s \rangle$. Έστω $\mathcal{R} := \{r_1, ..., r_s\}$. Εάν*

$$r_j(h_1, ..., h_n) := e_H, \quad \textit{για κάθε } j \in \{1, ..., s\},$$

τότε υπάρχει επιμορφισμός ομάδων $\psi : G \longrightarrow H$, τέτοιος ώστε $\psi(x_i \mathrm{ncl}(\mathcal{R})) = h_i$ για κάθε δείκτη $i \in \{1, ..., n\}$. Ιδιαιτέρως, εάν οι G και H είναι πεπερασμένες, τότε $|H| \leq |G|$. Εάν, επιπροσθέτως, $|G| \leq |H|$, τότε $H \cong G$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε τα $X = \{x_1, ..., x_n\}$ και $\mathcal{R} := \{r_1, ..., r_s\}$. Επειδή η G διαθέτει την παράσταση $G = \langle X \,|\, R \rangle$ έχουμε εξ ορισμού $G = \mathcal{F}(X)/\mathrm{ncl}(R)$. Θεωρούμε την απεικόνιση συνόλων $\varphi : X \longrightarrow H := \langle h_1, ..., h_n \rangle$ με τύπο $\varphi(x_i) := h_i$, για κάθε $i \in \{1, ..., n\}$. Εφαρμόζοντας την καθολική ιδιότητα τού ορισμού 2.1 για το ζεύγος $(\mathcal{F}(X), f)$ τού θεωρήματος 2.5 λαμβάνουμε έναν μοναδικό ομομορφισμό ομάδων $\widetilde{\varphi} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow H$ που καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\varphi}"] & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & H
\end{tikzcd}$$

Επομένως, $\widetilde{\varphi} \circ f = \varphi$, και επειδή $f(x_i) = x_i^1$ για κάθε $x_i \in X$ έχουμε

$$\widetilde{\varphi}(x_i) = \varphi(x_i) = h_i, \quad \text{για κάθε } i \in \{1, ..., n\}. \tag{1}$$

Ισχυρισμός: *Για το ορθόθετο έγκλεισμα τού $\mathcal{R}$ ισχύει* $\mathrm{ncl}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}$. Θα δείξουμε εν πρώτοις ότι

$$\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}.$$

Προς τούτο θεωρούμε τυχόντα δείκτη $j \in \{1, ..., s\}$ και τυχούσα λέξη $r_j = x_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots x_{i_k}^{n_{i_k}} \in \mathcal{R}$, για κάποια $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., n\}$. Εξ υποθέσεως, $r_j(h_1, ..., h_n) = e_H$, οπότε, βάσει τής σχέσεως (1) και τού γεγονότος ότι το $\widetilde{\varphi}$ είναι ομομορφισμός, έχουμε

$$\widetilde{\varphi}(r_j) = \widetilde{\varphi}(x_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots x_{i_k}^{n_{i_k}}) = \widetilde{\varphi}(x_{i_1})^{n_{i_1}} \cdots \widetilde{\varphi}(x_{i_k})^{n_{i_k}} \overset{(1)}{=} h_{i_1}^{n_{i_1}} \cdots h_{i_k}^{n_{i_k}} = r_j(h_1, ..., h_n) = e_H.$$

Άρα όντως $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}$. Ως εκ τούτου, ο πυρήνας $\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}$ αποτελεί μια ορθόθετη υποομάδα τής $\mathcal{F}(X)$ η οποία περιέχει το σύνολο $\mathcal{R}$. Επειδή το ορθόθετο έγκλεισμα $\mathrm{ncl}(\mathcal{R})$ είναι η ελάχιστη υποομάδα τής $\mathcal{F}(X)$ με αυτήν την ιδιότητα, έχουμε $\mathrm{ncl}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}$.

Εν συνεχεία, θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό $\pi : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X)/\mathrm{ncl}(\mathcal{R})$. Τα προσαναφερθέντα μας επιτρέπουν να εφαρμόσουμε το θέωρημα παραγοντοποιήσεως ομάδων 1.3 για τον επιμορφισμό

$\widetilde{\varphi} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow H$, λαμβάνοντας έτσι έναν επιμορφισμό $\psi : G := \mathcal{F}(X)/\mathrm{ncl}(\mathcal{R}) \longrightarrow H$, ο οποίος καθιστά το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\
\mathcal{F}(X) \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & H
\end{tikzcd}$$

Ειδικότερα,

$$\psi(x_i\,\mathrm{ncl}(\mathcal{R})) = \psi \circ \pi(x_i) = \widetilde{\varphi}(x_i) \overset{(1)}{=} h_i, \quad \text{για κάθε } i \in \{1, ..., n\}.$$

Εξάλλου, εάν οι G και H είναι πεπερασμένες ομάδες, βάσει τού πρώτου θεωρήματος ισομορφισμών ομάδων ισχύει

$$G/\mathrm{Ker}\psi \cong H \Longrightarrow |H| = \frac{|G|}{|\mathrm{Ker}\psi|} \leq |G|.$$

Εάν υποθέσουμε ότι $|G| \leq |H|$, τότε $|G| = |H|$, οπότε η απεικόνιση ψ είναι επιμορφισμός μεταξύ δύο ισοπληθικών, ήτοι ένας ισομορφισμός. □

Θεώρημα 3.5. *Έστω G μια ομάδα με παράσταση $G = \langle x_1, ..., x_n \,|\, r_1, ..., r_s \rangle$ και έστω G' μια ομάδα με παράσταση $G' = \langle x_1, ..., x_n \,|\, r_1, ..., r_s, r_{s+1} \rangle$. Τότε*

$$G' \cong G/\mathrm{ncl}(\{r_{s+1}\}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\mathcal{R}_1 := \{r_1, ..., r_s\}, \;\; \mathcal{R}_2 := \{r_1, ..., r_s, r_{s+1}\}$$

και $X := \{x_1, ..., x_n\}$, και θεωρούμε την ελεύθερη ομάδα επί τού συνόλου X, $\mathcal{F}(X)$. Εξ ορισμού,

$$G = \mathcal{F}(X)/\mathrm{ncl}(\mathcal{R}_1) \;\; \text{και} \;\; G' = \mathcal{F}(X)/\mathrm{ncl}(\mathcal{R}_2).$$

Επειδή $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, για κάθε $j = 1, ..., s$, έχουμε $r_j(x_1, ..., x_n) = 1_{G'}$. Ως εκ τούτου, το θεώρημα τού Von Dyck 3.4 εφαρμόζεται και μας παρέχει έναν επιμορφισμό ομάδων $\psi : G \longrightarrow G'$. Μάλιστα, όπως διαφαίνεται και από την απόδειξη τού ίδιου θεωρήματος, ισχύει $\psi \circ \pi = \widetilde{\varphi}$, όπου οι $\pi : \mathcal{F}(X) \longrightarrow G$ και $\widetilde{\varphi} : \mathcal{F}(X) \longrightarrow G'$ είναι οι φυσικοί επιμορφισμοί. Επομένως,

$$\mathrm{Ker}\psi = \pi(\mathrm{Ker}\widetilde{\varphi}) = \pi(\mathrm{ncl}(\mathcal{R}_2)).$$

Επειδή

$$\mathrm{ncl}(\mathcal{R}_2) = \mathrm{ncl}(\mathcal{R}_1 \cup \{r_{s+1}\}) = \mathrm{ncl}(\mathcal{R}_1) \cup \mathrm{ncl}(\{r_{s+1}\})$$

και $\pi(\mathrm{ncl}(\mathcal{R}_1)) = 1_{G'}$ λαμβάνουμε τελικώς $\mathrm{Ker}\psi = \mathrm{ncl}(\{r_{s+1}\})$. Ως εκ τούτου, κατά το πρώτο θέωρημα ισομορφισμών ομάδων, έχουμε $G/\mathrm{ncl}(\{r_{s+1}\}) \cong G'$. □

4 ΕΛΕΥΘΕΡΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

Στην παρούσα ενότητα γενικεύουμε την έννοια τής ελεύθερης ομάδας, εισάγοντας αυτήν τού *ελευθέρου γινομένου*. Όπως συμβαίνει και με τις ελεύθερες ομάδες, τα ελεύθερα γινόμενα ορίζονται μέσω μιας καθολικής ιδιότητας. Δοθείσας τής υπάρξεως και τής μοναδικότητας τού ελευθέρου γινομένου, θα δώσουμε συγκεκριμένη περιγραφή των ελευθέρων γινομένων μέσω των στοιχείων τους και μέσω παραστάσεων.

Ορισμός 4.1. Έστω $\{G_i,\ i \in I\}$ μια οικογένεια ομάδων. Ορίζουμε ως **ελεύθερο γινόμενο των** G_i κάθε ζεύγος $(P, \{j_i\}_{i \in I})$ αποτελούμενο από μια ομάδα P και μια οικογένεια ομομορφισμών ομάδων $j_i : G_i \longrightarrow P$, το οποίο πληροί την ακόλουθη καθολική ιδιότητα:

> Για κάθε ομάδα G και για κάθε απεικόνιση $f_i : G_i \to G$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : P \to G$, ούτως ώστε το κάτωθι διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
G_i \arrow[u, "j_i"] \arrow[r, "f_i"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & G
\end{tikzcd}$$

Λήμμα 4.2. *Εάν $(P, \{j_i\}_{i\in I})$ είναι ένα ελεύθερο γινόμενο των $\{G_i,\ i \in I\}$, τότε οι ομομορφισμοί j_i είναι μονομορφισμοί.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παγιώνουμε ένα $i \in I$ και θεωρούμε το διάγραμμα, στο οποίο η G ισούται με την G_i, ο f_i είναι ο ταυτοτικός ομομορφισμός και, για $k \neq i$, η απεικόνιση $f_k : G_k \longrightarrow G_i$ είναι η τετριμμένη απεικόνιση, ήτοι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
G_i \arrow[u, "j_i"] \arrow[r, "\mathrm{id}_{G_i}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & G_i
\end{tikzcd}$$

Τότε $\varphi \circ \varphi_i = \mathrm{id}_{G_i}$ και άρα ο j_i είναι μονομορφισμός. □

Λόγω τού λήμματος 4.2, οι απεικονίσεις $j_i : G_i \longrightarrow P$ καλούνται **ενθέσεις**.

Παράδειγμα 4.3. Κάθε ελεύθερη ομάδα (F, f) είναι ένα ελεύθερο γινόμενο απείρων κυκλικών ομάδων.

Εάν X είναι μια βάση τής F, τότε η $\langle x \rangle$ είναι άπειρη κυκλική, για κάθε $x \in X$. Θεωρούμε την $j_x : \langle x \rangle \hookrightarrow F$. Εάν G είναι μια ομάδα, τότε η απεικόνιση $f : X \longrightarrow G$ καθορίζει μια οικογένεια ομομορφισμών $f_x : \langle x \rangle \longrightarrow G$, όπου $x^n \longmapsto f(x)^n$. Επίσης, ο μοναδικός ομομορφισμός $\varphi : F \longrightarrow G$, ο οποίος επεκτείνει την απεικόνιση f, επεκτείνει καθένα ομομορφισμό f_x, δηλαδή $\varphi \circ j_x = f_x$, για κάθε $x \in X$.

Θεώρημα 4.4. *Έστω $\{G_i,\ i \in I\}$ μια οικογένεια ομάδων. Εάν $(P, \{j_i\}_{i\in I})$ και $(Q, \{k_i\}_{i \in I})$ είναι δυο ελεύθερα γινόμενα των G_i, τότε $P \cong Q$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή το $(P, \{j_i\}_{i\in I})$ είναι ένα ελεύθερο γινόμενο των G_i, υπάρχει ομομορφισμός $\varphi : P \longrightarrow Q$ με $\varphi \circ h_i = k_i$, για κάθε $i \in I$. Ομοίως, υπάρχει απεικόνιση $\psi : Q \longrightarrow P$ με $\psi \circ k_i = j_i$, για κάθε $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[dr, shift left, "\varphi"] & \\
G_i \arrow[u, "j_i"] \arrow[r, "k_i"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & Q \arrow[ul, shift left, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

Θεωρούμε, τώρα, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "\psi\circ\varphi"] & \\ G_i \arrow[u, "j_i"] \arrow[r, "j_i"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & P \end{tikzcd}$$

Οι απεικονίσεις $\psi \circ \varphi$ και id_P καθιστούν το ανωτέρω διάγραμμα μεταθετικό. Βάσει τής καθολικής ιδιότητας στον ορισμό τού ελευθέρου γινομένου υπάρχει μοναδική απεικόνιση που καθιστά το ανωτέρω διάγραμμα μεταθετικό, οπότε $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_P$. Ομοίως, πρέπει $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Q$. Άρα ο $\varphi : P \longrightarrow Q$ είναι ισομορφισμός. □

Λόγω τού θεωρήματος 4.4 έχουμε τη δυνατότητα να ομιλούμε για *το* ελεύθερο γινόμενο $(P, \{j_i\}_{i\in I})$ των $\{G_i,\ i \in I\}$. Τούτο θα το συμβολίζουμε, απλούστερα, ως εξής:

$$P = \mathop{\ast}_{i\in I} G_i.$$

Ειδικότερα, εάν το I είναι πεπερασμένο, το ελεύθερο γινόμενο συμβολίζεται ως

$$G_1 * \cdots * G_n.$$

Θεώρημα 4.5. *Δεδομένης μιας οικογενείας $\{G_i,\ i \in I\}$ ομάδων, υπάρχει ένα ελεύθερο γινόμενο αυτών.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη αυτού τού θεωρήματος είναι παρόμοια εκείνης τής υπάρξεως ελεύθερης ομάδας. Αρκεί να κατασκευάσουμε το εν λόγω ελεύθερο γινόμενο.

Θεωρούμε ότι τα σύνολα $G_i^{\#} := G_i \setminus \{1\}$ είναι ανά δύο ξένα. Καλούμε λέξη (ειλημμένη από το "αλφάβητο" $(\bigcup_{i\in I} G_i^{\#}) \cup \{1\}$) κάθε πεπερασμένο γινόμενο τής μορφής:

$$w = g_1 \cdots g_n,$$

όπου κάθε g_i ανήκει σε κάποιο $G_i^{\#} \cup \{1\}$. Μία λέξη $w = g_1 ... g_n$ θα καλείται **ανηγμένη** εάν είτε $w = 1$ είτε κάθε διαδοχικά στοιχεία g_i, g_{i+1} ανήκουν σε ξένα σύνολα $G_i^{\#}, G_{i+1}^{\#}$, αντίστοιχα. Έστω ότι τα στοιχεία τού ελευθέρου γινομένου είναι όλες οι ανηγμένες λέξεις.

Ας υποθέσουμε ότι οι $w_1 = g_1 \cdots g_n$ και $w_2 = g_1' \cdots g_n'$ είναι δύο ανηγμένες λέξεις. Ορίζουμε τότε τη "διαδοχική παράθεσή τους":

$$w_1 w_2 := g_1 \cdots g_n g_1' \cdots g_n'.$$

Η λέξη $w_1 w_2$ που προκύπτει δεν είναι κατ' ανάγκην ανηγμένη, διότι ενδέχεται το τελευταίο σύμβολο τής w_1 και το πρώτο σύμβολο τής w_2 να βρίσκονται στο ίδιο σύνολο $G_i^{\#}$, οπότε οφείλουμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Τα g_n, g_1' βρίσκονται στο ίδιο σύνολο $G_i^{\#}$ και $g_n g_1' \neq 1$. Τότε έχουμε $g_n g_1' \in A_i^{\#}$ και άρα η λέξη $g_1 \cdots (g_n g_1') \cdots g_n'$ είναι ανηγμένη.

(ii) Τα g_n, g_1' βρίσκονται στο ίδιο σύνολο $G_i^{\#}$ και $g_n g_1' = 1$. Τότε παραλείπουμε τον όρο $g_n g_1'$ και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία έως ότου καταλήξουμε σε μια ανηγμένη λέξη.

Μέσω τής ανωτέρω διαδικασίας είναι προφανές ότι από μια τυχούσα λέξη w μπορεί να προκύψει πάντοτε μια ανηγμένη λέξη $\overline{w}$. Μάλιστα, μπορεί εύκολα να δείξει κάνεις ότι η ανηγμένη μορφή είναι μοναδική (χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ανάλογα εκείνων τής προτάσεως 2.5). Ως εκ τούτου, είναι φυσικό να ορίσουμε επί τού ελευθέρου γινομένου την πράξη:

$$w_1 * w_2 = \overline{w_1 w_2}.$$

Το ελεύθερο γινόμενο, εφοδιασμένο με την εν λόγω πράξη, αποτελεί ομάδα. Πράγματι· ως ουδέτερο στοιχείο της διαθέτει τη λέξη $w = 1$ (η οποία είναι εξ ορισμού ανηγμένη), ενώ το αντίστροφο μιας λέξεως $w = g_1 \cdots g_n$ είναι η ανηγμένη λέξη $g_n^{-1} \cdots g_1^{-1}$. Τέλος, η προσεταιριστικότητα τής πράξεως έπεται από τη μοναδικότητα των ανηγμένων λεέξεων και από το γεγονός ότι οι λέξεις

$$w_1 * (w_2 * w_3) = \overline{w_1(\overline{w_2 w_3})} \quad \text{και} \quad (w_1 * w_2) * w_3 = \overline{(\overline{w_1 w_2})w_3}$$

προκύπτουν ως δύο διαφορετικές αναγωγές τής ίδιας λέξεως $w_1 w_2 w_3$. □

Εάν το P είναι το ελεύθερο γινόμενο δυο ομάδων A και B και εάν $f : A \longrightarrow G$ και $g : B \longrightarrow G$ είναι ομομορφισμοί, τότε ο ομομορφισμός $\varphi : P \longrightarrow G$ τού ορισμού τού ελευθέρου γινομένου δίδεται από τον τύπο

$$\varphi(a_1 b_1 ... a_n b_n) = f(a_1)g(b_1)...f(a_n)g(b_n).$$

Η φ είναι καλώς ορισμένη απεικόνιση λόγω τής μοναδικότητας τής γραφής των ανηγμένων λέξεων. Μάλιστα, δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι η φ είναι ομομορφισμός ομάδων.

Θεώρημα 4.6 (Διευθετημένη Μορφή). *Εάν $g \in *_{i\in I} G_i$ και $g \neq 1$, τότε το g γράφεται μονοσημάντως υπό τη μορφή*

$$g = g_1 ... g_n,$$

όπου οι διαδοχικοί παράγοντες a_i, a_{i+1} βρίσκονται σε ξένα $G_i^{\#}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το ελεύθερο γινόμενο, το οποίο κατασκευάσθηκε στο θεώρημα 4.5, έχει ως στοιχεία του όλες τις ανηγμένες λέξεις. □

Θεώρημα 4.7. *Έστω $\{G_i,\, i \in I\}$ μια οικογένεια ομάδων και έστω $(X_i, \mathcal{R}_i)$ μια παράσταση τής G_i, όπου τα σύνολα $\{X_i,\, i \in I\}$ είναι ανά δύο ξένα. Τότε μια παράσταση τού $\underset{i\in I}{\ast} G_i$ είναι η*

$$\left(\bigcup_{i\in I} X_i \mid \bigcup_{i\in I} \mathcal{R}_i \right).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς, εάν F_i είναι μια ελεύθερη ομάδα με βάση το σύνολο X_i, τότε η $F := \underset{i\in I}{\ast} F_i$ είναι μια ελεύθερη ομάδα με βάση το $\bigcup_{i\in I} X_i$. Θεωρούμε τις ενθέσεις $\{j_i : G_i \hookrightarrow \underset{i\in I}{\ast} G_i\}$. Εάν H_i είναι μια ορθόθετη υποομάδα τής F_i παραστάσιμη μέσω των σχέσεων $\mathcal{R}_i$ και εάν $v_i : F_i \longrightarrow G_i$ είναι ένας επιμορφισμός με πυρήνα $\mathrm{Ker} v_i = H_i$, τότε ο ομομορφισμός $\varphi : F \longrightarrow \underset{i\in I}{\ast} G_i$, ο οποίος επεκτείνει όλες τις $F_i \longrightarrow G_i \hookrightarrow \underset{i\in I}{\ast} G_i$, έχει ως πυρήνα του μια ορθόθετη υποομάδα παράστασιμη μέσω των σχέσεων $\bigcup_{i\in I} \mathcal{R}_i$. □

5 Το θεώρημα των Seifert και van Kampen

Έστω ότι X είναι ένας τοπολογικός χώρος, U, V ανοικτά υποσύνολα τού X, η ένωση των οποίων είναι ο X και η τομή των οποίων είναι μη κενή. Επιλέγουμε ένα σημείο βάσεως $p \in U \cap V$. Μέσω των απεικονίσεων

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "k"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & X \\ & V \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

επάγονται οι κάτωθι ομομορφισμοί θεμελιωδών ομάδων

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{\pi}_1(U,p) \arrow[dr, "k_*"] & \\
\boldsymbol{\pi}_1(U \cap V,p) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & \boldsymbol{\pi}_1(X,p). \\
 & \boldsymbol{\pi}_1(V,p) \arrow[ur, "l_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Από τη χαρακτηριστική ιδιότητα τού ελευθέρου γινομένου οι k_* και l_* επάγουν ένα ομομορφισμό

$$\Phi : \boldsymbol{\pi}_1(U,p) * \boldsymbol{\pi}_1(V,p) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(X,p)$$

, ο οποίος καθιστά το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{\pi}_1(U,p) \arrow[d, hook] \arrow[drr, "k_*"] & & \\
\boldsymbol{\pi}_1(U \cap V,p) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & \boldsymbol{\pi}_1(U,p) * \boldsymbol{\pi}_1(V,p) \arrow[rr, "\Phi"] & & \boldsymbol{\pi}_1(X,p). \\
 & \boldsymbol{\pi}_1(V,p) \arrow[u, hook'] \arrow[urr, "l_*"'] & &
\end{tikzcd}$$

Θεώρημα 5.1 (Seifert–Van Kampen). *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Υποθέτουμε ότι $U, V \subseteq X$ είναι δυο ανοικτά υποσύνολα (τού X), η ένωση των οποίων είναι ολόκληρος ο X, με τα U, V και $U \cap V$ δρομοσυνεκτικά σύνολα. Έστω $p \in U \cap V$. Ορίζουμε το υποσύνολο*

$$C := \{(i_*\gamma)(j_*\gamma)^{-1} \; : \; \gamma \in \boldsymbol{\pi}_1(U \cap V, p)\} \subseteq \boldsymbol{\pi}_1(U,p) * \boldsymbol{\pi}_1(V,p).$$

Τότε ο ομομορφισμός $\Phi : \boldsymbol{\pi}_1(U,p) * \boldsymbol{\pi}_1(V,p) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(X,p)$ είναι επιμορφισμός και ο πυρήνας του είναι η ορθόθετη θήκη[1] τού C στο $\boldsymbol{\pi}_1(U,p) * \boldsymbol{\pi}_1(V,p)$, οπότε

$$\boldsymbol{\pi}_1(X,p) \cong (\boldsymbol{\pi}_1(U,p) * \boldsymbol{\pi}_1(V,p))/\overline{C}.$$

Ειδικότερα, η $\boldsymbol{\pi}_1(X,p)$ παράγεται από τις εικόνες των $\boldsymbol{\pi}_1(U,p)$ και $\boldsymbol{\pi}_1(V,p)$ μέσω των ομομορφισμών των επαγομένων από τον εγκλεισμό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή χρειάζεται να θεωρήσουμε δρόμους και τις κλάσεις ομοτοπίας τους σε διάφορους χώρους, για την απόδειξη αυτή θα βελτιώσουμε τον συμβολισμό μας για να προσδιορίσουμε επακριβώς το πού βρίσκονται οι ομοτοπίες. Εάν a και b είναι δρόμοι εντός τού X, οι οποίοι τυγχάνει να βρίσκονται εντός ενός εκ των υποσύνολων U, V, ή $U \cap V$, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$a \underset{U}{\simeq} b, \qquad a \underset{V}{\simeq} b, \qquad a \underset{U \cap V}{\simeq} b, \qquad a \underset{X}{\simeq} b$$

και θα υποδηλώνουμε ότι ο a είναι ομότοπος με τον b εντός τού $U, V, U \cap V$, ή X, αντιστοίχως. Θα γράφουμε $[a]_U$ για την κλάση δρόμων τού a στην $\boldsymbol{\pi}_1(U,p)$ και ομοίως για τα άλλα σύνολα. Έτσι,

[1]Θα συμβολίζουμε την ορθόθετη θήκη τού C εντός τού $\boldsymbol{\pi}_1(U,p) * \boldsymbol{\pi}_1(V,p)$ απλώς ως $\overline{C}$ για να αποφύγουμε τον μακροσκελή συμβολισμό $\mathrm{ncl}_{\boldsymbol{\pi}_1(U,p) * \boldsymbol{\pi}_1(V,p)}(C)$.

για παράδειγμα, εάν ο a είναι βρόχος εντός τού $U \cap V$, οι ομομορφισμοί οι επαγόμενοι από τους εγκλεισμούς $i : U \cap V \hookrightarrow U$ και $k : U \hookrightarrow X$ μπορούν να γραφούν

$$i_*([a]_{U\cap V}) = [a]_U,$$

$$k_*([a]_U) = [a]_X.$$

Πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν δύο διαφορετικούς τύπους πολλαπλασιασμού: τον πολλαπλασιασμό κλάσεων δρόμων εντός οιασδήποτε θεμελιώδους ομάδας και τον πολλαπλασιασμό λέξεων εντός ενός ελεύθερου γινομένου ομάδων. Θα συμβολίζουμε τον πολλαπλασιασμό δρόμων και κλάσεων δρόμων ως εξής

$$[a]_U \bullet [b]_U := [a \circledast b]_U.$$

Για να διαφοροποιήσουμε τους δύο πολλαπλασιασμούς συμβολίζουμε τον πολλαπλασιασμό εντός τού ελευθέρου γινομένου ομάδων με έναν *σκέτο αστερίσκο*. Επί παραδείγματι,

$$[a]_U * [b]_U * [c]_V = [a \circledast b]_U * [c]_V \in \boldsymbol{\pi}_1(U,p)/\boldsymbol{\pi}_1(V,p),$$

η δε απεικόνιση $\Phi : \boldsymbol{\pi}_1(U,p) * \boldsymbol{\pi}_1(V,p) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(X,p)$ μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned}\Phi([a_1]_U * [a_2]_V * \ldots * [a_{m-1}]_U * [a_m]_V) &= k_*[a_1]_U \bullet l_*[a_2]_V \bullet \ldots \bullet k_*[a_{m-1}]_U \bullet l_*[a_m]_V \\ &= [a_1]_X \bullet [a_2]_X \bullet \ldots \bullet [a_{m-1}]_X \bullet [a_m]_X \\ &= [a_1 \circledast a_2 \circledast \ldots \circledast a_{m-1} \circledast a_m]_X.\end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε τα εξής: (1) Η Φ είναι επιρριπτική, (2) $\overline{C} \subseteq \mathrm{Ker}\Phi$ και (3) $\mathrm{Ker}\Phi \subseteq \overline{C}$.

Βήμα 1: Έστω $a : \mathbf{I} \longrightarrow X$ τυχών βρόχος εντός τού X με σημείο αναφοράς το p. Λόγω τού λήμματος τού αριθμού Lebesgue (βλ. λήμμα 1.8.18, Σημειώσεις Μαθήματος) μπορούμε να επιλέξουμε έναν αρκούντως μεγάλον n, τέτοιον ώστε ο a να απεικονίζει κάθε υποδιάστημα $[(i-1)/n, i/n]$ είτε στο U είτε στο V. (Για τον λόγο αυτόν είναι σημαντικό το ότι τα U, V είναι ανοικτά). Συμβολίζοντας ως a_i τον περιορισμό τού a στο $[(i-1)/n, i/n]$, η κλάση δρόμων τού a εντός τού X γράφεται ως

$$[a]_X = [a_1 \circledast a_2 \circledast \ldots \circledast a_n]_X.$$

Το πρόβλημα με αυτήν την έκφραση είναι ότι, εν γένει, οι δρόμοι a_i δεν είναι κλειστοί (ήτοι δεν είναι βρόχοι). Για να το διορθώσουμε αυτό, για κάθε $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, επιλέγουμε έναν δρόμο h_i από το p στο $a(i/n)$. Εάν $a(i/n) \in U \cap V$, τότε ο τρόπος επιλογής τού h_i είναι τέτοιος, ώστε οh_i να βρίσκεται εξ ολοκλήρου εντός τού $U \cap V$. Διαφορετικά, ο h_i επιλέγεται έτσι, ώστε να βρίσκεται σε οιοδήποτε σύνολο U ή V που περιέχει το $a(i/n)$. (Για αυτόν τον λόγο τα σύνολα U, V και $U \cap V$ πρέπει να είναι δρομοσυνεκτικά). Εν τοιαύτη περιπτώσει θέτουμε

$$\widetilde{a}_i := h_{i-1} \circledast a_i \circledast \overline{h_i}$$

(με τους h_0 και h_n να είναι ο σταθερός βρόχος c_p), έτσι ώστε κάθε $\widetilde{a}_i$ να είναι ένας βρόχος με σημείο αναφοράς το p ευρισκόμενος εξ ολοκλήρου εντός είτε τού U είτε τού V. Παρατηρούμε ότι ο a γράφεται υπό τη μορφή

$$[a]_X = [\widetilde{a}_1 \circledast \widetilde{a}_2 \circledast \ldots \circledast \widetilde{a}_n]_X.$$

Εν συνεχεία θεωρούμε το στοιχείο

$$\beta = [\widetilde{a}_1]_U * [\widetilde{a}_2]_V * \ldots * [\widetilde{a}_n]_V \in \boldsymbol{\pi}_1(U,p) * \boldsymbol{\pi}(V,p),$$

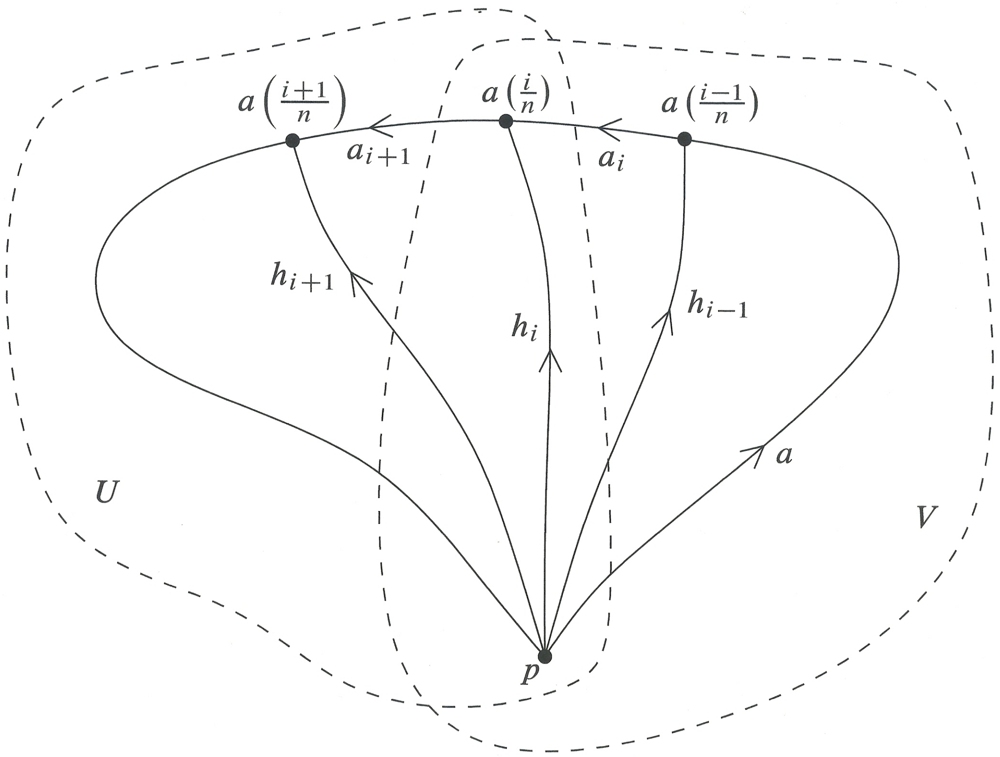
όπου επιλέγουμε είτε το U είτε το V για κάθε $\widetilde{a}_i$ αναλόγως τού ποιο σύνολο περιέχει την εικόνα του. Έχουμε

$$\Phi(\beta) = [\widetilde{a}_1 \circledast \widetilde{a}_2 \circledast \ldots \circledast \widetilde{a}_n]_X = [a]_X,$$

οπότε η Φ είναι επιρριπτική.

Βήμα 2: $\overline{C} \subseteq \mathrm{Ker}\Phi$. Σημειωτέον ότι, εάν δείξουμε ότι το C περιέχεται στο $\mathrm{Ker}\Phi$, τότε η ορθόθετη θήκη περιέχεται στο $\mathrm{Ker}\Phi$, διότι το $\mathrm{Ker}\Phi$ είναι ορθόθετη υποομάδα τής $\boldsymbol{\pi}_1(U,p) * \boldsymbol{\pi}_1(V,p)$. Έστω, λοιπόν, τυχόν $\gamma = [a]_{U\cap V} \in \boldsymbol{\pi}(U\cap V, p)$. Τότε

$$\Phi((i_*\gamma)(j_*\gamma)^{-1}) = \Phi([a]_V * [\overline{a}]_V) = [a \circledast \overline{a}]_X = [1].$$



Σχήμα 1: Απόδειξη ότι η Φ είναι επιρριπτική.

Βήμα 3: Έστω

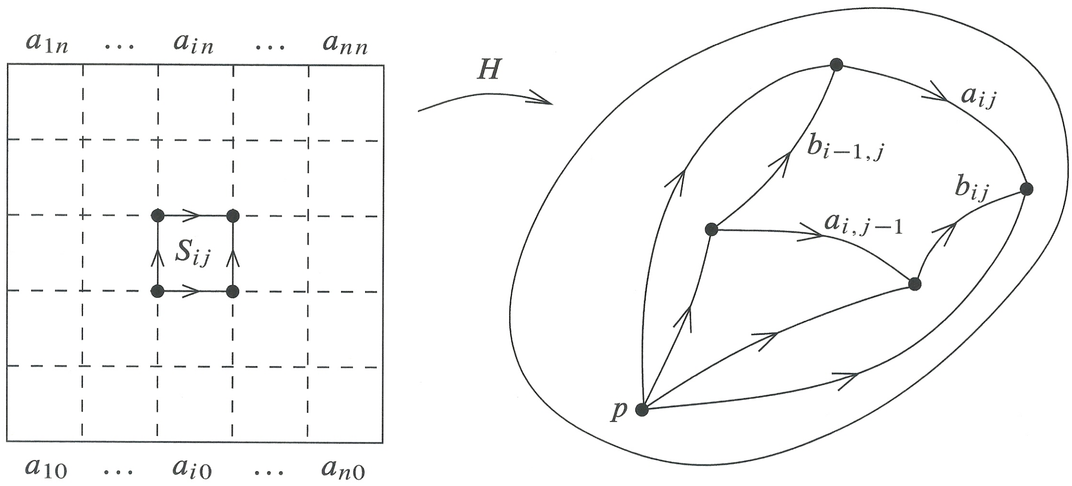
$$a = [a_1]_U * [a_2]_V * \dots * [a_k]_V \in \boldsymbol{\pi}_1(U,p) * \boldsymbol{\pi}_1(V,p)$$

τυχόν στοιχείο τού ελευθέρου γινομένου με $\Phi(a) = [1]_X$. Τούτο σημαίνει ότι $[a_1 \circledast a_2 \circledast \dots \circledast a_k]_X = [1]_X$, το οποίο είναι ισοδύναμο με

$$a_1 \circledast a_2 \circledast \dots \circledast a_k \underset{X}{\simeq} c_p.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $a \in \overline{C}$.

Έστω $H : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X$ μια ομοτοπία δρόμων από τον $a_1 \circledast a_2 \circledast \dots \circledast a_k$ στον c_p εντός τού X. Χρησιμοποιώντας το λήμμα τού Lebesgue υποδιαιρούμε το $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ σε τετράγωνα πλευράς $1/n$, ούτως ώστε η H να απεικονίζει κάθε τετράγωνο $S_{ij} = [(i-1)/n, i/n] \times [(j-1)/n, j/n]$ είτε στο U είτε στο V. Έστω ότι u_{ij} είναι η εικόνα τής κορυφής $(i/n, j/n)$ μέσω τής H, a_{ij} ο περιορισμός τής H στο οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα $[(i-1)/n, i/n] \times \{j/n\}$ και b_{ij} ο περιορισμός τής H στο κάθετο ευθύγραμμο τμήμα $\{i/n\} \times [(j-1)/n, j/n]$.



Σχήμα 2: Απόδειξη ότι $\mathrm{Ker}\Phi \subseteq \overline{C}$.

Ο περιορισμός τής H στην κάτω ακμή τού μοναδιαίου τετραγώνου $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$, όπου $t = 0$, είναι ίσος με το γινόμενο δρόμων $a_1 \circledast a_2 \circledast ... \circledast a_k$. Εάν ο n επιλεγεί να είναι μια *αρκούντως μεγάλη* δύναμη τού 2, τότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι τα ληκτικά σημεία των δρόμων a_i τού γινομένου αυτού είναι τής μορφής i/n, οπότε ο δρόμος που λαμβάνουμε από τον περιορισμό τής H στην κάτω ακμή τού τετραγώνου μπορεί να γραφεί

$$H_0 \simeq a_1 \circledast a_2 \circledast ... \circledast a_k \simeq (a_{10} \circledast a_{20} \circledast ... \circledast a_{k0}) \circledast ... \circledast (a_{r0} \circledast ... \circledast a_{n0}).$$

Τούτο σημαίνει ότι

$$a = [a_{10} \circledast a_{20} \circledast ... \circledast a_{q0}]_U * ... * [a_{r0} \circledast ... \circledast a_{n0}]_V.$$

Επιθυμούμε να αποσυνθέσουμε τον a σε ελεύθερα γινόμενα ως $[a_{10}]_U * [a_{20}]_U * ...$ κ.ο.κ. Όμως αυτοί οι δρόμοι δεν είναι βρόχοι με βάση το p.

Για κάθε i και j, επιλέγουμε έναν δρόμο h_{ij} από το p στο v_{ij}, ανήκοντα εντός τής τομής $U \cap V$ εάν $u_{ij} \in U \cap V$, ή διαφορετικά εντός τού U ή τού V. (Εάν το v_{ij} είναι το σημείο p, τότε επιλέγουμε ως h_{ij} τον σταθερό βρόχο c_p.) Ορίζουμε, κατ' αυτόν τον τρόπο, τους βρόχους

$$\widetilde{a}_{ij} = h_{i-1,j} \circledast a_{ij} \circledast \overline{h}_{ij}, \qquad \widetilde{b}_{ij} = h_{i,j-1} \circledast b_{ij} \circledast \overline{h}_{ij}, \tag{2}$$

καθένας εκ των οποίων βρίσκεται εξ ολοκλήρου είτε εντός τού U είτε εντός τού V, οπότε ο a μπορεί να αποσυντεθεί ως ακολούθως:

$$a = [\widetilde{a}_{10}]_U * [\widetilde{a}_{20}]_U * ... * [\widetilde{a}_{n0}]_V. \tag{3}$$

Θα ήταν αρκετό να αποδειχθεί ότι η έκφραση (3) τού a μπορεί να αντικατασταθεί (modulo $\overline{C}$) με μία παρόμοια έκφραση λαμβανόμενη από τον περιορισμό τής H στην άνω ακμή τού τετραγώνου,

$$a \equiv [\widetilde{a}_{11}]_U * ... * [\widetilde{a}_{n1}]_V \pmod{\overline{C}},$$

με πιθανές εναλλαγές των U και V σε κάποιους παράγοντες. Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα αυτό, μεταφερόμαστε στην επόμενη γραμμή και επαγωγικώς λαμβάνουμε

$$a \equiv [\widetilde{a}_{1n}]_U * ... * [\widetilde{a}_{nn}]_V \pmod{\overline{C}}.$$

Όμως ολόκληρη η κάτω ακμή τού $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ απεικονίζεται (μέσω τής H) στο σημείο p, οπότε κάθε $\widetilde{a}_{in}$ ισούται με τον σταθερό βρόχο c_p και άρα το τελευταίο γινόμενο ισούται με το ταυτοτικό. Τούτο σημαίνει ότι $a \in \overline{C}$ και ότι έχουμε τελειώσει.

Εν συνεχεία θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή ως εξής: Υποθέτοντας ότι

$$a \equiv [\widetilde{a}_{1,j-1}]_U * \dots * [\widetilde{a}_{n,j-1}]_V \ (\operatorname{mod} \overline{C}). \tag{4}$$

θα δείξουμε ότι το a είναι ισοδύναμο modulo $\overline{C}$ με μια ανάλογη έκφραση με το $j-1$ αντικαθιστώμενο με το j και με κάποιες πιθανές εναλλαγές των U και V σε κάποιους παράγοντες.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε το εξής: Εάν a είναι ένας βρόχος εντός τού $U \cap V$, τότε οι $[a]_U$ και $[a]_V$ ανήκουν στην ίδια πλευρική κλάση τού ελευθέρου γινομένου modulo $\overline{C}$, διότι

$$[a]_V * \overline{C} = ([a]_U * [\overline{a}]_U) * [a]_V * \overline{C} = [a]_U * ([\overline{a}]_U * [\overline{a}]_V^{-1}) * \overline{C} = [a]_U * \overline{C}.$$

Επειδή η $\overline{C}$ είναι ορθόθετη,

$$x * [a]_V * y * \overline{C} = x * [a]_V * \overline{C} * y = x * [a]_U * \overline{C} * y = x * [a]_U * y * \overline{C}$$

για κάθε x, y στο ελεύθερο γινόμενο. Έτσι, κατά τους υπολογισμούς modulo $\overline{C}$, με τον a βρόχο εντός τού $U \cap V$, μπορούμε ελεύθερα να εναλλάσσουμε τις $[a]_U$ και $[a]_V$ όπου αυτές εμφανίζονται.

Θεωρούμε το τυπικό τετράγωνο S_{ij} και υποθέτουμε ειδικότερα ότι η H απεικονίζει το S_{ij} στο V. Το σύνορο τού S_{ij}, ακολουθούμενο κατά την ωρολογιακή φορά, με σημείο εκκινήσεως την κάτω αριστερή γωνία, απεικονίζεται στον δρόμο $(b_{i-1,j} \circledast a_{ij}) \circledast (\overline{b}_{ij} \circledast \overline{a}_{i,j-1})$. Εδώ θα εφαρμόσουμε το κάτωθι λήμμα:

Λήμμα 5.2 («Λήμμα τού τετραγώνου»). *Έστω $F : \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow X$ μια συνεχής απεικόνιση και f, g, h και k τέσσερις δρόμοι τού X, οι οποίοι ορίζονται ως εξής:*

$$\begin{aligned} f(s) &= F(s,0), \\ g(s) &= F(1,s), \\ h(s) &= F(0,s), \\ k(s) &= F(s,1). \end{aligned}$$

Τότε $f \circledast g \simeq h \circledast k$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε την εξής απεικόνιση:

$$G(t,s) = \begin{cases} F\left(2t, \dfrac{ts}{s-1}\right), & \text{εάν } t \in [0, \frac{1}{2}] \text{ και } s \in [0,1), \\ F(0, 2t), & \text{εάν } t \in [0, \frac{1}{2}] \text{ και } s = 1, \\ F\left(2t-1, \dfrac{t-1+s(2-t)}{s}\right), & \text{εάν } t \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ και } s \in (0,1], \\ F(1, 2t-1), & \text{εάν } t \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ και } s = 0. \end{cases}$$

Προφανώς, $G(t,0) = f \circledast g$ και $G(t,1) = h \circledast k$. □

Από τούτο το λήμμα λαμβάνουμε

$$a_{i,j-1} \underset{V}{\simeq} b_{i-1,j} \circledast a_{ij} \circledast \overline{b}_{ij}. \tag{5}$$

Τα (2) και (5) δίδουν

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_{i,j-1} &= h_{i-1,j-1} \circledast a_{i,j-1} \circledast \overline{h}_{i,j-1} \\ &\underset{V}{\simeq} h_{i-1,j-1} \circledast b_{i-1,j} \circledast a_{ij} \circledast \overline{b}_{ij} \circledast \overline{h}_{i,j-1} \\ &\underset{V}{\simeq} \widetilde{b}_{i-1,j} \circledast \widetilde{a}_{ij} \circledast \overline{\widetilde{b}}_{ij}, \end{aligned} \tag{6}$$

καθώς οι εσωτερικοί παράγοντες h_{ij} και $h_{i-1,j}$ διαγράφονται με τους αντιστρόφους τους.

Τώρα θεωρούμε τη σχέση (4) τού a. Για κάθε παράγοντα $[\widetilde{a}_{i,j-1}]_U$ εξετάζουμε εάν το τετράγωνο S_{ij}, το οποίο βρίσκεται επάνω από αυτόν, απεικονίζεται στο U ή στο V. Εάν απεικονίζεται στο V, τότε το $\widetilde{a}_{i,j-1}$ πρέπει να απεικονίζεται στο $U \cap V$ και μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με τον παράγοντα $[\widetilde{a}_{i,j-1}]_V$ (κατά modulo $\overline{C}$). Την ιδία διαδικασία πραγματοποιούμε για κάθε παράγοντα, το τετράγωνο τού οποίου απεικονίζεται στο U.
Στη σχέση (6) μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάθε παράγοντα $[\widetilde{a}_{i,j-1}]_V$ με το $[\widetilde{b}_{i-1,j}]_V * [\widetilde{a}_{ij}]_V * [\widetilde{b}_{ij}]_V^{-1}$ (και ομοίως για τους παράγοντες ως προς το U), οπότε

$$\begin{aligned} a &\equiv [\widetilde{b}_{0j}]_U * [\widetilde{a}_{1j}]_U * [\widetilde{b}_{1j}]_U^{-1} * \cdots * [\widetilde{b}_{n-1,j}]_V * [\widetilde{a}_{nj}]_V * [\widetilde{b}_{nj}]_V^{-1} \pmod{\overline{C}} \\ &\equiv [\widetilde{a}_{1j}]_U * \cdots * [\widetilde{a}_{nj}]_U \pmod{\overline{C}} \end{aligned}$$

Στην ανωτέρω σχέση χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι εσωτερικοί παράγοντες $\widetilde{b}_{ij}$ διαγράφονται μεταξύ τους (εναλλάσοντας τα $[\widetilde{b}_{ij}]_U$ με τα $[\widetilde{b}_{ij}]_V$, εάν είναι απαραίτητο) και ότι οι δρόμοι $\widetilde{b}_{0j}$ και $\widetilde{b}_{nj}$ ισούνται με τον σταθερό βρόχο c_p. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό μας βήμα και άρα τελειώσαμε.
$\square$

Αναφορές

[1] Lee J.M.: *Introduction to Topological Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **202**, Springer-Verlag, first ed. 2000; second ed. 2011.

[2] Munkres J.R.: *Topology*, second edition, Prentice Hall, 2000.

[3] Rotman J.J.: *An Introduction to the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **148**, Springer-Verlag, 1995.