Εργασια για το μαθημα «Αλγεβρικη Τοπολογια - Ομολογια»
Διδάξας: Δημήτριος Ι. Νταής

Το θεώρημα των ακυκληματικών μοντέλων, το θεώρημα των Eilenberg και Zilber και το θεωρήμα τού Künneth

Ιωάννης Μαρκάκης

Δεκέμβριος 2016

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σκοπός τής παρούσας εργασίας είναι η σύνδεση των ιδιαζόντων μοδίων ομολογίας τού χώρου γινομένου $X \times Y$ με αυτούς των τοπολογικών χώρων X και Y. Η σύνδεση αυτή υλοποιείται σε 3 μέρη.

Στο πρώτο εξ αυτών μελετούμε συναρτητές F από τυχούσες κατηγορίες $\mathscr{C}$ στην κατηγορία των R-μοδίων ή στην κατηγορία των αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων, όπου R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο. Κατ' αρχάς ορίζουμε την έννοια τού ελευθέρου συναρτητή και δείχνουμε ότι αυτός ικανοποιεί μια καθολική ιδιότητα που είναι παρόμοια εκείνης των ελευθέρων αντικειμένων μιας κατηγορίας. Έπειτα, μέσω αυτής αποδεικνύουμε το θεώρημα των ακυκληματικών μοντέλων, το οποίο μας παράσχει μια μέθοδο κατασκευής αλυσωτών μετασχηματισμών και ομοτοπιών μεταξύ αλυσωτών συμπλόκων από συναρτητές.

Στο δεύτερο μέρος υπενθυμίζουμε τον ορισμό τού τανυστικού γινομένου συμπλόκων και (κάνοντας χρήση τού θεωρήματος των ακυκλημάτικών μοντέλων) αποδεικνύουμε το Θεώρημα των Eilenberg και Zilber, το οποίο μας πληροφορεί ότι το σύμπλοκο $S_\bullet(X \times Y; R)$ των ιδιαζόντων αλυσίδων τού καρτεσιανού γινομένου δυο τοπολογικών χώρων X και Y είναι κατά τρόπο φυσικό ομοτοπικώς ισοδύναμο με το τανυστικό γινόμενο των αλυσωτών συμπλόκων τους $S_\bullet(X; R) \otimes_R S_\bullet(Y; R)$. Ως εκ τούτου, οι μόδιοι ομολογίας των συμπλόκων είναι ισόμορφοι.

Εξαιτίας τού ανωτέρω ισομορφισμού τίθεται ευλόγως το ερώτημα τού πώς εκφράζονται οι μόδιοι ομολογίας τού τανυστικού γινομένου δυο αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων $H_\bullet(C_\bullet \otimes_R D_\bullet)$ συναρτήσει των μοδίων ομολογίας των συμπλόκων $H_\bullet(C_\bullet)$ και $H_\bullet(D_\bullet)$. Στο τελευταίο μέρος τής εργασίας δίδεται η απάντηση. Αρχικώς ορίζονται τα γινόμενα στρέψεως, Tor_n^R, ως εξ αριστερών παράγωγοι συναρτητές τού τανυστικού γινομένου και αποδεικνύεται μια ειδική περίπτωση τού θεωρήματος τού *Künneth*. Μέσω αυτού συσχετίζονται οι μόδιοι ομολογίας τού τανυστικού γινομένου δυο αλυσωτών συμπλόκων με εκείνους των συμπλόκων, υπό κάποιες προϋποθέσεις για τον δακτύλιο R και τα σύμπλοκα. Τέλος, δίδεται ως πόρισμα το θεώρημα των καθολικών συντελεστών.

Κεφάλαιο 1

Το θεώρημα των ακυκληματικών μοντέλων

1.1 Ελεύθεροι Συναρτητές

Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο και έστω $\mathscr{C}$ οιαδήποτε κατηγορία. Η συλλογή $[\mathscr{C}, \mathfrak{Mod}_R]$ των συναρτητών[1] από την $\mathscr{C}$ στην κατηγορία $\mathfrak{Mod}_R$ των R-μοδίων, ικανοποιεί τα αξιώματα μιας *οιονεί κατηγορίας*[2], θεωρώντας ως μορφισμούς τους φυσικούς μετασχηματισμούς.

Συγκεκριμένα, για οιουσδήποτε συναρτητές $F, G : \mathscr{C} \to \mathfrak{Mod}_R$ μπορεί να ορισθεί πρόσθεση μεταξύ των φυσικών μετασχηματισμών από τον F στο G, η οποία ικανοποιεί τα αξιώματα τής ομάδας και είναι γραμμική ως προς τη σύνθεση μετασχηματισμών. Επίσης, για οιαδήποτε οικογένεια συναρτητών μπορούν να ορισθούν γινόμενα και συγκινόμενα ως συναρτητές που στέλνουν κάθε αντικείμενο X στο γινόμενο και στο συγκινόμενο τής οικογενείας R-μοδίων $\{F_i(X)\}_{i \in I}$, αντιστοίχως, και κάθε μορφισμό σε εκείνον τον μορφισμό που ορίζεται μέσω τής καθολικής ιδιότητας αυτών. Και μάλιστα, με τους φυσικούς μετασχηματισμούς που επάγονται από τους δομικούς μορφισμούς των γινομένων και συγκινομένων οιουδήποτε αντικειμένου ικανοποιούντες τις ζητούμενες καθολικές ιδιότητες. Παρομοίως, είναι δυνατόν να ορισθούν πυρήνες, συμπυρήνες, εικόνες και συνεικόνες φυσικών μετασχηματισμών, οπότε η $[\mathscr{C}, \mathfrak{Mod}_R]$ αποτελεί *αβελιανή οιονεί κατηγορία*.

Τούτο μας επιτρέπει να ομιλούμε για *αλυσωτά σύμπλοκα συναρτητών* και για την *ομολογία* αυτών. Επιπλέον, χάρη στον τρόπο ορισμού των πυρήνων και των συμπυρήνων συναρτητών, βλέπουμε ότι η ομολογία υπολογίζεται κατά αντικείμενο, μια ακολουθία είναι ακριβής εάν και μόνον εάν για κάθε αντικείμενο X η ακολουθία R-μοδίων που προκύπτει εφαρμόζοντας τους συναρτητές σε αυτό είναι ακριβής, ενώ τα συνήθη λήμματα τής Ομολογικής Άλγεβρας, όπως το *λήμμα των πέντε* και το *λήμμα τού φιδιού*, ισχύουν *και σε αυτήν* την οιονεί κατηγορία.

Από την άλλη, όμως, μεριά, η $[\mathscr{C}, \mathfrak{Mod}_R]$ δεν είναι απτή κατηγορία κατά κάποιον προφανή τρόπο, δηλαδή *τα αντικείμενά της δεν είναι σύνολα* (με κάποια επιπλέον δομή), οπότε δεν μπορούν να ορισθούν σε αυτήν *ελεύθερα αντικείμενα*. Γι' αυτόν τον λόγο, ορίζονται *ελεύθεροι συναρτητές*, ούτως ώστε να ικανοποιείται μια συνθήκη παρόμοια εκείνης τής εκφράζουσας την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων αντικειμένων.

Ορισμός 1.1.1. Μια **κατηγορία** $\mathscr{C}$ **με μοντέλα** $\mathscr{M}$ είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $(\mathscr{C}, \mathscr{M})$, όπου $\mathscr{C}$ είναι μια κατηγορία και $\mathscr{M}$ μια υποκλάση τού $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. Τα στοιχεία τής $\mathscr{M}$ ονομάζονται **μοντέλα**.

[1] Σε όλη την εργασία, όταν λέμε συναρτητής, αναφερόμαστε σε *συναλλοίωτους συναρτητές*.
[2] AHS04, υπό την έννοια τής προτάσεως I.3.48.

Ορισμός 1.1.2. Λέμε ότι ένας συναρτητής $F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ είναι **ελεύθερος** όταν υπάρχει μια οικογένεια $\mathscr{X} = \{(M_i, x_i)\}_{i \in I}$, τέτοια ώστε για κάθε $i \in I$ το M_i να είναι κάποιο αντικείμενο τής $\mathscr{C}$ και τα $x_i \in F(M_i)$ τέτοια, ώστε για κάθε $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ το $F(C)$ να είναι ελεύθερος R-μόδιος με βάση το

$$\mathscr{X}_C = \{F\sigma(x_i) | i \in I, \sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M_i, C)\}.$$

Εν τοιαύτη περιπτώσει το $\mathscr{X}$ καλείται **βάση τού συναρτητή** F. Επιπλέον, εάν $\mathscr{C}$ είναι μια κατηγορία με μοντέλα $\mathscr{M}$ και το M_i ανήκει στην $\mathscr{M}$ για κάθε $i \in I$, τότε λέμε ότι ο F είναι **ελεύθερος με μοντέλα στην** $\mathscr{M}$ ή ότι **έχει βάση στην** $\mathscr{M}$.

Η κατωτέρω πρόταση μας πληροφορεί ότι κάθε φυσικός μετασχηματισμός από έναν ελεύθερο συναρτητή F σε έναν άλλον εξαρτάται μόνον από τις τιμές του στη βάση τού F και από το ότι αυτές μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα, κάτι το οποίο εκφράζει την καθολική ιδιότητα των ελευθέρων αντικειμένων.

Πρόταση 1.1.3. *Έστω $F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ ένας ελεύθερος συναρτητής με βάση $\mathscr{X} = \{(M_i, x_i)\}_{i \in I}$. Για κάθε συναρτητή $W : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ και κάθε οικογένεια $\mathscr{Y} = \{(M_i, y_i)\}_{i \in I}$ με $y_i \in W(M_i)$ υπάρχει μοναδικός φυσικός μετασχηματισμός $\phi : F \to W$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\phi_{M_j}(x_j) = y_j$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς θα επαληθεύσουμε τον ισχυρισμό περί τής μοναδικότητας. Επειδή ο $F(C)$ είναι ελεύθερος R-μόδιος, ο μορφισμός ϕ_C καθορίζεται πλήρως από από τις τιμές του στη βάση $\mathscr{X}_C$. Εάν $(F\sigma)(x_i)$ είναι τυχόν σημείο τής βάσεως τού $F(C)$, ο ϕ είναι φυσικός μετασχηματισμός και ο $\sigma : M_i \to C$ είναι $\mathscr{C}$-μορφισμός,

$$\phi_C((F\sigma)(x_i)) = (W\sigma)(\phi_{M_i}(x_i)) = (W\sigma)(y_i),$$

οπότε η τιμή τού ϕ_C στο $(F\sigma)(x_i)$ και κατ' επέκταση και σε κάθε στοιχείο είναι πλήρως καθορισμένο από την επιλογή τού $\mathscr{Y}$. Επομένως, εάν ένας φυσικός μετασχηματισμός αυτού τού είδους υπάρχει, τότε είναι *μοναδικός*.

Εν συνεχεία, για την απόδειξη τής *ύπαρξεως* ενός φυσικού μετασχηματισμού αυτού τού είδους, θεωρούμε για κάθε $C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ τον μορφισμό ϕ_C που προκύπτει κατόπιν γραμμικής επεκτάσεως θέτοντας $\phi_C((F\sigma)(x_i)) = (W\sigma)(y_i)$ για κάθε στοιχείο $(F\sigma)(x_i)$ τής βάσεως τού $F(C)$. Ο $\phi = \{\phi_C\}_{C \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$ είναι φυσικός μετασχηματισμός εάν και μόνον εάν για κάθε $\mathscr{C}$-μορφισμό $f : C \to D$ το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\phi_C"] & F(D) \arrow[d, "\phi_D"] \\ W(C) \arrow[r, "W(f)"] & W(D) \end{tikzcd}$$

Καθώς ο $F(C)$ είναι ελεύθερος R-μόδιος, αρκεί να ελεγχθεί η μεταθετικότητα για κάποιο στοιχείο $(F\sigma)(x_i)$ τής βάσεως αυτού. Επειδή

$$(\phi_D(F(f)))((F\sigma)(x_i)) = \phi_D(F(f\sigma)(x_i)) = W(f\sigma)(y_j),$$
$$((W(f))\phi_C)((F\sigma)(x_i)) = (W(f))((W\sigma)(y_j)) = W(f\sigma)(y_j),$$

το διάγραμμα είναι όντως μεταθετικό και ο ϕ φυσικός μετασχηματισμός. □

Παράδειγμα 1.1.4. Έστω n ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός και έστω

$$S_n(-; R) : \mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$$

ο συναρτητής (από την κατηγορία *των τοπολογικών χώρων* στην κατηγορία *των αλυσωτών συμπλόκων* R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων) που στέλνει κάθε τοπολογικό χώρο X στον R-μόδιο των *ιδιαζόντων* *n-αλυσίδων* αυτού με συντελεστές ειλημμένους από τον R. Για κάθε τοπολογικό χώρο X ο $S_n(X;R)$ είναι ελεύθερος R-μόδιος με βάση το σύνολο των ιδιαζόντων n-μονοπλόκων $\sigma : \Delta^n \to X$. Εάν $\mathrm{id}_n : \Delta_n \to \Delta_n$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση τού θεμελιώδους n-μονοπλόκου, τότε

$$S_n(\sigma;R)(\mathrm{id}_n) = \sigma\,\mathrm{id}_n = \sigma.$$

Κατά συνέπειαν, η $\{S_n(\sigma;R)(\mathrm{id}_n) | \sigma : \Delta^n \to X\}$ είναι βάση τού $S_n(X;R)$ και, ως εκ τούτου, ο $S_n(-;R)$ είναι ελεύθερος συναρτητής με βάση το μονοσύνολο $\mathscr{X} = \{(\Delta_n, \mathrm{id}_n)\}$.

Λήμμα 1.1.5. *Θεωρούμε το κάτωθι μεταθετικό διάγραμμα συναρτητών από κάποια κατηγορία $\mathscr{C}$ με μοντέλα $\mathscr{M}$ σε εκείνην των R-μοδίων*[3].

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & G_1 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\beta"] & G_2 \arrow[d, "\gamma"] \\ W_0 \arrow[r, "\rho"] & W_1 \arrow[r, "\pi"] & W_2 \end{tikzcd}$$

Εάν ο F είναι ελέυθερος συναρτητής με μοντέλα στην $\mathscr{M}$, η πρώτη γραμμή είναι αλυσωτό σύμπλοκο, ήτοι $\tau\sigma = 0$, και η δεύτερη είναι ακριβής για κάθε $M \in \mathscr{M}$, τότε υπάρχει ένας φυσικός μετασχηματισμός $\alpha : F \to W_0$ που συμπληρώνει το διάγραμμα μεταθετικώς.

Απόδειξη. Έστω $\mathscr{X} = \{(M_i, x_i)\}_{i\in I}$ μια βάση τού F. Από τη μεταθετικότητα στο δεξιό τερτράγωνο λαμβάνουμε $\pi_i\beta_i\sigma_i(x_i) = \gamma_i\tau_i\sigma_i(x_i) = 0$ για κάθε $i \in I$. Καθώς $\tau_i\sigma_i = 0$, έχουμε $\beta_i\sigma_i(x_i) \in \mathrm{Ker}\,\pi_i$. Από την άλλη μεριά, η δεύτερη γραμμή είναι ακριβής στην $\mathscr{M}$, άρα $\mathrm{Ker}\,\pi_i = \mathrm{Im}\,\rho_i$, οπότε υπάρχει $w_i \in W_0(M_i)$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\rho(w_i) = \beta_i\sigma_i(x_i)$. Σύμφωνα με την πρόταση 1.1.3 υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\alpha : F \to W_0$, τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα $\alpha_i(x_i) = w_i$ για κάθε $i \in I$. Επειδή $\rho_i\alpha_i(x_i) = \beta_i\sigma_i(x_i)$ για κάθε $i \in I$, οι φυσικοί μετασχηματισμοί $\rho\alpha$ και $\beta\sigma$ συμπίπτουν στα στοιχεία τής βάσεως $\mathscr{X}$ τού συναρτητή F, οπότε από την πρόταση 1.1.3 ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει ότι ο α καθιστά το διάγραμμα μεταθετικό. □

1.2 Το θεώρημα των ακυκληματικών μοντέλων

Έστω $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ η κατηγορία των αλυσωτών συμπλόκων R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων. Κάθε συναρτητής

$$F : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$$

μπορεί να ιδωθεί και ως αλυσωτό σύμπλοκο συναρτητών $F_n : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ με συνοριακούς μορφισμούς τους φυσικούς μετασχηματισμούς $\partial_n : F_n \to F_{n-1}$ που επάγονται από τους συνοριακούς τελεστές των συμπλόκων $F(C)$, όπου $C \in \mathrm{Ob}\,(C)$. Τέτοιοι συναρτητές F λέγονται **μη αρνητικοί** όταν $F_i = 0$ για $i < 0$.

Θεώρημα 1.2.1 (Θεώρημα των ακυκληματικών μοντέλων)**.** *Έστω ότι $\mathscr{C}$ είναι μια κατηγορία και*

$$F, V : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$$

δυο μη αρνητικοί συναρτητές, τέτοιοι ώστε για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k,

- *ο F_k να είναι ελεύθερος με μοντέλα στην $\mathscr{M}_k \subseteq \mathrm{Ob}\,(\mathscr{C})$*
- $H_{k+1}(V(M)) = 0$ *για* $M \in \mathscr{M}_{k+1} \cup \mathscr{M}_{k+2}$.

[3]Σε όσα διαγράμματα εμφανίζονται μορφισμοί με *διακεκομμένη γραμμή*, υποθέτουμε ότι αυτοί δεν δίδονται εξ αρχής αλλά ότι συμπληρώνονται κατά την εκάστοτε αποδεικτική πορεία.

Τότε κάθε φυσικός μετασχηματισμός $\phi : H_0(F) \to H_0(V)$ επάγεται από κάποιον μονοσημάντως (μέχρι αλυσωτής ομοτοπίας) ορισμένο αλυσωτό μετασχηματισμό $\tau : F \to V$.

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε επαγωγικώς φυσικούς μετασχηματισμούς τ_i που συμπληρώνουν μεταθετικώς το κάτωθι διάγραμμα, όπου π_F και π_V είναι φυσικοί μετασχηματισμοί[4].

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "\partial_2^F"] \arrow[d, dashed, "\tau_2"] & F_1 \arrow[r, "\partial_1^F"] \arrow[d, dashed, "\tau_1"] & F_0 \arrow[r, "\pi_F"] \arrow[d, dashed, "\tau_0"] & H_0(F) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\ \dots \arrow[r] & V_2 \arrow[r, "\partial_2^V"] & V_1 \arrow[r, "\partial_1^V"] & V_0 \arrow[r, "\pi_V"] & H_0(V) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Εν πρώτοις, $\tau_n = 0$ για $n < 0$. Για $n = 0$ θεωρούμε το κάτωθι διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "\pi_F"] \arrow[d, dashed, "\tau_0"] & H_0(F) \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \arrow[d] \\ V_0 \arrow[r, "\pi_V"] & H_0(V) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ο F_0 είναι ελεύθερος. Επειδή οι π_F,π_V είναι επιμορφισμοί και οι δύο γραμμές είναι ακριβείς, μπορεί να εφαρμοσθεί το λήμμα 1.1.5, το οποίο δίδει τον ζητούμενο φυσικό μεταασχηματισμό $\tau_0 : F_0 \to V_0$ που συμπληρώνει το διάγραμμα μεταθετικώς. Επιπροσθέτως, στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "\partial_1^F"] \arrow[d, dashed, "\tau_1"] & F_0 \arrow[r, "\pi_F"] \arrow[d, "\tau_0"] & H_0F \arrow[d, "\phi"] \\ V_1 \arrow[r, "\partial_1^V"] & V_0 \arrow[r, "\pi_V"] & H_0V \end{tikzcd}$$

αμφότερες οι γραμμές είναι ακριβείς, καθόσον $H_0(V) = \operatorname{Coker}\partial_1^V$ και $H_0(F) = \operatorname{Coker}\partial_1^F$. Επειδή ο F_1 είναι ωσαύτως ελεύθερος, το λήμμα 1.1.5 δίδει έναν φυσικό μετασχηματισμό $\tau_1 : F_1 \to V_1$ που καθιστά το ανωτέρω διάγραμμα μεταθετικό.

Εν συνεχεία υποθέτουμε ότι έχουν ήδη κατασκευασθεί οι φυσικοί μετασχηματισμοί $\tau_0, \dots, \tau_n$ για κάποιον $n \geqslant 1$. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^F"] \arrow[d, dashed, "\tau_{n+1}"] & F_n \arrow[r, "\partial_n^F"] \arrow[d, "\tau_n"] & F_{n-1} \arrow[d, "\tau_{n-1}"] \\ V_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^V"] & V_n \arrow[r, "\partial_n^V"] & V_{n-1} \end{tikzcd}$$

Η πρώτη γραμμή είναι αλυσωτό σύμπλοκο, ο F_{n+1} είναι ελεύθερος με μοντέλα στην $\mathscr{M}_{n+1}$, ενώ η δεύτερη γραμμή είναι ακριβής στην $\mathscr{M}_{n+1}$, καθώς $H_n(V)|_{\mathscr{M}_{n+1}} = 0$, οπότε από το λήμμα 1.1.5 υπάρχει φυσικός μετασχηματισμός $\tau_{n+1} : F_{n+1} \to V_{n+1}$, τέτοιος ώστε το διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

Έχοντας αποδείξει την ύπαρξη, θα δείξουμε τώρα τη μοναδικότητα τού τ *μέχρι αλυσωτής ομοτοπίας*. Έστω $\rho : F \to V$ κάποιος αλυσωτός μετασχηματισμός που συμπληρώνει το διάγραμμα 1.1 μεταθετικώς. Θέτουμε $h := \tau - \rho$. Θα κατασκευάσουμε επαγωγικώς μια αλυσωτή μηδενοομοτοπία $\{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Θέτουμε αρχικώς $s_n := 0$ για $n < 0$, ενώ για $n = 0$ θεωρούμε το κάτωθι διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "\mathrm{id}_0"] \arrow[d, dashed, "s_0"] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, "h_0"] & 0 \arrow[d] \\ V_1 \arrow[r, "\partial_1^V"] & V_0 \arrow[r, "\pi_V"] & H_0(V) \end{tikzcd}$$

[4] $H_0(F) = F_0 / \mathrm{Im}\,\partial_1^F$ και $H_0(V) = V_0 / \mathrm{Im}\,\partial_1^V$, διότι οι συναρτητές είναι μη αρνητικοί.

Αμφότερες οι γραμμές του είναι ακριβείς, ο F_0 είναι ελεύθερος με μοντέλα στην $\mathscr{M}_0$ και το δεξιό τετράγωνο είναι μεταθετικό, καθώς

$$\pi_V h_0 = \pi_V \tau_0 - \pi_V \rho_0 = \phi\pi_F - \phi\pi_F = 0.$$

Εφαρμόζοντας εκ νέου το λήμμα 1.1.5 λαμβάνουμε κάποιον φυσικό μτασχηματισμό $s_0 : F_0 \to V_1$ που καθιστά το ανωτέρω διάγραμμα μεταθετικό.

Τέλος, υποθέτουμε ότι η ομοτοπία έχει κατασκευασθεί μέχρι το s_n για κάποιον $n \geqslant 0$ και θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} F_{n+1} \arrow[r, "\mathrm{id}_{n+1}"] \arrow[d, dashed, "s_{n+1}"] & F_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "h_{n+1}-s_n\partial^F_{n+1}"] & 0 \arrow[d] \\ V_{n+2} \arrow[r, "\partial^V_{n+2}"] & V_{n+1} \arrow[r, "\partial^V_{n+1}"] & V_n \end{tikzcd}$$

Η πρώτη γραμμή είναι ακριβής, ο F_{n+1} είναι ελεύθερος με μοντέλα στην $\mathscr{M}_{n+1}$, ενώ η δεύτερη γραμμή είναι ακριβής στην $\mathscr{M}_{n+1}$ καθώς ισχύει $H_{n+1}(V)|_{\mathscr{M}_{n+1}} = 0$. Εάν λοιπόν αποδείξουμε τη μεταθετικότητα τού διαγράμματος, το λήμμα 1.1.5 θα μας δώσει κάποιο $s_{n+1} : F_{n+1} \to V_{n+1}$ που θα συμπληρώνει το διάγραμμα, ήτοι έναν φυσικό μετασχηματισμό, τέτοιον ώστε να ισχύει $h_{n+1} = \partial^V_{n+1}s_{n+1} + s_n\partial^F_{n+1}$. Για να αποδείξουμε την μεταθετικότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \partial^V_{n+1}(h_{n+1} - s_n\partial^F_{n+1}) &= \partial^V_{n+1}h_{n+1} - \partial^V_{n+1}s_n\partial^F_{n+1} \\ &= \partial^V_{n+1}h_{n+1} - (h_n - s_{n-1}\partial^F_n)\partial^F_{n+1} \\ &= \partial^V_{n+1}h_{n+1} - h_n\partial^F_{n+1} = 0, \end{aligned}$$

με τη δεύτερη ισότητα προκύπτουσα από την επαγωγική υπόθεση και την τελευταία οφειλόμενη στο ότι ο h είναι αλυσωτός μετασχηματισμός. □

Πόρισμα 1.2.2. *Έστω ότι $\mathscr{C}$ είναι μια κατηγορία και*

$$F, V : \mathscr{C} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$$

δυο μη αρνητικοί συναρτητές, τέτοιοι ώστε για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k οι F_k και V_k να είναι ελεύθεροι με μοντέλα σε κάποια $\mathscr{M}_k \subseteq \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ και

$$H_{k+1}(F(M)) = H_k(V(M)) = 0$$

για $M \in \mathscr{M}_{k+1} \cup \mathscr{M}_{k+2}$. Εάν υπάρχει φυσική ισοδυναμία $\phi : H_0(F) \to H_0(V)$, τότε οι F, V είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι (ιδωμένοι ως αλυσωτά σύμπλοκα συναρτητών.)

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 1.2.1 για τους φυσικούς μετασχηματισμούς ϕ και ϕ^{-1} λαμβάνουμε αλυσωτούς μετασχηματισμούς $\tau : F \to V$, $\sigma : V \to F$ επάγοντες τους ϕ και ϕ^{-1}, αντιστοίχως. Ο $\phi^{-1}\phi = \mathrm{id}_{H_0(F)}$ επάγεται από τους $\sigma\tau$ και id_F. Άρα $\sigma\tau \simeq \mathrm{id}_F$. Κατ' αναλογίαν, $\tau\sigma \simeq \mathrm{id}_V$. Κατά συνέπειαν, οι F και V είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι. □

Κεφάλαιο 2

Το θεώρημα των Eilenberg και Zilber

Πριν προχωρήσουμε, υπενθυμίζουμε τον ορισμό και κάποιες βασικές ιδιότητες τού τανυστικού γινομένου δυο αλυσωτών συμπλόκων.

2.1 Τανυστικό γινόμενο αλυσωτών συμπλόκων

Ορισμός 2.1.1. Το **τανυστικό γινόμενο** δυο R-μοδίων M, N είναι ένα ζεύγος $(M \otimes_R N, \phi)$, όπου $M \otimes_R N$ είναι ένας R-μόδιος και $\phi : M \times N \to M \otimes_R N$ ένας ομομορφισμός R-μοδίων, ούτως ώστε για κάθε R-μόδιο K και κάθε διγραμμική απεικόνιση $f : M \times N \to K$ να υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός R-μοδίων $\tilde{f} : M \otimes_R N \to K$ με $f = \tilde{f}\phi$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & K \\ M \otimes_R N \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Ένα σύνολο γεννητόρων τού $M \otimes_R N$ απαρτίζεται από τα $m \otimes n := \phi(m, n)$, όπου $m \in M, n \in N$. Εξάλλου, εάν K, L είναι R-μόδιοι, $f : K \to M, g : L \to N$ ομομορφισμοί και $(K \otimes_R L, \phi')$ τανυστικό γινόμενο των K, L, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f \bar{\otimes} g$ με

$$\begin{tikzcd} K \times L \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "\phi'"] & M \times N \arrow[d, "\phi"] \\ K \otimes_R L \arrow[r, dashed, "f \bar{\otimes} g"] & M \otimes_R N \end{tikzcd}$$

ήτοι $(f \bar{\otimes} g)(k \otimes l) = f(k) \otimes g(l)$ για $k \in K, l \in L$.

Ορισμός 2.1.2. Έστω $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων και έστω K τυχών R-μόδιος. Ως **τανυστικό γινόμενο** $(M_\bullet \otimes_R K)_\bullet$ ορίζεται το $(M_\bullet \otimes_R K)_n = M_n \otimes_R K$ με συνοριακούς τελεστές

$$\partial_n^{M \otimes K} = \partial_n^{\otimes} : (M_\bullet \otimes_R K)_n \to (M_\bullet \otimes_R K)_n,$$

τέτοιους ώστε να ισχύει $\partial_n^{\otimes}(m \otimes k) = \partial_n(m) \otimes k$ για οιαδήποτε $m \in M, k \in K$.

Το γεγονός ότι το $\partial_n^{\otimes}$ είναι καλώς ορισμένο, καθώς και το ότι το $((M_\bullet \otimes_R K)_\bullet, \partial_\bullet^{\otimes})$ αποτελεί ένα αλυσωτό σύμπλοκο, θα αποδειχθούν (και μάλιστα, εντός ενός γενικότερου θεωρητικού πλαισίου) στα επόμενα εδάφια.

Παρατήρηση 2.1.3. Οι R-μόδιοι ομολογίας τού ανωτέρω αλυσωτού συμπλόκου ονομάζονται R-**μόδιοι ομολογίας τού** $M_\bullet$ **με συντελεστές ειλημμένους από τον** K. Θεωρώντας κάθε δακτύλιο αναφοράς μας R ως έναν $\mathbb{Z}$-μόδιο, ο εν λόγω ορισμός είναι συμβατός με τον συνήθη ορισμό των R-μοδίων τής (ιδιάζουσας) ομολογίας με συντελεστές ειλημμένους από τον R, καθώς για κάθε τοπολογικό ζεύγος (X, A) και για κάθε μη αρνητικό ακέραιο q έχουμε

$$\begin{aligned} S_q(X,A;R) &= \bigoplus_{\substack{\sigma:\Delta^q\to X\\ \sigma(\Delta^q)\not\subseteq A}} R[\sigma] \cong \bigoplus_{\substack{\sigma:\Delta^q\to X\\ \sigma(\Delta^q)\not\subseteq A}} (\mathbb{Z}[\sigma]\otimes_{\mathbb{Z}} R) \\ &\cong \left(\bigoplus_{\substack{\sigma:\Delta^q\to X\\ \sigma(\Delta^q)\not\subseteq A}} \mathbb{Z}[\sigma] \right) \otimes_{\mathbb{Z}} R = S_q(X,A;\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} R, \end{aligned}$$

όπου οι ανωτέρω ισομοφισμοί σχηματίζουν μια αλυσωτή ισοδυναμία, οπότε για κάθε ακέραιο n λαμβάνουμε

$$H_n(S_\bullet(X,A;R)) \cong H_n(S_\bullet(X,A;\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}} R).$$

Ορισμός 2.1.4. Το **τανυστικό γινόμενο** δυο αλυσωτών συμπλόκων $(M_\bullet.\partial_\bullet)$, $(M'_\bullet.\partial'_\bullet)$ R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων ορίζεται θέτοντας για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,

$$(M_\bullet \otimes_R M'_\bullet)_n := \bigoplus_{p+q=n} M_p \otimes_R M'_q$$

και θεωρώντας ως συνοριακό τελεστή $\partial_n^\otimes$ τον

$$\partial_n^\otimes(m_p\otimes m'_q) := \partial_p(m_p)\otimes m'_q + (-1)^p m_p \otimes \partial'_q(m'_q)$$

για κάθε $m_p \in M_p$ και κάθε $m'_q \in M'_q$.

Πρόταση 2.1.5. *Οι ανωτέρω συνοριακοί τελεστές είναι καλώς ορισμένοι και το* $(M_\bullet \otimes_R M'_\bullet)_\bullet$ *μαζί με αυτούς αποτελεί ένα αλυσωτό σύμπλοκο.*

Απόδειξη. Για κάθε $p, q \in \mathbb{Z}$, η απεικόνιση

$$\partial^{p,q} : (M_p \times M'_q) \to (M_\bullet \otimes_R M'_\bullet)_{p+q-1}$$

η οριζόμενη μέσω τού τύπου

$$\partial^{p,q}(m,m') := \partial_p(m)\otimes m' + (-1)^p m\otimes \partial'_q(m')$$

είναι διγραμμική, οπότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός R-μοδίων

$$\partial^{p\otimes q} : (M_p \otimes_R M'_q) \to (M_\bullet \otimes_R M'_\bullet)_{n-1},$$

τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\partial^{p\otimes q}(m\otimes m') = \partial_p(m)\otimes m' + (-1)^p m\otimes \partial'_q(m').$$

Θεωρούμε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ τον ομομορφισμό $\partial_n^\otimes$ που επάγεται στο ευθύ άθροισμα των p και q με $p+q = n$ από τους $\partial^{p\otimes q}$. Ο $\partial_n^\otimes$ ικανοποιεί τη σχέση τη δοθείσα στον ορισμό.

Για να δούμε ότι το $(M_\bullet \otimes_R M'_\bullet)_\bullet$ μαζί με τους $\partial_\bullet^\otimes$ αποτελεί αλυσωτό σύμπλοκο αρκεί να υπολογίσουμε τον $\partial_{n-1}^\otimes \partial_n^\otimes$ σε τυχόντα γεννήτορα $(m_p \otimes m'_q)$ τού $(M_\bullet \otimes_R M'_\bullet)_n$:

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}^\otimes \partial_n^\otimes (m_p \otimes m'_q) &= \partial_{n-1}^\otimes(\partial_p(m_p) \otimes m'_q + (-1)^p m_p \otimes \partial'_q(m'_q)) \\ &= \partial_{p-1}\partial_p(m_p) \otimes m'_q + (-1)^{p-1}\partial_p(m_p) \otimes \partial'_q(m'_q) \\ &+ (-1)^p \partial_p(m_p) \otimes \partial'_q(m'_q) + (-1)^{2p} m_p \otimes \partial'_{q-1}\partial'_q(m'_q) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 2.1.6. Ταυτίζοντας τον R-μόδιο K με το σύμπλοκο $K_\bullet = (\dots, 0, K, 0, \dots)$, όπου $K_0 := K$ και $K_n := 0$ για $n \neq 0$, ο ορισμός 2.1.2 αποτελεί ειδική περίπτωση τού ορισμού 2.1.4. Το αλυσωτό σύμπλοκο $K_\bullet$ καλείται **σύμπλοκο με τον** K **συγκεντρωμένο στον βαθμό** 0.

Πρόταση 2.1.7. *Εάν $C_\bullet, C'_\bullet, D_\bullet, D'_\bullet$ είναι αλυσωτά σύμπλοκα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και $\lambda : C_\bullet \to C'_\bullet$, $\mu : D_\bullet \to D'_\bullet$ αλυσωτοί μετασχηματισμοί, τότε ο*

$$(\lambda \bar{\otimes} \mu)_\bullet : C_\bullet \otimes_R C'_\bullet \to D_\bullet \otimes_R D'_\bullet,$$

όπου

$$(\lambda \bar{\otimes} \mu)_n := \bigoplus_{p+q=n} (\lambda_p \bar{\otimes} \mu_q),$$

αποτελεί έναν αλυσωτό μετασχηματισμό.

Επιπροσθέτως, εάν $\lambda' : C_\bullet \to C'_\bullet$ και $\mu' : D_\bullet \to D'_\bullet$ είναι αλυσωτοί μετασχηματισμοί με $\lambda \simeq \lambda'$ και $\mu \simeq \mu'$, τότε $\lambda \otimes \mu \simeq \lambda' \otimes \mu'$.

Για μια απόδειξη αυτής τής προτάσεως βλ. [Dol80, Ενότητα VI.9].

2.2 Το θεώρημα των Eilenberg και Zilber

Έστω $\mathfrak{Top} \times \mathfrak{Top}$ η κατηγορία η έχουσα ως αντικείμενά της ζεύγη τοπολογικών χώρων (X, Y), ως μορφισμούς της ζεύγη συνεχών απεικονίσεων και είναι εφοδιασμένη με σύνθεση απεικονίσεων «κατά συντεταγμένες»[1].

Θεώρημα 2.2.1. *(Eilenberg - Zilber) Εάν $F, V : \mathfrak{Top} \times \mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ είναι συναρτητές και*

$$\begin{aligned} F(X,Y) &:= S_\bullet(X \times Y; R) \\ V(X,Y) &:= S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R) \\ F(f,g) &:= S_\bullet(f \times g; R) \\ V(f,g) &:= S_\bullet(f;R) \bar{\otimes} S_\bullet(g;R) \end{aligned}$$

για κάθε ζεύγος τοπολογικών χώρων $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Top})$ και συνεχών απεικονίσεων $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$, τότε οι F, V είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι.

Για την απόδειξη τού θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε τα κάτωθι λήμματα. (Οι αποδείξεις αυτών θα δοθούν στο τέλος ως πορίσματα τού θεωρήματος τού Künneth 3.2.2.)

[1]Προσοχή! Δεν αναφερόμαστε στην κατηγορία $\mathfrak{Top}^{[2]}$ των τοπολογικών ζευγών, όπου τα αντικείμενα είναι ζεύγη τοπολογικών χώρων (X, A) με $A \subseteq X$, η οποία αποτελεί υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top} \times \mathfrak{Top}$.

Λήμμα 2.2.2. *Για κάθε ζεύγος μη αρνητικών ακεραίων p, q και για κάθε θετικό ακέραιο n,*

$$H_n(S_\bullet(\Delta^p; R) \otimes_R S_\bullet(\Delta^q; R)) = 0.$$

Λήμμα 2.2.3. *Για οιουσδήποτε τοπολογικούς χώρους X και Y υπάρχει φυσικός ισομορφισμός*

$$H_0(X; R) \otimes_R H_0(Y; R) \cong H_0(S_\bullet X \otimes_R S_\bullet Y; R)$$

παρεχόμενος μέσω τού τύπου $[x] \otimes [y] \mapsto [x \otimes y]$.

Απόδειξη τού θεωρήματος 2.2.1. Κατ' αρχάς, αμφότεροι οι συναρτητές είναι μη αρνητικοί.

Για κάθε $k \geqslant 0$ θέτουμε $\mathscr{M}_k := \{(\Delta^k, \Delta^k)\}$ και $\mathscr{X}_k := \{((\Delta^k, \Delta^k), d^k)\}$, όπου $d^k : \Delta^k \to \Delta^k \times \Delta^k$ είναι το ιδιάζον k-μονόπλοκο το οριζόμενο μέσω τού τύπου $d^k(x) := (x, x)$ για κάθε $x \in \Delta^k$. Για οιουσδήποτε τοπολογικούς χώρους X και Y και οιοδήποτε k-μονόπλοκο $\sigma : \Delta^k \to X \times Y$ θεωρούμε τις προβολές $\pi_1 : X \times Y \to X$, $\pi_2 : X \times Y \to Y$. Ο

$$(\pi_1\sigma, \pi_2\sigma) : (\Delta^k, \Delta^k) \to (X, Y)$$

είναι μορφισμός τής $\mathfrak{Top} \times \mathfrak{Top}$ και

$$F_k(\pi_1\sigma, \pi_2\sigma)(d^k) = (\pi_1\sigma \times \pi_2\sigma)d^k = \sigma.$$

Επιπροσθέτως, για οιονδήποτε μορφισμό $(\sigma_1, \sigma_2) : (\Delta^k, \Delta^k) \to (X, Y)$, το

$$F_k(\sigma_1, \sigma_2)(d^k) : \Delta^k \to X \times Y$$

είναι μονόπλοκο, οπότε ο $F_k(X, Y) = S_\bullet(X \times Y; R)$ είναι ελεύθερος R-μόδιος με βάση

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}\left(\Delta^k, X \times Y\right) = \left\{F_k(\sigma_1, \sigma_2)(d^k) \,\middle|\, (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}\times\mathfrak{Top}}\left((\Delta^k, \Delta^k), (X, Y)\right)\right\}$$

και συνεπώς ο F_k είναι ελεύθερος με βάση $\mathscr{X}_k$.

Εάν $\mathscr{M}'_k := \{(\Delta^p, \Delta^q)\}_{p+q=k}$, $\mathscr{X}'_k := \{((\Delta^p, \Delta^q), (\mathrm{id}_p \otimes \mathrm{id}_q))\}_{p+q=k}$ και p, q είναι τέτοιοι, ώστε $p + q = k$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
S_p(X; R) \otimes_R S_q(Y; R) &= \left(\bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta^p, X)} R[\sigma]\right) \otimes_R \left(\bigoplus_{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta^p, Y)} R[\tau]\right)\\
&\cong \bigoplus_{\substack{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta^p, X)\\ \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta^p, Y)}} R[\sigma] \otimes_R R[\tau]\\
&\cong \bigoplus_{\substack{\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta^p, X)\\ \tau \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}}(\Delta^p, Y)}} R[\sigma \otimes \tau]\\
&= \bigoplus_{(\sigma,\tau) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}\times\mathfrak{Top}}((\Delta^p, \Delta^q), (X, Y))} R[V_k(\sigma, \tau)(\mathrm{id}_p \otimes \mathrm{id}_q)],
\end{aligned}$$

διότι

$$V_k(\sigma, \tau)(\mathrm{id}_p \otimes \mathrm{id}_q) = S_\bullet(\sigma; R)\bar{\otimes} S_\bullet(\tau; R)(\mathrm{id}_p \otimes \mathrm{id}_q) = \sigma\,\mathrm{id}_p \otimes \tau\,\mathrm{id}_q = \sigma \otimes \tau.$$

Άρα ο $V_k(X,Y) = (S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R))_k = \bigoplus_{p+q=k} S_p(X;R) \otimes_R S_q(Y;R)$ είναι ελεύθερος R-μόδιος με βάση

$$\{V_k(\sigma,\tau)(\mathrm{id}_p \otimes \mathrm{id}_q) | p+q=k \text{ και } (\sigma,\tau) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Top}\times\mathfrak{Top}}((\Delta^p,\Delta^q),(X,Y))\}$$

και ο V_k ελεύθερος συναρτητής με βάση $\mathscr{X}'_k$.

Έστω $\mathscr{M} := \bigcup_{k\geqslant 0}(\mathscr{M}_k \cup \mathscr{M}'_k) = \{(\Delta^p,\Delta^q)\}_{p,q\geqslant 0}$. Θα δείξουμε ότι $H_k(F)|_{\mathscr{M}} = H_k(V)|_{\mathscr{M}} = 0$ για κάθε $k \geqslant 1$. Παρατηρούμε ότι εάν p,q είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, τότε τα Δ^p,Δ^q και $\Delta^p \times \Delta^q$ είναι συσταλτοί τοπολογικοί χώροι. Επομένως,

$$H_k(\Delta^p;R) = H_k(\Delta^q;R) = H_k(\Delta^p \times \Delta^q;R) = \begin{cases} R & \text{, όταν } k=0, \\ 0 & \text{, όταν } k \neq 0. \end{cases}$$

Επειδή $F(\Delta^p,\Delta^q) = S_\bullet(\Delta^p \times \Delta^q;R)$, έχουμε $H_kF(\Delta^p,\Delta^q) = 0$ για θετικούς k. Επίσης, σύμφωνα με το λήμμα 2.2.2, $H_k(V(\Delta^p,\Delta^q)) = H_k(S_\bullet(\Delta^p;R) \otimes_R S_\bullet(\Delta^q;R)) = 0$ για θετικούς k.

Εν συνεχεία θα ορίσουμε μια φυσική ισοδυναμία μεταξύ των $H_0(F)$ και $H_0(V)$. Ας υποθέσουμε ότι $\mathfrak{P}(X\times Y)$ είναι το σύνολο των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών τού $X\times Y$ και $\mathfrak{P}(X), \mathfrak{P}(Y)$ αυτό των δρομοσυνεκτικών συνιστωσών τού X και τού Y, αντιστοίχως. Υπάρχει μια αμφίρριψη

$$\mathfrak{P}(X\times Y) \to \mathfrak{P}(X)\times\mathfrak{P}(Y)$$

που στέλνει κάθε δρομοσυνεκτική συνιστώσα C τού γινομένου $X\times Y$ στις προβολές $(\pi_X(C),\pi_Y(C))$, οπότε

$$\begin{aligned} H_0(F(X,Y)) = H_0(S_\bullet(X\times Y;R)) &\cong R^{\mathfrak{P}(X\times Y)} \cong R^{\mathfrak{P}(X)\times\mathfrak{P}(Y)} \cong R^{\mathfrak{P}(X)} \otimes_R R^{\mathfrak{P}(Y)} \\ &\cong H_0(X;R) \otimes_R H_0(Y;R) \cong H_0(S_\bullet X \otimes_R S_\bullet Y;R) = H_0(V(X,Y)). \end{aligned}$$

Ο τρίτος ισομορφισμός απορρέει από την μεταθετικότητα τού τανυστικού γινομένου με τα ευθέα αθροίσματα και ο τελευταίος από το λήμμα 2.2.3. Υπολογίζοντας τους ανωτέρω ισομορφισμούς διαπιστώνουμε ότι η σύνθεση τού $\phi(X,Y)$ στέλνει την κλάση $[(x,y)]$ στην $[x\otimes y]$ και ότι, ως εκ τούτου, η $\phi = \{\phi_{(X,Y)}\}_{(X,Y)\in\mathfrak{Top}\times\mathfrak{Top}}$ είναι φυσική ισοδυναμία.

Έχουμε δείξει λοιπόν ότι οι F και V είναι μη αρνητικοί συναρτητές, ελεύθεροι, με μοντέλα σε κάποιο $\mathscr{M}$, τέτοιο ώστε $H_k(F)|_{\mathscr{M}} = H_k(V)|_{\mathscr{M}} = 0$ για θετικούς k και ότι υπάρχει κάποια φυσική ισοδυναμία

$$\phi : H_0(F) \to H_0(V).$$

Κατά το πόρισμα 1.2.2 υπάρχει μοναδική, μέχρις ομοτοπίας, αλυσωτή ισοδυναμία $\zeta : F \to V$, τέτοια ώστε να ισχύει $H_0\zeta = \phi$. □

Πόρισμα 2.2.4. *Για οιουσδήποτε τοπολογικούς χώρους X, Y και οιονδήποτε (μεταθετικό) δακτύλιο αναφοράς R,*

$$H_\bullet(X\times Y;R) \cong H_\bullet(S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R)).$$

Κεφάλαιο 3

Το θεωρήμα τού Künneth

3.1 Τα γινόμενα στρέψεως

Ο ισομορφισμός στο πόρισμα 2.2.4 μας παρακινεί να μελετήσουμε τους R-μοδίους ομολογίας τού τανυστικού γινομένου $C_\bullet \otimes_R D_\bullet$ δυο αλυσωτών συμπλόκων $C_\bullet$ και $D_\bullet$. Προτού, όμως, διατυπώσουμε τα τελικά θεωρήματα που συσχετίζουν τους μοδίους ομολογίας τού αλυσωτού συμπλόκου $C_\bullet \otimes_R D_\bullet$ με αυτούς των $C_\bullet$ και $D_\bullet$, θα ορίσουμε τα *γινόμενα στρέψεως*. Έχουμε ήδη προαναφέρει ότι για οιονδήποτε R-μόδιο N ο $- \otimes_R N$ είναι *εκ δεξιών ακριβής* συναρτητής. Αυτό σημαίνει ότι, δοθείσας μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{a} M \xrightarrow{b} M'' \longrightarrow 0,$$

η ακολουθία

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{a \otimes id_N} M \otimes_R N \xrightarrow{b \otimes id_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Εν γένει, ο $- \otimes_R N$ δεν είναι ακριβής συναρτητής. Στην περίπτωση που είναι, ο N καλείται **ισόπεδος R-μόδιος**.

Ορισμός 3.1.1. Λέμε ότι ένας R-μόδιος P είναι **προβολικός** όταν για κάθε επιμορφισμό $f : M \to N$ και για κάθε ομομορφισμό $g : P \to N$ υπάρχει ομομορφισμός $h : P \to M$, τέτοιος ώστε να ισχύει $fh = g$, ήτοι τέτοιος, ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, two heads, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Πρόταση 3.1.2. *Εάν P είναι ένας προβολικός R-μόδιος, τότε κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

διασπάται, οπότε $N = P \oplus M$.

Απόδειξη. Ο g είναι επιμορφισμός από την ακρίβεια τής ακολουθίας και ο P προβολικός. Άρα υπάρχει (εξ ορισμού) ομομορφισμός h που καθιστά το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ N \arrow[r, two heads, "g"] & P \end{tikzcd}$$

Αυτό σημαίνει ότι ο g έχει δεξιό αντίστροφο και ότι, ως εκ τούτου, η ανωτέρω ακολουθία είναι διασπώμενη. □

Πρόταση 3.1.3. *Κάθε ελεύθερος R-μόδιος είναι προβολικός και κάθε προβολικός R-μόδιος είναι ισόπεδος.*

Για μια απόδειξη τής προτάσεως, βλ. [Rot09, Θεώρημα 3.1] και [Rot09, Πρόταση 3.46].

Ορισμός 3.1.4. Έστω M ένας R-μόδιος. Μια ακριβής ακολουθία τής μορφής

$$P_\bullet = \qquad \dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0,$$

όπου κάθε P_i είναι προβολικός R-μόδιος, καλείται **προβολικός κερματισμός τού** M. Το αλυσωτό σύμπλοκο

$$P_\bullet^- = \qquad \dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

ονομάζεται **ο μειωμένος προβολικός κερματισμός** τής ανωτέρω ακολουθίας. Στην περίπτωση κατά την οποία όλοι οι P_i είναι ελεύθεροι, ο $P_\bullet$ ονομάζεται **ελεύθερος κερματισμός**.

Ονομάζουμε **μήκος** ενός προβολικού κερματισμού τον ελάχιστο φυσικό αριθμό n, εάν υπάρχει, με $P_n \neq 0$ και $P_i = 0$ για κάθε $i > n$. Σε αντίθετη περίπτωση, λέμε ότι ο κερματισμός **έχει άπειρο μήκος**.

Πρόταση 3.1.5. *Κάθε R-μόδιος επιδέχεται κάποιον προβολικό κερματισμό.*

Απόδειξη. Έστω M τυχών R-μόδιος. Επιλέγουμε επιμορφισμό $\epsilon : P_0 \to M$, όπου P_0 είναι κάποιος ελεύθερος R-μόδιος[1]. Τότε προκύπτει η εξής ακριβής ακολουθία:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\epsilon \xrightarrow{\ker\epsilon} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0.$$

Έστω τώρα $\hat{\partial}_1 : P_1 \to \operatorname{Ker}\partial_0$ κάποιος επιμορφισμός, όπου P_1 ελεύθερος R-μοδιος. Η πρώτη γραμμή τού κάτωθι διαγράμματος είναι ακριβής, αφού ο $\ker\epsilon$ είναι μονομορφισμός (φυσική ένθεση) και ο $\hat{\partial}_1$ επιμορφισμός, οπότε $\operatorname{Ker}\epsilon = \operatorname{Im}\hat{\partial}_1 = \operatorname{Im}\partial_1$.

$$\begin{tikzcd} & & P_1 \arrow[rr, "\partial_1 := (\ker\epsilon)\circ\hat{\partial}_1"] \arrow[dr, "\hat{\partial}_1"] & & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\partial_1 \arrow[ur, "\ker\partial_1"] & & \operatorname{Ker}\epsilon \arrow[ur, "\ker\epsilon"] & & & \end{tikzcd}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικώς λαμβάνουμε έναν ελεύθερο και, κατ' επέκταση, έναν προβολικό κερματισμό τού αρχικού R-μοδίου M. □

[1] Για την απόδειξη τής υπάρξεως τέτοιου επιμορφισμού, θεωρούμε ένα σύνολο γεννητόρων $I \subseteq M$ τού M και θέτουμε $P_0 := R^I$. Έστω ϵ ο ομομορφισμός ο επαγόμενος από την καθολική ιδιότητα τού ελευθέρου R-μοδίου P_0 και την ένθεση τού I στο M. Ο ϵ είναι επιμορφισμός, διότι το I είναι σύνολο γεννητόρων τού M.

Ορισμός 3.1.6. Ένας μεταθετικός δακτύλιος R (με μοναδιαίο πολλαπλασιαστικό στοιχείο) ονομάζεται **κληρονομικός** όταν οι υπομόδιοι προβολικών R-μοδίων είναι ωσαύτως προβολικοί.

Πρόταση 3.1.7. *Κάθε μόδιος ορισμένος υπεράνω ενός κληρονομικού δακτυλίου R έχει κερματισμό μήκους το πολύ 1.*

Απόδειξη. Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $\epsilon : P_0 \twoheadrightarrow M$ ένας επιμορφισμός, τέτοιος ώστε ο P_0 να είναι προβολικός R-μόδιος. Ο $P_1 := \operatorname{Ker}\epsilon$ είναι προβολικός R-μόδιος, ως υπομόδιος τού προβολικού P_0, οπότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

είναι ένας προβολικός κερματισμός τού M. □

Θεώρημα 3.1.8. *(Θεώρημα συγκρίσεως για προβολικούς κερματισμούς) Έστω ότι M, M' είναι R-μόδιοι και $P_\bullet$,$P'_\bullet$ προβολικοί κερματισμοί των M και M', αντιστοίχως. Για κάθε ομομορφισμό $f : M \to M'$, υπάρχει μοναδικός, μέχρις αλυσωτής ομοτοπίας, αλυσωτός μετασχηματισμός $\hat{f} : P_\bullet^- \to P_\bullet'^-$, ο οποίος επεκτείνει τον f, υπό την έννοια τού ότι το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, dashed, "\hat{f}_2"] & P_1 \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, dashed, "\hat{f}_1"] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, dashed, "\hat{f}_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r, "\partial_2"] & P'_1 \arrow[r, "\partial_1"] & P'_0 \arrow[r, "\epsilon'"] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Η απόδειξη τού θεωρήματος είναι παρόμοια εκείνης τού θεωρήματος 1.2.1 των ακυκληματικών μοντέλων, κατασκευάζοντας τον f και την ομοτοπία επαγωγικώς, χρησιμοποιώντας ότι η δεύτερη ακολουθία είναι ακριβής και η πρώτη αποτελείται από προβολικούς R-μοδίους.

Ορισμός 3.1.9. Έστω N ένας R-μόδιος. Για κάθε R-μόδιο M επιλέγουμε έναν προβολικό κερματισμό αυτού $P_\bullet^M$. Εφαρμόζοντας στον μειωμένο κερματισμό $P_\bullet^{M^-}$ τον συναρτητή $-\otimes_R N$ λαμβάνουμε την ακολουθία

$$\dots \longrightarrow P_2^M \otimes_R N \xrightarrow{\partial_2^M \bar{\otimes} id_N} P_1^M \otimes_R N \xrightarrow{\partial_1^M \bar{\otimes} id_N} P_0^M \otimes_R N \xrightarrow{\partial_0^M \bar{\otimes} id_N} 0,$$

η οποία είναι αλυσωτό σύμπλοκο, διότι $(\partial_{n-1}^M \bar{\otimes} id_N)(\partial_n^M \bar{\otimes} id_N) = \partial_{n-1}^M \partial_n^M \bar{\otimes} id_N = 0 \bar{\otimes} id_N = 0$.

Ορίζουμε ως n**-οστό γινόμενο στρέψεως των** M **και** N τον n-οστό R-μόδιο ομολογίας τού ανωτέρω συμπλόκου:

$$\operatorname{Tor}_n^R(M, N) = H_n(P_\bullet^{M^-} \otimes_R N).$$

Εξάλλου, για κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $f : M \to M'$ υπάρχει (σύμφωνα με το θεώρημα 3.1.8) αλυσωτός μετασχηματισμός $\hat{f} : P_\bullet^{M^-} \to P_\bullet^{M'^-}$ που επεκτείνει τον f. Επειδή ο $-\otimes_R N$ είναι συναρτητής, ο

$$\hat{f} \otimes id_N : P_\bullet^{M^-} \otimes_R N \to P_\bullet^{M'^-} \otimes_R N$$

είναι ωσαύτως αλυσωτός μετασχηματισμός, οπότε μπορούμε να ορίσουμε ως $\operatorname{Tor}_n^R\left(f, N\right)$ τον ομομορφισμό τον επαγόμενο από τον $\hat{f}$ στους n-οστούς R-μόδιους ομολογίας:

$$\operatorname{Tor}_n^R\left(f, N\right) = H_n(\hat{f} \otimes id_N).$$

Εάν $\hat{h}$ είναι κάποιος άλλος αλυσωτός μετασχηματισμός που επεκτείνει τον f, τότε $\hat{f} \simeq \hat{h}$, οπότε από την πρόταση 2.1.7[2] λαμβάνουμε $\hat{f} \bar{\otimes} id_N \simeq \hat{h} \bar{\otimes} id_N$. Άρα $H_n(\hat{f} \bar{\otimes} id_N) = H_n(\hat{h} \bar{\otimes} id_N)$ και, ως εκ τούτου, ο $\operatorname{Tor}_n^R\left(f, N\right)$ είναι καλώς ορισμένος.

[2] Για $C_\bullet = P_\bullet^{M^-}, C'_\bullet = P_\bullet^{M'^-}, \lambda = \hat{f}, \lambda' = \hat{h}$ και $D_\bullet = D'_\bullet = N_\bullet, \mu = \mu' = id_\bullet^N$.

Παρατήρηση 3.1.10. Οι $\mathrm{Tor}_n^R(-,N)$ είναι συναρτητές, οι οποίοι από τον τρόπο ορισμού τους φαίνεται (εκ πρώτης όψεως) ότι εξαρτώνται από την επιλογή προβολικών κερματισμών των μοδίων. Ωστόσο, *δεν εξαρτώνται*, διότι εάν ορίσουμε έναν συναρτητή $\widetilde{\mathrm{Tor}_n}^R(-,N)$ χρησιμοποιώντας διαφορετικούς κερματισμούς, τότε από το θεώρημα 3.1.8 μπορούμε να κατασκευάσουμε μια φυσική ισοδυναμία μεταξύ των δυο συναρτητών[3], οπότε

$$\mathrm{Tor}_n^R(-,N) \cong \widetilde{\mathrm{Tor}_n}^R(-,N).$$

Πρόταση 3.1.11. *Εάν A, B είναι R-μόδιοι και $P_\bullet$, $Q_\bullet$ προβολικοί κερματισμοί αυτών, τότε*

$$H_\bullet(P_\bullet^- \otimes_R B) \cong H_\bullet(A \otimes_R Q_\bullet^-) \cong H_\bullet(Q_\bullet^- \otimes_R A),$$

κάτι που σημαίνει ότι

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N,M)\,.$$

Ο δεύτερος ισομορφισμός είναι τετριμμένος και έπεται από τη μεταθετικότητα τού τανυστικού γινομένου. Για μια απόδειξη τού πρώτου, βλ. [Rot09, Θεώρημα 6.32].

Θεώρημα 3.1.12. *Έστω R-μόδιος N και έστω*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

μια ακριβής ακολουθία R-μοδίων. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n υπάρχει ένας ομομορφισμός R-μοδίων $\partial_n : \mathrm{Tor}_n^R(M'',N) \to \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M',N)$ και μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\dots \to \mathrm{Tor}_n^R(M',N) \xrightarrow{f_\bullet} \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \xrightarrow{g_\bullet} \mathrm{Tor}_n^R(M'',N) \xrightarrow{\partial_n} \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M',N) \to \dots$$

λήγουσα σε

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M'',N) \xrightarrow{\partial_1} M' \otimes_R N \xrightarrow{f\otimes id_N} M \otimes_R N \xrightarrow{g\otimes id_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

Επιπροσθέτως, η ανωτέρω ακολουθία είναι κανονιστική, υπό την έννοια ότι για κάθε διάγραμμα με ακριβείς γραμμές

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "p"] & K \arrow[r, "q"] & K'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & \mathrm{Tor}_n^R(M',N) \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d, "u_\bullet"] & \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \arrow[r, "g_\bullet"] \arrow[d, "v_\bullet"] & \mathrm{Tor}_n^R(M'',N) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "w_\bullet"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(M',N) \arrow[r] \arrow[d, "u_\bullet"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \mathrm{Tor}_n^R(K',N) \arrow[r, "p_\bullet"] & \mathrm{Tor}_n^R(K,N) \arrow[r, "q_\bullet"] & \mathrm{Tor}_n^R(K'',N) \arrow[r, "\partial'_n"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(K',N) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

[3] Rot09, Corollary 6.21.

Σκιαγράφηση αποδείξεως. Η ιδέα πίσω από αυτήν την πρόταση είναι ότι, δεδομένων δυο προβολικών κερματισμών $P_\bullet^{M'}$ και $P_\bullet^{M''}$, το ευθύ άθροισμα αυτών $P_\bullet^{M^-} \oplus P_\bullet^{M'^-}$ με κατάλληλους συνοριακούς τελεστές αποτελεί προβολικό κερματισμό τού M, οπότε επάγεται μια διασπώμενη ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων

$$0 \longrightarrow P_\bullet^{M'^-} \xrightarrow{\hat{f}} P_\bullet^{M^-} \xrightarrow{\hat{g}} P_\bullet^{M''^-} \longrightarrow 0.$$

Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $- \otimes_R N$ λαμβάνουμε την ακολουθία

$$0 \longrightarrow P_\bullet^{M'^-} \otimes_R N \xrightarrow{\hat{f}\bar{\otimes} id_N} P_\bullet^{M^-} \otimes_R N \xrightarrow{\hat{g}\bar{\otimes} id_N} P_\bullet^{M''^-} \otimes_R N \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

Αυτή είναι ακριβής εάν και μόνον εάν ο $\hat{f} \otimes id_N$ είναι μονομορφισμός[4], διότι ο $- \otimes_R N$ είναι εκ δεξιών ακριβής. Επειδή η αρχική ακολουθία είναι διασπώμενη, υπάρχει κάποιος αλυσωτός μετασχηματισμός $\hat{h} : P_\bullet^{M^-} \to P_\bullet^{M'^-}$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\hat{h}\hat{f} = id_{P_\bullet^{M'^-}}$. Επομένως, $(\hat{h}\bar{\otimes} id_N)(\hat{f}\bar{\otimes} id_N) = id_{P_\bullet^{M'^-} \otimes_R N}$ και ο $\hat{f}\bar{\otimes} id_N$ είναι μονομορφισμός και έχει εξ αριστερών αντίστροφο. Άρα η ακολουθία (3.1) είναι ακριβής.

Η μακρά ακριβής ακολουθία τής ομολογίας που αντιστοιχεί στην (3.1) είναι μια κανονιστική ακριβής ακολουθία όπως αυτήν που επιζητούμε. Για την ολοκλήρωση τής αποδείξεως αρκεί να διαπιστωθεί ότι ο $\mathrm{Tor}_0^R(-, N)$ είναι φυσικώς ισοδύναμος με τον $- \otimes_R N$. Για πλήρη απόδειξη τής προτάσεως, βλ. [Rot09, Θεωρήματα 6.24-6.29]. □

Πρόταση 3.1.13. *Εάν F είναι ένας ισόπεδος R-μόδιος, τότε $\mathrm{Tor}_n^R(N, F) = 0$ για οιονδήποτε ακέραιο $n \geqslant 1$ και οιονδήποτε R-μόδιο N. Και αντιστρόφως, εάν για κάποιον R-μόδιο F ισχύει $\mathrm{Tor}_1^R(N, F) = 0$ για κάθε R-μόδιο N, τότε ο F είναι κατ' ανάγκην ισόπεδος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε εν πρώτοις ότι ο F είναι ισόπεδος. Έστω N τυχών R-μόδιος και έστω $P_\bullet$ τυχών προβολικός κερματισμός αυτού. Επειδή ο F είναι ισόπεδος, η ακολουθία

$$\ldots \longrightarrow P_2 \otimes_R F \longrightarrow P_1 \otimes_R F \longrightarrow P_0 \otimes_R F \longrightarrow N \otimes_R F \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής, οπότε $\mathrm{Tor}_n^R(N, F) = 0$ για $n \geqslant 1$. Και αντιστρόφως, εάν υποθέσουμε ότι για κάποιον R-μόδιο F ισχύει $\mathrm{Tor}_1^R(-, F) = 0$ και θεωρήσουμε μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα 3.1.12 συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία

$$\mathrm{Tor}_1^R(M'', F) \xrightarrow{\partial_1} M' \otimes_R F \xrightarrow{f \otimes id_F} M \otimes_R F \xrightarrow{g \otimes id_F} M'' \otimes_R F \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Επειδή $\mathrm{Tor}_1^R(M'', F) = 0$, αυτό σημαίνει ότι ο $- \otimes_R F$ είναι ακριβής και, κατ' επέκταση, ο F ισόπεδος. □

Πόρισμα 3.1.14. *Έστω $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow 0$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων, τέτοια ώστε ο F να είναι ισόπεδος. Τότε ο M είναι ισόπεδος εάν και μόνον εάν ο N είναι ισόπεδος.*

Απόδειξη. Για κάθε R-μόδιο C σχηματίζεται η ακριβής ακολουθία

$$\mathrm{Tor}_2^R(F, C) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, C) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(N, C) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(F, C).$$

Επειδή ο F είναι ισόπεδος, ο πρώτος και ο τελευταίος όρος είναι μηδενικοί. Άρα $\mathrm{Tor}_1^R(M, C) \cong \mathrm{Tor}_1^R(N, C)$ και, ως εκ τούτου, ο ένας είναι μηδενικός εάν και μόνον εάν ο άλλος είναι μηδενικός. □

[4] Εννοούμε *μονομορφισμός* στην (ως γνωστόν, αβελιανή) κατηγορία των αλυσωτών συμπλόκων. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι ο $\hat{f}_n \otimes id_N : P_n^{M'} \otimes_R N \mapsto P_n^M \otimes_R N$ μονομορφισμός για κάθε n.

Θεώρημα 3.1.15. *Εάν A, B είναι R-μόδιοι και $F_\bullet$ ένας ισόπεδος κερματισμός τού A, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,*

$$H_n(F_\bullet^- \otimes_R B) \cong \mathrm{Tor}_n^R(A, B),$$

κάτι που σημαίνει ότι ο Tor *μπορεί να υπολογισθεί χρησιμοποιώντας ισόπεδους κερματισμούς αντί προβολικών.*

Βλ. [Rot09, Θεώρημα 7.5] για την απόδειξη.

3.2 Το θεώρημα τού Künneth

Εν γένει, ο συσχετισμός των μοδίων ομολογίας τού τανυστικού γινομένου $C_\bullet \otimes_R D_\bullet$ με εκείνους των $C_\bullet$ και $D_\bullet$ μας επιφυλλάσσει μια ιδιαίτερα δύσκολη διαδικασία. Ωστόσο, υπό κάποιες επιπρόσθετες προϋποθέσεις για τον δακτύλιο αναφοράς μας R και τα αλυσωτά σύμπλοκα, το πρόβλημα λύεται ικανοποιητικώς μέσω μιας σειράς θεωρημάτων, των λεγομένων *θεωρημάτων τού Künneth*. Το πιο γενικό εξ αυτών είναι μάλλον το κάτωθι[5]:

Θεώρημα 3.2.1 (Ομολογική φασματική ακολουθία τού Künneth)**.** *Έστω $C_\bullet$ ένα μη αρνητικό αλυσωτό σύμπλοκο ισόπεδων R-μοδίων και έστω $D_\bullet$ ένα μη αρνητικό σύμπλοκο R-μοδίων. Τότε υφίσταται μια φασματική ακολουθία πρώτου τεταρτημορίου*

$$E^2_{p,q} = \bigoplus_{s+t=q} \mathrm{Tor}_p^R(H_s(C_\bullet), H_t(D_\bullet)) \underset{p}{\Rightarrow} H_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet).$$

Συνήθως, πιο απλές μορφές τού θεωρήματος επαρκούν για τις εφαρμογές. Εδώ θα αποδείξουμε την κατωτέρω εκδοχή του, η οποία, συν τοις άλλοις, θα μας επιτρέψει να αποδείξουμε τα λήμματα που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη τού θεωρήματος των Eilenberg και Zilber και να υπολογίσουμε τους μοδίους ομολογίας ενός χώρου γινομένου στην ειδική περίπτωση όπου ο δακτύλιος αναφοράς R είναι κληρονομικός. Αυτή η περίπτωση είναι αρκετά ενδιαφέρουσα, καθώς περιλαμβάνει τα σώματα, το $\mathbb{Z}$ και γενικότερα κάθε περιοχή κυρίων ιδεωδών.

Θεώρημα 3.2.2 (Τύπος τού Künneth για την ομολογία)**.**

1. *Έστω $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο ισόπεδων R-μοδίων, τέτοιο ώστε οι $B_n(C_\bullet)$ να είναι ισόπεδοι και το $(D_\bullet, \partial'_\bullet)$ κάποιο αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υφίσταται μια ακριβής ακολουθία*

$$0 \to (H_\bullet(C_\bullet) \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_n \xrightarrow{\alpha_n} H_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet) \xrightarrow{\beta_n} \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\big(H_p(C_\bullet), H_q(D_\bullet)\big) \to 0 \tag{3.2}$$

   όπου $\alpha_n(\sum_p [c_p] \otimes [d_{n-p}]) = \sum_p [c_p \otimes d_{n-p}]$ και οι α_n, β_n είναι φυσικοί.

2. *Εάν ο R είναι κληρονομικός δακτύλιος, $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ αλυσωτό σύμπλοκο προβολικών R-μοδίων και $(D_\bullet, \partial'_\bullet)$ αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων, τότε η ακολουθία (3.2) είναι (αν και όχι κατ' ανάγκην φυσικώς) διασπώμενη.*

Παρατήρηση 3.2.3. Στην περίπτωση που ο R είναι σώμα, καθώς κάθε διανυσματικός χώρος είναι ελεύθερος, έχουμε

$$H_n(D_\bullet \otimes_R D_\bullet) = \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_\bullet) \otimes_R H_q(D_\bullet).$$

[5] Rot09, Theorem 10.90.

Τής αποδείξεως τού θεωρήματος θα προταχθούν δύο χρήσιμα λήμματα.

Λήμμα 3.2.4. *Έστω $C_\bullet$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο ισόπεδων R-μοδίων με μηδενικούς συνοριακούς τελεστές και έστω $(D_\bullet, \partial_\bullet)$ αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε*

$$H_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet) \cong (C_\bullet \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_n.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow Z_p(D_\bullet) \xrightarrow{i_p} D_p \xrightarrow{\partial_p} B_{p-1}(D_\bullet) \longrightarrow 0,$$

όπου i_p η ένθεση. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $C_q \otimes_R -$ συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow C_q \otimes_R Z_p(D_\bullet) \xrightarrow{\mathrm{id}\bar{\otimes} i_p} C_q \otimes_R D_p \xrightarrow{\mathrm{id}\bar{\otimes}\partial_p} C_q \otimes_R B_{p-1}(D_\bullet) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής, διότι ο C_q είναι ισόπεδος. Σε αυτήν έχουμε τη δυνατότητα αντικαταστάσεως τού $(\mathrm{id}\bar{\otimes}\partial_p)$ με τον $(-1)^q(\mathrm{id}\bar{\otimes}\partial_p)$, καθώς αυτοί έχουν τον ίδιο πυρήνα και αμφότεροι είναι επιμορφισμοί, και να μεταβούμε στο ευθύ γινόμενο των ακολουθιών ως προς τα p και q με $p + q = n$ αποκομίζοντας τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow (C_\bullet \otimes_R Z_\bullet(D_\bullet))_n \xrightarrow{\mathrm{id}\bar{\otimes} i} (C_\bullet \otimes_R D_\bullet)_n \xrightarrow{\partial^{C\otimes D}} (C_\bullet \otimes_R B_\bullet(D_\bullet))_{n-1} \longrightarrow 0.$$

Η ακρίβεια τής εν λόγω ακολουθίας δίδει

$$B_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet) = \mathrm{Im}\,\partial_{n+1}^{C\otimes D} = (C_\bullet \otimes_R B_\bullet(D_\bullet))_n,$$

$$Z_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet) = \mathrm{Ker}\,\partial_n^{C\otimes D} = \mathrm{Im}(\mathrm{id}\otimes i) = (C_\bullet \otimes_R Z_\bullet(D_\bullet))_n.$$

Εν συνεχεία θεωρούμε την ακολουθία

$$0 \longrightarrow B_p(D_\bullet) \xrightarrow{j_{p+1}} Z_p(D_\bullet) \xrightarrow{\eta_p} H_p(D_\bullet) \longrightarrow 0$$

όπου j η ένθεση και η η προβολή. Με παρόμοια επιχειρήματα δημιουργείται η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow (C_\bullet \otimes_R B_\bullet(D_\bullet))_n \xrightarrow{(\mathrm{id}\bar{\otimes} j)_n} (C \otimes_R Z_\bullet(D_\bullet))_n \xrightarrow{(\mathrm{id}\bar{\otimes}\eta)_n} (C_\bullet \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_n \longrightarrow 0,$$

οπότε

$$(C_\bullet \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_n \cong \frac{(C \otimes_R Z_\bullet(D_\bullet))_n}{(C_\bullet \otimes_R B_\bullet(D_\bullet))_n} \cong \frac{Z_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet)}{B_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet)} = H_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet)$$

και ο ισομορφισμός δίδεται μέσω τού τύπου $c \otimes [d] \mapsto [c \otimes d]$. □

Λήμμα 3.2.5. *Δοθείσας μιας ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \xrightarrow{k} E$$

υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} f \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} \operatorname{Ker} k \longrightarrow 0,$$

όπου $\alpha(b + \operatorname{Im} f) := g(b)$ *και* $\beta(c) := h(c)$.

Απόδειξη. Απο τον g επάγεται ένας μονομορφισμός α έχων ως πεδίο τιμών του το πηλίκο τού B δια τού πυρήνα τού g. Επειδή $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$, ${}^{B}\!/_{\operatorname{Ker} g} = {}^{B}\!/_{\operatorname{Im} f} = \operatorname{Coker} f$, ο α είναι ομομορφισμός από τον συμπυρήνα $\operatorname{Coker} f$ στο C, με το ζητούμενο τύπο. Κατ' αναλογίαν, επάγεται κάποιος επιμορφισμός β από τον h εάν κανείς περιορίσει το πεδίο τιμών τού τελευταίου στο $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} k$.

Για να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι ακριβής αρκεί να δείξουμε ότι $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$. Όμως, εκ κατασκευής, $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} g$, $\operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Ker} h$. Τέλος, από την ακρίβεια τής αρχικής ακολουθίας λαμβάνουμε $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} h$. Επομένως, $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$. □

Απόδειξη τού θεωρήματος 3.2.2. Έστω ότι το $Z_\bullet$ είναι το υποσύμπλοκο των κυκλημάτων τού $C_\bullet$, το $B_\bullet$ το υποσύμπλοκο των συνόρων (με μηδενικούς συνοριακούς τελεστές) και το $B^+_\bullet$ το αλυσωτό σύμπλοκο με $B^+_n := B_{n-1}$. Θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow Z_p \xrightarrow{i_p} C_p \xrightarrow{\partial_p} B^+_p \longrightarrow 0, \tag{3.3}$$

όπου i η συνήθης ένθεση. Σύμφωνα με την πρόταση 3.1.14, επειδή οι C_p και B^+_p είναι ισόπεδοι και η ανωτέρω ακολουθία ακριβής, ο Z_p είναι ισόπεδος. Εφαρμόζοντας τον συναρτητή $- \otimes_R D_q$, λαμβάνουμε την ακολουθία

$$0 \longrightarrow Z_p \otimes_R D_q \xrightarrow{i_p \bar{\otimes} \operatorname{id}_q} C_p \otimes_R D_q \xrightarrow{\partial_p \bar{\otimes} \operatorname{id}_q} B^+_p \otimes_R D_q \longrightarrow 0,$$

η οποία είναι ακριβής από το θεώρημα 3.1.12.

Μεταβαίνοντας στο ευθύ άθροισμα των ακολουθιών για p, q, τέτοια ώστε $p + q = n$, λαμβάνουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow (Z_\bullet \otimes_R D_\bullet)_n \xrightarrow{(i \bar{\otimes} \operatorname{id})_n} (C_\bullet \otimes_R D_\bullet)_n \xrightarrow{(\partial \bar{\otimes} \operatorname{id})_n} (B^+_\bullet \otimes_R D_\bullet)_n \longrightarrow 0.$$

Αφού οι i, ∂ και id^D είναι αλυσωτοί μετασχηματισμοί, από την πρόταση 2.1.7 το ίδιο θα ισχύει και για τους $(i \bar{\otimes} \operatorname{id})_\bullet$ και $(\partial \bar{\otimes} \operatorname{id})_\bullet$, οπότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow (Z_\bullet \otimes_R D_\bullet)_\bullet \xrightarrow{(i \bar{\otimes} \operatorname{id})_\bullet} (C_\bullet \otimes_R D_\bullet)_\bullet \xrightarrow{(\partial \bar{\otimes} \operatorname{id})_\bullet} (B^+_\bullet \otimes_R D_\bullet)_\bullet \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. Μέσω αυτής επάγεται η εξής μακρά ακριβής ακολουθία:

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_n(B^+_\bullet \otimes_R D_\bullet)_{n+1} \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(Z_\bullet \otimes_R D_\bullet) \arrow[dll] & & \\
H_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet) \arrow[r] & H_n(B^+_\bullet \otimes_R D_\bullet)_n \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(Z_\bullet \otimes_R D_\bullet) \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Τα υποσύμπλοκα $Z_\bullet, B^+_\bullet$ είναι σύμπλοκα ισόπεδων R-μοδίων με μηδενικούς συνοριακούς τελεστές, οπότε από το λήμμα 3.2.4 υπάρχουν φυσικοί ισομορφισμοί

$$H_n(Z_\bullet \otimes_R D_\bullet) \cong (Z_\bullet \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_n,$$
$$H_n(B^+_\bullet \otimes_R D_\bullet) \cong (B^+_\bullet \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_n = (B_\bullet \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_{n-1}.$$

Απο αυτούς λαμβάνουμε το κάτωθι μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\delta_n \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h^K"] & H_n(B^+_\bullet \otimes_R D_\bullet)_n \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "h^B"] & H_n(Z_\bullet \otimes_R D_\bullet)_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "h^Z"] & \operatorname{Coker}\delta_n \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h^C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\delta'_n \arrow[r] & (B_\bullet \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_{n-1} \arrow[r, "\delta'_n"] & (Z_\bullet \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_{n-1} \arrow[r] & \operatorname{Coker}\delta'_n \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

όπου h^B και h^Z οι ισομορφισμοί τού λήμματος, και $\delta'_n = h^Z\delta_n(h^B)^{-1}$ και h^K, h^C οι φυσικοί ισομορφισμοί που επάγονται στους πυρήνες και συμπυρήνες λόγω τής μεταθετικότητας τού μεσαίου τετραγώνου. Εφαρμόζοντας το λήμμα 3.2.5 στη μακρά ακριβή ακολουθία τής ομολογίας και αντικαθιστώντας τους δ με τους δ' μέσω των ανωτέρω ισομορφισμών λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker}\delta'_{n+1} \xrightarrow{\lambda_n} H_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet) \xrightarrow{\mu_n} \operatorname{Ker}\delta'_n \longrightarrow 0, \tag{3.4}$$

όπου οι λ_n και μ_n είναι φυσικοί ομομορφισμοί και $\lambda_n(\sum_p z_p \otimes [d_{n-p}] + \operatorname{Im}\delta'_n) = \sum_p [z_p \otimes d_{n-p}]$. Θα υπολογίσουμε τον ομομορφισμό δ'_n. Έστω $z = b_p \otimes [d_{n-1-p}]$, όπου $b_p \in B_p$ και $d_{n-1-p} \in Z_{n-1-p}(D_\bullet)$. Εάν $c_{p+1} \in C_{p+1}$ είναι τέτοιο, ώστε $\partial(c_{p+1}) = b_p$, τότε από τον ορισμό τού συνδετικού ομομορφισμού έχουμε

$$\begin{aligned}
\delta'_n(z) &= h^Z(i\bar{\otimes}\,\mathrm{id})^{-1}\partial^{C\otimes D}(\partial\bar{\otimes}\,\mathrm{id})^{-1}(h^B)^{-1}(b_p \otimes [d_{n-1-p}]) \\
&= h^Z(i\bar{\otimes}\,\mathrm{id})^{-1}\partial^{C\otimes D}(\partial\bar{\otimes}\,\mathrm{id})^{-1}[b_p \otimes d_{n-1-p}] \\
&= h^Z(i\bar{\otimes}\,\mathrm{id})^{-1}\partial^{C\otimes D}[c_{p+1} \otimes d_{n-1-p}] \\
&= h^Z(i\bar{\otimes}\,\mathrm{id})^{-1}[\partial_{p+1}(c_{p+1}) \otimes d_{n-1-p} + (-1)^{p+1}c_{p+1} \otimes \partial'_{n-1-p}(d_{n-1-p})] \\
&= h^Z(i\bar{\otimes}\,\mathrm{id})^{-1}[b_p \otimes d_{n-1-p}] \\
&= h^Z[b_p \otimes d_{n-1-p}] \\
&= b_p \otimes [d_{n-1-p}] = z.
\end{aligned}$$

Άρα $\delta'_n = (j\bar{\otimes}\,\mathrm{id})_{n-1}$, όπου $j : B_\bullet \to Z_\bullet$ η φυσική ένθεση[6]. Για τον υπολογισμό τού πυρήνα και τού συμπυρήνα τού $(j\bar{\otimes}\,\mathrm{id})_{n-1}$ εκκινούμε από τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow B_p \xrightarrow{j_p} Z_p \xrightarrow{\eta_p} H_p(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

[6] Γράφοντας $(\partial\bar{\otimes}\,\mathrm{id})^{-1}$ δεν εννοούμε ότι ο ομομορφισμός είναι αντιστρέψιμος αλλά την επιλογή κάποιου στοιχείου τής αντίστροφης εικόνας και ότι η επιλογή δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα.

όπου η η φυσική προβολή. Εφαρμόζοντας τον $-\otimes_R H_q(D_\bullet)$ λαμβάνουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^R\big(H_p(C_\bullet), H_q(D_\bullet)\big) \longrightarrow B_p \otimes_R H_q(D_\bullet) \xrightarrow{j_p \bar{\otimes}\, \mathrm{id}_q} Z_p \otimes_R H_q(D_\bullet)$$
$$\xrightarrow{\eta_p \bar{\otimes}\, \mathrm{id}_q} H_p(C_\bullet) \otimes_R H_q(D_\bullet) \to 0,$$

καθόσον ο B_p είναι ισόπεδος και $\operatorname{Tor}_1^R\big(B_p, H_q(D_\bullet)\big) = 0$. Εν συνεχεία, θεωρώντας το ευθύ άθροισμα των ακολουθιών για p, q, τέτοια ώστε $p + q = n$, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} \operatorname{Tor}_1^R\big(H_p(C_\bullet), H_q(D_\bullet)\big) \longrightarrow (B_\bullet \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_n \xrightarrow{j \bar{\otimes}\, \mathrm{id}} (Z_\bullet \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_n$$
$$\xrightarrow{\eta \bar{\otimes}\, \mathrm{id}} (H(C_\bullet) \otimes_R H(D_\bullet))_n \to 0$$

είναι ακριβής. Αυτό σημαίνει ότι

$$\operatorname{Coker}(j \bar{\otimes}\, \mathrm{id})_n \cong (H(C_\bullet) \otimes_R H(D_\bullet))_n,$$
$$\operatorname{Ker}(j \bar{\otimes}\, \mathrm{id})_{n-1} \cong \bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^R\big(H_p(C_\bullet), H_q(D_\bullet)\big).$$

Η ακολουθία (3.4) μπορεί λοιπόν να γραφεί ως

$$0 \to (H(C_\bullet) \otimes_R H(D_\bullet))_n \xrightarrow{\alpha_n} H_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet) \xrightarrow{\beta_n} \bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^R\big(H_p(C_\bullet), H_q(D_\bullet)\big) \to 0,$$

όπου α_n, β_n είναι οι φυσικοί ομομορφισμοί οι οριζόμενοι ως συνθέσεις των λ_n και μ_n με τους ανωτέρω φυσικούς ισομορφισμούς και $\alpha_n(\sum_p [z_p] \otimes [d_{n-p}]) = \sum_p [z_p \otimes d_{n-p}]$.

Στην περίπτωση όπου ο R είναι κληρονομικός δακτύλιος και το $C_\bullet$ αλυσωτό σύμπλοκο προβολικών R-μοδίων, ο B_n είναι ωσαύτως προβολικός R-μόδιος για κάθε ακέραιο n, ως υπομόδιος τού C_n, και (επειδή οι προβολικοί μόδιοι είναι ισόπεδοι) ικανοποιούνται οι απαιτήσεις τού πρώτου μέρους τού θεωρήματος. Κατ΄αυτόν τον τρόπο προκύπτει η ακολουθία (3.2). Λόγω τής προβολικότητας τού B_p η ακολουθία (3.3) είναι διασπώμενη. Άρα για κάθε ακέραιο n υπάρχει ομομορφισμός $r_n : C_n \to Z_n$, τέτοιος ώστε να ισχύει $r_n i_n = \mathrm{id}_Z$. Θέτουμε $\gamma_n := \eta_n r_n : C_n \to H_n(C_\bullet)$. Επειδή η $Im(\partial_n)$ βρίσκεται εντός τού Z_{n-1} και $r|_Z = \mathrm{id}$,

$$\eta_{n-1} r_{n-1} \partial_n = \eta_{n-1} \partial_n = 0,$$

οπότε το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccc}
C_n & \xrightarrow{r_n} & Z_n & \xrightarrow{\eta_n} & H_n(C_\bullet) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \partial_n} & & & & \big\downarrow{\scriptstyle 0} \\
C_{n-1} & \xrightarrow{r_{n-1}} & Z_{n-1} & \xrightarrow{\eta_{n-1}} & H_{n-1}(C_\bullet)
\end{array}$$

Κατά συνέπειαν, ο επαγόμενος γ είναι αλυσωτός μετασχηματισμός, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in Z_n$ να ισχύει $\gamma_n(x) = \eta_n(x) = [x]$.

Στην περίπτωση όπου το $D_\bullet$ είναι ωσαύτως σύμπλοκο προβολικών μοδίων υπάρχει (παρομοίως) αλυσωτός μετασχηματισμός $\epsilon : D_n \to H_n(D_\bullet)$, τέτοιος ώστε να ισχύει $\epsilon_n(y) = [y]$ για κάθε στοιχείο

$y \in Z_n(D_\bullet)$. Σύμφωνα με την πρόταση 2.1.7, ο $\gamma\bar{\otimes}\epsilon$ είναι αλυσωτός μετασχηματισμός από το $C_\bullet \otimes_R D_\bullet$ στο $H_\bullet(C_\bullet) \otimes_R H_\bullet(D_\bullet)$, οπότε εφαρμόζοντας τον συναρτητή τού n-οστού μοδίου ομολογίας λαμβάνουμε έναν ομομορφισμό

$$H_n(\gamma \otimes \epsilon) : H_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet) \to H_n(H_\bullet(C_\bullet) \otimes_R H_\bullet(D_\bullet)) \cong (H_\bullet(C_\bullet) \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_n,$$

με τον τελευταίο ισομορφισμό οφειλόμενον στο ότι το $H_\bullet(C_\bullet) \otimes_R H_\bullet(D_\bullet)$ έχει μηδενικούς συνοριακούς τελεστές. Επιπλέον, $H_n(\gamma\bar{\otimes}\epsilon)\alpha_n = \mathrm{id}$, διότι για κάθε $c \in Z_p$ και για κάθε $d \in Z_{n-p}(D_\bullet)$ έχουμε

$$\begin{aligned} H_n(\gamma\bar{\otimes}\epsilon)\alpha_n([c] \otimes [d]) &= H_n(\gamma\bar{\otimes}\epsilon)[c \otimes d] \\ &= [(\gamma\bar{\otimes}\epsilon)(c \otimes d)] \\ &= \gamma(c) \otimes \epsilon(d) \\ &= [c] \otimes [d]. \end{aligned}$$

Εξ αυτού εξάγεται ότι ο α έχει αριστερό αντίστροφο και ότι η (3.2) διασπάται.

Στη γενική περίπτωση, εάν $D'_\bullet$ είναι κάποιο σύμπλοκο προβολικών R-μοδίων και $f : D'_\bullet \to D_\bullet$ κάποιος οιονεί ισομορφισμός [7]. Από τη φυσικότητα τής (3.2) δημιουργείται το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & (H_\bullet(C_\bullet) \otimes_R H_\bullet(D'_\bullet))_n & \xrightarrow{\alpha'_n} & H_n(C_\bullet \otimes_R D'_\bullet) & \xrightarrow{\beta'_n} & \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\left(H_p(C_\bullet), H_q(D'_\bullet)\right) & \to & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes H(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle H(\mathrm{id}\otimes f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{id}, H(f))} & & \\ 0 & \to & (H_\bullet(C_\bullet) \otimes_R H_\bullet(D_\bullet))_n & \xrightarrow{\alpha_n} & H_n(C_\bullet \otimes_R D_\bullet) & \xrightarrow{\beta_n} & \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\left(H_p(C_\bullet), H_q(D_\bullet)\right) & \to & 0 \end{array}$$

Καθώς οι ομομορφισμοί id και $H(f)$ είναι ισομορφισμοί, το ίδιο θα ισχύει και για τους $\mathrm{id}\otimes H(f)$ και $\mathrm{Tor}_1^R\left(\mathrm{id}, H(f)\right)$. Από το *λήμμα των πέντε* έπεται ότι ο $H(\mathrm{id}\otimes f)$ είναι ωσαύτως ισομορφισμός. Επειδή οι δυο ακολουθίες είναι *ισόμορφες όρο προς όρο* και η μία διασπώμενη, το ίδιο θα ισχύει και για την άλλη. □

Πόρισμα 3.2.6 (Τοπολογική εκδοχή τού θεωρήματος τού Künneth)**.** *Εάν X, Y είναι δυο τοπολογικοί χώροι και ο δακτύλιος αναφοράς μας R κληρονομικός, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$0 \longrightarrow (H_\bullet(X;R) \otimes_R H_\bullet(Y;R))_n \xrightarrow{\alpha_n} H_n(X \times Y; R) \xrightarrow{\beta_n}$$
$$\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\left(H_p(X;R), H_q(Y;R)\right) \longrightarrow 0,$$

όπου $\alpha_n(\sum_p [\sigma_p] \otimes [\sigma'_q]) = \sum_p [\sigma_p \otimes \sigma_q]$ και οι α_n και β_n είναι φυσικοί.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 3.2.2 στα σύμπλοκα ελεύθερων R-μοδίων $S_\bullet(X;R), S_\bullet(Y;R)$ λαμβάνουμε τη διασπώμενη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow (H_\bullet(X) \otimes_R H_\bullet(Y))_n \xrightarrow{\alpha_n} H_n(S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R)) \xrightarrow{\beta_n}$$
$$\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\left(H_p(X), H_q(X)\right) \longrightarrow 0.$$

[7] Για την ύπαρξη αυτού, βλέπε [Rot09, Πρόταση 10.44].

Από το θεώρημα των Eilenberg και Zilber 2.2.1 λαμβάνουμε έναν φυσικό ισομορφισμό

$$H_\bullet(X \times Y; R) \cong H_\bullet(S_\bullet(X; R) \otimes_R S_\bullet(Y; R)),$$

μέσω τού οποίου συμπληρώνεται η απόδειξη. □

Πόρισμα 3.2.7 (Θεώρημα των καθολικών συντελεστών).

1. *Έστω $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο ισόπεδων R-μοδίων, τέτοιο ώστε το $B_\bullet(C_\bullet)$ να είναι αλυσωτό σύμπλοκο ισόπεδων R -μοδίων και M κάποιος R-μόδιος. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει μια βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$0 \to H_n(C_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{\alpha_n} H_n(C_\bullet \otimes_R M) \xrightarrow{\beta_n} \operatorname{Tor}_1^R(H_{n-1}(C_\bullet), M) \to 0, \tag{3.5}$$

όπου $\alpha_n([c_n] \otimes m) := [c_n \otimes m]$ και οι α_n, β_n είναι φυσικοί.

2. *Εάν ο R είναι κληρονομικός δακτύλιος, το $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ αλυσωτό σύμπλοκο προβολικών R-μοδίων και M κάποιος R-μόδιος, τότε η (3.5) είναι διασπώμενη.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα 3.2.2 στην περίπτωση όπου το $D_\bullet$ είναι το σύμπλοκο με το M συγκεντρωμένο στον βαθμό 0. □

Πόρισμα 3.2.8 (Τοπολογική εκδοχή τού θεωρήματος καθολικών συντελεστών). *Εάν ο δακτύλιος αναφοράς μας R είναι κληρονομικός, M ένας R-μόδιος και (X, A) ένα τοπολογικό ζεύγος, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υπάρχει διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία*

$$0 \to H_n(X, A; R) \otimes_R M \xrightarrow{\alpha_n} H_n(X, A; M) \xrightarrow{\beta_n} \operatorname{Tor}_1^R(H_{n-1}(X, A; R), M) \to 0,$$

όπου $\alpha_n([c_n] \otimes m) := [c_n \otimes m]$ και οι α_n, β_n είναι φυσικοί.

Απόδειξη. Αρκεί η εφαρμογή τού προηγούμενου πορίσματος για το αλυσωτό σύμπλοκο ελεύθερων R-μοδίων $S_\bullet(X, A; R)$. □

Το κεφάλαιο αυτό θα κλείσει με την παράθεση των (ακόμη οφειλομένων) αποδείξεων των λημμάτων 2.2.2 και 2.2.3.

Λήμμα 2.2.2 Απόδειξη. Επειδή οι Δ^p και Δ^q είναι συσταλτοί τοπολογικοί χώροι, τα αλυσωτά σύμπλοκα των ιδιαζόντων αλυσίδων τους είναι ομοτοπικά με το $(C_\bullet, \partial_\bullet)$, όπου $C_i = R$ για $i \geqslant 0$ και ∂_p η ταυτοτική απεικόνιση για άρτιο p και 0 για περιττό. Σύμφωνα με την πρόταση 2.1.7, αυτό σημαίνει ότι

$$S_\bullet(\Delta^p; R) \otimes_R S_\bullet(\Delta^q; R) \simeq C_\bullet \otimes_R C_\bullet.$$

Ο R είναι ελεύθερος R-μόδιος, άρα τα $C_\bullet$ και $B_\bullet(C_\bullet)$ είναι σύμπλοκα ισόπεδων R-μοδίων. Από το θεώρημα 3.2.2 λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(C_\bullet) \otimes_R H_q(C_\bullet)) \xrightarrow{\alpha_n} H_n(C_\bullet \otimes_R C_\bullet) \xrightarrow{\beta_n} \bigoplus_{p+q=n-1} \operatorname{Tor}_1^R\left(H_p(C_\bullet), H_q(C_\bullet)\right) \to 0.$$

Επειδή $H_p(C_\bullet) \in \{0, R\}$, έχουμε $\operatorname{Tor}_1^R\left(H_p(C_\bullet), H_q(C_\bullet)\right) = 0$, οπότε για κάθε ακέραιο n,

$$H_n(S_\bullet(\Delta^p; R) \otimes_R S_\bullet(\Delta^q; R)) \cong H_n(C_\bullet \otimes_R C_\bullet) \cong \bigoplus_{p+q=n} (H_p(C_\bullet) \otimes_R H_q(C_\bullet)) = \begin{cases} R, & \text{όταν n=0,} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

□

Λήμμα 2.2.3 Απόδειξη. Έστω $S'_\bullet(X)$ το αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων με

$$S'_i(X) := \begin{cases} S_i(X;R), & \text{όταν i=0,1,} \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

και έστω $S'_\bullet(\Upsilon)$ το αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων με

$$S'_i(\Upsilon) := \begin{cases} S_i(\Upsilon;R), & \text{όταν i=0,1,} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Από τον ορισμό τού τανυστικού γινομένου έχουμε

$$(S'_\bullet(X) \otimes_R S'_\bullet(Y))_i = (S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R))_i$$

για $i = 0, 1$, οπότε

$$H_0(X;R) = H_0 S'_\bullet(X) \text{ και } H_0(Y;R) = H_0 S'_\bullet(Y),$$

και

$$H_0(S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R)) = H_0(S'_\bullet(X) \otimes_R S'_\bullet(Y)).$$

Το αλυσωτό σύμπλοκο $S'_\bullet(X)$ είναι σύμπλοκο ελευθέρων R-μοδίων με μοναδικό μη τετριμμένο σύνορό του τον $B_0(S'_\bullet(X))$. Η ακολουθία

$$0 \longrightarrow B_0(S'_\bullet(X)) \longrightarrow S'_0(X) \longrightarrow H'_0(X) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Άρα αμφότεροι οι $S_0(X)$ και $H'_0(X)$ είναι ελεύθεροι και, ως εκ τούτου, ισόπεδοι. Από το πόρισμα 3.1.14, ο $B_0(S'_\bullet(X))$ είναι ωσαύτως ισόπεδος. Κατά συνέπειαν, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 3.2.2, από το οποίο προκύπτει ότι ο

$$\alpha : H_0(X;R) \otimes_R H_0(Y;R) \to H_0(S_\bullet(X;R) \otimes_R S_\bullet(Y;R))$$

με $[x] \otimes [y] \mapsto \alpha([x] \otimes [y]) := [x \otimes y]$ είναι ισομορφισμός, διότι οι μόδιοι ομολογίας για αρνητικούς δείκτες είναι τετριμμένοι και $\bigoplus_{p+q=-1} \mathrm{Tor}_1^R \left(H_p(S'_\bullet(X)), H_q(S'_\bullet(Y))\right) = 0$. □

Βιβλιογραφία

[AHS04] J. Adámek, H. Herrlich, and G. E. Strecker. *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats*. 2004. URL: http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/.

[Dol80] A. Dold. *Lectures on Algebraic Topology*. Second Edition. Springer-Verlag, 1980.

[Rot09] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Second Edition. Springer-Verlag, 2009.

[Rot98] J. J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Fourth Corrected Printing. Springer-Verlag, 1998.

[Ντα07] Δ. Ι. Νταής. «Σημειώσεις για το μάθημα: Αλγεβρική Τοπολογία/Ομολογία». 2007. URL: http://web-server.math.uoc.gr:1080/Members/ddais/AT_XEIM_07_08/.

[Ντα08] Δ. Ι. Νταής. «Σημειώσεις για το μάθημα: Στοιχεία Ομολογικής Άλγεβρας». 2008. URL: http://web-server.math.uoc.gr:1080/Members/ddais/ThemAL/.

[Ορφ08] Μ.-Ν. Ορφανουδάκης. «Η μέθοδος των ακυκληματικών μοντέλων και το θεώρημα των Eilenberg και Zilber». 2008. URL: http://web-server.math.uoc.gr:1080/Members/ddais/AT_XEIM_07_08/.