# Παράρτημα F

# Κατηγορίες και συναρτητές

Το τελευταίο παράρτημα περιλαμβάνει κάποιες θεμελιώδεις έννοιες από τη *Θεωρία Κατηγοριών*[1], οι οποίες θα αποβούν ιδιαίτερα χρήσιμες για τη συστηματικότερη παρουσίαση τόσον ορισμένων εκ των προηγηθέντων εννοιών (που χαρακτηρίζουν *ειδικούς* $R$-μοδίους) όσον και ποικίλων συναρτητών που είναι απαραίτητοι για τα κεφάλαια 2 έως 7.

## $\boxed{\text{F.1}}$ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ

**F.1.1 Ορισμός.** Μια **κατηγορία** $\mathcal{C}$ συνίσταται από μια **κλάση**[2] **αντικειμένων** $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ και μια οικογένεια συνόλων $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ για οιαδήποτε αντικείμενα $A,B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ (τα στοιχεία των οποίων καλούνται **μορφισμοί** από το $A$ στο $B$) με

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \cap \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',B') = \varnothing \text{ όταν } \ A \neq A' \text{ ή } \ B \neq B',$$

καθώς και από μια *πράξη* (οριζόμενη για οιαδήποτε τριάδα αντικειμένων $A,B,C$)

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,C), \ \ (f,g) \longmapsto g \circ f,$$

(που καλείται *σύνθεση* των $f$ και $g$) με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Η "$\circ$" είναι προσεταιριστική, δηλαδή $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$.

(ii) Για κάθε αντικείμενο $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ υπάρχει ένας (μονοσημάντως ορισμένος) μορφισμός $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A)$ για τον οποίο ισχύουν οι ισότητες

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \quad \mathrm{id}_A \circ g = g, \quad \forall f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B), \ \ \forall g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A).$$

---

[1] Οι αναγνώστες που ενδιαφέρονται για λεπτομερή μελέτη τής *Θεωρίας Κατηγοριών* μπορούν να ανατρέξουν σε ειδικά συγγράμματα, όπως, π.χ., σε αυτά των Mac Lane [68] και Schubert [109].

[2] «Κλάση» υπό την έννοια τής Αξιωματικής Συνολοθεωρίας των J. von Neumann (1925-27), P. Bernays (1937-54) και K. Gödel (1940). Πρβλ. [53], σελ. 237-242.

Ένας $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ καλείται $\mathcal{C}$-**ισομορφισμός** όταν υπάρχει $g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ για τον οποίον ισχύουν οι ισότητες $g \circ f = \mathrm{id}_A$ και $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Δοθέντος ενός $\mathcal{C}$-ισομορφισμού $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, ένας τέτοιος μορφισμός $g$ είναι κατ' ανάγκην μονοσημάντως ορισμένος (ως προς το να πληροί τις ανωτέρω ισότητες) και αφ' εαυτού $\mathcal{C}$-ισομορφισμός, συμβολίζεται συνήθως ως $f^{-1}$ και καλείται **αντίστροφος τού** $f$.

**F.1.2 Σημείωση.** Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Ένα $O \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ καλείται **μηδενικό αντικείμενο τής** $\mathcal{C}$ όταν αμφότερα τα $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, O)$ και $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(O, B)$ είναι μονοσύνολα. Ένα μηδενικό αντικείμενο τής $\mathcal{C}$, όταν υπάρχει, είναι μονοσημάντως ορισμένο μέχρις $\mathcal{C}$-ισομορφισμού.

**F.1.3 Ορισμός.** Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία. Μια **υποκατηγορία** $\mathcal{C}'$ **τής** $\mathcal{C}$ είναι μια κατηγορία με τις εξής ιδιότητες:

(a) Κάθε αντικείμενο τής $\mathcal{C}'$ είναι και αντικείμενο τής $\mathcal{C}$.

(b) Για οιαδήποτε $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ έχουμε $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A, B) \subseteq \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

(c) Για οιοδήποτε ζεύγος $(f, g) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(B, C)$ η σύνθεση $g \circ f$ εντός τής $\mathcal{C}'$ ισούται με τη σύνθεση $g \circ f$ εντός τής $\mathcal{C}$.

**F.1.4 Ορισμός.** Μια υποκατηγορία $\mathcal{C}'$ μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ καλείται **πλήρης υποκατηγορία τής** $\mathcal{C}$ όταν $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ για οιαδήποτε $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$.

**F.1.5 Παραδείγματα.** (i) Οι *κατηγορίες* $\mathfrak{Sets}$, $\mathfrak{Groups}$ και $\mathfrak{Mod}_R$ *των συνόλων, των ομάδων* και *των* $R$*-μοδίων*[3] (με τις συνήθεις απεικονίσεις, τους ομομορφισμούς ομάδων και τους ομομορφισμούς $R$-μοδίων, αντιστοίχως, ως μορφισμούς τους[4]).

(ii) Η κατηγορία $\mathfrak{FSets}$ *των συνόλων που είναι το πολύ πεπερασμένα*, η οποία αποτελεί μια πλήρη υποκατηγορία τής κατηγορίας $\mathfrak{Sets}$.

(iii) Η *κατηγορία* $\mathfrak{Abgroups}$ *των αβελιανών ομάδων*, η οποία αποτελεί μια πλήρη υποκατηγορία τής κατηγορίας $\mathfrak{Groups}$.

(iv) Η *κατηγορία* $\mathfrak{Mod}_R^{\mathbb{Z}}$ *των ακολουθιών* $R$*-μοδίων με το* $\mathbb{Z}$ *ως το σύνολο των (κατιόντων) δεικτών τους* (η οποία έχει τις ακολουθίες ομομορφισμών $R$-μοδίων $(f_n : M_n \longrightarrow N_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ως μορφισμούς της). Επίσης, η *κατηγορία* $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ *των αλυσωτών συμπλόκων* (με τους αλυσωτούς μετασχηματισμούς ως μορφισμούς της). Βλ. εδάφια[5] B.2.1, B.2.4. Κατ' αναλογίαν ορίζεται και η *κατηγορία* $\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ *των συναλυσωτών συμπλόκων* (με τους συναλυσωτούς μετασχηματισμούς ως μορφισμούς της).

(v) Η *κατηγορία* $\mathfrak{Top}$ *των τοπολογικών χώρων* (με τις συνεχείς απεικονίσεις ως

[3] $R$*-μοδίων* υπό την έννοια τού ορισμού A.2.1.

[4] Η κατηγορία $\mathfrak{Sets}$ δεν διαθέτει μηδενικά αντικείμενα. Αντιθέτως, η $\mathfrak{Groups}$ έχει κάθε τετριμμένη ομάδα και η $\mathfrak{Mod}_R$ κάθε τετριμμένο $R$-μόδιο ως μηδενικό της αντικείμενο.

[5] Σημειωτέον ότι η κατηγορία $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ έχει το $\mathbf{0}_\bullet$ ως μηδενικό αντικείμενο.

μορφισμούς της και τους ομοιομορφισμούς ως τους $\mathfrak{Top}$-ισομορφισμούς).

(vi) Η *κατηγορία* $\mathfrak{Top}^{[2]}$ *των τοπολογικών ζευγών* (η οποία έχει ως αντικείμενά της *τα τοπολογικά ζεύγη* $(X, A)$ και ως μορφισμούς της από ένα τοπολογικό ζεύγος $(X, A)$ σε ένα τοπολογικό ζεύγος $(Y, B)$ *τις συνεχείς απεικονίσεις τοπολογικών ζευγών* $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, ήτοι συνεχείς απεικονίσεις $f : X \longrightarrow Y$ με $f(A) \subseteq B$. Η $\mathfrak{Top}$ μπορεί να ιδωθεί ως πλήρης υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$ εάν ταυτίσουμε κάθε ζεύγος τής μορφής $(X, \varnothing)$ με τον ίδιον τον $X$.

(vii) Άλλη μια ενδιαφέρουσα (μη πλήρης) υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$ είναι η *κατηγορία των εστιγμένων τοπολογικών χώρων* $\mathfrak{Top}^{\text{εστ.}}$, ήτοι η κατηγορία που έχει τοπολογικά ζεύγη τής μορφής $(X, \{x_0\})$ ως αντικείμενά της (όπου $x_0 \in X$) και συνεχείς απεικονίσεις

$$f : (X, \{x_0\}) \longrightarrow (Y, \{y_0\})$$

με $f(x_0) = y_0$ ως μορφισμούς της.

(viii) Η *κατηγορία* $\mathfrak{SComp}$ *των μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων* (έχουσα τις *μονοπλεκτικές απεικονίσεις* ως μορφισμούς της) αποτελεί μια πλήρη υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}$ και η *κατηγορία* $\mathfrak{SComp}^{[2]}$ *των ζευγών μονοπλεκτικών συμπλεγμάτων* μια πλήρη υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$. (Βλ. εδάφια 1.19.27 και 1.19.29.)

(ix) Η *κατηγορία* $\mathfrak{Top}_{\mathrm{CW}}$ *των* CW-*χώρων* (που είναι υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}$, με τις *κυτταρικές απεικονίσεις* ως μορφισμούς της, βλ. εδ. 1.20.19) και η *κατηγορία* $\mathfrak{Top}_{\mathrm{CW}}^{[2]}$ *των* CW-*ζευγών* (βλ. εδ. 1.20.11, που είναι υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}^{[2]}$, με τις *κυτταρικές απεικονίσεις* CW-*ζευγών* $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, ήτοι με κυτταρικές απεικονίσεις $f : X \longrightarrow Y$, όπου $f(A) \subseteq B$, ως μορφισμούς της).

(x) Η *κατηγορία ομοτοπίας* $\mathfrak{Htp}$ έχουσα τους τοπολογικούς χώρους ως αντικείμενά της και τις *κλάσεις ομοτοπίας* (συνεχών απεικονίσεων μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων) ως μορφισμούς της[6] . (Βλ. εδ. 1.17.3 και 1.17.5.)

**F.1.6 Ορισμός.** Μια κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται **προπροσθετική** όταν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Η $\mathcal{C}$ διαθέτει μηδενικό αντικείμενο.

(ii) Για οιαδήποτε $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ το σύνολο $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ αποτελεί μια προσθετική αβελιανή ομάδα.

(iii) Για οιαδήποτε $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ υπάρχει μια απεικόνιση

$$\circledast : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

με

$$(f + g) \circledast h = f \circledast h + g \circledast h \ \text{ και } \ f \circledast (h + k) = f \circledast h + f \circledast k$$

για οιουσδήποτε $f, g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C)$ και $h, k \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

[6] Γι' αυτόν τον λόγο η $\mathfrak{Htp}$ *δεν είναι* υποκατηγορία τής $\mathfrak{Top}$.

**F.1.7 Παραδείγματα.** Οι κατηγορίες $\mathfrak{Abgroups}$, $\mathfrak{Mod}_R$ και $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ είναι προπροσθετικές, ενώ οι $\mathfrak{Sets}$, $\mathfrak{Groups}$ και $\mathfrak{Top}$ δεν είναι.

**F.1.8 Ορισμός.** Έστω $(A_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$. Ένα αντικείμενο $A$ τής $\mathcal{C}$, μαζί με μια οικογένεια $(p_j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A_j))_{j\in J}$ (τα μέλη τής οποίας καλούνται **προβολές**) είναι **ένα γινόμενο (των μελών) τής οικογενείας** $(A_j)_{j\in J}$ όταν για οιοδήποτε αντικείμενο $B$ τής $\mathcal{C}$ και οιαδήποτε οικογένεια μορφισμών $(f_j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A_j))_{j\in J}$ (με το ίδιο σύνολο δεικτών) υπάρχει ένας μονοσημάντως ορισμένος $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$, τέτοιος ώστε να ισχύει $p_j \circ f = f_j, \forall j \in J$, ήτοι τέτοιος, ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "p_j"] & \\ B \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, "f_j"'] & \circlearrowleft & A_j \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

**F.1.9 Πρόταση.** *Ένα γινόμενο (των μελών) μιας οικογενείας $(A_j)_{j\in J}$ αντικειμένων μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$, όταν υπάρχει, είναι μονοσημάντως ορισμένο μέχρις $\mathcal{C}$-ισομορφισμού.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν υποθέσουμε ότι τα

$$A, (p_j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A_j))_{j\in J} \;\; \text{και} \;\; A', (p'_j \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A', A_j))_{j\in J}$$

είναι δυο γινόμενα (των μελών) μιας οικογενείας $(A_j)_{j\in J}$ αντικειμένων τής $\mathcal{C}$, τότε υπάρχουν μονοσημάντως ορισμένοι

$$f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A', A), g \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A') : p_j \circ f = p'_j \;\; \text{και} \;\; p'_j \circ g = p_j, \forall j \in J.$$

Κατά συνέπειαν,

$$\left.\begin{array}{l} p_j \circ f \circ g = p_j \\ p_j \circ \mathrm{id}_A = p_j \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ g = \mathrm{id}_A \quad \text{και} \quad \left.\begin{array}{l} p'_j \circ g \circ f = p'_j \\ p'_j \circ \mathrm{id}_{A'} = p'_j \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f = \mathrm{id}_{A'}.$$

Άρα ο $f$ είναι ένας $\mathcal{C}$-ισομορφισμός. □

**F.1.10 Ορισμός.** Μια προπροσθετική κατηγορία $\mathcal{C}$ καλείται **προσθετική** όταν κάθε ζεύγος αντικειμένων τής $\mathcal{C}$ διαθέτει ένα γινόμενο.

**F.1.11 Παραδείγματα.** Οι κατηγορίες $\mathfrak{Abgroups}$, $\mathfrak{Mod}_R$ και $\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)$ είναι προσθετικές. Αντιθέτως, η $\mathfrak{Top}_{\mathrm{CW}}$ δεν είναι προσθετική.

# F.2 ΣΥΝΑΡΤΗΤΕΣ

**F.2.1 Ορισμός.** Έστω ότι οι $\mathcal{C},\mathcal{D}$ είναι δυο κατηγορίες. Ένας **συναλλοίωτος** (και αντιστοίχως, **ανταλλοίωτος**) **συναρτητής** $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ συνίσταται από μια *απεικόνιση αντικειμένων*

$$\mathbf{F} : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathcal{D}),\ \ A \longmapsto \mathbf{F}(A),$$

και μια *απεικόνιση μορφισμών*

$$\mathbf{F} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(A),\mathbf{F}(B))\ ,\quad f \longmapsto \mathbf{F}(f),$$

$$(\text{και αντιστοίχως}, \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(B),\mathbf{F}(A)),\quad f \longmapsto \mathbf{F}(f))$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:
(i) $\mathbf{F}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathbf{F}(A)}, \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
(ii) Για κάθε $(f,g) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)\times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,C)$ ισχύει η ισότητα

$$\mathbf{F}(g\circ f) = \mathbf{F}(g)\circ \mathbf{F}(f) \quad (\text{και αντιστοίχως}, \mathbf{F}(g\circ f) = \mathbf{F}(f)\circ \mathbf{F}(g)).$$

**F.2.2 Ορισμός.** Έστω ότι οι $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ και $\mathbf{G} : \mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{E}$ είναι δυο συναρτητές. Ως **σύνθεση** αυτών ορίζεται ο συναρτητής $\mathbf{G}\circ\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{E}$ ο συνιστώμενος από τις απεικονίσεις (μεταξύ αντικειμένων και μορφισμών, αντιστοίχως):

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni A \longmapsto \mathbf{G}(\mathbf{F}(A)) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}),\ \ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \ni f \longmapsto \mathbf{G}(\mathbf{F}(f)).$$

(Ο $\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$ είναι συναλλοίωτος όταν αμφότεροι οι $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ είναι είτε συναλλοίωτοι είτε ανταλλοίωτοι, και ανταλλοίωτος όταν ο ένας εκ των $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ είναι συναλλοίωτος και ο άλλος ανταλλοίωτος.)

**F.2.3 Ορισμός.** Ένας (συναλλοίωτος ή ανταλλοίωτος) συναρτητής $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ μεταξύ δυο προπροσθετικών κατηγοριών $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ καλείται **προσθετικός** όταν

$$\mathbf{F}(f+g) = \mathbf{F}(f) + \mathbf{F}(g),\ \forall\,(f,g) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)\times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B).$$

**F.2.4 Παραδείγματα.** (i) Επί οιασδήποτε κατηγορίας $\mathcal{C}$ ορίζεται ο *ταυτοτικός συναρτητής* $\mathbf{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ με $\mathbf{id}_{\mathcal{C}}(A) := A$, για κάθε $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ και $\mathbf{id}_{\mathcal{C}}(f) := f$, για κάθε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$. Γενικότερα, εάν $\mathcal{C}'$ είναι μια υποκατηγορία μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$, τότε ορίζεται ο *ενθετικός συναρτητής* $\boldsymbol{\iota} : \mathcal{C}' \rightsquigarrow \mathcal{C}$ με $\boldsymbol{\iota}(A) := A, \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}')$ και $\boldsymbol{\iota}(f) := f$, για κάθε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A,B)$.
(ii) Οι *επιλήσμονες (συναλλοίωτοι) συναρτητές*

$$\mathfrak{Groups} \rightsquigarrow \mathfrak{Sets},\ \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Sets},\ \mathfrak{Top} \rightsquigarrow \mathfrak{Sets},$$

είναι αυτοί που «ξεχνούν» τις εκάστοτε (αλγεβρικές ή τοπολογικές) δομές.

(iii) Ο *συναρτητής αβελιανοποιήσεως* $\mathbf{F} : \mathfrak{Groups} \rightsquigarrow \mathfrak{Abgroups}$ είναι ο συναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Groups}) \ni G \longmapsto \mathbf{F}(G) := G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G] \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Abgroups}),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Groups}}(G,H) \ni f \longmapsto \mathbf{F}(f) := \overline{f} \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Abgroups}}(G^{\mathrm{ab}}, H^{\mathrm{ab}}),$$

όπου $[G,G]$ είναι η *μεταθέτρια υποομάδα* τής $G$ η παραγόμενη από όλους τους μεταθέτες $[g,g'] := gg'g^{-1}(g')^{-1},\ g,g' \in G$, και

$$\overline{f} : G^{\mathrm{ab}} \longrightarrow H^{\mathrm{ab}},\ \ g[G,G] \longmapsto f(g)[H,H].$$

(iv) Hom-*συναρτητές*. Εάν $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$, τότε ορίζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Hom}_R(A,-) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathrm{Hom}_R(A,M) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M,M') =: \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Mod}_R}(M,M') \ni f \longmapsto \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_A, f),$$

και ένας ανταλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Hom}_R(-,A) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathrm{Hom}_R(M,A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M,M') =: \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Mod}_R}(M,M') \ni f \longmapsto \mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{id}_A).$$

(Βλ. λήμματα C.1.7 και C.1.6.) Αμφότεροι οι $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ και $\mathrm{Hom}_R(-,A)$ είναι προσθετικοί συναρτητές (υπό την έννοια τού ορισμού F.2.3).

(v) *Συναρτητές δημιουργούμενοι μέσω τού τανυστικού γινομένου $R$-μοδίων*. Εάν $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$, τότε ορίζεται ένας συναλλοίωτος συναρτητής

$$A \otimes_R -\ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto A \otimes_R M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M,M') \ni f \longmapsto \mathrm{id}_A \overline{\otimes} f \in \mathrm{Hom}_R(A \otimes_R M, A \otimes_R M'),$$

καθώς και ένας συναλλοίωτος συναρτητής

$$- \otimes_R A : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto M \otimes_R A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni f \longmapsto f \overline{\otimes} \mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R A, M' \otimes_R A).$$

(Βλ. προτάσεις C.5.4 και C.5.5.) Αμφότεροι οι συναρτητές $A \otimes_R -$ και $- \otimes_R A$ είναι προσθετικοί (υπό την έννοια τού ορισμού F.2.3).

(vi) *Συναρτητές ομολογίας και συνομολογίας*. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής

$$H_n(-) : \mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni \mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto H_n(\mathbf{M}_\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{ch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(\mathbf{M}_\bullet, \mathbf{M}'_\bullet) \ni f_\bullet \longmapsto H_n(f) \in \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{M}_\bullet), H_n(\mathbf{M}'_\bullet)),$$

ο λεγόμενος $n$-**οστός συναρτητής ομολογίας**. (Βλ. τον ορισμό B.2.2 και τις προτάσεις B.2.5, B.2.6 και B.2.7.)

Κατ' αναλογίαν, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζεται ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής

$$H^n(-) : \mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R) \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)) \ni \mathbf{M}^\bullet = (M^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto H^n(\mathbf{M}^\bullet) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Comp}^{\mathrm{coch}}(\mathfrak{Mod}_R)}(\mathbf{M}^\bullet, \mathbf{M}'^\bullet) \ni f^\bullet \longmapsto H^n(f^\bullet) \in \mathrm{Hom}_R(H^n(\mathbf{M}^\bullet), H^n(\mathbf{M}'^\bullet)),$$

ο λεγόμενος $n$-**οστός συναρτητής συνομολογίας**. (Βλ. τον ορισμό B.2.18 και τις προτάσεις B.2.21, B.2.22 και B.2.23.)

(vii) *Συναρτητές δημιουργούμενοι μέσω των γινομένων επεκτάσεως*. Εάν $n \in \mathbb{N}_0$ και $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$, τότε ορίζεται ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Ext}^n_R(A, -) : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathrm{Ext}^n_R(A, M) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni f \longmapsto \mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{id}_A, f) \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}^n_R(A, M), \mathrm{Ext}^n_R(A, M')),$$

καθώς και ένας προσθετικός ανταλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Ext}_R^n(-,A) \ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathrm{Ext}_R^n(M,A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M,M') \ni f \longmapsto \mathrm{Ext}_R^n(f,\mathrm{id}_A) \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^n(M,A),\mathrm{Ext}_R^n(M',A)).$$

(Βλ. ορισμούς D.2.4 και D.2.6, και προτάσεις D.2.7 και D.2.8.) Ο $\mathrm{Ext}_R^n(A,-)$ (και αντιστοίχως, ο $\mathrm{Ext}_R^n(-,A)$) καλείται **ο εκ δεξιών παράγωγος συναρτητής τού** $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ (και αντιστοίχως, **τού** $\mathrm{Hom}_R(-,A)$).

(viii) *Συναρτητές δημιουργούμενοι μέσω των γινομένων στρέψεως.* Εάν $n \in \mathbb{N}_0$ και $A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$, τότε ορίζεται ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Tor}_n^R(A,-) \ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathrm{Tor}_n^R(A,M) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M,M') \ni f \longmapsto \mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{id}_A,f) \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_n^R(A,M),\mathrm{Tor}_n^R(A,M')),$$

καθώς και ένας προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Tor}_n^R(-,A) \ : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathrm{Tor}_n^R(M,A) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M,M') \ni f \longmapsto \mathrm{Tor}_n^R(f,\mathrm{id}_A) \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}_n^R(M,A),\mathrm{Tor}_n^R(M',A)).$$

(Βλ. ορισμούς D.3.4 και D.3.6, και προτάσεις D.3.7 και D.3.8.) Ο $\mathrm{Tor}_n^R(A,-)$ (και αντιστοίχως, ο $\mathrm{Tor}_n^R(-,A)$) καλείται **ο εξ αριστερών παράγωγος συναρτητής τού** $A \otimes_R -$ (και αντιστοίχως, **τού** $- \otimes_R A$).

(ix) *Ο συναρτητές οι δημιουργούμενοι μέσω κλάσεων ομοτοπίας.* Ας υποθέσουμε ότι $X$ είναι τυχών τοπολογικός χώρος. Ο συναρτητής

$$[X,-]_{\text{ομ.}} \ : \mathfrak{Htp} \rightsquigarrow \mathfrak{Sets},$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Htp}) \ni Y \longmapsto [X,Y]_{\text{ομ.}} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Sets}),$$

$$(h : Y \longrightarrow Z \ \text{ συνεχής}) \longmapsto (h_\star : [X,Y]_{\text{ομ.}} \longrightarrow [X,Z]_{\text{ομ.}})$$

με $h_\star([f]^{\text{ομ.}}_{X,Y}) := [h \circ f]^{\text{ομ.}}_{X,Z}$, $\forall [f]^{\text{ομ.}}_{X,Y} \in [X,Y]_{\text{ομ.}}$, είναι συναλλοίωτος, ενώ ο συναρτητής

$$[-,X]_{\text{ομ.}} : \mathfrak{Htp} \rightsquigarrow \mathfrak{Sets},$$

$$\text{Ob}(\mathfrak{Htp}) \ni Y \longmapsto [Y,X]_{\text{ομ.}} \in \text{Ob}(\mathfrak{Sets}),$$

$$(h : Y \longrightarrow Z \;\; \text{συνεχής}) \longmapsto (h^\star : [Z,X]_{\text{ομ.}} \longrightarrow [Y,X]_{\text{ομ.}})$$

με $h^\star([g]^{\text{ομ.}}_{Z,X}) := [g \circ h]^{\text{ομ.}}_{Y,X}$, για κάθε $[g]^{\text{ομ.}}_{Z,X} \in [Z,X]_{\text{ομ.}}$, είναι ανταλλοίωτος. (Βλ. εδ. 1.17.5.)

(x) *Ο συναρτητής ο δημιουργούμενος μέσω τής θεμελιώδους ομάδας*. (Βλ. §**??** και, ιδιαιτέρως, την πρόταση 2.2.3.) Πρόκειται για τον συναλλοίωτο συναρτητή

$$\boldsymbol{\pi}_1 : \mathfrak{Top}^{\text{εστ.}} \rightsquigarrow \mathfrak{Groups},$$

$$\text{Ob}(\mathfrak{Top}^{\text{εστ.}}) \ni (X,\{x_0\}) \longmapsto \boldsymbol{\pi}_1(X,x_0) \in \text{Ob}(\mathfrak{Groups}),$$

$$(f : (X,\{x_0\}) \longrightarrow (Y,\{y_0\}) \text{ συνεχής}) \longmapsto (\boldsymbol{\pi}_1(f) : \boldsymbol{\pi}_1(X,x_0) \longrightarrow \boldsymbol{\pi}_1(Y,y_0)).$$

**F.2.5 Ορισμός.** Έστω $\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R$ ένας προσθετικός συναλλοίωτος (και αντιστοίχως, ανταλλοίωτος) συναρτητής και έστω

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία $R$-μοδίων και ομομορφισμών $R$-μοδίων. (Βλ. εδ. B.1.1.) Ο $\mathbf{F}$ καλείται

(i) **εξ αριστερών ακριβής συναρτητής** όταν η

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(A) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(C)$$

$$(\text{και αντιστοίχως, η } \{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(C) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(A))$$

είναι κατ' ανάγκην ακριβής,

(ii) **εκ δεξιών ακριβής συναρτητής** όταν η

$$\mathbf{F}(A) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(C) \longrightarrow \{0\}$$

$$(\text{και αντιστοίχως, η } \mathbf{F}(C) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(A) \longrightarrow \{0\})$$

είναι κατ' ανάγκην ακριβής και
(iii) **ακριβής συναρτητής** όταν η

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(A) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(C) \longrightarrow \{0\}$$

(και αντιστοίχως, η $\{0\} \longrightarrow \mathbf{F}(C) \xrightarrow{\mathbf{F}(g)} \mathbf{F}(B) \xrightarrow{\mathbf{F}(f)} \mathbf{F}(A) \longrightarrow \{0\}$)

είναι κατ' ανάγκην (βραχεία) ακριβής.

**F.2.6 Παραδείγματα.** Ας υποθέσουμε ότι $M, N$ είναι δυο (παγιωμένοι) $R$-μόδιοι.
(i) Ο προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ είναι εξ αριστερών ακριβής αλλ' εν γένει μη ακριβής[7]. (Βλ. θεώρημα C.1.17 και σημείωση C.1.19.)
(ii) Ο προσθετικός ανταλλοίωτος συναρτητής $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ είναι εξ αριστερών ακριβής αλλ' εν γένει μη ακριβής. (Βλ. θεώρημα C.1.14 και σημείωση C.1.16.)
(iii) Οι προσθετικοί συναλλοίωτοι συναρτητές $M \otimes_R -$ και $- \otimes_R N$ είναι εκ δεξιών ακριβείς αλλ' εν γένει μη ακριβείς. (Βλ. θεωρήματα C.5.8 και C.5.9, και σημείωση C.5.10.)
(iv) Ο προσθετικός συναλλοίωτος συναρτητής $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} : \mathfrak{Abgroups} \rightsquigarrow \mathfrak{Abgroups}$ είναι ακριβής.

**F.2.7 Πρόταση.** *Εάν $M$ είναι ένας $R$-μόδιος, τότε ισχύουν τα εξής:*
(i) *Ο $M$ είναι προβολικός $\Longleftrightarrow$ ο $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ είναι ακριβής.*
(ii) *Ο $M$ είναι εμβολικός $\Longleftrightarrow$ ο $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ είναι ακριβής.*
(iii) *Ο $M$ είναι ισόπεδος $\Longleftrightarrow$ ο $M \otimes_R -$ είναι ακριβής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. θεωρήματα C.2.7 και C.2.22, και την πρόταση C.5.17. □

## F.3 ΦΥΣΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

**F.3.1 Ορισμός.** (i) Έστω ότι οι $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ είναι δυο συναλλοίωτοι (και αντιστοίχως, δυο ανταλλοίωτοι συναρτητές). Ένας **φυσικός μετασχηματισμός** $h : \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{G}$ είναι μια οικογένεια μορφισμών

$$\{h(A) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{G}(A)) \mid A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\},$$

τέτοια ώστε για κάθε $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathbf{F}(A) \arrow[r, "h(A)"] \arrow[d, "\mathbf{F}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{G}(A) \arrow[d, "\mathbf{G}(f)"] \\ \mathbf{F}(B) \arrow[r, "h(B)"'] & \mathbf{G}(B) \end{tikzcd}$$

[7]Όταν ο $M$ είναι *ελεύθερος* $R$-μόδιος, ο $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ *είναι* ακριβής.

και αντιστοίχως, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(B) \arrow[r, "h(B)"] \arrow[d, "\mathbf{F}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{G}(B) \arrow[d, "\mathbf{G}(f)"] \\
\mathbf{F}(A) \arrow[r, "h(A)"'] & \mathbf{G}(A)
\end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

(ii) Όταν όλα τα μέλη τής οικογενείας μορφισμών

$$\{h(A) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(A), \mathbf{G}(A)) \mid A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$$

είναι $\mathcal{D}$-ισομορφισμοί, τότε ο $h$ καλείται **φυσική ισοδυναμία** μεταξύ των συναρτητών $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$, και οι $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ ονομάζονται **φυσικώς ισοδύναμοι**. (Εν τοιαύτη περιπτώσει χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\mathbf{F} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{G}$ για να υποδηλοί την ύπαρξη μιας φυσικής ισοδυναμίας μεταξύ των $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$.)

**F.3.2 Παρατήρηση.** (i) Η (φυσικώς) οριζόμενη *σύνθεση* $h' \circ h : \mathbf{F}_1 \longrightarrow \mathbf{F}_3$ δυο φυσικών μετασχηματισμών $h : \mathbf{F}_1 \longrightarrow \mathbf{F}_2$ και $h' : \mathbf{F}_2 \longrightarrow \mathbf{F}_3$ μεταξύ κάποιων συναλλοίωτων (και αντιστοίχως, ανταλλοίωτων) συναρτητών $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3 : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ αποτελεί αφ' εαυτής φυσικό μετασχηματισμό. (Επιπροσθέτως, όταν αμφότεροι οι $h$ και $h'$ είναι φυσικές ισοδυναμίες, η σύνθεση $h' \circ h$ είναι ωσαύτως φυσική ισοδυναμία.)

(ii) Λόγω των προαναφερθέντων είναι δυνατόν να δοθεί ένας προσήκων ορισμός τής *ισοδυναμίας δυο κατηγοριών*: Λέμε ότι δυο κατηγορίες $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ είναι **ισοδύναμες** όταν υφίστανται δυο συναρτητές $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ και $\mathbf{G} : \mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ με $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{id}_{\mathcal{C}}$ και $\mathbf{F} \circ \mathbf{G} \underset{\text{φ.ι.}}{\cong} \mathbf{id}_{\mathcal{D}}$.

**F.3.3 Παραδείγματα.** (i) Όταν $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathfrak{Sets}$, τότε υφίσταται ένας φυσικός μετασχηματισμός $h : \mathbf{id}_{\mathfrak{Sets}} \longrightarrow \mathfrak{P}$ από τον *ταυτοτικό συναρτητή* F.2.4 (i) στον *συναρτητή τού δυναμοσυνόλου*

$$\mathfrak{P} : \mathfrak{Sets} \rightsquigarrow \mathfrak{Sets},$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Sets}) \ni A \longmapsto \mathfrak{P}(A) := \{\Gamma | \, \Gamma \subseteq A\} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Sets}),$$

$$(\text{απεικόνιση } f : A \longrightarrow B) \longmapsto (\mathfrak{P}(f) : \mathfrak{P}(A) \longrightarrow \mathfrak{P}(B)),$$

όπου $\mathfrak{P}(f)(\Gamma) := f(\Gamma)$, $\forall \Gamma \in \mathfrak{P}(A)$. Πράγματι· θέτοντας

$$h\,(A) : A \longrightarrow \mathfrak{P}(A), \; a \longmapsto h\,(A)\,(a) := \{a\}, \; \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Sets}),$$

το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h(A)"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathfrak{P}(A) \arrow[d, "\mathfrak{P}(f)"] \\ B \arrow[r, "h(B)"'] & \mathfrak{P}(B) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για οιαδήποτε απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$.
(ii) Όταν $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathfrak{Groups}$, τότε υφίσταται ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$h : \mathbf{id}_{\mathfrak{Groups}} \longrightarrow \boldsymbol{\iota} \circ \mathbf{F}$$

από τον ταυτοτικό συναρτητή $\mathbf{id}_{\mathfrak{Groups}}$ στη σύνθεση

$$\mathfrak{Groups} \overset{\mathbf{F}}{\rightsquigarrow} \mathfrak{Abgroups} \overset{\boldsymbol{\iota}}{\rightsquigarrow} \mathfrak{Groups},$$

όπου $\mathbf{F}$ είναι ο συναρτητής αβελιανοποιήσεως και $\boldsymbol{\iota}$ ο ενθετικός συναρτητής. (Βλ. εδ. F.2.4 (i) και (iii).) Πράγματι· θέτοντας

$$h(G)(g) := g[G, G], \ \forall g \in G \ \text{ και } \ \forall G \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Groups}),$$

το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h(G)"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ H \arrow[r, "h(H)"'] & H^{\mathrm{ab}} \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για οιονδήποτε ομομορφισμό ομάδων $f : G \longrightarrow H$.
(iii) Όταν $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathfrak{Mod}_R$, τότε υφίσταται ένας φυσικός μετασχηματισμός

$$h : \mathbf{id}_{\mathfrak{Mod}_R} \longrightarrow \mathbf{F}$$

από τον ταυτοτικό συναρτητή $\mathbf{id}_{\mathfrak{Mod}_R}$ στον συναρτητή

$$\mathbf{F} : \mathfrak{Mod}_R \rightsquigarrow \mathfrak{Mod}_R,$$

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R) \ni M \longmapsto \mathbf{F}(M) := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R),$$

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \ni f \longmapsto (\mathbf{F}(f) : \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M', R), R)),$$

$$\mathbf{F}(f)(\varphi) := \varphi \circ f^{\intercal}, \ \forall \varphi \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R), \ \text{όπου}$$
$$\mathrm{Hom}_R(M', R) \ni \psi \overset{f^{\intercal}}{\longmapsto} f^{\intercal}(\psi) := \psi \circ f \in \mathrm{Hom}_R(M, R).$$

Πράγματι· θέτοντας για κάθε $M \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Mod}_R)$,

$$h(M) : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, R), R), \ \ x \longmapsto h(M)(x),$$

όπου $h(M)(x)(\vartheta) := \vartheta(x)$ για κάθε $x \in M$ και κάθε $\vartheta \in \mathrm{Hom}_R(M,R)$, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h(M)"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R),R) \arrow[d, "\mathbf{F}(f)"] \\ M' \arrow[r, "h(M')"'] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M',R),R) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό για οιονδήποτε ομομορφισμό $R$-μοδίων $f : M \longrightarrow M'$. Μάλιστα, εάν περιορισθούμε στην υποκατηγορία $\mathfrak{Mod}_R^{\text{ελ.π.π.}}$ τής $\mathfrak{Mod}_R$ με αντικείμενά της τους *ελεύθερους* και *πεπερασμένως παραγόμενους* $R$-μοδίους, τότε κάθε ομομορφισμός $h(M)$ είναι ισομορφισμός, οπότε ο $h : \mathbf{id}_{\mathfrak{Mod}_R^{\text{ελ.π.π.}}} \longrightarrow \mathbf{F}$ καθίσταται *φυσική ισοδυναμία*.

(iv) Έστω $X$ τυχών τοπολογικός χώρος και έστω $x_0 \in X$ ένα παγιωμένο σημείο αναφοράς. Κάνοντας χρήση τού ομοιομορφισμού[8]

$$\boldsymbol{\eta} : \Delta_1 \xrightarrow{\approx} \mathbf{I},\ \ \boldsymbol{\eta}((1-t)\mathbf{e}_0^1 + t\mathbf{e}_1^1) := t,\ \forall t \in \mathbf{I},$$

ορίζεται *ο ομομορφισμός τού Hurewicz*

$$\begin{aligned} \varphi_{(X,\{x_0\})} : \boldsymbol{\pi}_1(X,x_0) &\longrightarrow H_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}) = Z_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z})/B_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}), \\ [\alpha]^{\text{ομ.}} &\longmapsto \varphi_{(X,\{x_0\})}([\alpha]^{\text{ομ.}}) := \alpha \circ \boldsymbol{\eta} + B_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

όπου $[\alpha]^{\text{ομ.}}$ είναι η κλάση ισοδυναμίας ενός βρόχου $\alpha : \mathbf{I} \longrightarrow X$ εντός τού $X$ με $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ ως προς την "$\simeq$ ΣΧ$\{0,1\}$". Μέσω αυτού προδιορίζεται ένας φυσικός μετασχηματισμός από τον συναρτητή

$$\boldsymbol{\pi}_1\ : \mathfrak{Top}^{\text{εστ.}} \rightsquigarrow \mathfrak{Groups},$$

(βλ. F.2.4 (ix)) στον συναρτητή που αποτελείται από τις συνθέσεις συναρτητών

$$\mathfrak{Top}^{\text{εστ.}} \rightsquigarrow \mathfrak{Top} \overset{H_1^{\text{sing}}}{\rightsquigarrow} \mathfrak{Abgroups}\,(= \mathfrak{Mod}_{\mathbb{Z}}) \overset{\boldsymbol{\iota}}{\rightsquigarrow} \mathfrak{Groups},$$

όπου ο $\mathfrak{Top}^{\text{εστ.}} \rightsquigarrow \mathfrak{Top}$ απλώς «ξεχνά» τα σημεία αναφοράς, ο $\boldsymbol{\iota}$ είναι ο ενθετικός συναρτητής και

$$\mathrm{Ob}(\mathfrak{Top}) \ni X \longmapsto H_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{Abgroups}),$$

$$(f : X \longrightarrow Y \text{ συνεχής}) \longmapsto (H_1^{\text{sing}}(f) : H_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_1^{\text{sing}}(X;\mathbb{Z})),$$

[8]Εν προκειμένω, $\Delta_1$ είναι το τρίγωνο (εντός τού $\mathbb{R}^2$) που έχει τα σημεία $(0,0)$, $\mathbf{e}_0^1 := (1,0)$ και $\mathbf{e}_1^1 := (0,1)$ ως κορυφές του, και $\mathbf{I} := [0,1]$.

καθόσον το κάτωθι διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\pi}_1(X,x_0) \arrow[r, "\varphi_{(X,\{x_0\})}"] \arrow[d, "\boldsymbol{\pi}_1(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_1^{\mathrm{sing}}(X;\mathbb{Z}) \arrow[d, "H_1^{\mathrm{sing}}(f)"] \\
\boldsymbol{\pi}_1(Y,y_0) \arrow[r, "\varphi_{(Y,\{y_0\})}"'] & H_1^{\mathrm{sing}}(Y;\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Εάν περιορισθούμε στην υποκατηγορία $\mathfrak{Top}^{\text{εστ. δρσυν.}}$ τής $\mathfrak{Top}^{\text{εστ.}}$ με αντικείμενά της τους εστιγμένους *δρομοσυνεκτικούς* τοπολογικούς χώρους, τότε κάθε ομομορφισμός τού Hurewicz $\varphi_{(X,\{x_0\})}$ είναι *επιμορφισμός* έχων τη μεταθέτρια υποομάδα τής θεμελιώδους ομάδας $\boldsymbol{\pi}_1(X,x_0)$ ως πυρήνα του. Ως εκ τούτου, η σύνθεση των συναρτητών

$$\mathfrak{Top}^{\text{εστ. δρσυν.}} \overset{\boldsymbol{\pi}_1}{\rightsquigarrow} \mathfrak{Groups} \overset{\mathbf{F}}{\rightsquigarrow} \mathfrak{Abgroups}$$

(όπου $\mathbf{F}$ ο συναρτητής αβελιανοποιήσεως) είναι *φυσικώς ισοδύναμη* με τη σύνθεση των συναρτητών

$$\mathfrak{Top}^{\text{εστ. δρσυν.}} \rightsquigarrow \mathfrak{Top} \overset{H_1^{\mathrm{sing}}}{\rightsquigarrow} \mathfrak{Abgroups}$$

αφού για κάθε $[\alpha]^{\text{ομ.}} \in \boldsymbol{\pi}_1(X,x_0)$ οι

$$\boldsymbol{\pi}_1(X,x_0)^{\mathrm{ab}} \ni [\alpha]^{\text{ομ.}} \bullet [\boldsymbol{\pi}_1(X,x_0), \boldsymbol{\pi}_1(X,x_0)] \longmapsto \varphi_{(X,\{x_0\})}([\alpha]^{\text{ομ.}}) \in H_1^{\mathrm{sing}}(X;\mathbb{Z})$$

είναι ισομορφισμοί (αβελιανών ομάδων).