Παράρτημα D

Ext και Tor

Τα *γινόμενα επεκτάσεως* και τα *γινόμενα στρέψεως* είναι δυνατόν να ορισθούν μέσω προβολικών κερματισμών και υπεισέρχονται στη διατύπωση και στην απόδειξη τόσον τού περιώνυμου *θεωρήματος καθολικών συντελεστών* όσον και τού *θεωρήματος τού Künneth*. (Βλ. D.4.4, D.4.5, D.5.6, D.5.9 και D.5.10.)

D.1 ΚΕΡΜΑΤΙΣΜΟΙ ΜΟΔΙΩΝ

D.1.1 Ορισμός. Έστω M ένας R-μόδιος. Κάθε ζεύγος $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ αποτελούμενο από ένα αλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{P}_\bullet = (P_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ τής μορφής

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} \{0\} \xrightarrow{d_{-1}} \{0\} \xrightarrow{d_{-2}} \cdots,$$

όπου $P_n \cong \{0\}$ για κάθε $n \leq -1$, $d_n := 0$ για κάθε $n \leq 0$, ο P_n προβολικός για κάθε $n \geq 0$ και $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_R(P_0, M)$ ένας *επιμορφισμός*, καλείται **προβολικός κερματισμός** (projective resolution) **τού** M όταν ισχύουν τα εξής:
(i) $H_n(\mathbf{P}_\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $n \geq 1$,
(ii) $\varepsilon \circ d_1 = 0$ και
(iii) μέσω τού ε επάγεται ισομορφισμός $\varepsilon_\star : H_0(\mathbf{P}_\bullet) \xrightarrow{\cong} M$.
Οι συνθήκες (i), (ii) και (iii) ισοδυναμούν με το ότι η ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\} \qquad \text{(D.1)}$$

είναι ακριβής[1]. (Πράγματι· η συνθήκη (ii) ισοδυναμεί με το ότι

$$\mathrm{Ker}(\pi^{P_0}_{\mathrm{Im}(d_1)}) = \mathrm{Im}(d_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\varepsilon),$$

[1] Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι η (D.1) είναι η **ακριβής ακολουθία η αντιστοιχούσα στον προβολικό κερματισμό** $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$.

οπότε κατά το θεώρημα A.3.24 υπάρχει μοναδικός $\varepsilon_\star \in \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Coker}(d_1), M)$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "\pi^{P_0}_{\mathrm{Im}(d_1)}"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & \mathrm{Coker}(d_1) \arrow[d, dashed, "\varepsilon_\star"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & & M \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, όπου

$$\mathrm{Coker}(d_1) := P_0/\,\mathrm{Im}(d_1) = \mathrm{Ker}(d_0)/\,\mathrm{Im}(d_1) = H_0(\mathbf{P}_\bullet).$$

Η (iii) μας πληροφορεί ότι ο $\varepsilon_\star$ είναι ισομορφισμός, οπότε $\mathrm{Im}(d_1) = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$. Αυτό σημαίνει ότι η (D.1) είναι ακριβής στη θέση P_0. Η ακρίβεια τής (D.1) στις προηγούμενες θέσεις είναι διασφαλισμένη από την (i).) Προβολικοί κερματισμοί $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τού M, στους οποίους ο P_n είναι ελεύθερος R-μόδιος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, καλούνται, ιδιαιτέρως, **ελεύθεροι κερματισμοί** (free resolutions) **τού** M.

D.1.2 Παραδείγματα. (i) Εάν V είναι ένας K-διανυσματικός χώρος, τότε η

$$\{0\} \longrightarrow V \xrightarrow{\mathrm{id}_V} V \longrightarrow \{0\} \tag{D.2}$$

είναι μια ακριβής ακολουθία τής μορφής (D.1).

(ii) Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., τότε για κάθε R-μόδιο M υπάρχει μια ακολουθία τής μορφής (D.1) «μήκους 1»:

$$\{0\} \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow \{0\}. \tag{D.3}$$

Πράγματι· κατά το πόρισμα A.6.23, $M \cong P_0/P_1$, όπου P_0 είναι ένας ελεύθερος (και, κατ' επέκταση, προβολικός) R-μόδιος, ο δε P_1 είναι ωσαύτως ελεύθερος δυνάμει τού θεωρήματος A.6.47. (Σημειωτέον ότι αμφότερες οι (D.2) και (D.3) αντιστοιχούν *σε ελεύθερους κερματισμούς*.)

D.1.3 Πρόταση. *Κάθε R-μόδιος M διαθέτει έναν ελεύθερο (και, κατ' επέκταση, έναν προβολικό) κερματισμό.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατά το πόρισμα A.6.23, $M \cong F_0/L_0$, όπου F_0 είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος. Επομένως υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow L_0 \overset{\iota_0}{\hookrightarrow} F_0 \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\},$$

όπου ι_0 η συνήθης ένθεση και ε η σύνθεση τού φυσικού επιμορφισμού $\pi^{F_0}_{L_0}$ και ενός ισομορφισμού

$$F_0/L_0 \xrightarrow{\cong} M.$$

Με τους ίδιους συλλογισμούς έπεται ότι $L_0 \cong F_1/L_1$, όπου F_1 είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος, οπότε δημιουργείται εκ νέου μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow L_1 \overset{\iota_1}{\hookrightarrow} F_1 \overset{\pi_1}{\twoheadrightarrow} L_0 \longrightarrow \{0\}.$$

Επαναλαμβάνοντας αυτήν τη διαδικασία αποδεικνύουμε επαγωγικώς την ύπαρξη βραχέων ακριβών ακολουθιών

$$\{0\} \longrightarrow L_n \overset{\iota_n}{\hookrightarrow} F_n \overset{\pi_n}{\twoheadrightarrow} L_{n-1} \longrightarrow \{0\}$$

για κάθε $n \geq 1$. Εν συνεχεία, θεωρούμε τις συνθέσεις $d_n := \iota_{n-1} \circ \pi_n$ για κάθε $n \geq 1$:

$$\begin{tikzcd}
F_{n+1} \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[dr, two heads, "\pi_{n+1}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & F_n \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, two heads, "\pi_n"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & F_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & F_1 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, two heads, "\pi_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & \{0\} \\
& L_n \arrow[ur, hook, "\iota_n"'] & & L_{n-1} \arrow[ur, hook, "\iota_{n-1}"'] & & & & L_0 \arrow[ur, hook, "\iota_0"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Θα αποδείξουμε ότι το ζεύγος $(\mathbf{F}_\bullet, \varepsilon)$ (όπου $\mathbf{F}_\bullet := (F_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ με $F_n \cong \{0\}$ για κάθε $n \leq -1$) αποτελεί έναν ελεύθερο κερματισμό τού M. Προς τούτο αρκεί να δειχθεί ότι η

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

είναι *ακριβής*. Κατ' αρχάς ο ε είναι εκ κατασκευής επιμορφισμός. Επιπροσθέτως,

$$\varepsilon \circ d_1 = \underbrace{\varepsilon \circ \iota_0}_{=0} \circ \pi_1 = 0, \;\; d_1 \circ d_2 = \iota_0 \circ \underbrace{\pi_1 \circ \iota_1}_{=0} \circ \pi_2 = 0$$

και, γενικότερα, $d_n \circ d_{n+1} = \iota_{n-1} \circ \underbrace{\pi_n \circ \iota_n}_{=0} \circ \pi_{n+1} = 0$ για κάθε $n \geq 1$.

Επίσης, $\mathrm{Ker}(\varepsilon) \subseteq \mathrm{Im}(d_1)$. Πράγματι· εάν $x \in \mathrm{Ker}(\varepsilon) = \mathrm{Im}(\iota_0)$, τότε $x = \iota_0(y)$ για κάποιο $y \in L_0$. Επειδή ο π_1 είναι επιμορφισμός, $y = \pi_1(z)$ για κάποιο $z \in F_1$. Επομένως,

$$x = \iota_0(y) = (\iota_0 \circ \pi_1)(z) = d_1(z) \in \mathrm{Im}(d_1).$$

Τέλος, $\mathrm{Ker}(d_n) \subseteq \mathrm{Im}(d_{n+1})$ για κάθε $n \geq 1$. Πράγματι· εάν $a \in \mathrm{Ker}(d_n)$, τότε

$$d_n(a) = (\iota_{n-1} \circ \pi_n)(a) = 0_{F_{n-1}} \Rightarrow \pi_n(a) = 0_{L_{n-1}}$$

(διότι ο ι_{n-1} είναι μονομορφισμός), οπότε

$$a \in \mathrm{Ker}(\pi_n) = \mathrm{Im}(\iota_n) \Rightarrow [\exists b \in L_n : a = \iota_n(b)].$$

Επειδή ο π_{n+1} είναι επιμορφισμός, $b = \pi_{n+1}(c)$ για κάποιο $c \in F_{n+1}$. Κατά συνέπειαν, $a = \iota_n(\pi_{n+1}(c)) = d_{n+1}(c) \in \mathrm{Im}(d_{n+1})$. □

D.1.4 Θεώρημα. **(«Θεώρημα συγκρίσεως για προβολικούς κερματισμούς»)** *Έστω ότι M, M' είναι δυο R-μόδιοι και ότι $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$. Εάν $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ είναι προβολικοί κερματισμοί των M και M', αντιστοίχως, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Υπάρχει αλυσωτός μετασχηματισμός $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ που «επεκτείνει» τον φ, ήτοι ισχύει $\varphi \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f_0$.*

(ii) *Οιοιδήποτε αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ «επεκτείνοντες» τον φ (υπό την ως άνω έννοια) είναι αλυσωτώς ομότοποι.* (Βλ. εδ. B.4.1.)

Απόδειξη. (i) Επειδή ο P_0 είναι προβολικός και ο ε' επιμορφισμός, το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[d, "\varphi\circ\varepsilon"] & \\ P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

συμπληρώνεται σε μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[dl, dashed, "f_0"'] \arrow[d, "\varphi\circ\varepsilon"] \arrow[dl, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"] & \\ P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

δηλαδή $\exists f_0 \in \mathrm{Hom}_R(P_0, P'_0) : \varepsilon' \circ f_0 = \varphi \circ \varepsilon$. Επειδή ο P_1 είναι προβολικός και η γραμμή τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[d, "f_0\circ d_1"] & \\ P'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \end{tikzcd}$$

ακριβής, αυτό συμπληρώνεται σε μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, dashed, "f_1"'] \arrow[d, "f_0\circ d_1"] \arrow[dl, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"] & \\ P'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \end{tikzcd}$$

(αφού $\varepsilon' \circ f_0 \circ d_1 = \varphi \circ \underbrace{\varepsilon \circ d_1}_{=0} = 0$, βλ. πρόταση C.2.2), δηλαδή

$$\exists f_1 \in \mathrm{Hom}_R(P_1, P'_1) : d'_1 \circ f_1 = f_0 \circ d_1.$$

Κάνοντας χρήση μαθηματικής επαγωγής αποδεικνύουμε ότι το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P_n \arrow[d, "f_{n-1}\circ d_n"] & \\ P'_n \arrow[r, "d'_n"'] & P'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"'] & P'_{n-2} \end{tikzcd}$$

συμπληρώνεται σε μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} & P_n \arrow[dl, dashed, "f_n"'] \arrow[d, "f_{n-1}\circ d_n"] \arrow[dl, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"] & \\ P'_n \arrow[r, "d'_n"'] & P'_{n-1} \arrow[r, "d'_{n-1}"'] & P'_{n-2} \end{tikzcd}$$

καθότι ο P_n είναι προβολικός και

$$d'_{n-1} \circ f_{n-1} \circ d_n = f_{n-2} \circ \underbrace{d_{n-1} \circ d_n}_{=0} = 0,$$

οπότε (κατά την πρόταση C.2.2) $\exists f_n \in \mathrm{Hom}_R(P_n, P'_n) : d'_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$ για κάθε $n \geq 1$.

(ii) Αναζητούνται ομομορφισμοί $h_n \in \mathrm{Hom}_R(P_n, P'_{n+1})$ με την ιδιότητα

$$d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0, \tag{D.4}$$

όπου -εν είδει συμβάσεως- θέτουμε $h_{-1} := 0$. Θα εργασθούμε εκ νέου με τη βοήθεια τής μαθηματικής επαγωγής. Επειδή ο P_0 είναι προβολικός, από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[dl, dashed, "h_0"'] \arrow[d, "f_0-g_0"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", shift left=3ex] & \\ P'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & P'_0 \arrow[r, "\varepsilon'"'] & M' \end{tikzcd}$$

με ακριβή γραμμή και με

$$\varepsilon' \circ (f_0 - g_0) = \varepsilon' \circ f_0 - \varepsilon' \circ g_0 = \varphi \circ \varepsilon - \varphi \circ \varepsilon = 0$$

συνάγεται η ύπαρξη ενός ομομορφισμού $h_0 \in \mathrm{Hom}_R(P_0, P'_1) : d'_1 \circ h_0 = f_0 - g_0$. (Βλ. πρόταση C.2.2.) Κατ' αναλογίαν, επειδή ο P_1 είναι προβολικός, από το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, dashed, "h_1"'] \arrow[d, "f_1-g_1-h_0\circ d_1"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", shift left=3ex] & \\ P'_2 \arrow[r, "d'_2"'] & P'_1 \arrow[r, "d'_1"'] & P'_0 \end{tikzcd}$$

με ακριβή γραμμή και με

$$\begin{aligned} d'_1 \circ (f_1 - g_1 - h_0 \circ d_1) &= d'_1 \circ f_1 - d'_1 \circ g_1 - d'_1 \circ h_0 \circ d_1 \\ &= f_0 \circ d_1 - g_0 \circ d_1 - (f_0 - g_0) \circ d_1 = 0 \end{aligned}$$

συνάγεται (εκ νέου λόγω τής C.2.2) η ύπαρξη ενός $h_1 \in \mathrm{Hom}_R(P_1, P'_2)$:

$$d'_2 \circ h_1 = f_1 - g_1 - h_0 \circ d_1 \Rightarrow d'_2 \circ h_1 + h_0 \circ d_1 = f_1 - g_1.$$

Επαγωγική υπόθεση. Έστω $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Υποθέτουμε ότι για όλους τους μη αρνητικούς ακεραίους $n < k$ έχουν ήδη κατασκευασθεί $h_n \in \mathrm{Hom}_R(P_n, P'_{n+1})$ με την ιδιότητα (D.4).

Ολοκλήρωση επαγωγικής διαδικασίας. Αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός ομομορφισμού $h_k \in \mathrm{Hom}_R(P_k, P'_{k+1})$ με την ιδιότητα

$$d'_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ d_k = f_k - g_k. \tag{D.5}$$

Προς τούτο θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P_k \arrow[dl, dashed, "h_k"'] \arrow[d, "f_k-g_k-h_{k-1}\circ d_k"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", shift left=3ex] & \\ P'_{k+1} \arrow[r, "d'_{k+1}"'] & P'_k \arrow[r, "d'_k"'] & P'_{k-1} \end{tikzcd}$$

Επειδή ο P_k είναι προβολικός, η γραμμή του (εξ ορισμού) ακριβής και

$$\begin{aligned} d'_k \circ (f_k - g_k - h_{k-1} \circ d_k) &= d'_k \circ f_k - d'_k \circ g_k - (d'_k \circ h_{k-1}) \circ d_k \\ &= f_{k-1} \circ d_k - g_{k-1} \circ d_k - (f_{k-1} - g_{k-1} - h_{k-2} \circ d_{k-1}) \circ d_k = 0 \end{aligned}$$

(λόγω τής επαγωγικής υποθέσεώς μας και τού ότι $d_{k-1} \circ d_k = 0$), υπάρχει πράγματι ένας $h_k \in \mathrm{Hom}_R(P_k, P'_{k+1})$ ο οποίος (κατά την πρόταση C.2.2) συμπληρώνει μεταθετικώς το ανωτέρω διάγραμμα και έχει την επιθυμητή ιδιότητα (D.5). $\square$

D.1.5 Πόρισμα. *Οιοιδήποτε προβολικοί κερματισμοί* $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ *τυχόντος* R-*μοδίου* M *είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι.* (Βλ. εδ. B.4.9.)

Απόδειξη. Σύμφωνα με το (i) τού θεωρήματος D.1.4 υπάρχουν αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ που «επεκτείνουν» τον ταυτοτικό αυτομορφισμό $\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M$. Επίσης, οι

$$\begin{aligned} &\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet} : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet, \quad (g \circ f)_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet, \\ &\mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet} : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet, \quad (f \circ g)_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \end{aligned}$$

είναι αλυσωτοί μετασχηματισμοί «επεκτείνοντες» τον id_M. Σύμφωνα με το (ii) τού θεωρήματος D.1.4, $(g \circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet}$ και $(f \circ g)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet}$. Άρα οι $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ και $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ είναι όντως ομοτοπικώς ισοδύναμοι. $\square$

D.1.6 Λήμμα. («Λήμμα τού πετάλου για προβολικούς κερματισμούς») *Έστω*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-*μοδίων και ομομορφισμών* R-*μοδίων. Εάν* $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$, $(\mathbf{P}''_\bullet, \varepsilon'')$ *είναι προβολικοί κερματισμοί των* M' *και* M'', *αντιστοίχως, τότε υπάρχουν ένας προβολικός κερματισμός* $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ *τού* M *και αλυσωτοί μετασχηματισμοί* $\iota_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ *και* $\pi_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}''_\bullet$, *ούτως ώστε η*

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \xrightarrow{\iota_\bullet} \mathbf{P}_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} \mathbf{P}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

να είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων (βλ. εδ. B.2.10) *και το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό* :

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & H_0(\mathbf{P}'_\bullet) \arrow[r, "H_0(\iota_\bullet)"] \arrow[d, "\varepsilon'_\star", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_0(\mathbf{P}_\bullet) \arrow[r, "H_0(\pi_\bullet)"] \arrow[d, "\varepsilon_\star", "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_0(\mathbf{P}''_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''_\star", "\cong"'] & \{0\} \\ \{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd} \tag{D.6}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι $\mathbf{P}'_\bullet = (P'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{P}''_\bullet = (P''_n, d''_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Το ζητούμενο είναι η συμπλήρωση τού «πεταλοειδούς διαγράμματος»

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "d'_3"'] & & \vdots \arrow[d, "d''_3"] & \\
 & P'_2 \arrow[d, "d'_2"'] & ; & P''_2 \arrow[d, "d''_2"] & \\
 & P'_1 \arrow[d, "d'_1"'] & ; & P''_1 \arrow[d, "d''_1"] & \\
 & P'_0 \arrow[d, "\varepsilon'"'] & ; & P''_0 \arrow[d, "\varepsilon''"] & \\
\{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
 & \{0\} & & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

με την εισαγωγή μιας μεσαίας στήλης που θα έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. Ο πλέον πρόσφορος τρόπος ορισμού τής μεσαίας στήλης παρέχεται από την ίδια τη φύση τού ευθέος αθροίσματος. Πράγματι· θέτοντας $P_n := P'_n \oplus P''_n$,

$$\iota_n : P'_n \hookrightarrow P_n, \;\; x' \longmapsto \iota_n(x') := (x', 0_{P''_n})$$

και $\pi_n : P_n \twoheadrightarrow P''_n, (x', x'') \longmapsto \pi_n(x', x'') := x''$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, αρκεί να ορίσουμε τους $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_R(P_0, M)$ και $d_n \in \mathrm{Hom}_R(P_n, P_{n-1})$ για $n \geq 1$ ως ακολούθως[2]: Επειδή ο P''_0 είναι προβολικός, στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & P'_0 \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P_0 := P'_0 \oplus P''_0 \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"'] & P''_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] \arrow[dl, dashed, "\eta"'] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"'] \arrow[d, dashed] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
 & \{0\} & \{0\} & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

(με ακριβείς γραμμές), $\exists \eta \in \mathrm{Hom}_R(P''_0, M)$: $g \circ \eta = \varepsilon''$. Έστω $\varepsilon : P_0 \longrightarrow M$ η απεικόνιση η οριζόμενη μέσω τού τύπου

$$\boxed{\varepsilon(x', x'') := (f \circ \varepsilon')(x') + \eta(x''),}$$

[2] Για $n \leq 0$, απλώς θέτουμε $d_n := 0$.

για κάθε $(x', x'') \in P_0' \oplus P_0'' =: P_0$. Αυτή είναι ομομορφισμός R-μοδίων, διότι για οιαδήποτε ζεύγη $(x_1', x_2') \in P_0' \times P_0'$, $(x_1'', x_2'') \in P_0'' \times P_0''$ και $(r_1, r_2) \in R \times R$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(r_1(x_1', x_1'') + r_2(x_2', x_2'')) = \varepsilon(r_1x_1' + r_2x_2', r_1x_1'' + r_2x_2'') \\
&= (f \circ \varepsilon')(r_1x_1' + r_2x_2') + \eta(r_1x_1'' + r_2x_2'') \\
&= r_1(f \circ \varepsilon')(x_1') + r_2(f \circ \varepsilon')(x_2') + r_1\eta(x_1'') + r_2\eta(x_2'') \\
&= r_1\left((f \circ \varepsilon')(x_1') + \eta(x_1'')\right) + r_2\left((f \circ \varepsilon')(x_2') + \eta(x_2'')\right) \\
&= r_1\varepsilon(x_1', x_1'') + r_2\varepsilon(x_2', x_2'').
\end{aligned}$$

Επίσης, $[(\varepsilon \circ \iota_0)(x') = \varepsilon(x', 0_{P_0''}) = (f \circ \varepsilon')(x'), \forall x' \in P_0'] \Rightarrow \varepsilon \circ \iota_0 = f \circ \varepsilon'$ και

$$\begin{aligned}
&[(g \circ \varepsilon)(x', x'') = g\left((f \circ \varepsilon')(x') + \eta(x'')\right) \\
&= (g \circ f \circ \varepsilon)(x') + (g \circ \eta)(x'') = \varepsilon''(\pi_0(x', x'')), \\
&\forall (x', x'') \in P_0' \oplus P_0'' =: P_0] \Rightarrow g \circ \varepsilon = \varepsilon'' \circ \pi_0,
\end{aligned}$$

οπότε το ανωτέρω διάγραμμα είναι μεταθετικό. Τέλος, επειδή αμφότεροι οι ε' και ε'' είναι επιμορφισμοί, ο $\varepsilon \in \mathrm{Hom}_R(P_0, M)$ οφείλει να είναι ωσαύτως επιμορφισμός επί τη βάσει τού (ii) τού «βραχέος λήμματος των πέντε» Β.1.8.

Εν συνεχεία, ορίζουμε τους $d_n \in \mathrm{Hom}_R(P_n, P_{n-1})$ για $n \geq 1$ μέσω τού τύπου

$$\boxed{d_n(x', x'') := (d_n'(x') + \theta_n(x''), d_n''(x'')),}$$

για κάθε $(x', x'') \in P_n' \oplus P_n'' =: P_n$, όπου οι $\theta_n \in \mathrm{Hom}_R(P_n'', P_{n-1}')$ *καθορίζονται επαγωγικώς* ως εξής: Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & P_1'' \arrow[d, "-\eta\circ d_1''"] & \\
P_0' \arrow[r, "f\circ\varepsilon'"'] & M \arrow[r, "g"'] & M''
\end{tikzcd}$$

Η γραμμή αυτού είναι ακριβής, διότι

$$\mathrm{Im}(f \circ \varepsilon') = f(\mathrm{Im}(\varepsilon')) = f(M') = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g),$$

ενώ $g \circ (-\eta \circ d_1'') = -(g \circ \eta) \circ d_1'' = -\varepsilon'' \circ d_1'' = 0$. Μέσω τής προτάσεως C.2.2 συνάγεται η ύπαρξη ενός $\theta_1 \in \mathrm{Hom}_R(P_1'', P_0')$ που το συμπληρώνει μεταθετικώς, ήτοι ισχύει $f \circ \varepsilon' \circ \theta_1 = -\eta \circ d_1'' \Rightarrow f \circ \varepsilon' \circ \theta_1 + \eta \circ d_1'' = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & P_1'' \arrow[dl, dashed, "\theta_1"'] \arrow[d, "-\eta\circ d_1''"] & \\
P_0' \arrow[r, "f\circ\varepsilon'"'] & M \arrow[r, "g"'] & M''
\end{tikzcd}$$

Τούτο σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}
&[(\varepsilon \circ d_1)(x', x'') = \varepsilon\,(d_1'(x') + \theta_1(x''), d_1''(x'')) \\
&= (f \circ \underbrace{\varepsilon' \circ d_1'}_{=0})(x') + (\underbrace{f \circ \varepsilon' \circ \theta_1 + \eta \circ d_1''}_{=0})(x'') = 0_M, \\
&\forall (x', x'') \in P_1' \oplus P_1'' =: P_1] \Rightarrow \boxed{\varepsilon \circ d_1 = 0}
\end{aligned}$$

Κατ' αναλογίαν, η γραμμή τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
& P_2'' \arrow[d, "-\theta_1 \circ d_2''"] & \\
P_1' \arrow[r, "d_1'"'] & P_0' \arrow[r, "f \circ \varepsilon'"'] & M
\end{tikzcd}$$

είναι ακριβής, διότι $\mathrm{Ker}(f \circ \varepsilon') = \mathrm{Ker}(\varepsilon') = \mathrm{Im}(d_1')$ (αφού ο f είναι μονομορφισμός), ενώ

$$f \circ \varepsilon' \circ (-\theta_1 \circ d_2'') = -(f \circ \varepsilon' \circ \theta_1) \circ d_2'' = \eta \circ (\underbrace{d_1'' \circ d_2''}_{=0}) = 0,$$

οπότε με εφαρμογή τής C.2.2 συνάγεται η ύπαρξη ενός $\theta_2 \in \mathrm{Hom}_R(P_2'', P_1')$ που το συμπληρώνει μεταθετικώς, ήτοι ισχύει $d_1' \circ \theta_2 + \theta_1 \circ d_2'' = 0$.

Επαγωγική υπόθεση. Υποθέτουμε ότι για οιονδήποτε $n \geq 2$ υπάρχουν ομομορφισμοί $\theta_j \in \mathrm{Hom}_R(P_j'', P_{j-1}')$ για τους οποίους ισχύει

$$d_{j-1}' \circ \theta_j + \theta_{j-1} \circ d_j'' = 0, \ \ \forall j \in \{2, ..., n\}. \tag{D.7}$$

Ολοκλήρωση επαγωγικής διαδικασίας. Η γραμμή τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
& P_{n+1}'' \arrow[d, "-\theta_n \circ d_{n+1}''"] & \\
P_n' \arrow[r, "d_n'"'] & P_{n-1}' \arrow[r, "d_{n-1}'"'] & P_{n-2}'
\end{tikzcd}$$

είναι ακριβής (διότι εξ υποθέσεως $\mathrm{Ker}(d_{n-1}') = \mathrm{Im}(d_n')$), ο P_{n+1}'' είναι προβολικός, ενώ $d_{n-1}' \circ (-\theta_n \circ d_{n+1}'') = (-d_{n-1}' \circ \theta_n) \circ d_{n+1}'' \underset{\text{(D.7)}}{=} \theta_{n-1} \circ \underbrace{d_n'' \circ d_{n+1}''}_{=0} = 0$, οπότε $\exists \theta_{n+1} \in \mathrm{Hom}_R(P_{n+1}'', P_n') : d_n' \circ \theta_{n+1} + \theta_n \circ d_{n+1}'' = 0$. Τούτο σημαίνει ότι *για κάθε* $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
&[(d_n \circ d_{n+1})(x', x'') = d_n\left(d_{n+1}'(x') + \theta_{n+1}(x''), d_{n+1}''(x'')\right) \\
&= ((\underbrace{d_n' \circ d_{n+1}'}_{=0})(x') + (\underbrace{d_n' \circ \theta_{n+1} + \theta_n \circ d_{n+1}''}_{=0})(x''), (\underbrace{d_n'' \circ d_{n+1}''}_{=0})(x'')), \\
&\forall (x', x'') \in P_{n+1}' \oplus P_{n+1}'' =: P_{n+1}] \Rightarrow \boxed{d_n \circ d_{n+1} = 0}
\end{aligned}$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάζεται μια συμπλήρωση

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "d_3'"'] & & \vdots \arrow[d, "d_3"'] & & \vdots \arrow[d, "d_3''"] & \\
\{0\} \arrow[r] & P_2' \arrow[rr, "\iota_2"] \arrow[d, "d_2'"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & P_2 \arrow[rr, "\pi_2"] \arrow[d, "d_2"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & P_2'' \arrow[r] \arrow[d, "d_2''"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & P_1' \arrow[rr, "\iota_1"] \arrow[d, "d_1'"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & P_1 \arrow[rr, "\pi_1"] \arrow[d, "d_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & P_1'' \arrow[r] \arrow[d, "d_1''"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & P_0' \arrow[rr, "\iota_0"] \arrow[d, "\varepsilon'"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & P_0 \arrow[rr, "\pi_0"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & P_0'' \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & M' \arrow[rr, "f"'] \arrow[d] & & M \arrow[rr, "g"'] \arrow[d] & & M'' \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \\
 & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

τού αρχικού «πεταλοειδούς διαγράμματος», ούτως ώστε η

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \xrightarrow{\iota_\bullet} \mathbf{P}_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} \mathbf{P}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

να είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. Επειδή τα ζεύγη $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$, $(\mathbf{P}''_\bullet, \varepsilon'')$ είναι προβολικοί κερματισμοί των M' και M'', αντιστοίχως, από τη μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας B.2.12

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{H_n(\mathbf{P}'_\bullet)}_{\cong\{0\}} \xrightarrow{H_n(\iota_\bullet)} H_n(\mathbf{P}_\bullet) \xrightarrow{H_n(\pi_\bullet)} \underbrace{H_n(\mathbf{P}''_\bullet)}_{\cong\{0\}} \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

συμπεραίνουμε ότι $H_n(\mathbf{P}_\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $n \geq 1$. Επιπροσθέτως, $\varepsilon \circ d_1 = 0$ και το διάγραμμα (D.6) είναι μεταθετικό (με αμφότερες τις γραμμές του ακριβείς), οπότε ο επαγόμενος (μεσαίος) ομομορφισμός $\varepsilon_\star$ είναι *ισομορφισμός* (λόγω τού (iii) τού «βραχέος λήμματος των πέντε» B.1.8). Τέλος, ο $P_n := P_n' \oplus P_n''$ (ως ευθύ άθροισμα προβολικών) είναι προβολικός R-μόδιος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. πρόταση C.2.13.) Κατά συνέπειαν, το αποκτηθέν ζεύγος $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ αποτελεί έναν προβολικό κερματισμό τού M. □

D.1.7 Ορισμός. Κάθε ζεύγος $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ αποτελούμενο από ένα συναλυσωτό σύμπλοκο $\mathbf{Q}^\bullet = (Q^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ τής μορφής

$$\mathbf{Q}^\bullet : \ \cdots \to \{0\} \to \{0\} \to \ Q^0 \xrightarrow{d^0} Q^1 \xrightarrow{d^1} Q^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \longrightarrow Q^n \xrightarrow{d^n} Q^{n+1} \to \cdots,$$

όπου $Q^n \cong \{0\}$ και $d^n := 0$ για κάθε $n \leq -1$, ο Q^n εμβολικός R-μόδιος για κάθε $n \geq 0$ και $i \in \mathrm{Hom}_R(M, Q^0)$ ένας *μονομορφισμός*, καλείται **εμβολικός κερματισμός** (injective resolution) **τού** M όταν ισχύουν τα εξής:

(i) $H^n(\mathbf{Q}^\bullet) \cong \{0\}$ για κάθε $n \geq 1$,

(ii) $d^0 \circ i = 0$ και

(iii) μέσω τού i επάγεται ισομορφισμός $i^\star : M \xrightarrow{\cong} H^0(\mathbf{Q}^\bullet)$.

Οι συνθήκες (i), (ii) και (iii) ισοδυναμούν με το ότι η ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow M \overset{i}{\hookrightarrow} Q^0 \xrightarrow{d^0} Q^1 \xrightarrow{d^1} Q^2 \xrightarrow{d^2} \cdots \longrightarrow Q^n \xrightarrow{d^n} Q^{n+1} \longrightarrow \cdots \tag{D.8}$$

είναι ακριβής[3]. (Πράγματι· εάν ως $j : \mathrm{Ker}(d^0) \hookrightarrow Q^0$ συμβολισθεί η συνήθης ένθεση, η συνθήκη (ii) ισοδυναμεί με το ότι

$$\mathrm{Im}(i) \subseteq \mathrm{Ker}(d^0) = \mathrm{Im}(j),$$

οπότε κατά το θεώρημα A.3.25 υπάρχει μοναδικός $i^\star \in \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Ker}(d^0))$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(d^0) \arrow[r, hook, "j"] & Q^0 \arrow[r, "d^0"] & Q^1 \\
& M \arrow[u, "i"] \arrow[ul, dashed, "i^\star"] &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό, όπου $H^0(\mathbf{Q}^\bullet) = \mathrm{Ker}(d^0)/\underbrace{\mathrm{Im}(d^{-1})}_{\cong\{0\}} \cong \mathrm{Ker}(d^0)$. Η (iii) μας πληροφορεί ότι ο $i^\star$ είναι ισομορφισμός, οπότε

$$\mathrm{Ker}(d^0) = \mathrm{Im}(j) = \mathrm{Im}(j \circ i^\star) = \mathrm{Im}(i) = M.$$

Αυτό σημαίνει ότι η (D.8) είναι ακριβής στη θέση Q^0. Η ακρίβεια τής (D.8) στις επόμενες θέσεις είναι διασφαλισμένη από την (i).)

D.1.8 Πρόταση. *Κάθε R-μόδιος διαθέτει έναν εμβολικό κερματισμό.*

Απόδειξη. Έστω M ένας R-μόδιος. Κατά το θεώρημα C.2.18 ο M είναι ισόμορφος με έναν υπομόδιο ενός εμβολικού R-μοδίου Q^0. Εάν ως $i = i^0 : M \hookrightarrow Q^0$ συμβολισθεί η φυσική ενθετική απεικόνιση, τότε προκύπτει μια βραχεία ακριβής ακολουθία $\{0\} \longrightarrow M \overset{i^0}{\hookrightarrow} Q^0 \xrightarrow{\pi^0} Q^0/\, i^0(M) \longrightarrow \{0\}$, όπου $\pi^0 := \pi^{Q^0}_{i^0(M)}$. Με εκ νέου εφαρμογή τού θεωρήματος C.2.18 (αλλά αυτή τη φορά με το $\overline{Q^0} := Q^0/i^0(M)$

[3] Εν τοιαύτη περιπτώσει λέμε ότι η (D.8) είναι η **ακριβής ακολουθία η αντιστοιχούσα στον εμβολικό κερματισμό** $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$.

στη θέση τού M) συνάγεται η ύπαρξη ενός μονομορφισμού $i^1 : \overline{Q^0} \hookrightarrow Q^1$, όπου Q^1 ένας εμβολικός R-μόδιος, απ' όπου προκύπτει μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \overline{Q^0} \overset{i^1}{\hookrightarrow} Q^1 \xrightarrow{\pi^1} Q^1/i^1(\overline{Q^0}) \longrightarrow \{0\}.$$

Κατόπιν επαναλήψεως αυτής τής διαδικασίας για τους πηλικομοδίους

$$\overline{Q^n} := Q^n/i^n(\overline{Q^{n-1}}), \ \ n \geq 0,$$

αποδεικνύεται επαγωγικώς η ύπαρξη βραχέων ακριβών ακολουθιών

$$0 \longrightarrow \overline{Q^{n-1}} \overset{i^n}{\hookrightarrow} Q^n \xrightarrow{\pi^n} \overline{Q^n} \longrightarrow 0,$$

όπου Q^n εμβολικοί R-μόδιοι για κάθε $n \geq 1$. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι το ζεύγος $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ με

$$\mathbf{Q}^\bullet = (Q^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad d^n := i^n \circ \pi^{n-1},$$

είναι ένας εμβολικός κερματισμός τού M (με επιχειρήματα ανάλογα εκείνων που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη τής προτάσεως D.1.3). □

D.1.9 Θεώρημα. («Θεώρημα συγκρίσεως για εμβολικούς κερματισμούς») *Έστω ότι M, M' είναι δυο R-μόδιοι και ότι $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$. Εάν $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$, $(\mathbf{Q}'^\bullet, i')$ είναι προβολικοί κερματισμοί των M και M', αντιστοίχως, τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Υπάρχει συναλυσωτός μετασχηματισμός $f^\bullet : \mathbf{Q}^\bullet \longrightarrow \mathbf{Q}'^\bullet$ που «επεκτείνει» τον φ, ήτοι ισχύει $i' \circ \varphi = f^0 \circ i$.*

(ii) *Οιοιδήποτε συναλυσωτοί μετασχηματισμοί $f^\bullet, g^\bullet : \mathbf{Q}^\bullet \longrightarrow \mathbf{Q}'^\bullet$ «επεκτείνοντες» τον φ (υπό την ως άνω έννοια) είναι συναλυσωτώς ομότοποι.* (Βλ. εδ. B.4.3.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ανάλογη εκείνης τού θεωρήματος D.1.4, υπό την προϋπόθεση ότι κατά τη διαδικασία κατασκευής των[4] ομομορφισμών $f^1, f^2, \ldots$ χρησιμοποιείται η πρόταση C.2.15 αντί τής προτάσεως C.2.2. □

D.1.10 Πόρισμα. *Οιοιδήποτε εμβολικοί κερματισμοί $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$, $(\mathbf{Q}'^\bullet, i')$ τυχόντος R-μοδίου M είναι ομοτοπικώς ισοδύναμοι.* (Βλ. εδ. B.4.9.)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ανάλογη εκείνης τού πορίσματος D.1.5 (κάνοντας, εν προκειμένω, χρήση τού θεωρήματος D.1.9 αντί τού D.1.4). □

D.1.11 Λήμμα. («Λήμμα τού πετάλου για εμβολικούς κερματισμούς») *Έστω*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

[4]Επειδή ο Q^0 είναι εμβολικός και ο i μονομορφισμός, $\exists f_0 \in \mathrm{Hom}_R(Q^0, Q'^0) : i' \circ \varphi = f^0 \circ i$.

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων. Εάν $(\mathbf{Q'}^\bullet, i')$, $(\mathbf{Q''}^\bullet, i'')$ είναι εμβολικοί κερματισμοί των M' και M'', αντιστοίχως, τότε υπάρχουν ένας εμβολικός κερματισμός $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ τού M και συναλυσωτοί μετασχηματισμοί $\mathbf{j}^\bullet : \mathbf{Q'}^\bullet \longrightarrow \mathbf{Q}^\bullet$ και $\boldsymbol{\pi}^\bullet : \mathbf{Q}^\bullet \longrightarrow \mathbf{Q''}^\bullet$, ούτως ώστε η

$$\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow \mathbf{Q'}^\bullet \xrightarrow{\mathbf{j}^\bullet} \mathbf{Q}^\bullet \xrightarrow{\boldsymbol{\pi}^\bullet} \mathbf{Q''}^\bullet \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet$$

να είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων και το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\{0\} & \longrightarrow & H^0(\mathbf{Q'}^\bullet) & \xrightarrow{H^0(\mathbf{j}^\bullet)} & H^0(\mathbf{Q}^\bullet) & \xrightarrow{H^0(\boldsymbol{\pi}^\bullet)} & H^0(\mathbf{Q''}^\bullet) & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \cong\downarrow & \circlearrowleft & \cong\downarrow & \circlearrowleft & \cong\downarrow & & \\
\{0\} & \longrightarrow & M' & \underset{f}{\longrightarrow} & M & \underset{g}{\longrightarrow} & M'' & \longrightarrow & \{0\}
\end{array}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτοντας $Q^n := Q'^n \oplus Q''^n$, η απόδειξη είναι ανάλογη εκείνης τού λήμματος D.1.6, υπό την προϋπόθεση ότι κατά τη διαδικασία κατασκευής των απαιτουμένων συσσυνοριακών τελεστών χρησιμοποιείται η πρόταση C.2.15 αντί τής προτάσεως C.2.2. □

D.2 ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΕΠΕΚΤΑΣΕΩΣ

D.2.1 Ορισμός. Έστω N ένας R-μόδιος και έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο. Ως **σύμπλοκο ομομορφισμών τού $\mathbf{M}_\bullet$ και τού N** ορίζεται το *συναλυσωτό* σύμπλοκο[5]

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, N) := (\mathrm{Hom}_R(M_n, N),\ \mathrm{Hom}_R(d_n, \mathrm{id}_N))_{n\in\mathbb{Z}}.}$$

Σημειωτέον ότι εάν $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε μέσω τού $f_\bullet$ επάγεται *ο συναλυσωτός* μετασχηματισμός

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(f_\bullet,\ \mathrm{id}_N) : \mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}_\bullet, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{M}'_\bullet, N),}$$

όπου $\mathrm{Hom}_R(f_\bullet, \mathrm{id}_N) := (\mathrm{Hom}_R(f_n, \mathrm{id}_N) : \mathrm{Hom}_R(M_n, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'_n, N))_{n\in\mathbb{Z}}$.

D.2.2 Λήμμα. *Έστω ότι τα $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Για δυο αλυσωτούς μετασχηματισμούς $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ και τυχόντα R-μόδιο N ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή :*

$$\boxed{f_\bullet \simeq g_\bullet \Longrightarrow \mathrm{Hom}_R(f_\bullet, \mathrm{id}_N) \simeq \mathrm{Hom}_R(g_\bullet, \mathrm{id}_N).}$$

[5]Τούτο είναι όντως συναλυσωτό σύμπλοκο, καθόσον (λόγω τού λήμματος C.1.6, κατόπιν αλλαγής τής φοράς των βελών) έχουμε

$$\mathrm{Hom}_R(d_{n+1}, \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(d_n, \mathrm{id}_N) = \mathrm{Hom}_R(\underbrace{d_n \circ d_{n+1}}_{=0}, \mathrm{id}_N) = 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$ (βλ. εδ. B.4.1), τότε

$$f_n - g_n = d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Κατά συνέπειαν,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_R(f_n,\ \mathrm{id}_N) - \mathrm{Hom}_R(g_n,\ \mathrm{id}_N) = \mathrm{Hom}_R(d'_{n+1} \circ h_n,\ \mathrm{id}_N) + \mathrm{Hom}_R(h_{n-1} \circ d_n,\ \mathrm{id}_N) \\
&\underset{\text{C.1.6}}{=} \mathrm{Hom}_R(h_n,\ \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(d'_{n+1},\ \mathrm{id}_N) + \mathrm{Hom}_R(d_n,\ \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(h_{n-1},\ \mathrm{id}_N) \\
&= \mathrm{Hom}_R(d_n,\ \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(h_{n-1},\ \mathrm{id}_N) + \mathrm{Hom}_R(h_n,\ \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(d'_{n+1},\ \mathrm{id}_N),
\end{aligned}$$

οπότε $(\mathrm{Hom}_R(h_n, \mathrm{id}_N))_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{Hom}_R(f_\bullet, \mathrm{id}_N) \simeq \mathrm{Hom}_R(g_\bullet, \mathrm{id}_N)$. □

D.2.3 Λήμμα. *Εάν* $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ *είναι προβολικοί κερματισμοί ενός* R*-μοδίου* M, *τότε για οιονδήποτε* R*-μόδιο* N *έχουμε*

$$\boxed{H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N)) \cong H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}'_\bullet, N)),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το πόρισμα D.1.5 υπάρχουν αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ με $(g\circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet}$ και $(f\circ g)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet}$. Εξ αυτού (λόγω τού λήμματος D.2.2) έπεται ότι

$$\mathrm{Hom}_R((g\circ f)_\bullet,\ \mathrm{id}_N) \simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet},\ \mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N)},$$

$$\mathrm{Hom}_R((f\circ g)_\bullet,\ \mathrm{id}_N) \simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet},\ \mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}'_\bullet, N)}.$$

Επειδή

$$\mathrm{Hom}_R((g\circ f)_\bullet,\ \mathrm{id}_N) = \mathrm{Hom}_R(f_\bullet,\ \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(g_\bullet,\ \mathrm{id}_N),$$

$$\mathrm{Hom}_R((f\circ g)_\bullet,\ \mathrm{id}_N) = \mathrm{Hom}_R(g_\bullet,\ \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(f_\bullet,\ \mathrm{id}_N),$$

τα *συναλυσωτά* σύμπλοκα $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N)$ και $\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}'_\bullet, N)$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα και ο ισχυρισμός είναι αληθής δυνάμει τής προτάσεως B.4.12. □

D.2.4 Ορισμός. Έστω ότι οι M, N είναι δυο R-μόδιοι και ότι $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ είναι τυχών προβολικός κερματισμός τού M. Ως n**-οστό γινόμενο επεκτάσεως των** M **και** N ορίζεται ο R-μόδιος

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n_R(M, N) := H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N)),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

(Ο ορισμός αυτός είναι εφικτός λόγω τής προτάσεως D.1.3, ενώ το $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ είναι *μέχρις ισομορφισμού ανεξάρτητο* τής συγκεκριμένης επιλογής τού προβολικού κερματισμού $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τού M λόγω τού λήμματος D.2.3. Επιπροσθέτως, $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) \cong \{0\}$ για κάθε $n < 0$.)

D.2.5 Λήμμα. *Για οιουσδήποτε* R*-μοδίους* M, N *ισχύει*:

$$\boxed{\mathrm{Ext}^0_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, N).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $\mathbf{P}_\bullet = (P_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, τυχών προβολικός κερματισμός τού M. Μέσω τής ακριβούς ακολουθίας

$$P_1 \xrightarrow{\quad d_1 \quad} P_0 \xrightarrow{\quad \varepsilon \quad} M \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\varepsilon,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(P_0,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(d_1,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(P_1,N)$$

(Βλ. θεώρημα C.1.14.) Κατά το (i) τής προτάσεως B.1.4,

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d_1, \mathrm{id}_N)) \cong \mathrm{Hom}_R(M,N).$$

Από την άλλη μεριά, το $\mathrm{Ext}^0_R(M,N)$ είναι το

$$H^0(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d_1,\mathrm{id}_N))/\,\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(\underbrace{d_0}_{=0}, \mathrm{id}_N)) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(d_1,\mathrm{id}_N)),$$

οπότε πράγματι $\mathrm{Ext}^0_R(M,N) \cong \mathrm{Hom}_R(M,N)$. □

D.2.6 Ορισμός. Δοθέντων R-μοδίων M, M', N, N', ομομορφισμών

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M', M), \;\; \psi \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$$

και προβολικών κερματισμών $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ των M και M', αντιστοίχως, υπάρχει (βάσει τού (i) τού θεωρήματος D.1.4) αλυσωτός μετασχηματισμός $f_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ που «επεκτείνει» τον φ, ήτοι ισχύει $\varphi \circ \varepsilon' = \varepsilon \circ f_0$. Μέσω τού $f_\bullet$ κατασκευάζεται ο *συναλυσωτός* μετασχηματισμός

$$\mathrm{Hom}_R(f_\bullet, \psi) = (\mathrm{Hom}_R(f_n, \psi))_{n\in\mathbb{Z}} : \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}'_\bullet, N').$$

(Πρβλ. εδ. C.1.4.) Ως **n-οστό γινόμενο επεκτάσεως (υπεράνω τού R) των φ και ψ** ορίζεται ο ομομορφισμός

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n_R(\varphi,\psi) := H^n(\mathrm{Hom}_R(f_\bullet, \psi)) : \mathrm{Ext}^n_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_R(M',N')}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

D.2.7 Πρόταση. *Εάν οι M, M', M'', N, N', N'' είναι έξι R-μόδιοι και*

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M', M), \qquad \varphi' \in \mathrm{Hom}_R(M, M''),$$
$$\psi \in \mathrm{Hom}_R(N', N), \qquad \psi' \in \mathrm{Hom}_R(N, N''),$$

τότε

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n_R(\varphi'\circ\varphi, \psi'\circ\psi) = \mathrm{Ext}^n_R(\varphi,\psi')\circ \mathrm{Ext}^n_R(\varphi',\psi), \; \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από τις προτάσεις B.2.22, C.1.9 και B.2.22, και το θεώρημα D.1.4. □

D.2.8 Πρόταση. *Για οιουσδήποτε R-μοδίους M, N ισχύει:*

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N) \cong \mathrm{id}_{\mathrm{Ext}^n_R(M,N)},\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από το λήμμα C.1.8 και την πρόταση B.2.23. □

D.2.9 Θεώρημα. (Πρώτη μακρά ακριβής Ext-ακολουθία) *Έστω*

$$\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και έστω M τυχών R-μόδιος. Τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,N') \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, f)"] & \mathrm{Hom}_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g)"] & \mathrm{Hom}_R(M,N'') \arrow[dll, "\partial^0"] & \\
& \mathrm{Ext}^1_R(M,N') \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{id}_M, f)"] & \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{id}_M, g)"] & \mathrm{Ext}^1_R(M,N'') \arrow[r, "\partial^1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & \mathrm{Ext}^n_R(M,N') \arrow[r, "\mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{id}_M, f)"] & \mathrm{Ext}^n_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^n_R(\mathrm{id}_M, g)"] & \mathrm{Ext}^n_R(M,N'') \arrow[r, "\partial^n"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $\mathbf{P}_\bullet = (P_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, τυχών προβολικός κερματισμός τού M. Επειδή κάθε P_n είναι προβολικός R-μόδιος, το θεώρημα C.2.7 μας πληροφορεί ότι οι

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P_n, N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{P_n}, f)} \mathrm{Hom}_R(P_n, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{P_n}, g)} \mathrm{Hom}_R(P_n, N'') \longrightarrow \{0\}$$

είναι βραχείες ακριβείς ακολουθίες για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τούτο όμως σημαίνει ότι η

$$\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet}, f)} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet}, g)} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N'') \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet \qquad \text{(D.9)}$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία *συναλυσωτών* συμπλόκων. Η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία δεν είναι τίποτα άλλο παρά η *μακρά ακριβής ακολουθία συνομολογίας για την* (D.9). (Βλ. θεώρημα B.2.28.) □

D.2.10 Θεώρημα. (Δεύτερη μακρά ακριβής Ext-ακολουθία) *Έστω*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και έστω N τυχών R-μόδιος. Τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M'',N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Hom}_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Hom}_R(M',N) \arrow[dll, "\widetilde{\partial}^0"] & \\
& \mathrm{Ext}^1_R(M'',N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_R(g, \mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^1_R(f, \mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Ext}^1_R(M',N) \arrow[r, "\widetilde{\partial}^1"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\widetilde{\partial}^{n-1}"] & \mathrm{Ext}^n_R(M'',N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^n_R(g, \mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Ext}^n_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}^n_R(f, \mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Ext}^n_R(M',N) \arrow[r, "\widetilde{\partial}^n"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$, $(\mathbf{P}''_\bullet, \varepsilon'')$ είναι προβολικοί κερματισμοί των M' και M'', αντιστοίχως, τότε (σύμφωνα με «λήμμα τού πετάλου» D.1.6) υπάρχουν ένας προβολικός κερματισμός $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τού M και αλυσωτοί μετασχηματισμοί $\iota_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ και $\pi_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}''_\bullet$, ούτως ώστε η $\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \xrightarrow{\iota_\bullet} \mathbf{P}_\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} \mathbf{P}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$ να είναι βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων («επεκτείνουσα» τους f και g) και μάλιστα έχουσα τις επιμέρους βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow P'_n \xrightarrow{\iota_n} P_n \xrightarrow{\pi_n} P''_n \longrightarrow \{0\}$$

διασπώμενες για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κατά το θεώρημα C.1.15 οι βραχείες ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P''_n, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi_n, \mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(P_n, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\iota_n, \mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(P'_n, N) \longrightarrow \{0\}$$

είναι ωσαύτως ακριβείς και διασπώμενες για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ιδιαιτέρως, τούτο σημαίνει ότι η

$$\mathbf{0}^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}''_\bullet, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\pi_\bullet, \mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\iota_\bullet, \mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}'_\bullet, N) \longrightarrow \mathbf{0}^\bullet \qquad \text{(D.10)}$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία συναλυσωτών συμπλόκων. Η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία δεν είναι τίποτα άλλο παρά η *μακρά ακριβής ακολουθία συνομολογίας για την* (D.10). (Βλ. θεώρημα B.2.28 και λήμμα D.2.5.) □

D.2.11 Θεώρημα. *Για έναν R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*
(i) *Ο M είναι προβολικός.*
(ii) $\mathrm{Ext}^1_R(M, N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο N.*
(iii) $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο N και για κάθε $n \geq 1$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i)⇒(iii) Εάν ο M είναι προβολικός, τότε το $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $\mathbf{P}_\bullet = (P_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, με

$$P_n := \begin{cases} M, & \text{όταν } n = 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}, \end{cases} \qquad d_n := 0,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \varepsilon := \mathrm{id}_M,$$

αποτελεί έναν προβολικό κερματισμό τού M, οπότε $\mathrm{Ext}^n_R(M, N) \cong \{0\}$ για κάθε R-μόδιο N και για κάθε $n \geq 1$.

(iii)⇒(ii) Τούτο είναι προφανές.

(ii)⇒(i) Έστω $\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων. Κατά το θεώρημα D.2.9 η

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, f)} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g)} \mathrm{Hom}_R(M, N'') \xrightarrow{\partial^0} \mathrm{Ext}^1_R(M, N')$$

είναι ακριβής. Επειδή (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Ext}^1_R(M, N') \cong \{0\}$, λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, f)} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g)} \mathrm{Hom}_R(M, N'') \longrightarrow \{0\}$$

οπότε ο M είναι προβολικός επί τη βάσει τού θεωρήματος C.2.7. □

D.2.12 Πόρισμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και οι M, N δυο R-μόδιοι, τότε*

$$\mathrm{Ext}_R^n(M,N) \cong \begin{cases} \mathrm{Hom}_R(M,N), & \text{όταν } n=0, \\ \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_N)), & \text{όταν } n=1, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0,1\}, \end{cases}$$

όπου $f : L \hookrightarrow F$ είναι ένας μονομορφισμός R-μοδίων εμφανιζόμενος σε μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow L \overset{f}{\hookrightarrow} F \overset{g}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}, \tag{D.11}$$

με τον F ελεύθερο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $n < 0$ τούτο είναι προφανές. Για $n = 0$ βλ. λήμμα D.2.5. Όπως έχει ήδη προαναφερθεί στο (ii) τού εδ. D.1.2, υπάρχει πάντοτε μια βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής (D.11), όπου ο F (και, κατ' επέκταση, και ο L λόγω τού θεωρήματος A.6.47) είναι ελεύθερος R-μόδιος. Επομένως αμφότεροι οι L και F είναι προβολικοί. (Βλ. πρόταση C.2.4.) Από το θεώρημα D.2.11 και τη δεύτερη μακρά Ext-ακολουθία (βλ. θεώρημα D.2.10) λαμβάνουμε

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(g,\mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Hom}_R(F,N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Hom}_R(L,N) \arrow[dll, "\widetilde{\partial}^0"] \\ & \mathrm{Ext}_R^1(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Ext}_R^1(g,\mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Ext}_R^1(F,N) \cong \{0\} & \end{tikzcd}$$

για $n = 1$ (πρβλ. B.1.4 (ii)) και

$$\cdots \longrightarrow \{0\} \cong \mathrm{Ext}_R^{n-1}(L,N) \xrightarrow{\widetilde{\partial}^{n-1}} \mathrm{Ext}_R^n(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Ext}_R^n(g,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Ext}_R^n(F,N) \cong \{0\}$$

για $n \geq 2$, οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

D.2.13 Θεώρημα. *Για έναν R-μόδιο N οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο N είναι εμβολικός.*

(ii) $\mathrm{Ext}_R^1(M,N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο M.*

(iii) $\mathrm{Ext}_R^n(M,N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο M και για κάθε $n \geq 1$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i)⇒(iii) Έστω M τυχών R-μόδιος και έστω $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ ένας προβολικός κερματισμός αυτού. Επειδή ο N είναι (εξ υποθέσεως) εμβολικός, η επαγομένη ακολουθία

$$\{0\} \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(P_0,N) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_R(P_n,N) \to \mathrm{Hom}_R(P_{n+1},N) \to \cdots$$

παραμένει ακριβής (βλ. εδ. C.2.23), οπότε $\mathrm{Ext}_R^n(M,N) \cong \{0\}$ για κάθε $n \geq 1$.

(iii)⇒(ii) Τούτο είναι προφανές.

(ii)⇒(i) Έστω $\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων. Κατά το θεώρημα D.2.10 η

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(M', N) \xrightarrow{\widetilde{\partial}^0} \mathrm{Ext}^1_R(M'', N)$$

είναι ακριβής. Επειδή (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Ext}^1_R(M'', N) \cong \{0\}$, λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{id}_N)} \mathrm{Hom}_R(M', N) \longrightarrow \{0\}$$

οπότε ο N είναι εμβολικός επί τη βάσει τού θεωρήματος C.2.22. □

D.2.14 Πρόταση. *Εάν $(M_j)_{j \in J}$ είναι μια οικογένεια R-μοδίων και N τυχών R-μόδιος, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n_R(\bigoplus_{j \in J} M_j, N) \cong \prod_{j \in J} \mathrm{Ext}^n_R(M_j, N), \ \forall n \in \mathbb{Z}} \qquad \text{(D.12)}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n_R(N, \prod_{j \in J} M_j) \cong \prod_{j \in J} \mathrm{Ext}^n_R(N, M_j,), \ \forall n \in \mathbb{Z}.} \qquad \text{(D.13)}$$

Αποδειξη της (D.12). Εάν το ζεύγος $(\mathbf{P}_{\bullet, j}, \varepsilon_j)$ είναι τυχών προβολικός κερματισμός τού M_j για κάθε $j \in J$, τότε το $(\bigoplus_{j \in J} \mathbf{P}_{\bullet, j}, \bigoplus_{j \in J} \varepsilon_j)$ αποτελεί προβολικό κερματισμό τού ευθέος αθροίσματος $\bigoplus_{j \in J} M_j$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\mathrm{Ext}^n_R(\bigoplus_{j \in J} M_j, N) \cong H^n(\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{j \in J} \mathbf{P}_{\bullet, j}, N)) \underset{\text{C.1.11}}{\cong} H^n(\prod_{j \in J} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_{\bullet, j}, N)) \underset{\text{B.2.9}}{\cong} \prod_{j \in J} \mathrm{Ext}^n_R(M_j, N),$$

Αποδειξη της (D.13). Εάν $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ είναι τυχών προβολικός κερματισμός τού N, τότε

$$\mathrm{Ext}^n_R(N, \prod_{j \in J} M_j) \cong H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, \prod_{j \in J} M_j)) \underset{\text{C.1.11}}{\cong} H^n(\prod_{j \in J} \mathrm{Hom}_R(\mathbf{P}_\bullet, M_j)) \underset{\text{B.2.9}}{\cong} \prod_{j \in J} \mathrm{Ext}^n_R(N, M_j,),$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

► **Χρήσιμοι υπολογισμοί όταν ο R είναι Π.Κ.Ι.** Όταν ο δακτύλιος αναφοράς μας είναι Π.Κ.Ι., τότε από το πόρισμα D.2.12 είναι γνωστό ότι τα μόνα ενδιαφέροντα (ήτοι τα μόνα πιθανώς μη τετριμμένα) γινόμενα επεκτάσεως $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ είναι αυτά για τα οποία $n \in \{0, 1\}$. Το γινόμενο επεκτάσεως $\mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ όταν οι M, N είναι μη τετριμμένοι, πεπερασμένως παραγόμενοι και μη ελεύθεροι, υπολογίζεται μέσω τού θεωρήματος D.2.16.

D.2.15 Λήμμα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Εάν $r, s \in R$, τότε*

$$\mathrm{Ext}^1_R(R/\langle r \rangle, R) \cong R/\langle r \rangle \quad \text{και} \quad \mathrm{Ext}^1_R(R/\langle r \rangle, R/\langle s \rangle) \cong R/\langle d \rangle,$$

όπου $d \in \mathrm{MK\Delta}_R(r, s)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow R \overset{r\,\mathrm{id}_R}{\hookrightarrow} R \overset{\pi^R_{\langle r\rangle}}{\twoheadrightarrow} R/\langle r\rangle \longrightarrow \{0\}.$$

Το πόρισμα D.2.12 μας πληροφορεί ότι

$$\mathrm{Ext}^1_R(R/\langle r\rangle, R) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_R(r\,\mathrm{id}_R, \mathrm{id}_R)),$$

όπου $\mathrm{Hom}_R(r\ \mathrm{id}_R,\mathrm{id}_R) : \mathrm{Hom}_R(R,R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,R)$, $\varphi \longmapsto r\varphi$. Επειδή $\mathrm{Hom}_R(R,R) \cong R$, η εικόνα τού $\mathrm{Hom}_R(r\ \mathrm{id}_R,\mathrm{id}_R)$ είναι ισόμορφη τού κύριου ιδεώδους $\langle r\rangle$ εντός τού R, οπότε ο συμπυρήνας του είναι $\cong R/\langle r\rangle$. Κατ' αναλογίαν,

$$\mathrm{Ext}^1_R(R/\langle r\rangle, R/\langle s\rangle) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_R(r\,\mathrm{id}_R, \mathrm{id}_{R/\langle s\rangle})),$$

όπου $\mathrm{Hom}_R(r\ \mathrm{id}_R,\mathrm{id}_{R/\langle s\rangle}) : \mathrm{Hom}_R(R,R/\langle s\rangle) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,R/\langle s\rangle)$, $\varphi \longmapsto r\varphi$. Επειδή[6] $\mathrm{Hom}_R(R,R/\langle s\rangle) \cong R/\langle s\rangle$, ο ομομορφισμός $\mathrm{Hom}_R(r\ \mathrm{id}_R,\mathrm{id}_{R/\langle s\rangle})$ μπορεί να ιδωθεί ως ο πολλαπλασιασμός με r :

$$R/\langle s\rangle \ni t + \langle s\rangle \overset{r\,\mathrm{id}_{R/\langle s\rangle}}{\longmapsto} r(t+\langle s\rangle) = rt + \langle s\rangle \in R/\langle s\rangle.$$

Προφανώς, $\mathrm{Coker}(r\,\mathrm{id}_{R/\langle s\rangle}) := (R/\langle s\rangle)/\operatorname{Im}(r\,\mathrm{id}_{R/\langle s\rangle}) = (R/\langle s\rangle)/r(R/\langle s\rangle)$, όπου

$$r(R/\langle s\rangle) = \{rt + st' + \langle s\rangle \mid t,t' \in R\} = (\langle r\rangle + \langle s\rangle)/\langle s\rangle,$$

οπότε $(R/\langle s\rangle)/(\langle r\rangle + \langle s\rangle)/\langle s\rangle \cong R/(\langle r\rangle + \langle s\rangle)$ με[7] $\langle r\rangle + \langle s\rangle = \langle d\rangle$. □

D.2.16 Θεώρημα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Ας υποθέσουμε ότι M, N είναι δυο μη τετριμμένοι, πεπερασμένως παραγόμενοι, μη ελεύθεροι R-μόδιοι. Εάν αυτοί γραφούν υπό τη μορφή $M = \mathrm{tors}(M) \oplus \mathrm{frp}(M)$, $N = \mathrm{tors}(N) \oplus \mathrm{frp}(N)$, όπου*

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{tors}(M) = \mathrm{tors}(M)(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{tors}(M)(p_t) \\ \mathrm{tors}(N) = \mathrm{tors}(N)(q_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{tors}(M)(q_{t'}) \end{array}\right\}$$

είναι οι ευθείες αποσυνθέσεις των υπομοδίων στρέψεώς τους στις πρωτεύουσες συνιστώσες τους και

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{tors}(M)(p_j) \cong \left(R/\left\langle p^{\ell_{j,1}}\right\rangle\right) \oplus \left(R/\left\langle p^{\ell_{j,1}}\right\rangle\right) \oplus \cdots \oplus \left(R/\left\langle p^{\ell_{j,k_j}}\right\rangle\right) \\ \mathrm{tors}(N)(q_i) \cong (R/\langle q^{m_{i,1}}\rangle) \oplus (R/\langle q^{m_{i,2}}\rangle) \oplus \cdots \oplus (R/\langle q^{m_{i,\kappa_i}}\rangle) \end{array}\right\}$$

οι (μέχρις ισομορφισμού μονοσημάντως ορισμένες) αποσυνθέσεις αυτών σε ευθέα αθροίσματα κυκλικών υπομοδίων με

$$1 \le \ell_{j,1} \le \cdots \le \ell_{j,k_j} \ \ \textit{και} \ \ 1 \le m_{i,1} \le \cdots \le m_{i,\kappa_i}$$

[6] Βλ. πρόταση C.1.2.

[7] Βλ. [87], θεώρημα 5.2.14.

για κάθε $(j,i) \in \{1,...,t\} \times \{1,...,t'\}$ (όπως στο δομικό θεώρημα A.7.30), *τότε*

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{Ext}^1_R(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),N) \\ \cong \left(\bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}\bigoplus_{i=1}^{t'}\bigoplus_{\xi=1}^{\kappa_i} \mathrm{Ext}^1_R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\left\langle q^{m_{i,\xi}}\right\rangle)\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle)\right)^{\mathrm{rank}(N)},\end{gathered}} \tag{D.14}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Ext}^1_R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\left\langle q^{m_{i,\xi}}\right\rangle) \cong R/\left\langle \mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}\right\rangle,} \tag{D.15}$$

όπου[8] $\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)} \in \mathrm{MK\Delta}_R(p^{\ell_{j,\varrho}}, q^{m_{i,\xi}})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με την πρόταση D.2.14,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_R(M,N) &\cong \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{frp}(M),\mathrm{frp}(N)) \oplus \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{frp}(M),\mathrm{tors}(N)) \\ &\oplus \underbrace{\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{tors}(N)) \oplus \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{frp}(N))}_{=\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),N)}.\end{aligned}$$

Επειδή (κατά το θεώρημα D.2.11) οι δύο πρώτοι ευθείς προσθετέοι είναι τετριμμένοι[9], λαμβάνουμε τον πρώτον εκ των ισομορφισμών (D.14). Ο δεύτερος προκύπτει απευθείας από την πρόταση D.2.14, διότι

$$\mathrm{frp}(N) \cong R^{\text{fr-rank}_R(N)} \Rightarrow \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{frp}(N)) \cong \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),R)^{\text{fr-rank}_R(N)},$$

όπου

$$\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),R) \cong \mathrm{Ext}^1_R(\bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j} R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R) \cong \bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j} \mathrm{Ext}^1_R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R)$$

και

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{tors}(N)) &\cong \mathrm{Ext}^1_R(\bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle), \bigoplus_{i=1}^{t'}\bigoplus_{\xi=1}^{\kappa_i} R/\left\langle q^{m_{i,\xi}}\right\rangle) \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}\bigoplus_{i=1}^{t'}\bigoplus_{\xi=1}^{\kappa_i} \mathrm{Ext}^1_R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\left\langle q^{m_{i,\xi}}\right\rangle)\end{aligned}$$

Τέλος, το λήμμα D.2.15 δίδει $\mathrm{Ext}^1_R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R) \cong R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle$, καθώς και τον ισομορφισμό (D.15). □

D.2.17 Σημείωση. Εάν (στη διατύπωση τού θεωρήματος D.2.16) επιτρέψουμε στον N να είναι *ελεύθερος*, τότε λαμβάνουμε απλώς[10]

$$\mathrm{Ext}^1_R(M,N) \cong \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{tors}(M),N) \cong \left(\bigoplus_{j=1}^{t}\bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle)\right)^{\text{fr-rank}(N)}.$$

[8] Εάν $p \underset{\text{συν.}}{\not\sim} q$, τότε το γινόμενο επεκτάσεως (D.15) είναι τετριμμένο. Εάν $p \underset{\text{συν.}}{\sim} q$, τότε ως $\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}$ μπορεί να ληφθεί το στοιχείο $p^{\min\{\ell_{j,\varrho}, m_{i,\xi}\}}$. (Βλ. [87], θεώρημα 5.6.13.)

[9] Σημειωτέον ότι ο $\mathrm{frp}(M)$ (όντας ελεύθερος) είναι προβολικός. (Βλ. πρόταση C.2.4.)

[10] Αντιθέτως, εάν υποθέταμε ότι ο M είναι *ελεύθερος*, τότε το $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ θα ήταν προφανώς *τετριμμένος* R-μόδιος.

D.2.18 Πόρισμα. *Έστω ότι οι G, H είναι μη τετριμμένες, πεπερασμένως παραγόμενες, μη ελεύθερες αβελιανές ομάδες. Γράφοντας τις τάξεις των υποομάδων στρέψεώς τους υπό τη μορφή* $|\mathrm{tors}\,(G)| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}$, $|\mathrm{tors}\,(H)| = p_1^{n_1'} p_2^{n_2'} \cdots p_t^{n_t'}$, *για κάποιους πρώτους αριθμούς* $p_1, \ldots, p_t$, $t \in \mathbb{N}$, *με* $p_1 < \cdots < p_t$ *(όταν* $t \geq 2$*), όπου* $n_1, \ldots, n_t \in \mathbb{N}_0$ *(και αντιστοίχως,* $n_1', \ldots, n_t' \in \mathbb{N}_0$*) με τουλάχιστον έναν εξ αυτών* $\neq 0$, *λαμβάνουμε*

$$\mathrm{tors}\,(G) = \bigoplus_{\{j \in \{1,\ldots,t\} : n_j \neq 0\}} G\,(p_j)\,,\ \mathrm{tors}\,(H) = \bigoplus_{\{i \in \{1,\ldots,t\} : n_i' \neq 0\}} H\,(p_i)$$

και (για αυτούς τους δείκτες j, i*)*

$$G\,(p_j) \cong \mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,1}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,k_j}}}\,,\ H\,(p_i) \cong \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,1}}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,\kappa_i}}}\,,$$

όπου $(\ell_{j,1}, \ldots, \ell_{j,k_j}) \in \Pi_{k_j}(n_j)$ *και* $(m_{i,1}, \ldots, m_{i,\kappa_i}) \in \Pi_{\kappa_i}(n_i')$ (όπως στο θεώρημα A.7.32)*, οπότε*

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Ext}^1_R(G,H) \cong \left(\displaystyle\bigoplus_{\{j \in \{1,\ldots,t\} : n_j \neq 0\}} \ \bigoplus_{\{i \in \{1,\ldots,t\} : n_i' \neq 0\}} \ \bigoplus_{\varrho=1}^{k_j} \bigoplus_{\xi=1}^{\kappa_i} \mathbb{Z}_{p^{\min\{\ell_{j,\varrho}, m_{i,\xi}\}}} \right) \\ \qquad\qquad \oplus \left(\displaystyle\bigoplus_{\{j \in \{1,\ldots,t\} : n_j \neq 0\}} \ \bigoplus_{\varrho=1}^{k_j} \mathbb{Z}_{p^{\ell_{j,\varrho}}} \right)^{\text{fr-rank}(H)}. \end{array}}$$

► **Εναλλακτικός ορισμός γινομένων επεκτάσεως**. Αυτός θεσπίζεται με τη βοήθεια *εμβολικών κερματισμών*.

D.2.19 Ορισμός. Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $\mathbf{N}^\bullet = (N^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ένα συναλυσωτό σύμπλοκο. Ως **σύμπλοκο ομομορφισμών τού** M **και τού** $\mathbf{N}_\bullet$ ορίζεται το *συναλυσωτό* σύμπλοκο[11]

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{N}^\bullet) := (\mathrm{Hom}_R(M, N^n),\ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, d^n))_{n \in \mathbb{Z}}.}$$

D.2.20 Λήμμα. *Έστω ότι τα* $\mathbf{N}^\bullet = (N^n, d^n)_{n \in \mathbb{Z}}, \mathbf{N}'^\bullet = (N'^n, d'^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ *είναι δυο συναλυσωτά σύμπλοκα. Για συναλυσωτούς μετασχηματισμούς* $f^\bullet, g^\bullet : \mathbf{N}^\bullet \longrightarrow \mathbf{N}'^\bullet$ *και τυχόντα* R*-μόδιο* M *ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή:*

$$\boxed{f^\bullet \simeq g^\bullet \Longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M,\ f^\bullet) \simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M,\ g^\bullet).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρόμοια εκείνης τού λήμματος D.2.2 (κάνοντας, εν προκειμένω, χρήση τού πορίσματος D.1.10). □

[11]Τούτο είναι όντως συναλυσωτό σύμπλοκο, καθόσον (λόγω τού λήμματος C.1.7)

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, d^{n+1}) \circ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, d^n) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, \underbrace{d^n \circ d^{n+1}}_{=0}) = 0.$$

D.2.21 Λήμμα. *Εάν* $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$, $(\mathbf{Q}^{'\bullet}, i')$ *είναι εμβολικοί κερματισμοί ενός* R*-μοδίου* N*, τότε για οιονδήποτε* R*-μόδιο* M *έχουμε*

$$\boxed{H^n(\mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{Q}^\bullet)) \cong H^n(\mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{Q}^{'\bullet})),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρόμοια εκείνης τού D.2.3 (κάνοντας χρήση τού D.2.20). □

D.2.22 Ορισμός. Έστω ότι οι M, N είναι δυο R-μόδιοι και ότι $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ είναι τυχών εμβολικός κερματισμός τού N. Θέτουμε

$$\boxed{\overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M, N) := H^n(\mathrm{Hom}_R(M, \mathbf{Q}^\bullet)),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

Ο ορισμός αυτός είναι εφικτός λόγω τής προτάσεως D.1.8, ενώ το $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$ είναι *μέχρις ισομορφισμού ανεξάρτητο* τής συγκεκριμένης επιλογής τού εμβολικού κερματισμού $(\mathbf{Q}^\bullet, i)$ τού N λόγω τού λήμματος D.2.21. Ωστόσο, *δεν οδηγεί* στη δημιουργία μιας *άλλης οντότητας*, όπως παρεμφαίνεται από το εξής:

D.2.23 Θεώρημα. *Εάν* M, N *είναι τυχόντες* R*-μόδιοι, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Ext}^n_R(M, N) \cong \overline{\mathrm{Ext}}^n_R(M, N),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ., π.χ., Vermani [121], Theorem 6.2.4, σελ. 151-153, ή Rotman [103], Theorem 6.67, σελ. 374. □

► **Από πού προέρχεται ο όρος «γινόμενο επεκτάσεως»;** Κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

καλείται **επέκταση τού** M **μέσω τού** N και σημειώνεται ως (f, E, g). (Δοθέντων δυο R-μοδίων M, N, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον μία επέκταση τού M μέσω τού N.) Ας συμβολίσουμε ως $\mathrm{ext}(M, N)$ το σύνολο όλων των επεκτάσεων τού M μέσω τού N. Επί τού $\mathrm{ext}(M, N)$ ορίζεται μια σχέση ισιδυναμίας $\sim_{\text{επ.}}$ως ακολούθως:

$$(f_1, E_1, g_1) \sim_{\text{επ.}} (f_2, E_2, g_2) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{c} \exists h \in \mathrm{Hom}_R(E_1, E_2): \\ h \circ f_1 = f_2 \ \text{ και } \ h \circ g_1 = g_2 \end{array} \right].$$

D.2.24 Θεώρημα. *Εάν* M, N *είναι δυο* R*-μόδιοι, τότε υφίσταται μια φυσική αμφίρριψη:*

$$\boxed{\mathrm{ext}(M, N)/\sim_{\text{επ.}} \longleftrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(M, N).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ., π.χ., Vermani [121], Theorem 7.1.5, σελ. 169-171, ή Rotman [103], Theorem 7.30, σελ. 425-426. □

$\boxed{\text{D.3}}$ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΣΤΡΕΨΕΩΣ

D.3.1 Ορισμός. Έστω N ένας R-μόδιος και έστω $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο. Ως **τανυστικό γινόμενο τού $\mathbf{M}_\bullet$ και τού** N ορίζεται το αλυσωτό σύμπλοκο[12]

$$\boxed{\mathbf{M}_\bullet \otimes_R N := (M_n \otimes_R N, d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N)_{n\in\mathbb{Z}}.}$$

Σημειωτέον ότι εάν $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα και $f_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ ένας αλυσωτός μετασχηματισμός, τότε μέσω τού $f_\bullet$ επάγεται ο *αλυσωτός* μετασχηματισμός

$$\boxed{f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N : \mathbf{M}_\bullet \otimes_R N \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet \otimes_R N,}$$

όπου $f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N := (f_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_N : M_n \otimes_R N \longrightarrow M'_n \otimes_R N)_{n\in\mathbb{Z}}$.

D.3.2 Λήμμα. *Έστω ότι τα $\mathbf{M}_\bullet = (M_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{M}'_\bullet = (M'_n, d'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα. Για δυο αλυσωτούς μετασχηματισμούς $f_\bullet, g_\bullet : \mathbf{M}_\bullet \longrightarrow \mathbf{M}'_\bullet$ και τυχόντα R-μόδιο N ισχύει η ακόλουθη συνεπαγωγή* :

$$\boxed{f_\bullet \simeq g_\bullet \Longrightarrow f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N \simeq g_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \simeq g_\bullet$ (βλ. εδ. B.4.1), τότε

$$\begin{aligned}
&[f_n - g_n = d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n,\ \forall n \in \mathbb{Z}] \\
&\Rightarrow f_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N - g_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = (d'_{n+1} \circ h_n) \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N + (h_{n-1} \circ d_n) \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N \\
&\underset{\text{C.5.5}}{=} (d'_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) \circ (h_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) + (h_{n-1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) \circ (d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N),
\end{aligned}$$

οπότε $(h_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N)_{n\in\mathbb{Z}} : f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N \simeq g_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N$. □

D.3.3 Λήμμα. *Εάν $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon), (\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ είναι προβολικοί κερματισμοί ενός R-μοδίου M, τότε για οιονδήποτε R-μόδιο N έχουμε*

$$\boxed{H_n(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N) \cong H_n(\mathbf{P}'_\bullet \otimes_R N),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το πόρισμα D.1.5 υπάρχουν αλυσωτοί μετασχηματισμοί $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ και $g_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ με $(g \circ f)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet}$ και $(f \circ g)_\bullet \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet}$. Εξ αυτού (λόγω τού λήμματος D.3.2) έπεται ότι

$$(g \circ f)_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N},\ (f \circ g)_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N \simeq \mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{\mathbf{P}'_\bullet \otimes_R N}.$$

[12] Τούτο είναι όντως αλυσωτό σύμπλοκο, καθόσον έχουμε

$$(d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) \circ (d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) = (d_n \circ d_{n+1}) \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = 0 \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = 0.$$

Επειδή

$$(g \circ f)_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = (g_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) \circ (f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N),\ (f \circ g)_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N = (f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) \circ (g_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N),$$

τα αλυσωτά σύμπλοκα $\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N$ και $\mathbf{P}'_\bullet \otimes_R N$ είναι ομοτοπικώς ισοδύναμα και ο ισχυρισμός είναι αληθής δυνάμει τής προτάσεως B.4.10. □

D.3.4 Ορισμός. Έστω ότι οι M, N είναι δυο R-μόδιοι και ότι $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ είναι τυχών προβολικός κερματισμός τού M. Ως n**-οστό γινόμενο στρέψεως των** M **και** N ορίζεται ο R-μόδιος

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(M,N) := H_n(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

(Ο ορισμός αυτός είναι εφικτός λόγω τής προτάσεως D.1.3, ενώ το $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$ είναι *μέχρις ισομορφισμού ανεξάρτητο* τής συγκεκριμένης επιλογής τού προβολικού κερματισμού $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τού M λόγω τού λήμματος D.3.3. Επιπροσθέτως, $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \{0\}$ για κάθε $n < 0$.)

D.3.5 Λήμμα. *Για οιουσδήποτε R-μοδίους M, N ισχύει:*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_0^R(M,N) \cong M \otimes_R N.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $\mathbf{P}_\bullet = (P_n, d_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, τυχών προβολικός κερματισμός τού M. Μέσω τής ακριβούς ακολουθίας $P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$ επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$P_1 \otimes_R N \xrightarrow{d_1 \overline{\otimes} \mathrm{id}_N} P_0 \otimes_R N \xrightarrow{\varepsilon \overline{\otimes} \mathrm{id}_N} M \otimes_R N \longrightarrow \{0\}$$

(Βλ. θεώρημα C.5.9.) Κατά το (ii) τής προτάσεως B.1.4,

$$\mathrm{Coker}(d_1 \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) := P_0 \otimes_R N / \mathrm{Im}(d_1 \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) \cong M \otimes_R N.$$

Από την άλλη μεριά,

$$\mathrm{Tor}_0^R(M,N) = H_0(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N) = \mathrm{Ker}(d_0 \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N)/\,\mathrm{Im}(d_1 \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) = P_0 \otimes_R N/\,\mathrm{Im}(d_1 \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N),$$

οπότε πράγματι $\mathrm{Tor}_0^R(M,N) \cong M \otimes_R N$. □

D.3.6 Ορισμός. Δοθέντων R-μοδίων M, M', N, N', ομομορφισμών

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M'),\ \ \psi \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$$

και προβολικών κερματισμών $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$ των M και M', αντιστοίχως, υπάρχει (βάσει τού (i) τού θεωρήματος D.1.4) αλυσωτός μετασχηματισμός $f_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet$ που «επεκτείνει» τον φ, ήτοι ισχύει $\varphi \circ \varepsilon = \varepsilon' \circ f_0$. Μέσω τού $f_\bullet$ κατασκευάζεται ο αλυσωτός μετασχηματισμός $f_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N : \mathbf{P}_\bullet \otimes_R N \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \otimes_R N$. Ως n**-οστό γινόμενο στρέψεως (υπεράνω τού** R**) των** φ **και** ψ ορίζεται ο ομομορφισμός

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(\varphi,\psi) := H_n(f_\bullet \overline{\otimes}\, \psi) : \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R(M',N'),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

D.3.7 Πρόταση. *Εάν οι M, M', M'', N, N', N'' είναι έξι R-μόδιοι και*

$$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M'), \qquad \varphi' \in \mathrm{Hom}_R(M', M''),$$
$$\psi \in \mathrm{Hom}_R(N, N'), \qquad \psi' \in \mathrm{Hom}_R(N', N''),$$

τότε

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi) = \mathrm{Tor}_n^R(\varphi', \psi') \circ \mathrm{Tor}_n^R(\varphi, \psi),\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από τις προτάσεις C.5.5 και B.2.6. □

D.3.8 Πρόταση. *Για οιουσδήποτε R-μοδίους M, N ισχύει:*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N) \cong \mathrm{id}_{\mathrm{Tor}_n^R(M,N)},\ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από τις προτάσεις C.5.4 και B.2.7. □

D.3.9 Θεώρημα. (Πρώτη μακρά ακριβής Tor-ακολουθία) *Έστω*

$$\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και έστω M τυχών R-μόδιος. Τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & \mathrm{Tor}_n^R(M,N') \arrow[r, "\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{id}_M, f)"] & \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{id}_M, g)"] & \mathrm{Tor}_n^R(M,N'') \arrow[r, "\partial_n"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_2"] & \mathrm{Tor}_1^R(M,N') \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{id}_M, f)"] & \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{id}_M, g)"] & \mathrm{Tor}_1^R(M,N'') \arrow[dll, "\partial_1"] & \\
& M \otimes_R N' \arrow[r, "\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f"] & M \otimes_R N \arrow[r, "\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g"] & M \otimes_R N'' \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τυχών προβολικός κερματισμός τού M. Επειδή (κατά το θεώρημα C.5.25) ο P_n είναι ισόπεδος για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, η πρόταση C.5.19 μας πληροφορεί ότι οι βραχείες ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow P_n \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_{P_n} \overline{\otimes} f} P_n \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_{P_n} \overline{\otimes} g} P_n \otimes_R N'' \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβείς για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τούτο όμως σημαίνει η

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet} \overline{\otimes} f} \mathbf{P}_\bullet \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbf{P}_\bullet} \overline{\otimes} g} \mathbf{P}_\bullet \otimes_R N'' \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet \tag{D.16}$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. Η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία δεν είναι τίποτα άλλο παρά η *μακρά ακριβής ακολουθία ομολογίας για την* (D.16). (Βλ. θεώρημα B.2.12.) □

D.3.10 Θεώρημα. (Δεύτερη μακρά ακριβής Tor-ακολουθία) *Έστω*

$$\{0\} \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow \{0\}$$

μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και έστω N τυχών R-μόδιος. Τότε υφίσταται μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \xrightarrow{\widetilde{\partial}_{n+1}} \mathrm{Tor}_n^R(M',N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^R(f,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_n^R(g,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Tor}_n^R(M'',N) \xrightarrow{\widetilde{\partial}_n} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\widetilde{\partial}_2} \mathrm{Tor}_1^R(M',N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^R(f,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Tor}_1^R(g,\mathrm{id}_N)} \mathrm{Tor}_1^R(M'',N) \xrightarrow{\widetilde{\partial}_1}$$

$$\longrightarrow M' \otimes_R N \xrightarrow{f\overline{\otimes}\mathrm{id}_N} M \otimes_R N \xrightarrow{g\overline{\otimes}\mathrm{id}_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow \{0\}$$

Αποδειξη. Εάν $(\mathbf{P}'_\bullet, \varepsilon')$, $(\mathbf{P}''_\bullet, \varepsilon'')$ είναι προβολικοί κερματισμοί των M' και M'', αντιστοίχως, τότε (σύμφωνα με «λήμμα τού πετάλου» D.1.6) υπάρχουν ένας προβολικός κερματισμός $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τού M και αλυσωτοί μετασχηματισμοί $\iota_\bullet : \mathbf{P}'_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}_\bullet$ και $\pi_\bullet : \mathbf{P}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}''_\bullet$, ούτως ώστε η $\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \overset{\iota_\bullet}{\hookrightarrow} \mathbf{P}_\bullet \overset{\pi_\bullet}{\twoheadrightarrow} \mathbf{P}''_\bullet \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$ να είναι βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων («επεκτείνουσα» τους f και g) και μάλιστα έχουσα τις επιμέρους βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow P'_n \xrightarrow{\iota_n} P_n \xrightarrow{\pi_n} P''_n \longrightarrow \{0\}$$

διασπώμενες για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Κατά το θεώρημα C.5.15 οι βραχείες ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow P'_n \otimes_R N \xrightarrow{\iota_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_N} P_n \otimes_R N \xrightarrow{\pi_n\overline{\otimes}\mathrm{id}_N} P''_n \otimes_R N \longrightarrow \{0\}$$

είναι ωσαύτως ακριβείς και διασπώμενες για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Ιδιαιτέρως, τούτο σημαίνει ότι η

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{P}'_\bullet \otimes_R N \xrightarrow{\iota_\bullet\overline{\otimes}\mathrm{id}_N} \mathbf{P}_\bullet \otimes_R N \xrightarrow{\pi_\bullet\overline{\otimes}\mathrm{id}_N} \mathbf{P}''_\bullet \otimes_R N \longrightarrow \{0\} \tag{D.17}$$

είναι μια βραχεία ακριβής ακολουθία αλυσωτών συμπλόκων. Η ανωτέρω μακρά ακριβής ακολουθία δεν είναι τίποτα άλλο παρά η *μακρά ακριβής ακολουθία ομολογίας για την* (D.17). (Βλ. θεώρημα B.2.12.) □

D.3.11 Λήμμα. *Έστω ότι M, N είναι δυο R-μόδιοι. Εάν είτε ο M είναι προβολικός είτε ο N ισόπεδος, τότε*

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \begin{cases} M \otimes_R N, & \text{όταν } n = 0, \\ \{0\}, & \text{όταν } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $n=0$ ο ισχυρισμός είναι αληθής (χωρίς περαιτέρω περιοριστικές συνθήκες επί των M και N). Βλ. λήμμα D.3.5.

Περίπτωση πρώτη. Εάν ο M είναι προβολικός R-μόδιος, τότε το ζεύγος $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$, $\mathbf{P}_\bullet = (P_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, με

$$P_n := \begin{cases} M, & \text{όταν } \ n=0, \\ \{0_M\}, & \text{όταν } \ n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}, \end{cases} \quad d_n := 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \ \text{ και } \varepsilon := \mathrm{id}_M$$

είναι προβολικός κερματισμός τού M, οπότε $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$.

Περίπτωση δεύτερη. Εάν ο N είναι ισόπεδος και $(\mathbf{P}_\bullet, \varepsilon)$ τυχών προβολικός κερματισμός τού M, τότε μέσω τής ακριβούς ακολουθίας

$$\cdots \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow P_2 \otimes_R N \xrightarrow{d_2 \overline{\otimes} \mathrm{id}_N} P_1 \otimes_R N \xrightarrow{d_1 \overline{\otimes} \mathrm{id}_N} P_0 \otimes_R N \xrightarrow{\varepsilon \overline{\otimes} \mathrm{id}_N} M \otimes_R N \longrightarrow \{0\}.$$

(Πρβλ. θεωρήματα C.5.9 και C.5.15.) Εξ αυτής έπεται ότι

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong H_n(\mathbf{P}_\bullet \otimes_R N) \cong \{0\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$. □

D.3.12 Θεώρημα. (Μεταθετικότητα τού γινομένου στρέψεως) *Εάν οι M, N είναι R-μόδιοι, τότε υφίσταται κανονιστικός ισομορφισμός*[13]

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N,M), \ \forall n \in \mathbb{Z}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο ισχυρισμός είναι αληθής τόσον όταν $n<0$ (προδήλως) όσον και όταν $n=0$ (εάν κανείς λάβει υπ' όψιν το θεώρημα C.4.1 και το λήμμα D.3.5). Ας υποθέσουμε, από εδώ και στο εξής, ότι $n \geq 1$. Κατά το πόρισμα A.6.23, $M \cong F/L$, όπου F είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος. Επομένως υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow L \overset{\iota}{\hookrightarrow} F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M \longrightarrow \{0\}, \tag{D.18}$$

όπου ι η συνήθης ένθεση και π η σύνθεση τού φυσικού επιμορφισμού $F \twoheadrightarrow F/L$ και ενός ισομορφισμού $F/L \xrightarrow{\cong} M$. Θα χρησιμοποιηθούν οι δύο μακρές ακριβείς ακολουθίες που επάγονται μέσω τής (D.18) (οι κατασκευασθείσες στα θεωρήματα D.3.9 και D.3.10) και μαθηματική επαγωγή ως προς τον n.

[13]Εν αντιθέσει προς το γινόμενο στρέψεως, το γινόμενο επεκτάσεως δεν είναι μεταθετικό, διότι, π.χ., υπάρχουν R-μόδιοι M, N, με τους $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ και $\mathrm{Hom}_R(N,M)$ μη ισόμορφους. (Βλ. C.1.3 (ii) και (iii).)

• Εάν $n = 1$, τότε προκύπτει το εξής διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^R(F,N) \cong \{0\} \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(\pi, \mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_1"] & L \otimes_R N \arrow[r, "\iota \overline{\otimes} \mathrm{id}_N"] \arrow[d, "f"', "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & F \otimes_R N \arrow[d, "\cong"', "f'"] \\
\mathrm{Tor}_1^R(N,F) \cong \{0\} \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{id}_N, \pi)"] & \mathrm{Tor}_1^R(N,M) \arrow[r, "\partial_1"] & N \otimes_R L \arrow[r, "\mathrm{id}_N \overline{\otimes} \iota"] & N \otimes_R F
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές, όπου ως f, f' συμβολίζονται οι κανονιστικοί ισομορφισμοί τού θεωρήματος C.4.1. Τα πρώτα εξ αριστερών εμφανιζόμενα γινόμενα στρέψεως είναι τετριμμένοι R-μόδιοι, καθώς ο F (ως ελεύθερος) είναι τόσον προβολικός όσον και ισόπεδος. (Βλ. λήμμα D.3.11). Ως εκ τούτου, οι συνδετικοί ομομορφισμοί $\partial_1, \widetilde{\partial}_1$ είναι μονομορφισμοί και

$$\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \mathrm{Ker}(\iota \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_N) = \mathrm{Ker}(f'^{-1} \circ (\mathrm{id}_N \overline{\otimes} \iota) \circ f) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_N \overline{\otimes} \iota)) \cong \mathrm{Tor}_1^R(N,M).$$

• Εάν $n \geq 2$, υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός είναι αληθής για τον $n-1$. Από την 1η και τη 2η μακρά ακριβή Tor-ακολουθία προκύπτει το εξής διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_n^R(F,N) \cong \{0\} \arrow[r, "\mathrm{Tor}_n^R(\pi, \mathrm{id}_N)"] & \mathrm{Tor}_n^R(M,N) \arrow[r, "\widetilde{\partial}_n"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(L,N) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_{n-1}^R(\iota, \mathrm{id}_N)"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(F,N) \arrow[d, "\cong"'] \\
\mathrm{Tor}_n^R(N,F) \cong \{0\} \arrow[r, "\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{id}_N, \pi)"] & \mathrm{Tor}_n^R(N,M) \arrow[r, "\partial_n"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N,L) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_{n-1}^R(\mathrm{id}_N, \iota)"] & \mathrm{Tor}_{n-1}^R(N,F)
\end{tikzcd}$$

με ακριβείς γραμμές. Άρα $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_n^R(N,M)$ (για τον ίδιο λόγο, με τους ισομορφισμούς οφειλόμενους στην επαγωγική μας υπόθεση). $\square$

D.3.13 Πόρισμα. *Έστω ότι M, N είναι δυο R-μόδιοι. Εάν ένας (τουλάχιστον) εκ των M, N είναι ισόπεδος, τότε*

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \begin{cases} M \otimes_R N, & \text{όταν} \;\; n = 0, \\ \{0\}, & \text{όταν} \;\; n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}. \end{cases}$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το λήμμα D.3.11 και το θεώρημα D.3.12. $\square$

D.3.14 Πόρισμα. *Για έναν R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) *Ο M είναι ισόπεδος.*

(ii) $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο N.*

(iii) $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο N και για κάθε $n \geq 1$.*

Απόδειξη. Οι συνεπαγωγές (i)⇒(ii), (i)⇒(iii) έπονται από το πόρισμα D.3.13, ενώ η (iii)⇒(ii) είναι προφανής. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί η ισχύς τής συνεπαγωγής (ii)⇒(i). Έστω $\{0\} \longrightarrow N' \stackrel{f}{\longrightarrow} N \stackrel{g}{\longrightarrow} N'' \longrightarrow \{0\}$ μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων. Κατά το θεώρημα D.3.9 η

$$\mathrm{Tor}_1^R(M,N'') \xrightarrow{\partial_1} M\otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f} M\otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M\overline{\otimes}g} M\otimes_R N'' \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής. Επειδή (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Tor}_1^R(M,N'')\cong\{0\}$, λαμβάνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\}\longrightarrow M\otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f} M\otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M\overline{\otimes}g} M\otimes_R N'' \longrightarrow \{0\}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι ο M είναι ισόπεδος. (Βλ. πρόταση C.5.17.) □

D.3.15 Πόρισμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και οι M,N δυο R-μόδιοι, τότε*

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N)\cong\begin{cases} M\otimes_R N, & \text{όταν } n=0,\\ \mathrm{Ker}(f\overline{\otimes}\mathrm{id}_N), & \text{όταν } n=1,\\ \{0\}, & \text{όταν } n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1\},\end{cases}$$

όπου $f:L\hookrightarrow F$ είναι ένας μονομορφισμός R-μοδίων εμφανιζόμενος σε μια βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\}\longrightarrow L\overset{f}{\hookrightarrow}F\overset{g}{\twoheadrightarrow}M\longrightarrow\{0\}, \tag{D.19}$$

με τον F ελεύθερο.

Απόδειξη. Για $n=0$ βλ. λήμμα D.3.5. Όπως έχει ήδη προαναφερθεί στο (ii) τού εδ. D.1.2, υπάρχει πάντοτε μια βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής (D.19), όπου ο F (και, κατ' επέκταση, και ο L) είναι ελεύθερος R-μόδιος. Κατά συνέπειαν, το ζεύγος $(\mathbf{P}_\bullet,\varepsilon)$, $\mathbf{P}_\bullet=(P_n,d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, με

$$P_n:=\begin{cases} F, & \text{όταν } n=0,\\ L, & \text{όταν } n=1,\\ \{0_M\} & \text{όταν } n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0,1\}\end{cases}\qquad d_n:=\begin{cases} f, & \text{όταν } n=1,\\ 0, & \text{όταν } n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{1\},\end{cases}$$

και $\varepsilon:=g$ αποτελεί έναν προβολικό κερματισμό τού M, οπότε για κάθε $n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$ έχουμε

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,N)\cong H_n(\mathbf{P}_\bullet\otimes_R N)\cong\begin{cases}\mathrm{Ker}(f\overline{\otimes}\mathrm{id}_N), & \text{όταν } n=1,\\ \{0\}, & \text{όταν } n\neq 1,\end{cases}$$

(διότι $\mathrm{Im}(d_2\overline{\otimes}\mathrm{id}_N)\cong\{0\}$) και ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

D.3.16 Πρόταση. *Εάν $(M_j)_{j\in J}$ είναι μια οικογένεια R-μοδίων και N τυχών R-μόδιος, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(\bigoplus_{j\in J}M_j,N)\cong\bigoplus_{j\in J}\mathrm{Tor}_n^R(M_j,N),\ \forall n\in\mathbb{Z}}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(N,\bigoplus_{j\in J}M_j)\cong\bigoplus_{j\in J}\mathrm{Tor}_n^R(N,M_j,),\ \forall n\in\mathbb{Z}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν το ζεύγος $(\mathbf{P}_{\bullet,j}, \varepsilon_j)$ είναι τυχών προβολικός κερματισμός τού M_j για κάθε $j \in J$, τότε το $(\bigoplus_{j\in J} \mathbf{P}_{\bullet,j}, \bigoplus_{j\in J} \varepsilon_j)$ αποτελεί προβολικό κερματισμό τού ευθέος αθροίσματος $\bigoplus_{j\in J} M_j$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\mathrm{Tor}_n^R(\bigoplus_{j\in J} M_j, N) \cong H_n((\bigoplus_{j\in J} \mathbf{P}_{\bullet,j}) \otimes_R N) \underset{\text{B.2.9}}{\cong} \bigoplus_{j\in J} H_n(\mathbf{P}_{\bullet,j} \otimes_R N) \cong \bigoplus_{j\in J} \mathrm{Tor}_n^R(M_j, N).$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι αληθής βάσει τού θεωρήματος D.3.12. □

► **Χρήσιμοι υπολογισμοί όταν ο R είναι Π.Κ.Ι.** Όταν ο δακτύλιος αναφοράς μας είναι Π.Κ.Ι., τότε από το πόρισμα D.3.15 είναι γνωστό ότι τα μόνα ενδιαφέροντα (ήτοι τα μόνα πιθανώς μη τετριμμένα) γινόμενα επεκτάσεως $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$ είναι αυτά για τα οποία $n \in \{0,1\}$. Το γινόμενο επεκτάσεως $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)$ όταν οι M, N είναι μη τετριμμένοι, πεπερασμένως παραγόμενοι και μη ελεύθεροι, υπολογίζεται ως ακολούθως:

D.3.17 Θεώρημα. *Έστω R μια Π.Κ.Ι. Ας υποθέσουμε ότι M, N είναι δυο μη τετριμμένοι, πεπερασμένως παραγόμενοι, μη ελεύθεροι R-μόδιοι*[14]. *Εάν αυτοί γραφούν υπό τη μορφή* $M = \mathrm{tors}\,(M) \oplus \mathrm{frp}(M)$, $N = \mathrm{tors}\,(N) \oplus \mathrm{frp}(N)$, *όπου*

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{tors}\,(M) = \mathrm{tors}\,(M)\,(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{tors}\,(M)\,(p_t) \\ \mathrm{tors}\,(N) = \mathrm{tors}\,(N)\,(q_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{tors}\,(M)\,(q_{t'}) \end{array}\right\}$$

είναι οι ευθείες αποσυνθέσεις των υπομοδίων στρέψεώς τους στις πρωτεύουσες συνιστώσες τους και

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{tors}\,(M)\,(p_j) \cong \left(R/\left\langle p^{\ell_{j,1}}\right\rangle\right) \oplus \left(R/\left\langle p^{\ell_{j,1}}\right\rangle\right) \oplus \cdots \oplus \left(R/\left\langle p^{\ell_{j,k_j}}\right\rangle\right) \\ \mathrm{tors}\,(N)\,(q_i) \cong \left(R/\left\langle q^{m_{i,1}}\right\rangle\right) \oplus \left(R/\left\langle q^{m_{i,2}}\right\rangle\right) \oplus \cdots \oplus \left(R/\left\langle q^{m_{i,\kappa_i}}\right\rangle\right) \end{array}\right\}$$

οι (μέχρις ισομορφισμού μονοσημάντως ορισμένες) αποσυνθέσεις αυτών σε ευθέα αθροίσματα κυκλικών υπομοδίων με

$$1 \leq \ell_{j,1} \leq \cdots \leq \ell_{j,k_j} \ \ \textit{και} \ \ 1 \leq m_{i,1} \leq \cdots \leq m_{i,\kappa_i}$$

για κάθε $(j,i) \in \{1,...,t\} \times \{1,...,t'\}$ (όπως στο δομικό θεώρημα A.7.30), *τότε*

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(M), \mathrm{tors}(N)) \\ \cong \bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{i=1}^{t'} \bigoplus_{\varrho=1}^{k_j} \bigoplus_{\xi=1}^{\kappa_i} \mathrm{Tor}_1^R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\left\langle q^{m_{i,\xi}}\right\rangle), \end{array}} \tag{D.20}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Tor}_1^R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\left\langle q^{m_{i,\xi}}\right\rangle) \cong R/\left\langle \mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}\right\rangle,} \tag{D.21}$$

[14] Εάν υποθέταμε ότι *τουλάχιστον ένας* εκ των M, N είναι *ελεύθερος*, τότε το $\mathrm{Tor}_1^R(M,N)$ θα ήταν προφανώς *τετριμμένος* R-μόδιος.

όπου [15] $\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)} \in \mathrm{MK}\Delta_R(p^{\ell_{j,\varrho}}, q^{m_{i,\xi}})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με την πρόταση D.3.16,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{frp}(M),\mathrm{frp}(N)) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{frp}(M),\mathrm{tors}(N))\\ \oplus \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{frp}(N)) \oplus \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{tors}(N)).\end{aligned}$$

Επειδή (κατά το πόρισμα D.3.13) οι τρεις πρώτοι ευθείς προσθετέοι είναι τετριμμένοι, λαμβάνουμε τον πρώτον εκ των ισομορφισμών (D.20). Ο δεύτερος προκύπτει απευθείας από την πρόταση D.3.16. Έστω τώρα $\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)} \in \mathrm{MK}\Delta_R(p^{\ell_{j,\varrho}}, q^{m_{i,\xi}})$. Γράφουμε $p^{\ell_{j,\varrho}} = r_{(j,\varrho)}\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}$ και $q^{m_{i,\xi}} = s_{(i,\xi)}\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}$ για κατάλληλα (σχετικώς πρώτα) στοιχεία $r_{(j,\varrho)}, s_{(i,\xi)} \in R\setminus\{0_R\}$ και θεωρούμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία $\{0\} \longrightarrow R \overset{p^{\ell_{j,\varrho}}\mathrm{id}_R}{\hookrightarrow} R \overset{\pi^R_{<p^{\ell_{j,\varrho}}>}}{\twoheadrightarrow} R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle \longrightarrow \{0\}$. Το πόρισμα D.3.15 μας πληροφορεί ότι $\mathrm{Tor}_1^R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle) \cong \mathrm{Ker}((p^{\ell_{j,\varrho}}\mathrm{id}_R)\overline{\otimes}\,\mathrm{id}_{R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle})$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ισομορφισμό $f_{(i,\xi)} : R\otimes_R R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle \overset{\cong}{\longrightarrow} R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle$ (τον κατασκευασθέντα στο θεώρημα C.4.3) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/\left\langle p^{\ell_{j,\varrho}}\right\rangle, R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle) \cong \mathrm{Ker}(\theta_{(i,\xi)}),$$

όπου $\theta_{(i,\xi)} := f_{(i,\xi)} \circ ((p^{\ell_{j,\varrho}}\mathrm{id}_R)\overline{\otimes}\,\mathrm{id}_{R/\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle}) \circ f^{-1}_{(i,\xi)}$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ker}(\theta_{(i,\xi)}) = \left\{\, a+\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle \mid a\in R \text{ και } p^{\ell_{j,\varrho}}(a+\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle)\in\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle\right\}\\
&= \left\{\, a+\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle \mid a\in R \text{ και } p^{\ell_{j,\varrho}}a\in\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle\right\} = \left\{\, a+\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle \mid a\in R \text{ και } q^{m_{i,\xi}} \mid p^{\ell_{j,\varrho}}a\right\}\\
&= \left\{\, a+\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle \mid a\in R \text{ και } s_{(i,\xi)} \mid r_{(j,\varrho)}a\right\} = \left\{\, a+\langle q^{m_{i,\xi}}\rangle \mid a\in R \text{ και } s_{(i,\xi)} \mid a\right\}\\
&= \left\langle s_{(i,\xi)}\right\rangle / \langle q^{m_{i,\xi}}\rangle = Rs_{(i,\xi)}/Rq^{m_{i,\xi}} \underset{\text{A.7.25}}{\cong} R\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)} = \left\langle \mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}\right\rangle,\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται και η ύπαρξη ισομορφισμού (D.21). □

D.3.18 Σημείωση. Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., τότε, όπως θα διαπιστώσουμε στο θεώρημα D.3.26, ένας ισομορφισμός $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(M),\mathrm{tors}(N))$ εξακολουθεί να υφίσταται και *για τυχόντες* R-μοδίους M και N.

D.3.19 Πόρισμα. *Έστω ότι οι G, H είναι μη τετριμμένες, πεπερασμένως παραγόμενες, μη ελεύθερες αβελιανές ομάδες. Γράφοντας τις τάξεις των υποομάδων στρέψεώς τους υπό τη μορφή*

$$|\mathrm{tors}\,(G)| = p_1^{n_1}p_2^{n_2}\,\cdots\,p_t^{n_t},\ \ |\mathrm{tors}\,(H)| = p_1^{n_1'}p_2^{n_2'}\,\cdots\,p_t^{n_t'},$$

[15] Εάν $p \underset{\text{συν.}}{\not\sim} q$, τότε το γινόμενο στρέψεως (D.21) είναι τετριμμένο. Εάν $p \underset{\text{συν.}}{\sim} q$, τότε ως $\mathfrak{d}_{(j,\varrho;i,\xi)}$ μπορεί να ληφθεί το στοιχείο $p^{\min\left\{\ell_{j,\varrho},m_{i,\xi}\right\}}$. (Βλ. [87], θεώρημα 5.6.13.)

για κάποιους πρώτους αριθμούς $p_1,\ldots,p_t$, $t\in\mathbb{N}$, *με* $p_1<\cdots<p_t$ *(όταν* $t\geq 2$*), όπου* $n_1,\ldots,n_t\in\mathbb{N}_0$ *(και αντιστοίχως,* $n'_1,\ldots,n'_t\in\mathbb{N}_0$*) με τουλάχιστον έναν εξ αυτών* $\neq 0$, *λαμβάνουμε*

$$\mathrm{tors}\,(G)=\bigoplus_{\{j\in\{1,\ldots,t\}:n_j\neq 0\}} G\,(p_j)\,,\ \mathrm{tors}\,(H)=\bigoplus_{\{i\in\{1,\ldots,t\}:n'_i\neq 0\}} H\,(p_i)$$

και (για αυτούς τους δείκτες j,i*)*

$$G\,(p_j)\cong\mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,1}}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_j^{\ell_{j,k_j}}}\,,\ H\,(p_i)\cong\mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,1}}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p_i^{m_{i,\kappa_i}}}\,,$$

όπου $(\ell_{j,1},\ldots,\ell_{j,k_j})\in\Pi_{k_j}(n_j)$ *και* $(m_{i,1},\ldots,m_{i,\kappa_i})\in\Pi_{\kappa_i}(n'_i)$ (όπως στο θεώρημα A.7.32)*, οπότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_1^R(G,H)\cong\bigoplus_{\{j\in\{1,\ldots,t\}:n_j\neq 0\}}\ \bigoplus_{\{i\in\{1,\ldots,t\}:n'_i\neq 0\}}\ \bigoplus_{\varrho=1}^{k_j}\bigoplus_{\xi=1}^{\kappa_i}\mathbb{Z}_{p^{\min\{\ell_{j,\varrho},m_{i,\xi}\}}}\,.}$$

Περαιτέρω «κριτήρια ισοπεδότητας». Πέραν τού θεωρήματος C.5.30, δίδονται και άλλα τρία *επιπρόσθετα κριτήρια* για το πότε ένας R-μόδιος είναι *ισόπεδος*. (Βλέπε θεωρήματα D.3.22, D.3.23 και D.3.25.)

D.3.20 Ορισμός. Έστω M ένας R-μόδιος. Η αβελιανή ομάδα

$$\boxed{M^{\text{Pontr.}}:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$$

καθίσταται R-μόδιος μέσω τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού

$$R\times M^{\text{Pontr.}}\longrightarrow M^{\text{Pontr.}},\ (r,f)\longmapsto(x\longmapsto f(rx)),$$

και καλείται **κατά Pontrjagin δυϊκός τού** M (ή **μόδιος χαρακτήρων τού** M).

D.3.21 Λήμμα. *Εάν* $f:M\longrightarrow N$ *είναι ένας ομομορφισμός* R*-μοδίων, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο* f *είναι μονομορφισμός.*

(ii) *Ο* $f^{\text{Pontr.}}:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(f,\mathrm{id}_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}):N^{\text{Pontr.}}\longrightarrow M^{\text{Pontr.}}$ *είναι επιμορφισμός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από την ακρίβεια τής $\{0\}\longrightarrow\mathrm{Ker}(f)\overset{\iota}{\hookrightarrow}M\overset{f}{\longrightarrow}N$ έπεται η ακρίβεια τής $N^{\text{Pontr.}}\overset{f^{\text{Pontr.}}}{\longrightarrow}M^{\text{Pontr.}}\overset{\iota^{\text{Pontr.}}}{\longrightarrow}\mathrm{Ker}(f)^{\text{Pontr.}}\to\{0\}$. (Βλ. C.1.14.) Επειδή (βάσει τού (ii) τής προτάσεως B.1.4) $\mathrm{Ker}(f)^{\text{Pontr.}}\cong\mathrm{Coker}(f^{\text{Pontr.}}):=M^{\text{Pontr.}}/\,\mathrm{Im}(f^{\text{Pontr.}})$, για την απόδειξη τής ισοδυναμίας των (i) και (ii) αρκεί να δειχθεί η αμφίπλευρη συνεπαγωγή: $\mathrm{Ker}(f)=\{0_M\}\Longleftrightarrow\mathrm{Ker}(f)^{\text{Pontr.}}=\{0_{M^{\text{Pontr.}}}\}$. Η συνεπαγωγή "$\Rightarrow$" είναι προφανής. Για την απόδειξη τής "$\Leftarrow$" υποθέτουμε ότι ο $\mathrm{Ker}(f)$ δεν είναι τετριμμένος. Τότε αυτός περιέχει κάποιο μη μηδενικό στοιχείο x. Έστω G η κυκλική ομάδα η παραγόμενη από το x. Τότε ορίζεται ένας *μη μηδενικός* ομομορφισμός ομάδων $g : G \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ως εξής:

$$G \ni y \longmapsto g(y) := \begin{cases} \left\{ \begin{array}{c} \text{οιοδήποτε μη μηδενικό} \\ \text{στοιχείο τής } \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array} \right\}, & \text{εάν η } G \text{ είναι άπειρη,} \\ \frac{1}{\mathrm{ord}(x)} + \mathbb{Z}, & \text{εάν η } G \text{ είναι πεπερασμένη.} \end{cases}$$

Επειδή η ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι ένας εμβολικός $\mathbb{Z}$-μόδιος, η g μπορεί (σύμφωνα με το κριτήριο τού Baer C.2.24) να επεκταθεί σε έναν (προφανώς μη μηδενικό) ομομορφισμό $\tilde{g} : \mathrm{Ker}(f) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Άρα ο $\mathrm{Ker}(f)^{\text{Pontr.}}$ δεν είναι τετριμμένος. □

D.3.22 Θεώρημα. *Για οιονδήποτε R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο M είναι ισόπεδος.*

(ii) *Ο $M^{\text{Pontr.}}$ είναι εμβολικός.*

Απόδειξη. Έστω $f : N' \longrightarrow N$ ένας μονομορφισμός R-μοδίων. Βάσει των προαναφερθέντων στη σημείωση C.5.33 κατασκευάζεται το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_R(N, M^{\text{Pontr.}}) \arrow[rr, "\mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{id}_{M^{\text{Pontr.}}})"] \arrow[d, "\cong"'] & & \mathrm{Hom}_R(N', M^{\text{Pontr.}}) \arrow[d, "\cong"] \\ (N \otimes_R M)^{\text{Pontr.}} \arrow[rr, "(f \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)^{\text{Pontr.}}"'] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & (N' \otimes_R M)^{\text{Pontr.}} \end{tikzcd}$$

(με τα κατακόρυφα βέλη του ισομορφισμούς). Επειδή ο $M^{\text{Pontr.}}$ είναι εμβολικός

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Ο } \mathrm{Hom}_R(f,\ \mathrm{id}_{M^{\text{Pontr.}}}) \text{ είναι επιμορφισμός} \\ \text{για κάθε μονομορφισμό } f : N' \longrightarrow N \end{array} \right] \quad \text{(βλ. πρόταση C.2.16)}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Ο } (f \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)^{\text{Pontr.}} \text{ είναι επιμορφισμός} \\ \text{για κάθε μονομορφισμό } f : N' \longrightarrow N \end{array} \right] \quad \text{(βλ. ανωτέρω διάγραμμα)}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{Ο } f \overline{\otimes} \mathrm{id}_M \text{ είναι μονομορφισμός} \\ \text{για κάθε μονομορφισμό } f : N' \longrightarrow N \end{array} \right] \quad \text{(βλ. λήμμα D.3.21)}$$

$$\Longleftrightarrow [\text{Ο } M \text{ είναι ισόπεδος }] \quad \text{(βλ. πόρισμα C.5.20)}$$

ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

D.3.23 Θεώρημα. *Για οιονδήποτε R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο M είναι ισόπεδος.*

(ii) $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) \cong \{0\}$ *για κάθε πεπερασμένως παραγόμενο ιδεώδες I τού R.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το θεώρημα C.5.30,

$$[\text{ο } M \text{ είναι ισόπεδος}] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} I \otimes_R M \cong IM \text{ για κάθε πεπερασμένως} \\ \text{παραγόμενο ιδεώδες } I \text{ τού } R \end{array} \right].$$

Κάνοντας χρήση τής 2ης μακράς ακριβούς Tor-ακολουθίας τής επαγομένης μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας $\{0\} \longrightarrow I \overset{\iota}{\hookrightarrow} R \overset{\pi_I^R}{\twoheadrightarrow} R/I \longrightarrow \{0\}$ λαμβάνουμε

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_1^R(R,M) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(\pi_I^R, \mathrm{id}_M)"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Tor}_1^R(R/I,M) \arrow[d, "\widetilde{\partial}_1"] & M & M/IM \\
\{0\} & I \otimes_R M \arrow[r, "\iota \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] & R \otimes_R M \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\pi_I^R \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] & R/I \otimes_R M \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

όπου ο πρώτος ισομορφισμός έπεται από το λήμμα C.5.24 και το πόρισμα D.3.13, ο δεύτερος από το θεώρημα C.4.3 και ο τρίτος από το πόρισμα C.5.11. Κατά συνέπειαν, $\mathrm{Tor}_1^R(R/I,M) \cong \{0\} \Longleftrightarrow I \otimes_R M \cong \mathrm{Ker}(\pi_I^R \overline{\otimes}\ \mathrm{id}_M) \cong IM$, απ' όπου συνάγεται η ισοδυναμία των συνθηκών (i) και (ii). □

D.3.24 Λήμμα. *Εάν R είναι μια ακεραία περιοχή και M ένας R-μόδιος, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_1^R(R/\langle s\rangle, M) \cong M[s],\ \forall s \in R \smallsetminus \{0_R\},}$$

όπου $M[s] := \{x \in M \,|\, sx = 0_M\}$. (Βλ. A.7.12 (i).)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω τυχόν στοιχείο $s \in R \smallsetminus \{0_R\}$. Επειδή ο δακτύλιος αναφοράς R είναι εξ υποθέσεως ακεραία περιοχή, η $s\ \mathrm{id}_R : R \longrightarrow R,\ r \longmapsto sr$, είναι μονομορφισμός. Με τη βοήθεια αυτού δημιουργείται η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow R \overset{s\ \mathrm{id}_R}{\longrightarrow} R \overset{\pi^R_{<s>}}{\twoheadrightarrow} R/\langle s\rangle \longrightarrow \{0\}.$$

Το πόρισμα D.3.15 μας πληροφορεί ότι $\mathrm{Tor}_1^R(R/\langle s\rangle, M) \cong \mathrm{Ker}((s\ \mathrm{id}_R)\overline{\otimes}\ \mathrm{id}_M)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τον ισομορφισμό $f : R \otimes_R M \overset{\cong}{\longrightarrow} M$ (τον κατασκευασθέντα στο θεώρημα C.4.3) και θέτοντας $\theta := f \circ ((s\ \mathrm{id}_R)\overline{\otimes}\ \mathrm{id}_M) \circ f^{-1}$ συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{Tor}_1^R(R/\langle s\rangle, M) \cong \mathrm{Ker}(\theta)$. Προφανώς, $\mathrm{Ker}(\theta) = M[s]$. □

D.3.25 Θεώρημα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M ένας R-μόδιος, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο M είναι ισόπεδος.*

(ii) *Ο M στερείται στρέψεως.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή ο R είναι εξ υποθέσεως Π.Κ.Ι., κάθε ιδεώδες του είναι κύριο (και, ως εκ τούτου, πεπερασμένως παραγόμενο). Κατά το θεώρημα D.3.23,

$$[\text{ο } M \text{ είναι ισόπεδος}] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} \mathrm{Tor}_1^R(R/I,M) \cong \{0\} \\ \text{για κάθε ιδεώδες } I \text{ τού } R \end{array} \right].$$

Εάν I είναι τυχόν ιδεώδες τού R, τότε υπάρχει κάποιο $s \in R : I = \langle s \rangle$. Εάν $s = 0_R$, τότε

$$\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) = \mathrm{Tor}_1^R(R/\{0_R\}, M) \cong \mathrm{Tor}_1^R(R, M) \cong \{0\}$$

λόγω τού λήμματος C.5.24 και τού πορίσματος D.3.13. Εάν $s \neq 0_R$, τότε το λήμμα D.3.24 δίδει $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, M) = \mathrm{Tor}_1^R(R/\langle s \rangle, M) \cong M[s]$. Επομένως η ισοδυναμία των (i) και (ii) έπεται από την αμφίπλευρη συνεπαγωγή

$$\mathrm{tors}(M) = \{0_M\} \Longleftrightarrow (M[s] = \{0_M\},\ \forall s \in R \smallsetminus \{0_R\}).$$

Όμως αυτή έχει ήδη αποδειχθεί στην πρόταση A.7.14. □

► **Επιπρόσθετες επισημάνσεις**. Στο τέλος αυτής τής ενότητας παρατίθενται και κάποιες άλλες χαρακτηριστικές ιδιότητες τού γινομένου στρέψεως.

D.3.26 Θεώρημα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M, N τυχόντες R-μόδιοι, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_1^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(M, \mathrm{tors}(N))} \tag{D.22}$$

και

$$\boxed{\mathrm{Tor}_1^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(M), \mathrm{tors}(N)).} \tag{D.23}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατά το λήμμα A.7.5 ο πηλικομόδιος $N/\mathrm{tors}(N)$ στερείται στρέψεως. Κάνοντας χρήση τής 1ης μακράς ακριβούς Tor-ακολουθίας τής επαγομένης μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{tors}(N) \overset{\iota}{\hookrightarrow} N \overset{\pi^N_{\mathrm{tors}(N)}}{\twoheadrightarrow} N/\mathrm{tors}(N) \longrightarrow \{0\}$$

λαμβάνουμε

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Tor}_2^R(M, N/\mathrm{tors}(N)) \arrow[r, "\partial_2"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Tor}_1^R(M, \mathrm{tors}(N)) \arrow[r, "\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{id}_M, \iota)"] & \mathrm{Tor}_1^R(M, N) \arrow[d, "\mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{id}_M, \pi^N_{\mathrm{tors}(N)})"'] \\
\{0\} & & \{0\} \cong \mathrm{Tor}_1^R(M, N/\mathrm{tors}(N))
\end{tikzcd}$$

με τους ακραίους R-μοδίους τετριμμένους λόγω τού θεωρήματος D.3.25 και τού πορίσματος D.3.13. Κατ' αυτόν τον τρόπο αποκτούμε έναν ισομορφισμό (D.22). Στον (D.23) καταλήγουμε ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_1^R(M, N) \underset{(\mathrm{D.22})}{\cong} \mathrm{Tor}_1^R(M, \mathrm{tors}(N)) \underset{\mathrm{D.3.12}}{\cong} \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(N), M) \\
\cong \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(N), \mathrm{tors}(M)) \underset{\mathrm{D.3.12}}{\cong} \mathrm{Tor}_1^R(\mathrm{tors}(M), \mathrm{tors}(N)),
\end{aligned}$$

όπου ο τρίτος ισομορφισμός προκύπτει από τον (D.22) εφαρμοζόμενον για τους R-μοδίους $\mathrm{tors}(N)$ και M (στη θέση των M και N, αντιστοίχως). □

D.3.27 Πόρισμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι. και M ένας R-μόδιος, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*:

(i) *Ο M στερείται στρέψεως.*

(ii) $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) \cong \{0\}$ *για κάθε R-μόδιο N.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από το θεώρημα D.3.25 και το πόρισμα D.3.14. □

D.3.28 Σημείωση. (i) Από ιστορική σκοπιά, το πόρισμα D.3.27 (για $R=\mathbb{Z}$) έδωσε το έναυσμα για την εισαγωγή τού όρου (και συμβόλου) "Tor".

(ii) Αξίζει να επισημανθεί ότι η συνεπαγωγή (ii)⇒(i) στο πόρισμα D.3.27 ισχύει και για ακέραιες περιοχές R *που δεν είναι κατ' ανάγκην* Π.Κ.Ι.

D.3.29 Σημείωση. Παρατηρώντας κανείς προσεκτικά τον ορισμό D.3.4 είναι εύλογο να θέσει το ερώτημα τού κατά πόσον θα ήταν δυνατόν να ορισθεί ένα είδος n-οστού γινομένου στρέψεως R-μοδίων M και N τανύοντας έναν προβολικό κερματισμό $(\mathbf{P}_\bullet,\varepsilon)$ *τού N εξ αριστερών με το M*:

$$\boxed{\overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,N) := H_n(M\otimes_R \mathbf{P}_\bullet),\ \forall n\in\mathbb{Z}.}$$

Παρότι ο ορισμός αυτός *στέκει* (καθόσον είναι εύκολο να δειχθεί ότι *μέχρις ισομορφισμού* δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη επιλογή τού $(\mathbf{P}_\bullet,\varepsilon)$), *δεν οδηγεί* στη δημιουργία μιας *άλλης οντότητας*, όπως παρεμφαίνεται από το εξής:

D.3.30 Θεώρημα. *Εάν M,N είναι τυχόντες R-μόδιοι, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(M,N)\cong \overline{\mathrm{Tor}}_n^R(M,N),\ \forall n\in\mathbb{Z}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ., π.χ., Vermani [121], Theorem 6.2.1, σελ. 147-149, ή Rotman [103], Theorem 6.32, σελ. 355-356. □

D.3.31 Σημείωση. Στο πλαίσιο αυτών των παραδόσεων είναι (χρονικώς και τεχνικώς) αδύνατη η ενασχόλησή μας με τους πολυποίκιλους *συσχετισμούς των γινομένων επεκτάσεως και στρέψεως*. Γι' αυτόν τον λόγο οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες παροτρύνονται να ανατρέξουν σε *ειδική* βιβλιογραφία. Ας μας επιτραπεί, ωστόσο, στο σημείο αυτό η παράθεση ενός θεωρήματος αυτού τού είδους.

D.3.32 Θεώρημα. *Έστω ότι ο δακτύλιος αναφοράς μας R είναι ναιτεριανός. Εάν M είναι ένας πεπερασμένως παραγόμενος R-μόδιος, N τυχών R-μόδιος και L ένας εμβολικός R-μόδιος, τότε*

$$\boxed{\mathrm{Tor}_n^R(\mathrm{Hom}_R(N,L),M)\cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^n(M,N),L),\ \forall n\in\mathbb{Z}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. Rotman [103], 9.32, σελ. 555-556. □

D.4 ΘΕΩΡΗΜΑ ΚΑΘΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

Έστω $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων και έστω $H_n(\mathbf{C}_\bullet) := Z_n(\mathbf{C}_\bullet)/B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ ο n-οστός μόδιος ομολογίας τού $\mathbf{C}_\bullet$, όπου $Z_n(\mathbf{C}_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_n)$ και $B_n(\mathbf{C}_\bullet) := \mathrm{Im}(d_{n+1}), \forall n \in \mathbb{Z}$. (Βλ. εδ. B.2.2.)

D.4.1 Ορισμός. Έστω M *τυχών* R-μόδιος. Θεωρούμε το αλυσωτό σύμπλοκο

$$\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M := (C_n \otimes_R M, d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

(Βλ. εδ. D.3.1.) Ο n-οστός μόδιος ομολογίας

$$H_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M) := Z_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M)/B_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M)$$

τού $\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M$ καλείται, ιδιαιτέρως, **n-οστός μόδιος ομολογίας τού $\mathbf{C}_\bullet$ με τον M ως μόδιο συντελεστών** ή **n-οστός μόδιος ομολογίας τού $\mathbf{C}_\bullet$ με συντελεστές ειλημμένους από τον** M και συμβολίζεται ως εξής:

$$\boxed{H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) := H_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M).}$$

D.4.2 Σημείωση. Εάν συμβολίσουμε ως $\pi_n := \pi^{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)} : Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και

$$p_n := \pi^{Z_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M)}_{B_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M)} : Z_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M) \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$$

τους φυσικούς επιμορφισμούς και θεωρήσουμε τυχόντα στοιχεία $x \in H_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $y \in M$, τότε, για κάθε $z \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ με $\pi_n(z) = x$, έχουμε

$$(d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)(z \otimes y) = d_n(z) \otimes y = 0_{C_{n-1}} \otimes y = 0_{\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M} \Rightarrow z \otimes y \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Επιπροσθέτως, το στοιχείο $p_n(z \otimes y) \in H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$ *δεν εξαρτάται από την επιλογή τού* z (οπότε είναι πλήρως καθορισμένο από τα x και y). Πράγματι· εάν θεωρήσουμε ένα $z' \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ με $\pi_n(z') = x$, τότε

$$\begin{aligned}
&\pi_n(z) = \pi_n(z') \Rightarrow z - z' \in \mathrm{Ker}(\pi_n) = B_n(\mathbf{C}_\bullet) = \mathrm{Im}(d_{n+1}) \\
&\Rightarrow [\exists w \in C_{n+1} : z - z' = d_{n+1}(w)] \\
&\Rightarrow z \otimes y - z' \otimes y = (d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)(w \otimes y) \in B_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M) \\
&\Rightarrow p_n(z \otimes y) = p_n(z' \otimes y).
\end{aligned}$$

D.4.3 Λήμμα. *Η απεικόνιση $\psi_n : H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$ η οριζόμενη μέσω τού τύπου $x \otimes y \longmapsto p_n(z \otimes y)$, όπου $\pi_n(z) = x$, είναι ομομορφισμός R-μοδίων. Μάλιστα, εάν ο M είναι ισόπεδος, τότε η ψ_n είναι ισομορφισμός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι η (βάσει των προαναφερθέντων στο εδ. D.4.2, *καλώς ορισμένη* απεικόνιση) ψ_n είναι ομομορφισμός. Ας υποθέσουμε, από εδώ και στο εξής, ότι ο M είναι ισόπεδος. Εάν ως

$$\iota_n : B_n(\mathbf{C}_\bullet) \hookrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet), \;\; j_n : Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \hookrightarrow C_n$$

συμβολίσουμε τις συνήθεις ενθέσεις και ως $\check{d}_n$ τον επιμορφισμό που δημιουργείται από τον d_n ύστερα από περιορισμό τού πεδίου τιμών του επί τής εικόνας του, τότε προκύπτει το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} & \{0\} \arrow[d] & & \\
\{0\} \arrow[r] & B_n(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[u] \arrow[r, "\iota_n"] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "j_n"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet) \arrow[r] & \{0\} \\
 & C_{n+1} \arrow[u, "\check{d}_{n+1}"] \arrow[r, "d_{n+1}"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & C_n \arrow[d, "d_n"] & & \\
 & & C_{n-1} & &
\end{tikzcd}$$

με την κεντρική γραμμή και τις στήλες του ακριβείς. Τανύοντας εκ δεξιών με τον M λαμβάνουμε το μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & \{0\} & \{0\} \arrow[d] & & \\
\{0\} \arrow[r] & B_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[u] \arrow[r, "\iota_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, "\pi_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r] & \{0\} \\
 & C_{n+1} \otimes_R M \arrow[u, "\check{d}_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] \arrow[r, "d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & C_n \otimes_R M \arrow[d, "d_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] & & \\
 & & C_{n-1} \otimes_R M & &
\end{tikzcd}$$

Σύμφωνα με τα θεωρήματα C.5.8 και C.5.9 οι στήλες του είναι ακριβείς. Επιπροσθέτως, επειδή ο M είναι ισόπεδος, *και* η κεντρική του γραμμή είναι ακριβής. (Βλ. πρόταση C.5.19.) Κατά την πρόταση B.1.4 υπάρχει ισομορφισμός

$$f_n : H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{\cong} \mathrm{Coker}(\iota_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) := Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M / \mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M),$$

καθώς και ισομορφισμός $Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}(d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)$, μέσω τού οποίου επάγεται ισομορφισμός

$$h_n : Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M / \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}(d_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) / \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)$$

σε επίπεδο πηλικομοδίων. Εξάλλου, λόγω τής μεταθετικότητας τού ανωτέρω διαγράμματος έχουμε $(j_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)(\mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)) = \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)$. Εξ αυτού έπεται ότι υφίσταται ισομορφισμός g_n που συμπληρώνει το κάτωθι μεταθετικό διάγραμμα. (Βλ. θεώρημα A.4.10.)

$$\begin{tikzcd}
 & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, "\pi^{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R M}_{\mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)}"] \arrow[d, "(j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)\check{}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M/\mathrm{Im}(\iota_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \arrow[d, "\cong"', "g_n"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[l, "\cong"', "f_n"] \arrow[dd, "\psi_n"] \\
C_n \otimes_R M & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[l, hook'] \arrow[r, "\pi^{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R M}_{\mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)}"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M/\mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \arrow[d, "\cong"', "h_n"] & \\
 & \mathrm{Ker}(d_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \arrow[r, "\pi^{\mathrm{Ker}(d_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)}_{\mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)}"] & \mathrm{Ker}(d_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)/\mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \arrow[r, equal] & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)
\end{tikzcd}$$

Ο $\psi_n = h_n \circ g_n \circ f_n$ είναι όντως ισομορφισμός (ως σύνθεση ισομορφισμών). □

D.4.4 Θεώρημα. **(«Θεώρημα καθολικών συντελεστών για μοδίους ομολογίας»)** *Έστω* $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *ένα αλυσωτό σύμπλοκο* R*-μοδίων και ομομορφισμών* R*-μοδίων, και έστω* M *ένας* R*-μόδιος.*

(i) *Εάν* $\mathrm{Tor}_1^R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \cong \{0\} \cong \mathrm{Tor}_1^R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, *τότε για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$ *υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία* R*-μοδίων και ομομορφισμών* R*-μοδίων*

$$\boxed{\{0\} \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \xrightarrow{\psi_n} H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \xrightarrow{\varphi_n} \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \longrightarrow \{0\}.} \tag{D.24}$$

(ii) *Εάν, συν τοις άλλοις, ο* $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ *είναι προβολικός για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$*, τότε η* (D.24) *είναι διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ[16]. (i) Από τη 2η *μακρά* ακριβή Tor-ακολουθία την επαγομένη μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \overset{j_n}{\hookrightarrow} C_n \overset{\check{d}_n}{\twoheadrightarrow} B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \{0\} \tag{D.25}$$

(βλ. θεώρημα D.3.10) λαμβάνουμε τη *βραχεία* ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \overset{j_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M}{\longrightarrow} C_n \otimes_R M \overset{\check{d}_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M}{\longrightarrow} B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow \{0\}, \tag{D.26}$$

καθόσον $\mathrm{Tor}_1^R(B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \cong \{0\}$ και η $\check{d}_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M$ είναι επιμορφισμός. (Βλ. το (ii) τής προτάσεως C.5.6). Εν συνεχεία θεωρούμε τα υποσύμπλοκα

$$\mathbf{Z}_\bullet := (Z_n(\mathbf{C}_\bullet), d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)})_{n\in\mathbb{Z}} \;\text{ και }\; \mathbf{B}_\bullet := (B_n(\mathbf{C}_\bullet), d_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)})_{n\in\mathbb{Z}}$$

[16]Σε αυτήν θα διατηρηθούν οι συμβολισμοί οι εισαχθέντες στα εδάφια D.4.1, D.4.2 και D.4.3.

τού $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Σημειωτέον ότι

$$d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)} = 0 \;\; \text{και} \;\; d_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)} = 0, \; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

(Πράγματι· για κάθε στοιχείο $x \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ έχουμε $d_n(x) = 0_{C_{n-1}}$, ενώ για κάθε στοιχείο $y \in B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ υπάρχει $w \in C_{n+1}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $y = d_{n+1}(w)$, οπότε $d_n(y) = \underbrace{(d_n \circ d_{n+1})}_{=0}(w) = 0_{C_{n-1}}$.) Ως εκ τούτου,

$$H_n(\mathbf{Z}_\bullet) \cong Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \;\; \text{και} \;\; H_n(\mathbf{B}_\bullet) \cong B_n(\mathbf{C}_\bullet), \; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Κατ' αναλογίαν, για τα υποσύμπλοκα

$$\mathbf{Z}_\bullet \otimes_R M := (Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M, \underbrace{d_n|_{Z_n(\mathbf{C}_\bullet)} \overline{\otimes} \operatorname{id}_M}_{=0})_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$\text{και } \mathbf{B}_\bullet \otimes_R M := (B_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M, \underbrace{d_n|_{B_n(\mathbf{C}_\bullet)} \overline{\otimes} \operatorname{id}_M}_{=0})_{n\in\mathbb{Z}}$$

τού $\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M$ έχουμε $H_n(\mathbf{Z}_\bullet \otimes_R M) \cong Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$ και

$$H_n(\mathbf{B}_\bullet \otimes_R M) \cong B_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M, \; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Από την (D.26) δημιουργούμε (με τη βοήθεια των ανωτέρω μηδενικών συνοριακών τελεστών) μια βραχεία ακριβή ακολουθία *αλυσωτών συμπλόκων*:

$$\mathbf{0}_\bullet \longrightarrow \mathbf{Z}_\bullet \otimes_R M \overset{j_\bullet \overline{\otimes} \operatorname{id}_M}{\longrightarrow} \mathbf{C}_\bullet \otimes_R M \overset{\check{d}_\bullet \overline{\otimes} \operatorname{id}_M}{\longrightarrow} \mathbf{B}_{\bullet-1} \otimes_R M \longrightarrow \mathbf{0}_\bullet$$

και θεωρούμε την αντίστοιχη *μακρά ακριβή ακολουθία ομολογίας* για αυτήν:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(\mathbf{Z}_\bullet \otimes_R M) \arrow[r, "H_n(j_n \overline{\otimes} \operatorname{id}_M)"] \arrow[d, "\cong"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet \otimes_R M) \arrow[r, "H_n(\check{d}_n \overline{\otimes} \operatorname{id}_M)"] \arrow[d, equal] & H_n(\mathbf{B}_{\bullet-1} \otimes_R M) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\cong"] & H_{n-1}(\mathbf{Z}_\bullet \otimes_R M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
& Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) & B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M & Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M &
\end{tikzcd}$$

με τον δ_n ως συνδετικό ομομορφισμό. (Βλ. θεώρημα B.2.12.) Κατόπιν τούτου, παρατηρούμε ότι η 2η *μακρά* ακριβή Tor-ακολουθία η επαγομένη μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \overset{\iota_{n-1}}{\hookrightarrow} Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \overset{\pi_{n-1}}{\twoheadrightarrow} H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \{0\} \tag{D.27}$$

δίδει την

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \operatorname{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r, "\tilde{\partial}_1"] & B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, "\iota_{n-1} \overline{\otimes} \operatorname{id}_M"] & Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[dll, "\pi_{n-1} \overline{\otimes} \operatorname{id}_M"'] \\
& H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r] & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

διότι (εξ υποθέσεως) $\mathrm{Tor}_1^R(Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \cong \{0\}$. Τοποθετούμε τις ανωτέρω στη 2η και στην 3η στήλη τού *μεγάλου διαγράμματος*:

$$\begin{tikzcd}
 & & \vdots \arrow[d] & & \\
 & B_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\iota_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[d] & & \\
 & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, dashed, "\psi_n"] \arrow[d] & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \arrow[r, dashed, "\varphi_n"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\partial}_1"] & \{0\} \\
 & \{0\} & B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & B_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[d, "\iota_{n-1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] & \\
 & & Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[d, "\pi_{n-1} \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"] & \\
 & & \vdots & H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[d] & \\
 & & & \{0\} &
\end{tikzcd}$$

Η πρώτη στήλη αυτού είναι ωσαύτως ακριβής βάσει τού θεωρήματος C.5.9 και τής (D.27) (υποκαθιστώντας σε αυτήν τον $n-1$ με τον n).

Σύμφωνα με την πρόταση B.1.12 (με τους $\iota_n \overline{\otimes}\ \mathrm{id}_M$ και $\pi_n \overline{\otimes}\ \mathrm{id}_M$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων f' και f, αντιστοίχως) υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$ ο οποίος συμπληρώνει το διάγραμμα μεταθετικώς. Αυτός οφείλει να ισούται με τον ψ_n τον ορισθέντα στο λήμμα D.4.3 (καθόσον ο ψ_n πληροί την εν λόγω συνθήκη). Επίσης, σύμφωνα με την πρόταση B.1.10 (με τους $\tilde{\partial}_1$ και $\iota_{n-1} \overline{\otimes}\ \mathrm{id}_M$ στη θέση των εκεί παρατεθέντων g' και g, αντιστοίχως) υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$\varphi_n : H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M)$$

ο οποίος συμπληρώνει το διάγραμμα μεταθετικώς. Κατά το «λήμμα των τεσσάρων» B.1.6 (ii) (και αντιστοίχως, B.1.6 (i)) ο ψ_n (και αντιστοίχως, ο φ_n) είναι μονομορφισμός (και αντιστοίχως, επιμορφισμός). Αρκεί λοιπόν να δειχθεί η ακρίβεια τής σχηματιζομένης βραχείας ακολουθίας (μέσω των διακεκομμένων βελών) στον μεσαίο όρο $H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$. Επειδή $\delta_n = \iota_{n-1} \overline{\otimes}\ \mathrm{id}_M$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, δημιουργούνται βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Coker}(\delta_{n+1}) \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, equal] & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \arrow[r, "\beta_n"] & \mathrm{Ker}(\delta_n) \arrow[d, equal] \\
Z_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M/\mathrm{Im}(\delta_{n+1}) & & \mathrm{Im}(H_n(\check{d}_n \overline{\otimes} \mathrm{id}_M))
\end{tikzcd}$$

όπου για οιαδήποτε $x \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$, $y \in M$, $z \in H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$,

$$\alpha_n((x \otimes y) + \mathrm{Im}(\delta_{n+1})) := H_n(\iota_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)(x \otimes y) = (x \otimes y) + \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M),$$
$$\beta_n(z) := H_n(\check{d}_n \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)(z).$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Coker}(\delta_{n+1}) \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathrm{Ker}(\delta_n) \arrow[d, "\cong"] \\
H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M \arrow[r, "\psi_n"] & H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \arrow[r, "\varphi_n"] & \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M),
\end{tikzcd}$$

όπου οι πλευρικοί ισομορφισμοί εξάγονται από την πρόταση B.1.4. Επειδή η άνω γραμμή του είναι ακριβής, *και* η κάτω του γραμμή οφείλει να είναι ακριβής.

(ii) Επειδή ο $B_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι εξ υποθέσεως προβολικός, το θεώρημα C.2.7 μας πληροφορεί ότι η βραχεία ακριβής ακολουθία (D.25) διασπάται στον όρο C_n. Ας υποθέσουμε ότι $\kappa_n : C_n \longrightarrow Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι ένας ομομορφισμός R-μοδίων ο οποίος αποτελεί αριστερό αντίστροφο τού j_n. (Βλ. θεώρημα B.1.28.) Κάνοντας χρήση των συνθέσεων $\pi_n \circ \kappa_n : C_n \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet)$, $n \in \mathbb{Z}$, κατασκευάζουμε έναν αλυσωτό μετασχηματισμό[17]

$$(\pi \circ \kappa)_\bullet \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M : \mathbf{C}_\bullet \otimes_R M \longrightarrow H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M,$$

μέσω τού οποίου επάγονται ομομορφισμοί R-μοδίων

$$\theta_n : H_n(\mathbf{C}_\bullet; M) \longrightarrow H_n(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$$

με τύπο ορισμού τους τον

$$(x \otimes y) + \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) \underset{\theta_n}{\longmapsto} \pi_n(\kappa_n(x)) \otimes y = (\kappa_n(x) + \mathrm{Im}(d_{n+1})) \otimes y.$$

Για κάθε $x \in \mathrm{Ker}(d_n) =: Z_n(\mathbf{C}_\bullet)$ και $y \in M$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&(\theta_n \circ \psi_n)\left((x + B_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes y\right) = \theta_n((x \otimes y) + \mathrm{Im}(d_{n+1} \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M)) \\
&= (\kappa_n(x) + B_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes y \underset{x \in Z_n(\mathbf{C}_\bullet)}{=} (x + B_n(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes y.
\end{aligned}$$

[17] Σημειωτέον ότι ο συνοριακός τελεστής τού $H_\bullet(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R M$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός.

Τούτο σημαίνει ότι $\theta_n \circ \psi_n = \mathrm{id}_{H_n(\mathbf{C}_\bullet)\otimes_R M}$ και ότι η (D.24) διασπάται στον όρο $H_n(\mathbf{C}_\bullet; M)$ (εκ νέου λόγω τού θεωρήματος B.1.28). □

Με παρόμοιο τρόπο (αλλά μεταβαίνοντας από το *τανυστικό γινόμενο* κατάλληλων αλυσωτών συμπλόκων με το M στο *σύμπλοκο ομομορφισμών* από αυτά στο M) αποδεικνύεται το ακόλουθο:

D.4.5 Θεώρημα. **(«Θεώρημα καθολικών συντελεστών για μοδίους συνομολογίας»)** *Έστω $\mathbf{C}_\bullet = (C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ένα αλυσωτό σύμπλοκο R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και έστω M ένας R-μόδιος.*

(i) *Εάν $\mathrm{Ext}^1_R(Z_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \cong \{0\} \cong \mathrm{Ext}^1_R(B_n(\mathbf{C}_\bullet), M)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\boxed{\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(\mathbf{C}_\bullet), M) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, M)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_n(\mathbf{C}_\bullet), M) \longrightarrow \{0\}.} \qquad \text{(D.28)}$$

(ii) *Εάν, συν τοις άλλοις, ο C_n είναι προβολικός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και κάθε ιδεώδες τού δακτυλίου αναφοράς R είναι προβολικός υπομόδιός του, τότε η* (D.28) *είναι διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία.*

Απόδειξη. Βλ. Vermani [121], Theorem 9.2.1, σελ. 206-209. □

D.4.6 Πόρισμα. *Έστω K ένα σώμα. Εάν $\mathbf{V}_\bullet = (V_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ένα αλυσωτό σύμπλοκο K-διανυσματικών χώρων και W τυχών K-διανυσματικός χώρος, τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε*

$$\boxed{H_n(\mathbf{V}_\bullet; W) \cong H_n(\mathbf{V}_\bullet) \otimes_K W \;\text{ και }\; H^n(\mathrm{Hom}_K(\mathbf{V}_\bullet, W)) \cong \mathrm{Hom}_K(H_n(\mathbf{V}_\bullet), W).}$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τα θεωρήματα D.4.4 και D.4.5, διότι σε αυτήν την περίπτωση τα πρώτα γινόμενα στρέψεως και επεκτάσεως (τα εμφανιζόμενα στις (D.24) και (D.28)) είναι προδήλως τετριμμένα. □

D.5 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ KÜNNETH

Το παράρτημα αυτό θα κλείσει με τη διατύπωση και την απόδειξη *τής αλγεβρικής εκδοχής* τού λεγομένου *θεωρήματος τού Künneth* που αφορά στον τρόπο υπολογισμού των μοδίων ομολογίας *τού τανυστικού γινομένου δυο αλυσωτών συμπλόκων* (και μπορεί να ιδωθεί ως γενίκευση τού θεωρήματος D.4.4). Ας υποθέσουμε ότι τα $\mathbf{C}_\bullet = (C_p, d_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ και $\mathbf{C}'_\bullet = (C'_q, d'_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ είναι δυο δοθέντα αλυσωτά σύμπλοκα. Θέτουμε, ως συνήθως,

$$\left\{ \begin{array}{lll} Z_p(\mathbf{C}_\bullet) := \mathrm{Ker}(d_p), & B_p(\mathbf{C}_\bullet) := \mathrm{Im}(d_{p+1}), & H_p(\mathbf{C}_\bullet) := Z_p(\mathbf{C}_\bullet)/B_p(\mathbf{C}_\bullet), \\ Z_q(\mathbf{C}'_\bullet) := \mathrm{Ker}(d'_q), & B_q(\mathbf{C}'_\bullet) := \mathrm{Im}(d'_{q+1}), & H_q(\mathbf{C}'_\bullet) := Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)/B_q(\mathbf{C}'_\bullet). \end{array} \right\}$$

D.5.1 Ορισμός. Θέτοντας για κάθε ζεύγος $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$\boxed{D_{p,q} := C_p \otimes_R C'_q,} \quad \boxed{d_{p,q} := \mathrm{id}_{C_p} \overline{\otimes}\, d'_q,} \quad \boxed{\partial_{p,q} := d_p \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_{C'_q},}$$

ορίζουμε ως **τανυστικό γινόμενο των $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{C}'_\bullet$** το αλυσωτό σύμπλοκο

$$\boxed{\tilde{\mathbf{D}}_\bullet := (\tilde{D}_n, \tilde{d}_n)_{n \in \mathbb{Z}},} \quad \text{όπου} \quad \boxed{\tilde{D}_n := \bigoplus\nolimits_{p+q=n} D_{p,q},} \quad \text{και}$$

$$\boxed{\tilde{d}_n : \tilde{D}_n \longrightarrow \tilde{D}_{n-1}, \; \tilde{d}_n := \left(\bigoplus_{p+q=n} d_{p,q} \right) + \left(\bigoplus_{p+q=n} (-1)^q \partial_{p,q} \right).}$$

Συγκεκριμένα, η εικόνα κάθε αποσυντιθέμενου τανυστή $x \otimes y$ τού $D_{p,q}$ ($x \in C_p$, $y \in C'_q$ και $p+q=n$) μέσω τού $\tilde{d}_n$ είναι η[18]

$$\boxed{\tilde{d}_n(x \otimes y) := x \otimes d'_q(y) + (-1)^q d_p(x) \otimes y.}$$

Το $\tilde{\mathbf{D}}_\bullet$ έχει τους

$$Z_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) := \mathrm{Ker}(\tilde{d}_n), \quad B_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) := \mathrm{Im}(\tilde{d}_{n+1}), \quad H_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) := Z_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet)/B_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet),$$

ως n-οστό R-μόδιο κυκλημάτων, n-οστό R-μόδιο συνόρων και n-οστό R-μόδιο ομολογίας, αντιστοίχως.

D.5.2 Σημείωση. (i) Στον ορισμό τού $\tilde{d}_n$ εκλαμβάνουμε τον $d_{p,q}$ (και αντιστοίχως, τον $\partial_{p,q}$) ως ομομορφισμό από τον $D_{p,q}$ στον $D_{p,q-1}$ (και αντιστοίχως, από τον $D_{p,q}$ στον $D_{p-1,q}$) και κατόπιν εντός τού $\tilde{D}_{n-1}$. Επίσης, ταυτίζοντας κάθε $D_{p,q}$ με την εικόνα του εντός τού $\tilde{D}_{p+q}$, υποθέτουμε ότι $D_{p,q} \subseteq \tilde{D}_{p+q}$.
(ii) Εάν $C_p \cong \{0\}$ για κάθε $p < 0$ και $C'_q \cong \{0\}$ για κάθε $q < 0$, τότε για κάθε $n \geq 0$ ο R-μόδιος $\tilde{D}_n := \bigoplus_{p+q=n} D_{p,q}$ έχει το πολύ $n+1$ μη τετριμμένους ευθείς προσθετέους.

[18]Για κάθε αποσυντιθέμενο τανυστή $x \otimes y$ τού $D_{p,q}$ ($x \in C_p, y \in C'_q, p+q=n+1$) έχουμε

$$\begin{aligned}
&(\tilde{d}_n \circ \tilde{d}_{n+1})(x \otimes y) = \tilde{d}_n(\tilde{d}_{n+1}(x \otimes y)) \\
&= \tilde{d}_n(x \otimes d'_q(y) + (-1)^q d_p(x) \otimes y) = \tilde{d}_n(x \otimes d'_q(y)) + (-1)^q \tilde{d}_n(d_p(x) \otimes y) \\
&= x \otimes (\underbrace{d'_{q-1} \circ d'_q}_{=0})(y) + (-1)^{q-1}(d_p(x) \otimes d'_q(y)) \\
&+(-1)^q(d_p(x) \otimes d'_q(y)) + (-1)^{2q}(\underbrace{d_{p-1} \circ d_p}_{=0})(x) \otimes y = 0_{\tilde{D}_{n-1}},
\end{aligned}$$

διότι $p+(q-1) = n = (p-1)+q$ (!)

D.5.3 Λήμμα. *Για κάθε ζεύγος* $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *ορίζεται ο ομομορφισμός* R*-μοδίων*

$$\eta_{p,q} : Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \times Z_q(\mathbf{C}'_\bullet) \longrightarrow H_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet),$$
$$(u,v) \longmapsto u \otimes v + B_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet),$$

και υφίστανται μοναδικοί ομομορφισμοί $\hat{\eta}_{p,q}$ *και* $\tilde{\eta}_{p,q}$ *που καθιστούν το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \times Z_q(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[rr, "\eta_{p,q}"] \arrow[d, "\pi^{Z_p(\mathbf{C}_\bullet)\times Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)}_{B_p(\mathbf{C}_\bullet)\times B_q(\mathbf{C}'_\bullet)}"'] & & H_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \\
Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \times Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)/B_p(\mathbf{C}_\bullet) \times B_q(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[urr, bend right, "\hat{\eta}_{p,q}"] \arrow[d, "f_{p,q}"', "\cong"] & & \\
(Z_p(\mathbf{C}_\bullet)/B_p(\mathbf{C}_\bullet)) \times (Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)/B_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \arrow[d, equal] & & \\
H_p(\mathbf{C}_\bullet) \times H_q(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[uuurr, bend right, "\tilde{\eta}_{p,q}"'] & &
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Εν προκειμένω, ο $f_{p,q}$ *είναι ο ισομορφισμός*[19]

$$Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \times Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)/B_p(\mathbf{C}_\bullet) \times B_q(\mathbf{C}'_\bullet) \xrightarrow[f_{p,q}]{\cong} (Z_p(\mathbf{C}_\bullet)/B_p(\mathbf{C}_\bullet)) \times (Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)/B_q(\mathbf{C}'_\bullet)),$$
$$(u,v) + (B_p(\mathbf{C}_\bullet) \times B_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \longmapsto (u + B_p(\mathbf{C}_\bullet), v + B_q(\mathbf{C}'_\bullet)).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για οιονδήποτε αποσυντιθέμενο τανυστή $u \otimes v \in Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ ισχύει

$$\tilde{d}_{p+q}(u \otimes v) = u \otimes \underbrace{d'_q(v)}_{=0_{C'_{q-1}}} + (-1)^q \underbrace{d_p(u)}_{=0_{C_{p-1}}} \otimes v = 0_{\tilde{D}_{p+q-1}},$$

οπότε $u \otimes v \in Z_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet)$ και η εικόνα τής απεικονίσεως $\eta_{p,q}$ όντως εμπεριέχεται στον μόδιο ομολογίας $H_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet)$. Μάλιστα, είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι αυτή αποτελεί ομομορφισμό R-μοδίων. Επιπροσθέτως,

$$B_p(\mathbf{C}_\bullet) \times B_q(\mathbf{C}'_\bullet) \subseteq \mathrm{Ker}(\eta_{p,q}). \tag{D.29}$$

(Πράγματι· εάν $(w,z) \in B_p(\mathbf{C}_\bullet) \times B_q(\mathbf{C}'_\bullet)$, τότε υπάρχει $x \in C_{p+1}$ με $w = d_{p+1}(x)$ και $z \in Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)$, καθώς $B_q(\mathbf{C}'_\bullet) \subseteq Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)$. Εξ αυτού έπεται ότι

$$w \otimes z = \tilde{d}_{p+q+1}((-1)^q x \otimes z) \in B_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet), \text{ όπου } x \otimes z \in D_{p+1,q} \subseteq \tilde{D}_{p+q+1},$$

διότι $d_{p+1,q}(x \otimes z) = 0_{D_{p+1,q-1}}$ και $\partial_{p+1,q}(x \otimes z) = w \otimes z$, οπότε

$$\eta_{p,q}(w,z) = 0_{H_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet)} = B_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet)$$

[19]Βλ. τον πρώτον εκ των ισομορφισμών τής προτάσεως A.5.24.

και ο ισχυρισμός είναι αληθής.)

Λόγω τού εγκλεισμού (D.29) η καθολική ιδιότητα A.4.6 των πηλικομοδίων εγγυάται την ύπαρξη ενός και μόνον ομομορφισμού $\hat{\eta}_{p,q}$ που κλείνει το σχετικό διάγραμμα μεταθετικώς:

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{p,q} : Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \times Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)/B_p(\mathbf{C}_\bullet) \times B_q(\mathbf{C}'_\bullet) &\longrightarrow H_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet), \\ (u,v) + B_p(\mathbf{C}_\bullet) \times B_q(\mathbf{C}'_\bullet) &\longmapsto \eta_{p,q}(u,v). \end{aligned}$$

Εν συνεχεία, αρκεί να θέσουμε $\tilde{\eta}_{p,q} := \hat{\eta}_{p,q} \circ f_{p,q}^{-1}$. $\square$

D.5.4 Ορισμός. Επειδή η ανωτέρω κατασκευασθείσα απεικόνιση

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{p,q} : H_p(\mathbf{C}_\bullet) \times H_q(\mathbf{C}'_\bullet) &\longrightarrow H_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet), \\ (u + B_p(\mathbf{C}_\bullet), v + B_q(\mathbf{C}'_\bullet)) &\longmapsto u \otimes v + B_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet), \end{aligned}$$

($u \in Z_p(\mathbf{C}_\bullet), v \in Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)$) είναι (εκτός από ομομορφισμός R-μοδίων) και R-διγραμμική, υφίσταται μοναδικός ομομορφισμός $\xi_{p,q}$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} H_p(\mathbf{C}_\bullet) \times H_q(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[r, "\text{τανυστικό}", "\text{γινόμενο}"'] \arrow[d, "\tilde{\eta}_{p,q}"'] & H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[dl, dashed, "\xi_{p,q}"] \\ H_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) & \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. (Βλ. εδ. C.3.6.) Ως **ομομορφισμό τού Künneth για το $\tilde{\mathbf{D}}_\bullet$** ορίζουμε τον

$$\boxed{\begin{aligned} \Psi_n := \bigoplus_{p+q=n} \xi_{p,q} : \bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \longrightarrow H_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet), \\ \bigoplus_{p+q=n} ((u_p + B_p(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes (v_q + B_q(\mathbf{C}'_\bullet))) \overset{\Psi_n}{\longmapsto} \left(\sum_{p+q=n} u_p \otimes v_q \right) + B_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet), \end{aligned}}$$

όπου $u_p \in Z_p(\mathbf{C}_\bullet)$ και $v_q \in Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)$.

D.5.5 Λήμμα. *Εάν για κάθε $q \in \mathbb{Z}$ ο C'_q είναι ισόπεδος R-μόδιος και $d'_q = 0$, τότε ο ομομορφισμός Ψ_n τού Künneth είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Εξ υποθέσεως,

$$[d'_q = 0,\ \forall q \in \mathbb{Z}] \Rightarrow [d_{p,q} = 0,\ \forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}] \Rightarrow \tilde{d}_n = \bigoplus_{p+q=n} (-1)^q \partial_{p,q}.$$

Εξ αυτού έπεται ότι

$$Z_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \cong \bigoplus_{p+q=n} (Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q) \;\; \text{και} \;\; B_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \cong \bigoplus_{p+q=n} (B_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q). \quad \text{(D.30)}$$

(Βλ. (A.15) και (A.16).) Επειδή ο C'_q είναι εξ υποθέσεως ισόπεδος, μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow B_p(\mathbf{C}_\bullet) \overset{\iota_p}{\hookrightarrow} Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \overset{\pi_p}{\twoheadrightarrow} H_p(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \{0\}$$

(όπου ι_p η συνήθης ένθεση και $\pi_p := \pi^{Z_p(\mathbf{C}_\bullet)}_{B_p(\mathbf{C}_\bullet)}$) επάγεται (κατά το θεώρημα D.3.10 και το πόρισμα D.3.13) η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd} B_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q \arrow[r, "\iota_p \overline{\otimes} \mathrm{id}_{C'_q}"] & Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q \arrow[r, "\pi_p \overline{\otimes} \mathrm{id}_{C'_q}"] & H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q \arrow[d] \\ \{0\} \arrow[u] & & \{0\} \end{tikzcd}$$

και, ως εκ τούτου, η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{p+q=n} (B_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q) \arrow[r, "\bigoplus_{p+q=n} (\iota_p \overline{\otimes} \mathrm{id}_{C'_q})"] & \bigoplus_{p+q=n} (Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q) \arrow[r, "\bigoplus_{p+q=n} (\pi_p \overline{\otimes} \mathrm{id}_{C'_q})"] & \bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q) \arrow[d] \\ \{0\} \arrow[u] & & \{0\} \end{tikzcd}$$

(Βλ. πρόταση B.1.5.) Εφαρμόζοντας το (ii) τής προτάσεως B.1.4 για την τελευταία βραχεία ακριβή ακολουθία λαμβάνουμε

$$\left[\begin{array}{l} H_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) := Z_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet)/B_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \\ \underset{\text{(D.30)}}{\cong} (\bigoplus_{p+q=n} (Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q))/(\bigoplus_{p+q=n} (B_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q)) \\ = \mathrm{Coker}(\bigoplus_{p+q=n} (\iota_p \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_{C'_q})) \cong \bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q). \end{array} \right] \quad \text{(D.31)}$$

Από την άλλη μεριά,

$$[d'_q = 0, \; \forall q \in \mathbb{Z}] \Rightarrow [H_q(\mathbf{C}'_\bullet) \cong C'_q, \; \forall q \in \mathbb{Z}]. \quad \text{(D.32)}$$

Εκ των (D.31) και (D.32) συνάγεται ότι ο ομομορφισμός Ψ_n τού Künneth είναι πράγματι ένας ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. □

D.5.6 Θεώρημα. (Γενικευμένο θεώρημα τού Künneth)
Εάν οι $Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)$, $B_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ είναι ισόπεδοι για κάθε $q \in \mathbb{Z}$, τότε υπάρχει επιμορφισμός

$$\Phi_n : H_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R (H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{C}'_\bullet)),$$

τέτοιος ώστε η βραχεία ακολουθία

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & \bigoplus\limits_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \arrow[r, "\Psi_n"] & H_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \arrow[dll, "\Phi_n"] \\ & \bigoplus\limits_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R (H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

να είναι ακριβής για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρώντας τή βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow Z_q(\mathbf{C}'_\bullet) \overset{j_q}{\hookrightarrow} C'_q \overset{\check{d}'_q}{\twoheadrightarrow} B_{q-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \longrightarrow \{0\}$$

(όπου j_q η συνήθης ένθεση και $\check{d}'_q$ ο επιμορφισμός που προκύπτει από τον d'_q ύστερα από περιορισμό τού πεδίου τιμών του επί τής εικόνας του) και την μέσω αυτής επαγομένη 1η *μακρά* ακριβή Tor-ακολουθία (τού θεωρήματος D.3.9) καταλήγουμε στη *βραχεία* ακριβή ακολουθία

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & C_p \otimes_R Z_q(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[r, "\mathrm{id}_{C_p} \overline{\otimes} j_q"] & C_p \otimes_R C'_q \arrow[dll, "\mathrm{id}_{C_p} \overline{\otimes} \check{d}'_q"] \\ & C_p \otimes_R B_{q-1}(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd} \tag{D.33}$$

για κάθε ζεύγος $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, καθόσον $\mathrm{Tor}_1^R (C_p, B_{q-1}(\mathbf{C}'_\bullet)) \cong \{0\}$. (Ο $B_{q-1}(\mathbf{C}'_\bullet)$ είναι εξ υποθέσεως ισόπεδος. Βλ. πόρισμα D.3.13.) Εν συνεχεία θεωρούμε τα υποσύμπλοκα

$$\mathbf{Z}'_\bullet := (Z_q(\mathbf{C}'_\bullet), d'_q|_{Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)})_{q\in\mathbb{Z}} \ \text{ και } \ \mathbf{B}'_\bullet := (B_q(\mathbf{C}'_\bullet), d'_q|_{B_q(\mathbf{C}'_\bullet)})_{q\in\mathbb{Z}}$$

τού $\mathbf{C}'_\bullet = (C'_q, d'_q)_{q\in\mathbb{Z}}$. Σημειωτέον ότι για κάθε $q \in \mathbb{Z}$

$$[d'_q|_{Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)} = 0 \ \text{ και } d'_q|_{B_q(\mathbf{C}'_\bullet)} = 0] \Rightarrow [H_q(\mathbf{Z}'_\bullet) = Z_q(\mathbf{C}'_\bullet) \text{ και } H_q(\mathbf{B}'_\bullet) = B_q(\mathbf{C}'_\bullet)].$$

Έστω $\tilde{\mathbf{D}}'_\bullet := (\tilde{D}'_n, \tilde{d}'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ με

$$\tilde{D}'_n := \bigoplus_{p+q=n} (C_p \otimes_R Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \ \text{ και } \ \tilde{d}'_n := \bigoplus_{p+q=n} (-1)^q d_p \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_{Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)}$$

το τανυστικό γινόμενο των αλυσωτών συμπλόκων $\mathbf{C}_\bullet = (C_p, d_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ *και* $\mathbf{Z}'_\bullet$, και έστω $\tilde{\mathbf{D}}^\star_\bullet := (\tilde{D}^\star_n, \tilde{d}^\star_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ με

$$\tilde{D}^\star_n := \bigoplus_{p+q=n} (C_p \otimes_R B^\star_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \ \text{ και } \ \tilde{d}^\star_n := \bigoplus_{p+q=n} (-1)^q d_p \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_{B^\star_q(\mathbf{C}'_\bullet)}$$

το τανυστικό γινόμενο των αλυσωτών συμπλόκων $\mathbf{C}_\bullet$ *και* $\mathbf{B}^\star_\bullet := \mathbf{B}'_{\bullet-1}$. Κάνοντας χρήση τής προτάσεως B.1.5 (για τη μετάβασή μας στα ευθέα αθροίσματα $\bigoplus_{p+q=n} \ldots$) δημιουργούμε μέσω τής (D.33) μια βραχεία ακριβή ακολουθία *αλυσωτών συμπλόκων*:

$$\{0\} \longrightarrow \tilde{\mathbf{D}}'_\bullet \xrightarrow{(\mathrm{id}\overline{\otimes}j)_\bullet} \tilde{\mathbf{D}}_\bullet \xrightarrow{(\mathrm{id}\overline{\otimes}\check{d}')_\bullet} \tilde{\mathbf{D}}^\star_\bullet \longrightarrow \{0\}, \tag{D.34}$$

όπου $(\mathrm{id}\,\overline{\otimes}j)_\bullet := \bigoplus_{p+q=\bullet}(\mathrm{id}_{C_p}\overline{\otimes}j_q)$ και $(\mathrm{id}\,\overline{\otimes}\check{d}')_\bullet := \bigoplus_{p+q=\bullet}(\mathrm{id}_{C_p}\overline{\otimes}\check{d}'_q)$. Έστω

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(\tilde{\mathbf{D}}'_\bullet) \arrow[r, "H_n((\mathrm{id}\overline{\otimes}j)_\bullet)"] & H_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \arrow[r, "H_n((\mathrm{id}\overline{\otimes}\check{d}')_\bullet)"] & H_n(\tilde{\mathbf{D}}^\star_\bullet) \arrow[dll, "\delta_n"] \\
& H_{n-1}(\tilde{\mathbf{D}}'_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}((\mathrm{id}\overline{\otimes}j)_\bullet)"] & H_{n-1}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \arrow[r, "H_{n-1}((\mathrm{id}\overline{\otimes}\check{d}')_\bullet)"] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{D.35}$$

η μακρά ακριβής ακολουθία ομολογίας τής (D.34). (Βλ. θεώρημα B.2.12.) Από την (D.35) συνάγεται η ύπαρξη βραχέων ακριβών ακολουθιών

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\delta_{n+1}) \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, equal] & H_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \arrow[r, "\beta_n"] & \mathrm{Ker}(\delta_n) \arrow[r] & \{0\} \\
& H_n(\tilde{\mathbf{D}}'_\bullet)/\mathrm{Im}(\delta_{n+1}) & & &
\end{tikzcd} \tag{D.36}$$

όπου για κάθε $x \in H_n(\tilde{\mathbf{D}}'_\bullet)$ και κάθε $y \in H_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet)$,

$$\alpha_n(x + \mathrm{Im}(\delta_{n+1})) := H_n((\mathrm{id}\overline{\otimes}j)_\bullet)(x), \;\; \beta_n(y) := H_n((\mathrm{id}\overline{\otimes}\check{d}')_\bullet)(y).$$

Η 1η μακρά ακριβή Tor-ακολουθία (τού θεωρήματος D.3.9) που επάγεται μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & B_q(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[r, "\iota'_q"] \arrow[d, equal] & Z_q(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[r, "\pi'_p"] & H_q(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[r] & \{0\} \\
& B^\star_{q+1}(\mathbf{C}'_\bullet) & & &
\end{tikzcd}$$

(όπου ι'_q η συνήθης ένθεση και $\pi'_q := \pi^{Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)}_{B_q(\mathbf{C}'_\bullet)}$) δίδει

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^R\left(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{C}'_\bullet)\right) \arrow[r, "\partial_1"] & H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R B^\star_{q+1}(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[dl, "\mathrm{id}_{H_p(\mathbf{C}_\bullet)}\overline{\otimes}\iota'_q"] & \\
& H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R Z_q(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[r, "\mathrm{id}_{H_p(\mathbf{C}_\bullet)}\overline{\otimes}\pi'_q"] & H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet) \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd} \tag{D.37}$$

καθόσον $\mathrm{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \cong \{0\}$. (Ο $Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ είναι εξ υποθέσεως ισόπεδος. Βλ. πόρισμα D.3.13.) Επειδή αμφότεροι οι $Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ και $B_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ είναι ισόπεδοι, λαμβάνουμε κατόπιν εφαρμογής τού λήμματος D.5.5 για τα $\tilde{\mathbf{D}}^\star_\bullet$ και $\tilde{\mathbf{D}}'_\bullet$ (αντί τού $\tilde{\mathbf{D}}_\bullet$) το εξής διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \arrow[d, equal] & \bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \arrow[d, equal] \\
\bigoplus_{p+q=n} \left(H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R B^\star_{q+1}(\mathbf{C}'_\bullet)\right) \arrow[d, "\cong"'] & \bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \arrow[d, "\cong"] \\
H_n(\tilde{\mathbf{D}}^\star_\bullet) \arrow[r, "\delta_{n+1}"] & H_n(\tilde{\mathbf{D}}'_\bullet)
\end{tikzcd} \tag{D.38}$$

όπου τα "≅" συμβολίζουν τους *ισομορφισμούς* τού Künneth για τα $\tilde{\mathbf{D}}^\star_\bullet$ και $\tilde{\mathbf{D}}'_\bullet$, αντιστοίχως. Κάνοντας εκ νέου χρήση τής προτάσεως B.1.5 (για τη μετάβασή μας στα ευθέα αθροίσματα $\bigoplus_{p+q=n} \ldots$ σε καθέναν εκ των όρων τής (D.37)) και λαμβάνοντας υπ' όψιν τους ισομορφισμούς τού (D.38) οδηγούμεθα στη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \arrow[r] & H_n(\tilde{\mathbf{D}}^\star_\bullet) \arrow[dll, "\delta_{n+1}"] \\
H_n(\tilde{\mathbf{D}}'_\bullet) \arrow[rr, "\bigoplus_{p+q=n}(\mathrm{id}_{H_p(\mathbf{C}_\bullet)} \overline{\otimes} \pi'_q)"] & & \bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \rightarrow \{0\}
\end{tikzcd}$$

Η πρόταση B.1.4 εγγυάται την ύπαρξη ισομορφισμών

$$\lambda_{n+1} : \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ker}(\delta_{n+1})$$

και

$$\mu_{n+1} : \mathrm{Coker}(\delta_{n+1}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{p+q=n} (H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet))\,.$$

Είναι εύκολα διαπιστώσιμο ότι $\Psi_n = \alpha_n \circ \mu_{n+1}^{-1}$. Θέτοντας $\Phi_n := \lambda_n^{-1} \circ \beta_n$ καταλήγουμε (μέσω τής (D.36)) στην επιθυμητή βραχεία ακριβή ακολουθία. □

D.5.7 Πόρισμα. *Εάν οι $Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ και $H_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ είναι προβολικοί για κάθε $q \in \mathbb{Z}$, τότε ο ομομορφισμός Ψ_n τού Künneth είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή ο $H_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ είναι προβολικός, η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow B_q(\mathbf{C}'_\bullet) \overset{\iota'_q}{\hookrightarrow} Z_p(\mathbf{C}'_\bullet) \overset{\pi'_p}{\twoheadrightarrow} H_q(\mathbf{C}'_\bullet) \longrightarrow \{0\}$$

(όπου ι'_q η συνήθης ένθεση και $\pi'_q := \pi^{Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)}_{B_q(\mathbf{C}'_\bullet)}$) είναι διασπώμενη. (Βλ. θεώρημα C.2.7.) Τούτο σημαίνει ότι

$$B_q(\mathbf{C}'_\bullet) \oplus H_q(\mathbf{C}'_\bullet) \cong Z_q(\mathbf{C}'_\bullet).$$

(Βλ. θεώρημα B.1.28.) Επειδή ο $Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ είναι προβολικός, ο $B_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ είναι ωσαύτως προβολικός. (Βλ. πρόταση C.2.6.) Σύμφωνα με το θεώρημα C.5.25 αμφότεροι οι $Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ και $B_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ είναι ισόπεδοι, οπότε υπάρχει η δυνατότητα εφαρμογής τού γενικευμένου θεωρήματος τού Künneth. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι καθένας εκ των ευθέων προσθετέων $\mathrm{Tor}_1^R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{C}'_\bullet))$ (με $p+q=n-1$) είναι τετριμμένος, καθώς ο $H_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ (ως προβολικός) είναι ισόπεδος. (Βλ. θεώρημα C.5.25 και πόρισμα D.3.13). □

D.5.8 Πόρισμα. *Εάν K είναι ένα σώμα και τα $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{C}'_\bullet$ αλυσωτά σύμπλοκα K-διανυσματικών χώρων, τότε ο ομομορφισμός Ψ_n τού Künneth είναι ισομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.*

D.5.9 Θεώρημα. (Κλασική εκδοχή τού θεωρήματος τού Künneth)
Εάν τα $\mathbf{C}_\bullet$ και $\mathbf{C}'_\bullet$ είναι ελεύθερα αλυσωτά σύμπλοκα (βλ. εδάφιο B.4.18) *και ο δακτύλιος αναφοράς R μια Π.Κ.Ι., τότε η βραχεία ακριβής ακολουθία τού θεωρήματος* D.5.6 *είναι διασπώμενη, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε*

$$\boxed{H_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \cong \left(\bigoplus_{p+q=n} \left(H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet)\right)\right) \oplus \left(\bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R\left(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_q(\mathbf{C}'_\bullet)\right)\right).}$$

Αποδειξη. Επειδή ο C'_q είναι εξ υποθέσεως ελεύθερος R-μόδιος και ο R μια Π.Κ.Ι., οι υπομόδιοι $B_q(\mathbf{C}'_\bullet) \subseteq Z_q(\mathbf{C}'_\bullet) \subseteq C'_q$ είναι ωσαύτως ελεύθεροι και, ως εκ τούτου, ισόπεδοι. (Βλ. θεώρημα A.6.47, πρόταση C.2.4 και θεώρημα C.5.25.) Άρα το θεώρημα D.5.6 είναι άμεσα εφαρμόσιμο. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι η εν λόγω βραχεία ακριβής ακολουθία είναι διασπώμενη. Προς τούτο θεωρούμε τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες

$$\{0\} \longrightarrow Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \overset{j_p}{\hookrightarrow} C_p \overset{\check{d}_p}{\twoheadrightarrow} B_{p-1}(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow \{0\}. \tag{D.39}$$

Ως υπομόδιος τού ελεύθερου R-μοδίου C_{p-1} (με τον R Π.Κ.Ι.) ο $B_{p-1}(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι ελεύθερος. (Βλ. θεώρημα A.6.47.) Άρα οι (D.39) είναι διασπώμενες. (Βλ. πόρισμα B.1.30.) Επιπροσθέτως,

$$\exists \gamma_p \in \mathrm{Hom}_R(C_p, Z_p(\mathbf{C}_\bullet)) : \gamma_p \circ j_p = \mathrm{id}_{Z_p(\mathbf{C}_\bullet)}.$$

(Βλ. θεώρημα B.1.28.) Εάν $\pi_p := \pi^{Z_p(\mathbf{C}_\bullet)}_{B_p(\mathbf{C}_\bullet)} : Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \longrightarrow H_p(\mathbf{C}_\bullet)$ είναι ο φυσικός επιμορφισμός, τότε προκύπτει ο ομομορφισμός

$$\nu_p := \pi_p \circ \gamma_p : C_p \longrightarrow H_p(\mathbf{C}_\bullet) \text{ με } \nu_p|_{Z_p(\mathbf{C}_\bullet)} = \nu_p \circ j_p = \pi_p.$$

Κατ' αναλογίαν σχηματίζεται και ένας ομομορφισμός

$$\nu'_q : C'_q \longrightarrow H_q(\mathbf{C}'_\bullet) \quad \text{με} \quad \nu'_q\big|_{Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)} = \pi'_q.$$

Εάν θεωρηθεί το τανυστικό γινόμενο

$$\nu_p \overline{\otimes} \nu'_q : C_p \otimes_R C'_q \longrightarrow H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet)$$

και το ευθύ άθροισμα

$$\Theta_n := \bigoplus_{p+q=n} \nu_p \overline{\otimes} \nu'_q : \bigoplus_{p+q=n} \left(C_p \otimes_R C'_q\right) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=n} \left(H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet)\right)$$

και ληφθεί υπ' όψιν ότι $B_p(\mathbf{C}_\bullet) \subseteq \mathrm{Ker}(\nu_p)$, $B_q(\mathbf{C}'_\bullet) \subseteq \mathrm{Ker}(\nu'_p)$, τότε

$$C_p \otimes_R B_q(\mathbf{C}'_\bullet) \subseteq \mathrm{Ker}(\nu_p \overline{\otimes} \nu'_q), \;\; B_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q \subseteq \mathrm{Ker}(\nu_p \overline{\otimes} \nu'_q),$$

οπότε για τυχόν στοιχείο τού $\tilde{D}_{n+1}$ έχουμε[20]

$$\begin{aligned} &\tilde{d}_{n+1}\left(\bigoplus_{p+q=n+1}\left(\sum_{\varrho} u_{p,q,\varrho} \otimes u'_{p,q,\varrho}\right)\right) \\ = \; &\underbrace{\bigoplus_{p+q=n}\left(\sum_{\varrho}\left(u_{p,q+1,\varrho} \otimes d'_{q+1}(u'_{p,q+1,\varrho}) + (-1)^q d_{p+1}(u_{p+1,q,\varrho}) \otimes u'_{p+1,q,\varrho}\right)\right)}_{\in \bigoplus_{p+q=n}\left(C_p \otimes_R B_q(\mathbf{C}'_\bullet) + B_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q\right)}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπειαν,

$$\begin{aligned} B_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \;\; &\subseteq \;\; \bigoplus_{p+q=n}\left(C_p \otimes_R B_q(\mathbf{C}'_\bullet) + B_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q\right) \\ &\subseteq \;\; \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{Ker}(\nu_p \overline{\otimes} \nu'_q) = \mathrm{Ker}(\Theta_n). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την πρόταση A.4.6 υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\hat{\Theta}_n$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & Z_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \arrow[dl, "\pi^{Z_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet)}_{B_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet)}"'] \arrow[dr, "\Theta_n|_{Z_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet)}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ H_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \arrow[rr, dashed, "\hat{\Theta}_n"'] & {} & \bigoplus_{p+q=n}\left(H_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R H_q(\mathbf{C}'_\bullet)\right) \end{tikzcd}$$

[20]Εν προκειμένω, το $C_p \otimes_R B_q(\mathbf{C}'_\bullet)$ μπορεί να εκληφθεί ως υπομόδιος τού $C_p \otimes_R C'_q$, καθότι ο C_p είναι ισόπεδος, οπότε μέσω τής ενθέσεως $B_q(\mathbf{C}'_\bullet) \hookrightarrow C'_q$ επάγεται μια ένθεση $C_p \otimes_R B_q(\mathbf{C}'_\bullet) \hookrightarrow C_p \otimes_R C'_q$. Κατ' αναλογίαν, το $B_p(\mathbf{C}_\bullet) \otimes_R C'_q$ μπορεί να εκληφθεί ως υπομόδιος τού $C_p \otimes_R C'_q$.

μεταθετικό. Επειδή $\nu_p|_{Z_p(\mathbf{C}_\bullet)} = \pi_p,\ \nu'_q|_{Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)} = \pi'_q$ και

$$[u \in Z_p(\mathbf{C}_\bullet) \ \text{ και } \ u' \in Z_q(\mathbf{C}'_\bullet)] \Rightarrow u \otimes u' \in Z_{p+q}(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet),$$

έχουμε $\Theta_n = \bigoplus\limits_{p+q=n} (\pi_p \overline{\otimes} \pi'_q)$. Έστω τυχόν

$$x = \sum_{p+q=n} (\sum_{\varrho} u_{p,\varrho} \otimes u'_{q,\varrho}) \in Z_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet) \subseteq \tilde{D}_n.$$

Προφανώς,

$$\begin{aligned}
&\Psi_n \left(\hat{\Theta}_n(x + B_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet)) \right) = \Psi_n \left(\Theta_n(x) \right) = \Psi_n(\bigoplus_{p+q=n} (\pi_p \overline{\otimes} \pi'_q)(x)) \\
&= \Psi_n \left(\sum_{\varrho} (u_{p,\varrho} + B_p(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes (u'_{q,\varrho} + B_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \right) \\
&= \sum_{\varrho} \Psi_n \left((u_{p,\varrho} + B_p(\mathbf{C}_\bullet)) \otimes (u'_{q,\varrho} + B_q(\mathbf{C}'_\bullet)) \right) = x + B_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet).
\end{aligned}$$

Άρα $\Psi_n \circ \hat{\Theta}_n = \mathrm{id}_{H_n(\tilde{\mathbf{D}}_\bullet)}$, απ' όπου έπεται ότι η αρχική βραχεία ακριβής ακολουθία είναι όντως διασπώμενη. (Βλ. θεώρημα B.1.28.) □

Παρομοίως αποδεικνύεται και το ακόλουθο:

D.5.10 Θεώρημα. (Δυϊκή εκδοχή τού θεωρήματος τού Künneth)
Έστω ότι $\mathbf{C}_\bullet = (C_p, d_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ *και* $\mathbf{C}'_\bullet = (C'_q, d'_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ *είναι δυο αλυσωτά σύμπλοκα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων.*
(i) *Εάν οι* C_p *και* $B_p(\mathbf{C}_\bullet)$ *είναι προβολικοί για κάθε* $p \in \mathbb{Z}$, *τότε για κάθε* $n \geq 0$ *υφίσταται μια βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\{0\} \longrightarrow \prod_{p-q=n-1} \mathrm{Ext}^1_R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_{-q}(\mathbf{C}'_\bullet)) \longrightarrow H^n(\mathrm{Hom}_R(\mathbf{C}_\bullet, \mathbf{C}'_\bullet)) \longrightarrow \prod_{p-q=n} \mathrm{Hom}_R(H_p(\mathbf{C}_\bullet), H_{-q}(\mathbf{C}'_\bullet)) \longrightarrow \{0\}$$

(ii) *Εάν, συν τοις άλλοις, κάθε ιδεώδες τού δακτυλίου αναφοράς R είναι προβολικός υπομόδιός του, τότε η ανωτέρω βραχεία ακριβής ακολουθία είναι διασπώμενη για κάθε* $n \geq 0$.

Απόδειξη. Βλ. Rotman [103], Theorem 10.85, σελ. 682. □