Παράρτημα C

Hom και $\otimes$

Οι *μόδιοι ομομορφισμών* και τα *τανυστικά γινόμενα* αποτελούν σημαντικά τεχνικά εργαλεία, η κατάλληλη χρήση των οποίων οδηγεί σε μια *πρωταρχική, αδρομερή ιεράρχηση* των R-μοδίων (βλ. εδ. C.5.31).

C.1 ΜΟΔΙΟΙ ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ

Εάν M, N είναι R-μόδιοι, τότε το σύνολο $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ των ομομορφισμών από τον M στον N (βλ. (A.3)) αποτελεί αφ' εαυτού έναν R-μόδιο. Στην παρούσα ενότητα θα παρατεθούν μόνον κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητές του.

C.1.1 Πρόταση. *Εάν M, N είναι R-μόδιοι, τότε το $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ είναι ένας υπομόδιος τού R-μοδίου N^M* (βλ. A.2.5 (viii)).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς, $0 := 0_{N^M} \in \mathrm{Hom}_R(M,N) \Rightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \neq \varnothing$. Εάν $f, g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ και $s \in R$, τότε για οιαδήποτε ζεύγη $(m_1, m_2) \in M \times M$ και $(r_1, r_2) \in R \times R$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
&(f+g)(r_1m_1 + r_2m_2) = f(r_1m_1 + r_2m_2) + g(r_1m_1 + r_2m_2) \\
&= r_1f(m_1) + r_2f(m_2) + r_1g(m_1) + r_2g(m_2) \\
&= r_1(f(m_1) + g(m_1)) + r_2(f(m_2) + g(m_2)) = r_1(f+g)(m_1) + r_2(f+g)(m_2)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
&(sf)(r_1m_1 + r_2m_2) = s(f(r_1m_1 + r_2m_2)) = s(r_1f(m_1) + r_2f(m_2)) \\
&= r_1sf(m_1) + r_2sf(m_2) = r_1(sf)(m_1) + r_2(sf)(m_2),
\end{aligned}$$

οπότε $f + g \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ και $sf \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ λόγω τής προτάσεως A.3.3. $\square$

C.1.2 Πρόταση. *Για κάθε R-μόδιο M υφίσταται κανονιστικός ισομορφισμός*

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{\cong} M.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$h : \mathrm{Hom}_R(R, M) \longrightarrow M, \ \ f \longmapsto h(f) := f(1_R).$$

Για κάθε $(r_1, r_2) \in R \times R$ και κάθε $(f_1, f_2) \in \mathrm{Hom}_R(R, M)\times \mathrm{Hom}_R(R, M)$ έχουμε

$$h(r_1 f_1 + r_2 f_2) = (r_1 f_1 + r_2 f_2)(1_R) = r_1 f_1(1_R) + r_2 f_2(1_R) = r_1 h(f_1) + r_2 h(f_2),$$

οπότε η h αποτελεί ομομορφισμό R-μοδίων. Για οιουσδήποτε ομομορφισμούς $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$, για τους οποίους ισχύει $h(f_1) = h(f_2)$, έχουμε

$$f_1(1_R) = f_2(1_R) \Rightarrow f_1(r) = r f_1(1_R) = r f_2(1_R) = f_2(r)$$

για κάθε $r \in R$, οπότε $f_1 = f_2$ και ο ομομορφισμός h είναι μονομορφισμός. Τέλος, επειδή ο R είναι ένας *ελεύθερος* R-μόδιος (έχων το $\{1_R\}$ ως μια βάση του), θεωρώντας *για τυχόν* $x \in M$ την απεικόνιση

$$\theta_x : \{1_R\} \longrightarrow M, \ \ \theta_x(1_R) := x,$$

υφίσταται (κατά το θεώρημα A.6.20) $f_x \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$ για τον οποίον ισχύει $f_x|_{\{1_R\}} = \theta$, ήτοι $h(f_x) = f_x(1_R) = \theta_x(1_R) := x$. Εξ αυτού έπεται ότι ο ομομορφισμός h είναι *και* επιμορφισμός. $\square$

C.1.3 Παραδείγματα. (i) Κατά την πρόταση C.1.2,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_k}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}_k) \cong \mathbb{Z}_k, \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_k) \cong \mathbb{Z}_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$.

(ii) Έχουμε $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \ncong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$. Πράγματι· εάν $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ και εάν υποθέσουμε ότι $f(1) \neq 0$, τότε

$$[f(1) = n f(\tfrac{1}{n}) \Rightarrow n \mid f(1), \ \forall n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}].$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα τής Αριθμητικής έπεται ότι ο $f(1) \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$ διαθέτει πεπερασμένου πλήθους ακεραίους διαιρέτες. Επειδή ο ως άνω $n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$ είναι *αυθαιρέτως επιλεγμένος*, καταλήγουμε σε άτοπο! Ως εκ τούτου, $f(1) = 0$. Για οιουσδήποτε $m, n \in \mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$ έχουμε

$$0 = m f(1) = m f(\tfrac{n}{n}) = m n f(\tfrac{1}{n}) = n f(\tfrac{m}{n}) \Rightarrow f(\tfrac{m}{n}) = 0.$$

Άρα ο f είναι κατ' ανάγκην ο μηδενικός ομομορφισμός και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$.

(iii) Κατ' αναλογίαν, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}) \ncong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_k) \cong \mathbb{Z}_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Πράγματι· εάν $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z})$, τότε

$$kf([1]_k) = f([k]_k) = f([0]_k) = 0 \Rightarrow f([1]_k) = 0,$$

οπότε $f([l]_k) = lf([1]_k) = 0$ για κάθε $l \in \mathbb{Z}$, απ' όπου έπεται ότι ο f είναι κατ' ανάγκην ο μηδενικός ομομορφισμός και $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$. (*Σημείωση*. Με παρόμοια επιχειρήματα δείχνει κανείς ότι $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Q}) \cong \{0\}$.)

C.1.4 Ορισμός. Εάν M, M', N, N' είναι R-μόδιοι και

$$f \in \mathrm{Hom}_R(M', M),\ g \in \mathrm{Hom}_R(N, N'),$$

τότε ορίζουμε ως $\mathrm{Hom}_R(f, g)$ τον ομομορφισμό

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(M, N) \ni \varphi \longmapsto \mathrm{Hom}_R(f, g)(\varphi) := g \circ \varphi \circ f \in \mathrm{Hom}_R(M', N').}$$

C.1.5 Παρατήρηση. Ο ομομορφισμός $\mathrm{Hom}_R(f, g)$ εντάσσεται στο ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(M', N) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_{M'},g)"] & \mathrm{Hom}_R(M', N') \\
\mathrm{Hom}_R(M, N) \arrow[u, "\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_N)"] \arrow[ur, "\mathrm{Hom}_R(f,g)" description] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M,g)"'] & \mathrm{Hom}_R(M, N') \arrow[u, "\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_{N'})"']
\end{tikzcd}$$

C.1.6 Λήμμα. *Εάν M, M', M'', N είναι R-μόδιοι και*

$$f_1 \in \mathrm{Hom}_R(M', M),\ f_2 \in \mathrm{Hom}_R(M, M''),$$

τότε

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(f_2 \circ f_1, \mathrm{id}_N) = \mathrm{Hom}_R(f_1, \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(f_2, \mathrm{id}_N).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς,

$$\mathrm{Hom}_R(f_2 \circ f_1, \mathrm{id}_N)(\varphi) = \mathrm{id}_N \circ \varphi \circ (f_2 \circ f_1)$$
$$= \mathrm{id}_N \circ (\varphi \circ f_2) \circ f_1 = \mathrm{Hom}_R(f_1, \mathrm{id}_N)(\varphi \circ f_2)$$
$$\mathrm{Hom}_R(f_1, \mathrm{id}_N)(\mathrm{id}_N \circ \varphi \circ f_2) = (\mathrm{Hom}_R(f_1, \mathrm{id}_N) \circ \mathrm{Hom}_R(f_2, \mathrm{id}_N))(\varphi)$$

για κάθε $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M'', N)$. □

C.1.7 Λήμμα. *Εάν N, N', N'', M είναι R-μόδιοι και*

$$g_1 \in \operatorname{Hom}_R(N', N),\ g_2 \in \operatorname{Hom}_R(N, N''),$$

τότε

$$\boxed{\operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_2 \circ g_1) = \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_2) \circ \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_1).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_2 \circ g_1)(\varphi) = (g_2 \circ g_1) \circ \varphi \circ \mathrm{id}_M \\
&= g_2 \circ (g_1 \circ \varphi) \circ \mathrm{id}_M = \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_2)(g_1 \circ \varphi) \\
&\operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_2)(g_1 \circ \varphi \circ \mathrm{id}_M) = (\operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_2) \circ \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g_1))(\varphi)
\end{aligned}$$

για κάθε $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, N'')$. □

C.1.8 Λήμμα. *Εάν M, N είναι R-μόδιοι, τότε*

$$\boxed{\operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{\operatorname{Hom}_R(M,N)}.}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς,

$$\operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_N)(\varphi) = \mathrm{id}_N \circ \varphi \circ \mathrm{id}_M = \varphi$$

για κάθε $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$. □

C.1.9 Πρόταση. *Εάν M, M', M'' και N, N', N'' είναι R-μόδιοι και*

$$\begin{array}{ll}
f_1 \in \operatorname{Hom}_R(M', M), & f_2 \in \operatorname{Hom}_R(M, M''), \\
g_1 \in \operatorname{Hom}_R(N', N), & g_2 \in \operatorname{Hom}_R(N, N''),
\end{array}$$

τότε

$$\boxed{\operatorname{Hom}_R(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) = \operatorname{Hom}_R(f_1, g_2) \circ \operatorname{Hom}_R(f_2, g_1).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βάσει τής παρατηρήσεως C.1.5 έχουμε

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}_R(f_1, g_2) \circ \operatorname{Hom}_R(f_2, g_1) \\
&= \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_{M'}, g_2) \circ \operatorname{Hom}_R(f_1, \mathrm{id}_N) \circ \operatorname{Hom}_R(f_2, \mathrm{id}_N) \circ \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_{M''}, g_1) \\
&\underset{\text{C.1.6}}{=} \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_{M'}, g_2) \circ \operatorname{Hom}_R(f_2 \circ f_1, \mathrm{id}_N) \circ \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_{M''}, g_1) \\
&= \operatorname{Hom}_R(f_2 \circ f_1, g_2) \circ \operatorname{Hom}_R(\mathrm{id}_{M''}, g_1) = \operatorname{Hom}_R(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1),
\end{aligned}$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής. □

C.1.10 Πόρισμα. *Εάν M, M', N, N' είναι R-μόδιοι και*

$$f \in \operatorname{Hom}_R(M', M),\ g \in \operatorname{Hom}_R(N, N')$$

είναι ισομορφισμοί, τότε και ο $\operatorname{Hom}_R(f, g)$ είναι ισομορφισμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εξ υποθέσεως υπάρχουν $h \in \operatorname{Hom}_R(M, M')$ και $\kappa \in \operatorname{Hom}_R(N', N)$, τέτοιοι ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$h \circ f = \mathrm{id}_{M'},\ f \circ h = \mathrm{id}_M,\ \kappa \circ g = \mathrm{id}_M,\ g \circ \kappa = \mathrm{id}_{N'}.$$

Σύμφωνα με το λήμμα C.1.8 οι συνθέσεις

$$\operatorname{Hom}_R(h, \kappa) \circ \operatorname{Hom}_R(f, g),\ \ \operatorname{Hom}_R(f, g) \circ \operatorname{Hom}_R(h, \kappa)$$

είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις των $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ και $\operatorname{Hom}_R(M', N')$, αντιστοίχως. Άρα ο $\operatorname{Hom}_R(f, g)$ είναι όντως ισομορφισμός. □

C.1.11 Πρόταση. *Έστω M ένας R-μόδιος και έστω $(N_j)_{j\in J}$ μια οικογένεια R-μοδίων. Τότε υφίστανται κανονιστικοί ισομορφισμοί*

$$\boxed{\operatorname{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} N_j, M) \overset{\cong}{\longrightarrow} \prod_{j\in J} \operatorname{Hom}_R(N_j, M)}$$

και

$$\boxed{\operatorname{Hom}_R(M, \prod_{j\in J} N_j) \overset{\cong}{\longrightarrow} \prod_{j\in J} \operatorname{Hom}_R(M, N_j).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\vartheta : \operatorname{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} N_j, M) \longrightarrow \prod_{j\in J} \operatorname{Hom}_R(N_j, M),\ f \longmapsto \vartheta(f) := (f \circ \mathrm{in}_j)_{j\in J},$$

όπου in_j η φυσική ένθεση (όπως στο εδ. A.5.4). Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι η ϑ αποτελεί ομομορφισμό. Έστω τυχόν $(g_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J}\operatorname{Hom}_R(N_j, M)$. Τότε υπάρχει μονοσημάντως ορισμένως $h \in \operatorname{Hom}_R(\bigoplus_{j\in J} N_j, M)$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & N_j \arrow[dl, hook', "\mathrm{in}_j"'] \arrow[dr, "g_j"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ \bigoplus_{j\in J} N_j \arrow[rr, dashed, "h"'] & & M \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Επειδή $\vartheta(h) = (h\circ \mathrm{in}_j)_{j\in J} = (g_j)_{j\in J}$, ο ομομορφισμός ϑ είναι επιμορφισμός. Επιπροσθέτως, εάν $\alpha \in \operatorname{Ker}(\vartheta)$, τότε $0 = \vartheta(\alpha) = (\alpha\circ \mathrm{in}_j)_{j\in J}$, οπότε κάθε διάγραμμα τής μορφής

$$\begin{tikzcd} & N_j \arrow[dl, hook', "\mathrm{in}_j"'] \arrow[dr, "0"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ \bigoplus\limits_{j\in J} N_j \arrow[rr, "\alpha"'] & & M \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Επειδή το $(\bigoplus_{j\in J} N_j, (\mathrm{in}_j)_{j\in J})$ είναι συγκινόμενο των μελών τής οικογενείας $(N_j)_{j\in J}$ και ο μηδενικός ομομορφισμός από τον $\bigoplus_{j\in J} N_j$ στον M συμπληρώνει μεταθετικώς οιοδήποτε διάγραμμα αυτού τού είδους, έχουμε (λόγω τού θεωρήματος A.5.9) $\alpha = 0$, οπότε ο ϑ είναι *και* μονομορφισμός. Ο τρόπος αποδείξεως τού δεύτερου ισομορφισμού είναι παρόμοιος[1]. $\square$

C.1.12 Πρόταση. *Εάν M, M', N, N' είναι R-μόδιοι και*

$$f \in \mathrm{Hom}_R(M', M),\ g \in \mathrm{Hom}_R(N, N'),$$

τότε και πυρήνας τού $\mathrm{Hom}_R(f, g)$ *ισούται με τον υπομόδιο U τού* $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ *τον οριζόμενον ως εξής:*

$$U := \{\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \,|\, \varphi(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(g)\}.$$

Αποδειξη. Ας θέσουμε $h := \mathrm{Hom}_R(f, g)$. Για να αποδείξουμε ότι $U \subseteq \mathrm{Ker}(h)$ θεωρούμε τυχόντα $\varphi \in U$. Αρκεί να δειχθεί ότι $h(\varphi) = 0_{\mathrm{Hom}_R(M',N')}$. Για κάθε $x \in M'$ έχουμε

$$f(x) \in \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \varphi(f(x)) \in \mathrm{Ker}(g)$$
$$\Rightarrow h(\varphi)(x) = (g \circ \varphi \circ f)(x) = g(\varphi(f(x))) = 0_{N'},$$

οπότε $h(\varphi) = 0_{\mathrm{Hom}_R(M',N')}$ και, κατ' επέκταση, $U \subseteq \mathrm{Ker}(h)$. Και αντιστρόφως· εάν $\varphi \in \mathrm{Ker}(h)$, τότε

$$g \circ \varphi \circ f = h(\varphi) = 0_{\mathrm{Hom}_R(M',N')} \Rightarrow \varphi(\mathrm{Im}(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(g),$$

οπότε $\varphi \in U$ και ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός $\mathrm{Ker}(h) \subseteq U$. $\square$

C.1.13 Πόρισμα. *Εάν M, M', N, N' είναι R-μόδιοι, $f : M' \longrightarrow M$ ένας επιμορφισμός και $g : N \longrightarrow N'$ ένας μονομορφισμός R-μοδίων, τότε ο*

$$\mathrm{Hom}_R(f, g) : \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M', N')$$

είναι μονομορφισμός.

[1] Αρκεί να αντικατασταθεί ο $\bigoplus_{j\in J} N_j$ με τον $\prod_{j\in J} N_j$, να αντιστραφούν τα χρησιμοποιούμενα βέλη και να ορισθεί ως ϑ η $\vartheta(f) := (\mathrm{pr}_j \circ f)_{j\in J}$.

C.1.14 Θεώρημα. *Εάν* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$ *είναι μια ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και M τυχών R-μόδιος, τότε η ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A, M),$$

όπου $f^* := \mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{id}_M)$ *και* $g^* := \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{id}_M)$, *είναι ακριβής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή ο g είναι επιμορφισμός και η id_M μονομορφισμός, ο g^* είναι μονομορφισμός επί τη βάσει τού πορίσματος C.1.13. Επειδή $g \circ f = 0$, έχουμε

$$\mathrm{Hom}_R(g \circ f, \mathrm{id}_M) = 0 \Rightarrow f^* \circ g^* \underset{\text{C.1.9}}{=} \mathrm{Hom}_R(g \circ f, \mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M)$$
$$= \mathrm{Hom}_R(g \circ f, \mathrm{id}_M) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(g^*) \subseteq \mathrm{Ker}(f^*).$$

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $\mathrm{Ker}(f^*) \subseteq \mathrm{Im}(g^*)$. Προς τούτο θεωρούμε τυχόν στοιχείο φ τού $\mathrm{Hom}_R(B, M)$ ανήκον στον $\mathrm{Ker}(f^*)$ και θέτουμε $U := \mathrm{Im}(f)$ $(= \mathrm{Ker}(g))$. Επειδή $f^* := \mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_M)$, έχουμε

$$\varphi(U) = \varphi(\mathrm{Im}(f)) \underset{\text{C.1.12}}{\subseteq} \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M) = \{0_M\} \Rightarrow \varphi(U) = \{0_M\}.$$

Εξ αυτού έπεται η ύπαρξη ενός (και μόνον) $\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_R(B/U, M)$ με $\overline{\varphi} \circ \pi_U^B = \varphi$. (Βλ. πρόταση A.4.6.) Επιπροσθέτως, επειδή ο g είναι επιμορφισμός έχων τον U ως πυρήνα του, υφίσταται κάποιος ισομορφισμός $h : B/U \xrightarrow{\cong} C$. (Βλ. πρόταση B.1.4 (ii).) Ως εκ τούτου, προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\pi_U^B"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & B/U \arrow[ul, "h"', "\cong"] \arrow[dl, "\overline{\varphi}"] \\
& M \arrow[u, phantom, "\circlearrowright"] &
\end{tikzcd}$$

Επειδή ο h είναι ισομορφισμός, ορίζεται ο $\psi := \overline{\varphi} \circ h^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(C, M)$, για τον οποίον ισχύει $g^*(\psi) = \psi \circ g = \overline{\varphi} \circ \left(h^{-1} \circ g\right) = \overline{\varphi} \circ \pi_U^B = \varphi$, οπότε $\varphi \in \mathrm{Im}(g^*)$. □

C.1.15 Θεώρημα. *Εάν* $\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$ *είναι μια βραχεία ακριβής και διασπώμενη ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και M τυχών R-μόδιος, τότε η βραχεία ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A, M) \longrightarrow \{0\},$$

όπου $f^* := \mathrm{Hom}_R(f, \mathrm{id}_M)$ *και* $g^* := \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{id}_M)$, *είναι ακριβής και διασπώμενη.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το θεώρημα B.1.28 ο f διαθέτει αριστερό αντίστροφο, ήτοι $\exists \alpha \in \mathrm{Hom}_R(B,A) : \alpha \circ f = \mathrm{id}_A$. Επειδή

$$\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_M) \circ \mathrm{Hom}_R(\alpha,\mathrm{id}_M) \underset{\text{C.1.6}}{=} \mathrm{Hom}_R(\alpha \circ f,\mathrm{id}_M)$$

$$= \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_A,\mathrm{id}_M) \underset{\text{C.1.8}}{=} \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(A,M)},$$

ο $\mathrm{Hom}_R(f,\mathrm{id}_M) =: f^*$ είναι επιμορφισμός. (Βλ. λήμμα A.3.22.) Υπολείπεται η εφαρμογή των θεωρημάτων C.1.14 και B.1.28. $\square$

C.1.16 Σημείωση. Εάν $\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$ είναι μια βραχεία ακριβής *μη διασπώμενη* ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε ο f^*δεν είναι κατ' ανάγκην επιμορφισμός. Επί παραδείγματι, θεωρώντας τήν

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Q} \overset{\pi^{\mathbb{Q}}_{\mathbb{Z}}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}$$

(με $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$), διαπιστώνουμε ότι ο

$$\iota^* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z}) \underset{\text{C.1.3 (ii)}}{\cong} \{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \underset{\text{C.1.3 (i)}}{\cong} \mathbb{Z}$$

είναι ο μηδενικός ομομορφισμός, ο οποίος *δεν είναι επιμορφισμός*.

C.1.17 Θεώρημα. *Εάν $\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ είναι μια ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, και M τυχών R-μόδιος, τότε η ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M,B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(M,C),$$

όπου $f_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, f)$ και $g_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g)$, είναι ακριβής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή η id_M είναι επιμορφισμός και ο f μονομορφισμός, ο f_* είναι μονομορφισμός επί τη βάσει τού πορίσματος C.1.13. Επειδή $g \circ f = 0$, έχουμε

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g \circ f) = 0 \Rightarrow g_* \circ f_* \underset{\text{C.1.9}}{=} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M, g \circ f)$$

$$= \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g \circ f) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(f_*) \subseteq \mathrm{Ker}(g_*).$$

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι $\mathrm{Ker}(g_*) \subseteq \mathrm{Im}(f_*)$. Προς τούτο θεωρούμε τυχόν στοιχείο φ τού $\mathrm{Hom}_R(M,B)$ ανήκον στον $\mathrm{Ker}(g_*)$. Επειδή $g_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g)$, έχουμε

$$\varphi(M) = \varphi(\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M)) \underset{\text{C.1.12}}{\subseteq} \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f).$$

Και επειδή ο f είναι μονομορφισμός, υπάρχει ισομορφισμός $h : \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{\cong} A$ (βλ. πρόταση B.1.4 (i)), ούτως ώστε η σύνθεση $f \circ h$ να είναι η συνήθης ένθεση τής εικόνας $\mathrm{Im}(f)$ τού f εντός τού B. Ως εκ τούτου, ορίζεται ο $\psi := h \circ \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,A)$, για τον οποίον ισχύει

$$[f_*(\psi)(x) = f(h(\varphi(x))) = \varphi(x),\ \forall x \in M] \Rightarrow f_*(\psi) = \varphi,$$

οπότε $\varphi \in \mathrm{Im}(f_*)$. $\square$

C.1.18 Θεώρημα. *Εάν* $\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$ *είναι μια βραχεία ακριβής και διασπώμενη ακολουθία* R*-μοδίων και ομομορφισμών* R*-μοδίων, και* M *τυχών* R*-μόδιος, τότε η βραχεία ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(M,B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(M,C) \longrightarrow \{0\},$$

όπου $f_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, f)$ *και* $g_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g)$, *είναι ακριβής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σύμφωνα με το θεώρημα B.1.28 ο g διαθέτει δεξιό αντίστροφο, ήτοι $\exists \beta \in \mathrm{Hom}_R(C,B) : g \circ \beta = \mathrm{id}_C$. Επειδή

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g) \circ \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, \beta) \underset{\text{C.1.7}}{=} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g \circ \beta)$$
$$= \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_C) \underset{\text{C.1.8}}{=} \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(M,C)},$$

ο $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_M, g) =: g_*$ είναι επιμορφισμός. (Βλ. λήμμα A.3.22.) Υπολείπεται η εφαρμογή τού θεωρήματος C.1.17. □

C.1.19 Σημείωση. Εάν $\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$ είναι μια βραχεία ακριβής *μη διασπώμενη* ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε ο g_* δεν είναι κατ' ανάγκην επιμορφισμός. Επί παραδείγματι, θεωρώντας τήν

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Q} \overset{\pi_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow \{0\}$$

(με $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_k$, $k \geq 2$), διαπιστώνουμε ότι ο

$$(\pi_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Q}})_* : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Q}) \underset{\text{C.1.3 (iii)}}{\cong} \{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_k$$

είναι ο μηδενικός ομομορφισμός, ο οποίος *δεν είναι επιμορφισμός*.

C.2 ΠΡΟΒΟΛΙΚΟΙ ΚΑΙ ΕΜΒΟΛΙΚΟΙ ΜΟΔΙΟΙ

C.2.1 Ορισμός. Ένας R-μόδιος P καλείται **προβολικός** όταν για κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $f : P \longrightarrow B$ και κάθε επιμορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$ υπάρχει κάποιος (όχι κατ' ανάγκην μοναδικός) $h \in \mathrm{Hom}_R(P,A)$ για τον οποίο ισχύει[2] $g \circ h = f$. Στη γλώσσα των διαγραμμάτων η «προβολικότητα» διατυπώνεται ως εξής: Ένας R-μόδιος P είναι προβολικός εάν και μόνον εάν για κάθε διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ A & \xrightarrow[g]{} & B & \longrightarrow & \{0\} \end{array}$$

[2]Κάθε τέτοιος h καλείται, ιδιαιτέρως, **προβολική ανύψωση** τού f.

με τη γραμμή του ακριβή υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(P, A)$ που το συμπληρώνει:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

C.2.2 Πρόταση. *Υποτιθεμένου ότι η γραμμή τού διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "g'"'] & C \end{tikzcd}$$

είναι ακριβής, ότι ο P είναι προβολικός και ότι $g' \circ f = 0$, υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(P, A)$ με την ιδιότητα $g \circ h = f$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r, "g'"'] & C \end{tikzcd}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $g' \circ f = 0$, έχουμε $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g') = \mathrm{Im}(g)$ και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "\breve{g}"'] & \mathrm{Im}(g) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

έχει ακριβή γραμμή (με τον $\breve{g}$ ορισμένον όπως στο A.3.14 (iii)). Αρκεί λοιπόν η απευθείας εφαρμογή τού ορισμού A.3.25. $\square$

C.2.3 Πρόταση. *Για έναν R-μόδιο P οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο P είναι προβολικός.*

(ii) *Για κάθε επιμορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$ ο*

$$g_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_P, g) : \mathrm{Hom}_R(P, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, B)$$

είναι ωσαύτως επιμορφισμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο ομομορφισμός g_* είναι (εξ ορισμού) επιμορφισμός εάν και μόνον εάν για κάθε $f \in \mathrm{Hom}_R(P, B)$ υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(P, A)$, τέτοιος ώστε να ισχύει $g_*(h) = g \circ h \circ \mathrm{id}_P = g \circ h = f$. Ως εκ τούτου, οι συνθήκες (i) και (ii) είναι ισοδύναμες. (Βλ. εδ. C.2.1.) $\square$

C.2.4 Πρόταση. *Κάθε ελεύθερος R-μόδιος είναι προβολικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω F ένας ελεύθερος R-μόδιος. Εάν ο F είναι τετριμμένος, τότε αυτός είναι προδήλως προβολικός[3]. Ας υποθέσουμε (από εδώ και στο εξής) ότι ο F είναι μη τετριμμένος και ότι $\mathcal{X}$ είναι μια βάση αυτού. Εάν A, B είναι δυο R-μόδιοι, $f \in \mathrm{Hom}_R(F, B)$ και $g : A \longrightarrow B$ ένας επιμορφισμός, τότε ορίζουμε μια απεικόνιση $\theta : \mathcal{X} \longrightarrow A$ ως εξής: Για οιοδήποτε στοιχείο $x \in \mathcal{X}$ έχουμε $f(x) \in B$. Επειδή ο g είναι επιμορφισμός, $\exists y \in A : g(y) = f(x)$. Θέτουμε $\theta\,(x) := y$, $\forall x \in \mathcal{X}$. Κατά το θεώρημα A.6.20 τής «γραμμικής επεκτάσεως» υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $h \in \mathrm{Hom}_R(F, A)$ με $h|_{\mathcal{X}} = \theta$. Έστω τώρα τυχόν στοιχείο $z \in F$. Επειδή το $\mathcal{X}$ είναι μια βάση τού F, υπάρχουν $x_1, ..., x_k \in \mathcal{X}$ και $r_1, ..., r_k \in R$, τέτοια ώστε να ισχύει $z = \sum_{j=1}^{k} r_j x_j$. Κατά συνέπειαν,

$$g(h(z)) = \sum_{j=1}^{k} r_j g(h(x_j)) = \sum_{j=1}^{k} r_j g(\theta(x_j)) = \sum_{j=1}^{k} r_j f(x_j) = f(z),$$

οπότε $g \circ h = f$. Αυτό σημαίνει ότι ο F είναι προβολικός. □

C.2.5 Σημείωση. Υπάρχουν πάμπολλοι προβολικοί R-μόδιοι *που δεν είναι ελεύθεροι*. (Βλ. παραδείγματα C.2.9 (i) και (ii).) Ως εκ τούτου, η κλάση των προβολικών R-μοδίων είναι *ευρύτερη* εκείνης των ελευθέρων.

C.2.6 Πρόταση. *Κάθε ευθύς προσθετέος ενός προβολικού R-μοδίου είναι προβολικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω P ένας προβολικός R-μόδιος ο οποίος παρίσταται ως ευθύ άθροισμα $P = U \oplus U'$ δυο υπομοδίων του U και U'. Έστω $f \in \mathrm{Hom}_R(U, B)$ και έστω τυχών επιμορφισμός R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$. Συμβολίζοντας ως $\iota : U \hookrightarrow P$ τη συνήθη ένθεση και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο P είναι προβολικός, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη κάποιου $\kappa \in \mathrm{Hom}_R(P, A)$ με $g \circ \kappa = f \circ \mathrm{pr}_1$.

$$\begin{tikzcd}
& P = U \oplus U' \arrow[d, shift left, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[ddl, bend right, "\kappa"'] \arrow[dd, bend left=80, "f\circ\mathrm{pr}_1"] & \\
& U \arrow[u, shift left, hook, "\iota"] \arrow[dl, dashed, "h"] \arrow[d, "f"] & \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Επειδή $\mathrm{pr}_1 \circ \iota = \mathrm{id}_U$, θέτοντας $h := \kappa \circ \iota : U \longrightarrow A$ συμπεραίνουμε ότι

$$g \circ h = g \circ \kappa \circ \iota = f \circ \mathrm{pr}_1 \circ \iota = f.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο U είναι προβολικός. □

[3]Εν τοιαύτη περιπτώσει, αρκεί να θεωρήσουμε ως h στον ορισμό C.2.1 τον μηδενικό ομομορφισμό.

C.2.7 Θεώρημα. *Για έναν R-μόδιο P οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*
(i) *Ο P είναι προβολικός.*
(ii) *Εάν M, N είναι R-μόδιοι, τότε κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής*

$$\{0\} \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow \{0\} \tag{C.1}$$

είναι διασπώμενη.
(iii) *Εάν N είναι υπομόδιος ενός R-μοδίου M, τέτοιος ώστε να ισχύει $M/N \cong P$, τότε ο P αποτελεί ευθύ προσθετέο τού M.*
(iv) *Ο P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελευθέρου R-μοδίου.*
(v) *Για κάθε επιμορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$ ο*

$$g_* := \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}_P, g) : \mathrm{Hom}_R(P, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, B)$$

είναι ωσαύτως επιμορφισμός.
(vi) *Για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(P, C) \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & P \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

με ακριβή γραμμή. Επειδή ο P είναι προβολικός, υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ με $g \circ h = \mathrm{id}_P$. Εξ αυτού έπεται ότι κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής (C.1) είναι διασπώμενη. (Βλ. θεώρημα B.1.28.)

(ii)⇒(iii) Εάν N είναι ένας υπομόδιος ενός R-μοδίου M, τέτοιος ώστε να ισχύει $M/N \cong P$, τότε η βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow N \hookrightarrow M \overset{\pi_N^M}{\twoheadrightarrow} M/N \cong P \longrightarrow \{0\}$$

διασπάται στον M, οπότε $M \cong N \oplus P$. (Βλ. θεώρημα B.1.28.)

(iii)⇒(iv) Κατά το πόρισμα A.6.23 ο P είναι ισόμορφος ενός πηλικομοδίου M/N, όπου ο M είναι ελεύθερος. Επομένως ο P είναι είναι ευθύς προσθετέος ενός ελευθέρου R-μοδίου.

(iv)⇒(i) Υποθέτουμε ότι ο P είναι ευθύς προσθετέος ενός ελευθέρου R-μοδίου M. Ο M (ως ελεύθερος) είναι προβολικός. (Βλ. πρόταση C.2.4.) Ως εκ τούτου, ο P, ως ευθύς προσθετέος ενός προβολικού R-μοδίου, είναι προβολικός. (Βλ. πρόταση C.2.6.)

(v)⇔(i) Πρόκειται για την πρόταση C.2.3.

(vi)⇔(v) Τούτο έπεται από το θεώρημα C.1.17. □

C.2.8 Σημείωση. Εάν ο P είναι προβολικός και

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots \tag{C.2}$$

οιαδήποτε ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε η

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2*}} \mathrm{Hom}_R(P, M_{n-1}) \xrightarrow{f_{n-1*}} \mathrm{Hom}_R(P, M_n) \xrightarrow{f_{n*}} \mathrm{Hom}_R(P, M_{n+1}) \xrightarrow{f_{n+1*}} \cdots \tag{C.3}$$

θα είναι ωσαύτως ακριβής, αφού από την ακρίβεια τής (C.2) έπεται η ακρίβεια των

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_n) \overset{\iota_n}{\hookrightarrow} M_n \overset{\check{f}_n}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Im}(f_n) \longrightarrow \{0\},\ \forall n \in \mathbb{Z},$$

και (κατ' επέκταση, μέσω τής συνεπαγωγής C.2.7 (i)⇒(vi)) η ακρίβεια των

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Ker}(f_n)) \xrightarrow{\iota_{n*}} \mathrm{Hom}_R(P, M_n) \xrightarrow{\check{f}_{n*}} \mathrm{Hom}_R(P, \mathrm{Im}(f_n)) \longrightarrow \{0\} \tag{C.4}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Οι (C.4) (*ανασυντιθέμενες σε μία* ακριβή ακολουθία) δίδουν την (C.3).

C.2.9 Παραδείγματα. (i) Εάν $k, l \in \mathbb{N}, k \geq 2, l \geq 2$ και μκδ$(k, l) = 1$, τότε υφίστανται ισομορφισμοί $\mathbb{Z}_{kl}$-μοδίων

$$\mathbb{Z}_{kl} \cong \mathbb{Z}/kl\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l.$$

Οι $\mathbb{Z}_{kl}$-μόδιοι $\mathbb{Z}_k$ και $\mathbb{Z}_l$, ως ευθείς προσθετέοι τού ελευθέρου $\mathbb{Z}_{kl}$-μοδίου $\mathbb{Z}_{kl}$, *είναι προβολικοί*. (Βλ. C.2.7 (i)⇔(iv).) Ωστόσο, *δεν είναι ελεύθεροι*. (Βλ. εδ. A.6.19.)

(ii) Εάν $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, τότε το ιδεώδες $I := \langle 2, 1 + \sqrt{-5} \rangle$ (ως υπομόδιος τού R-μοδίου R) είναι ένας *μη ελεύθερος* R-μόδιος. (Βλ. εδ. A.6.48.) Ωστόσο, *είναι προβολικός*. Πράγματι· εάν F είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος βαθμίδας 2, δηλαδή εάν $F = Rx_1 \oplus Rx_2$ (για κατάλληλα γραμμικώς ανεξάρτητα $x_1, x_2 \in F$) και ορίσουμε τον επιμορφισμό R-μοδίων

$$\varphi : F \longrightarrow I,\ \varphi(r_1x_1 + r_2x_2) := 2r_1 + (1 + \sqrt{-5})r_2,\ \forall (r_1, r_2) \in R \times R,$$

καθώς και τον ομομορφισμό R-μοδίων

$$\psi : I \longrightarrow F,\ \psi(a) := -ax_1 + a(\tfrac{1-\sqrt{-5}}{2})x_2,\ \forall a \in I,$$

τότε[4]

$$(\varphi \circ \psi)(a) = \varphi(-ax_1 + a(\tfrac{1-\sqrt{-5}}{2})x_2) = -2a + \tfrac{a}{2}\underbrace{(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})}_{=6} = a,$$

για κάθε $a \in I$, οπότε $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_I \Longrightarrow F \cong \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus I$ και ο R-μόδιος I είναι όντως προβολικός (ως ευθύς προσθετέος ενός ελευθέρου R-μοδίου).

(iii) Εάν $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, τότε ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_k$ *δεν είναι ούτε ελεύθερος ούτε προβολικός*. (Βλ. εδ. A.6.15 (i), C.1.19 και την ισοδυναμία των συνθηκών (i) και (v) τού θεωρήματος C.2.7.)

Από το θεώρημα C.2.7 προκύπτει και ένα *μερικό αντίστροφο* τής C.2.4.

C.2.10 Πόρισμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., τότε κάθε προβολικός R-μόδιος είναι ελεύθερος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν M είναι τυχών προβολικός R-μόδιος, όπου R μια Π.Κ.Ι., τότε ο M, όντας (κατά το θεώρημα C.2.7) ευθύς προσθετέος (και, ως εκ τούτου, *υπομόδιος*) ενός ελευθέρου R-μοδίου, είναι κατ' ανάγκην ελεύθερος (ένεκα τού θεωρήματος A.6.47). □

C.2.11 Πόρισμα. *Εάν R είναι μια Π.Κ.Ι., τότε κάθε υπομόδιος ενός προβολικού R-μοδίου είναι προβολικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή (λόγω τής προτάσεως C.2.4 και τού πορίσματος C.2.10) οι έννοιες *ελεύθερος* και *προβολικός* είναι ισοδύναμες για μοδίους οριζόμενους υπεράνω Π.Κ.Ι., ο ισχυρισμός είναι αληθής δυνάμει τού θεωρήματος A.6.47. □

C.2.12 Σημείωση. Εάν ο R δεν είναι Π.Κ.Ι., τότε το πόρισμα C.2.11 παύει να ισχύει. Επί παραδείγματι, εάν $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, τότε ο R (ως ελεύθερος R-μόδιος) είναι προβολικός. Ωστόσο, ο υπομόδιός του $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *δεν είναι προβολικός*, διότι εάν ήταν, τότε για τον επιμορφισμό

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \ni \lambda + 4\mathbb{Z} \overset{g}{\longmapsto} 2\lambda + 4\mathbb{Z} = 2(\lambda + 4\mathbb{Z}) \in 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

θα υπήρχε $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ που θα καθιστούσε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}"] & \\
\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r, "g"'] & 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

[4]Εν προκειμένω, εφαρμόζουμε το θεώρημα B.1.28 για τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \hookrightarrow F \overset{\varphi}{\longrightarrow} I \longrightarrow \{0\}\,.$$

μεταθετικό και *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{Z}$ θα ίσχυε

$$\begin{aligned} 2\lambda + 4\mathbb{Z} &= \mathrm{id}_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(2\lambda + 4\mathbb{Z}) = g(h(2\lambda + 4\mathbb{Z})) = 2(h(2\lambda + 4\mathbb{Z})) \\ &= h(2(2\lambda + 4\mathbb{Z})) = h(4\lambda + 4\mathbb{Z}) = h(4\mathbb{Z}) = h(0_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}) = 0_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} = 4\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ήτοι κάτι που θα μας οδηγούσε σε άτοπο[5].

C.2.13 Πρόταση. *Για μια οικογένεια R-μοδίων $(P_j)_{j\in J}$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) *Το ευθύ άθροισμα $P := \bigoplus_{j\in J} P_j$ είναι προβολικός R-μόδιος.*

(ii) *Ο P_j είναι προβολικός R-μόδιος για κάθε $j \in J$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i)⇒(ii) Εάν ο P είναι προβολικός, τότε (κατά το θεώρημα C.2.7, (i)⇒(iv)) υπάρχει ένας ελεύθερος R-μόδιος F και ένας υπομόδιος P' αυτού, ούτως ώστε να ισχύει $F = P \oplus P'$. Επομένως,

$$F = \left(\bigoplus_{j\in J} P_j\right) \oplus P' \underset{\text{A.5.13}}{\cong} P_j \oplus \left(\left(\bigoplus_{\lambda\in J\smallsetminus\{j\}} P_\lambda\right) \oplus P'\right), \ \forall j \in J,$$

και ο P_j είναι προβολικός για κάθε $j \in J$. (Βλ. C.2.7, (iv)⇒(i).)

(ii)⇒(i) Εάν ο P_j είναι προβολικός για κάθε $j \in J$, τότε υπάρχει (κατά το θεώρημα C.2.7, (i)⇒(iv)) ένας ελεύθερος R-μόδιος F_j και ένας υπομόδιος P'_j αυτού, ούτως ώστε να ισχύει $F_j = P_j \oplus P'_j$. Επομένως,

$$\bigoplus_{j\in J} F_j = \bigoplus_{j\in J} (P_j \oplus P'_j) \underset{\text{A.5.13}}{\cong} P \oplus \left(\bigoplus_{j\in J} P'_j\right),$$

με τον $\bigoplus_{j\in J} F_j$ ελεύθερο (ως ευθύ άθροισμα ελευθέρων, βλ. A.6.17). Αρκεί λοιπόν να εφαρμοσθεί εκ νέου η συνεπαγωγή (iv)⇒(i) τού θεωρήματος C.2.7. □

C.2.14 Ορισμός. Ένας R-μόδιος Q καλείται **εμβολικός** όταν για κάθε ομομορφισμό R-μοδίων $f : A \longrightarrow Q$ και για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$ υπάρχει κάποιος (όχι κατ' ανάγκην μοναδικός) $h \in \mathrm{Hom}_R(B, Q)$ για τον οποίο ισχύει $h \circ g = f$. Στη γλώσσα των διαγραμμάτων η «εμβολικότητα» διατυπώνεται ως εξής: Ένας R-μόδιος Q είναι εμβολικός εάν και μόνον εάν για κάθε διάγραμμα R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ & Q & \end{tikzcd}$$

[5]Π.χ., για $\lambda = 1$, έχουμε $2 \notin 4\mathbb{Z}$.

με τη γραμμή του ακριβή υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(B, Q)$ που το συμπληρώνει:

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

C.2.15 Πρόταση. *Υποτιθεμένου ότι η γραμμή τού διαγράμματος R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g'"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \\ & Q & \end{tikzcd}$$

είναι ακριβής, ότι ο Q είναι εμβολικός και ότι $f \circ g' = 0$, υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(C, Q)$ με την ιδιότητα $h \circ g = f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g'"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & C \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Έστω $E := \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(g')$. Επειδή $f \circ g' = 0 \Rightarrow E \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, η πρόταση A.4.6 μας πληροφορεί ότι υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός R-μοδίων $\beta : B/E \longrightarrow Q$, τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα $\beta \circ \pi_E^B = f$, καθώς και ότι υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος *μονομορφισμός* R-μοδίων $\alpha : B/E \longrightarrow C$, τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα $\alpha \circ \pi_E^B = g$. Επειδή ο Q είναι εμβολικός, υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(C, Q)$ με την ιδιότητα $h \circ \alpha = \beta$. Η απόδειξη αποπερατούται παρατηρώντας ότι $f = \beta \circ \pi_E^B = (h \circ \alpha) \circ \pi_E^B = h \circ (\alpha \circ \pi_E^B) = h \circ g$. □

C.2.16 Πρόταση. *Για έναν R-μόδιο Q οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο Q είναι εμβολικός.*

(ii) *Για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$ ο*

$$g^* := \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{id}_Q) : \mathrm{Hom}_R(B, Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, Q)$$

είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη. Ο ομομορφισμός g^* είναι (εξ ορισμού) επιμορφισμός εάν και μόνον εάν για κάθε $f \in \mathrm{Hom}_R(A, Q)$ υπάρχει $h \in \mathrm{Hom}_R(B, Q)$, τέτοιος ώστε να ισχύει $g^*(h) = \mathrm{id}_Q \circ h \circ g = h \circ g = f$. Ως εκ τούτου, οι συνθήκες (i) και (ii) είναι ισοδύναμες. (Βλ. εδ. C.2.14.) □

C.2.17 Παραδείγματα. (i) Κάθε διανυσματικός χώρος ορισμένος υπεράνω ενός σώματος K είναι εμβολικός K-μόδιος.

(ii) Οι (προσθετικές, αβελιανές) ομάδες $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z}(p^\infty)$ (βλ. εδ. A.3.21 (ii)) είναι εμβολικοί $\mathbb{Z}$-μόδιοι. Αντιθέτως, ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, δεν είναι εμβολικός.

C.2.18 Θεώρημα. *Κάθε R-μόδιος είναι ισόμορφος με έναν υπομόδιο ενός εμβολικού R-μοδίου.*

Απόδειξη. Βλ. Mac Lane [69], Theorem 7.4, σελ. 93-94. □

C.2.19 Πρόταση. *Κάθε ευθύς προσθετέος ενός εμβολικού R-μοδίου είναι εμβολικός.*

Απόδειξη. Έστω Q ένας εμβολικός R-μόδιος ο οποίος παρίσταται ως ευθύ άθροισμα $Q := U \oplus U'$ δυο υπομοδίων του U και U'. Έστω $f \in \mathrm{Hom}_R(A, U)$ και έστω τυχών μονομορφισμός R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$. Συμβολίζοντας ως $j : U \hookrightarrow Q$ τη συνήθη ένθεση και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι ο Q είναι εμβολικός, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη κάποιου $\theta \in \mathrm{Hom}_R(B, Q)$ με $\theta \circ g = j \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend right=60, "j\circ f"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[ddl, bend left, "\theta"] \\
& U \arrow[d, shift left, "j"] & \\
& Q = U \oplus U' \arrow[u, shift left, "\mathrm{pr}_1"] &
\end{tikzcd}$$

Επειδή $\mathrm{pr}_1 \circ j = \mathrm{id}_U$, θέτοντας $h := \mathrm{pr}_1 \circ \theta : B \longrightarrow U$ συμπεραίνουμε ότι

$$h \circ g = \mathrm{pr}_1 \circ \theta \circ g = \mathrm{pr}_1 \circ j \circ f = f.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο U είναι εμβολικός. □

C.2.20 Πρόταση. *Για μια οικογένεια R-μοδίων $(Q_j)_{j \in J}$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Το ευθύ γινόμενο $Q := \prod_{j \in J} Q_j$ είναι εμβολικός R-μόδιος.*

(ii) *Ο Q_j είναι εμβολικός R-μόδιος για κάθε $j \in J$.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Εάν ο Q είναι εμβολικός, $f_j \in \mathrm{Hom}_R(A, Q_j), \forall j \in J$, και $g : A \longrightarrow B$ τυχών μονομορφισμός R-μοδίων, τότε θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f_j"'] & B \arrow[dl, dashed, "h_j"'] \arrow[d, "\theta_j"] \\
& Q_j \arrow[r, shift left, "\iota_j"] & Q \arrow[l, shift left, "\mathrm{pr}_j"]
\end{tikzcd}$$

Προφανώς, $\exists \theta_j \in \mathrm{Hom}_R(B, Q) : \theta_j \circ g = \iota_j \circ f_j, \forall j \in J$. Θεωρώντας τή σύνθεση $h_j := \mathrm{pr}_j \circ \theta_j$ λαμβάνουμε

$$h_j \circ g = (\mathrm{pr}_j \circ \theta_j) \circ g = \mathrm{pr}_j \circ (\theta_j \circ g) = \mathrm{pr}_j \circ (\iota_j \circ f_j) = (\mathrm{pr}_j \circ \iota_j) \circ f_j = f_j, \forall j \in J.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο Q_j είναι εμβολικός R-μόδιος για κάθε $j \in J$.

(ii)⇒(i) Εάν ο Q_j είναι εμβολικός R-μόδιος για κάθε $j \in J$, $f \in \mathrm{Hom}_R(A, Q)$ και $g : A \longrightarrow B$ τυχών μονομορφισμός R-μοδίων, τότε θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "\eta_j"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ & Q \arrow[r, "\mathrm{pr}_j"'] & Q_j \end{tikzcd}$$

Προφανώς, $\exists \eta_j \in \mathrm{Hom}_R(B, Q_j) : \eta_j \circ g = \mathrm{pr}_j \circ f, \forall j \in J$. Θεωρώντας τόν ομομορφισμό $h : B \longrightarrow Q,\ \ b \longmapsto h(b) := (\eta_j(b))_{j \in J}$, διαπιστώνουμε ότι

$$(h \circ g)(a) = (\eta_j(g(a)))_{j \in J} = (\mathrm{pr}_j(f(a)))_{j \in J} = f(a),\ \forall a \in A.$$

Άρα ο Q είναι εμβολικός. □

C.2.21 Σημείωση. (i) Το *ευθύ άθροισμα* οιασδήποτε *πεπερασμένης* οικογενείας εμβολικών R-μοδίων είναι εμβολικός R-μόδιος (αφού το ευθύ άθροισμα πεπερασμένου πλήθους R-μοδίων ισούται με το ευθύ γινόμενο αυτών).

(ii) Το *ευθύ άθροισμα* τυχούσας οικογενείας εμβολικών R-μοδίων είναι εμβολικός R-μόδιος *εάν και μόνον εάν* ο R είναι *ναιτεριανός δακτύλιος*. (Βλ. Rotman [103], Proposition 3.31, σελ. 119, και Theorem 3.39, σελ. 123-124.)

C.2.22 Θεώρημα. *Για έναν R-μόδιο Q οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) *Ο Q είναι εμβολικός.*

(ii) *Εάν M, N είναι R-μόδιοι, τότε κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής*

$$\{0\} \longrightarrow Q \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow \{0\} \tag{C.5}$$

είναι διασπώμενη.

(iii) *Ο Q είναι ευθύς προσθετέος ενός εμβολικού R-μοδίου.*

(iv) *Για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $g : A \longrightarrow B$ ο*

$$g^* := \mathrm{Hom}_R(g, \mathrm{id}_Q) : \mathrm{Hom}_R(B, Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A, Q)$$

είναι επιμορφισμός.

(v) *Για κάθε βραχεία ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\{0\} \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \{0\}$$

η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,Q) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B,Q) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A,Q) \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i)⇒(ii) Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r] & Q \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Q"'] & M \\ & Q & \end{tikzcd}$$

με ακριβή γραμμή. Επειδή ο Q είναι εμβολικός, $\exists h \in \mathrm{Hom}_R(M,Q) : h \circ f = \mathrm{id}_Q$. Εξ αυτού έπεται ότι κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία τής μορφής (C.5) είναι διασπώμενη. (Βλ. θεώρημα B.1.28.)

(ii)⇒(iii) Σύμφωνα με το θεώρημα C.2.18, υπάρχει μονομορφισμός $f : Q \hookrightarrow Q'$ με τον Q' εμβολικό. Ως εκ τούτου, έχουμε τη δυνατότητα σχηματισμού τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας $\{0\} \longrightarrow Q \overset{f}{\hookrightarrow} Q' \xrightarrow{\pi^{Q'}_{\mathrm{Im}(f)}} Q'/\,\mathrm{Im}(f) \longrightarrow \{0\}$. Επειδή αυτή διασπάται (εξ υποθέσεως) στον Q', ο $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\pi^{Q'}_{\mathrm{Im}(f)}) \cong Q$ είναι ευθύς προσθετέος τού Q'.

(iii)⇒(i) Πρόκειται για την πρόταση C.2.19.

(iv)⇔(i) Πρόκειται για την πρόταση C.2.16.

(iv)⇔(v) Άμεση συνέπεια τού θεωρήματος C.1.14. □

C.2.23 Σημείωση. Εάν ο Q είναι εμβολικός και

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

οιαδήποτε ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε η

$$\cdots \xrightarrow{f^*_{n+1}} \mathrm{Hom}_R(M_{n+1},Q) \xrightarrow{f^*_n} \mathrm{Hom}_R(M_n,Q) \xrightarrow{f^*_{n-1}} \mathrm{Hom}_R(M_{n-1},Q) \xrightarrow{f^*_{n-2}} \cdots$$

θα είναι ωσαύτως ακριβής. (Πρβλ. σημείωση C.2.8.)

C.2.24 Θεώρημα. (Κριτήριο τού Baer.) *Ένας R-μόδιος M είναι εμβολικός εάν και μόνον εάν κάθε ομομορφισμός R-μοδίων $f : I \longrightarrow M$ από ένα ιδεώδες I τού R στον M μπορεί να επεκταθεί σε έναν ομομορφισμό R-μοδίων $\tilde{f} : R \longrightarrow M$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Βλ. Rotman [103], Theorem 3.30, σελ. 118-119. □

$\boxed{\text{C.3}}$ ΤΑΝΥΣΤΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

C.3.1 Ορισμός. Δοθέντων τριών R-μοδίων M, N και L, μια απεικόνιση

$$\beta : M \times N \longrightarrow L$$

καλείται R-**διγραμμική** όταν ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) $\beta(r_1x_1 + r_2x_2, y) = r_1\beta(x_1, y) + r_2\beta(x_2, y)$,
(ii) $\beta(x, r_1y_1 + r_2y_2) = r_1\beta(x, y_1) + r_2\beta(x, y_2)$,
για οιαδήποτε $r_1, r_2 \in R$, $x, x_1, x_2 \in M$ και $y, y_1, y_2 \in N$. Χρησιμοποιούμενος συμβολισμός:

$$\boxed{\mathrm{Bil}_R(M, N; L) := \{\, \beta : M \times N \longrightarrow L |\, \beta \ R\text{-διγραμμική}\} \,.}$$

C.3.2 Παρατήρηση. Το σύνολο $\mathrm{Bil}_R(M, N; L)$ είναι εφοδιασμένο κατά τρόπο φυσικό με τη δομή ενός R-μοδίου, καθότι μπορεί να ιδωθεί ως υπομόδιος τού $L^{M\times N}$. (Βλ. A.2.5 (viii).)

C.3.3 Σημείωση. Εάν M, L είναι δυο R-μόδιοι και $f \in \mathrm{Hom}_R(M, L)$, τότε, ως γνωστόν, ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(f)$ τής f είναι υπομόδιος τού M και η εικόνα $\mathrm{Im}(f)$ τής f είναι υπομόδιος τού L. (Βλ. A.3.5 (ii) και (iv).) Από την άλλη μεριά, δοθέντων τριών R-μοδίων M, N και L, οι R-διγραμμικές απεικονίσεις $\beta \in \mathrm{Bil}_R(M, N; L)$ ενδέχεται να *μην διατηρούν πλήρως* τη δομή τού R-μοδίου, υπό την έννοια τού ότι είναι δυνατόν τόσον το σύνολο

$$\{\, (x, y) \in M \times N |\ \beta\,(x, y) = 0_L\} \subseteq M \times N$$

όσον και η εικόνα

$$\mathrm{Im}\,(\beta) = \{\beta\,(x, y) \ \mid (x, y) \in M \times N\} \subseteq L$$

μιας τέτοιας β *να μην είναι υπομόδιοι*.

C.3.4 Παραδείγματα. (i) Η απεικόνιση

$$\beta : R \times R \longrightarrow R,\ \ (r, s) \longmapsto \beta\,((r, s)) := rs,$$

είναι R-διγραμμική· ωστόσο, εάν υποθέσουμε ότι ο R είναι ακεραία περιοχή, τότε το σύνολο

$$\{\, (r, s) \in R \times R \mid \ \beta\,((r, s)) = 0_R\} = (R \times \{0_R\}) \cup (\{0_R\} \times R)$$

δεν είναι υπομόδιος τού $R \times R$. (Προφανώς, το $(1_R, 0_R) + (0_R, 1_R) = (1_R, 1_R)$ δεν ανήκει σε αυτό το σύνολο.)

(ii) Έστω K ένα σώμα. Η απεικόνιση $\beta : K^2 \times K^2 \longrightarrow K^4$, όπου

$$\beta\left(\left(a,b\right),\left(c,d\right)\right) := \left(ab, cd, ad, ad-bc\right), \ \ \forall \left(\left(a,b\right),\left(c,d\right)\right) \in K^2 \times K^2,$$

είναι K-διγραμμική. Η εικόνα $\mathrm{Im}\left(\beta\right)$ τής β περιέχει τα στοιχεία τής βάσεως

$$\mathcal{X} := \{(1_K, 0_K, 0_K, 0_K), (0_K, 1_K, 0_K, 0_K), (0_K, 0_K, 1_K, 1_K), (0_K, 0_K, 0_K, 1_K)\}$$

τού K-διανυσματικού χώρου K^4, διότι

$$\begin{cases} \beta^{-1}\left((1_K, 0_K, 0_K, 0_K)\right) = \left\{ \left(\left(\lambda, \lambda^{-1}\right), (0,0)\right) \mid \lambda \in K \smallsetminus \{0_K\} \right\}, \\ \beta^{-1}\left((0_K, 1_K, 0_K, 0_K)\right) = \left\{ \left((0,0), \left(\lambda, \lambda^{-1}\right)\right) \mid \lambda \in K \smallsetminus \{0_K\} \right\}, \\ \beta^{-1}\left((0_K, 0_K, 1_K, 1_K)\right) = \left\{ \left((\lambda,0), (0,\lambda^{-1})\right) \mid \lambda \in K \smallsetminus \{0_K\} \right\}, \\ \beta^{-1}\left((0_K, 0_K, 0_K, 1_K)\right) = \left\{ \left((0,\lambda), (-\lambda^{-1},0)\right) \mid \lambda \in K \smallsetminus \{0_K\} \right\}, \end{cases}$$

αλλά[6] $\beta^{-1}\left((0_K, 0_K, 1_K, 0_K)\right) = \varnothing \Rightarrow (0_K, 0_K, 1_K, 0_K) \notin \mathrm{Im}\left(\beta\right)$. Ως εκ τούτου, η $\mathrm{Im}\left(\beta\right)$ δεν είναι γραμμικός υπόχωρος[7] τού K^4.

C.3.5 Σημείωση. Λόγω αυτής τής *ιδιόρρυθμης συμπεριφοράς* των R-διγραμμικών απεικονίσεων, εάν μας δοθούν δυο R-μόδιοι M, N, κατασκευάζουμε έναν *ειδικό* R-μόδιο W, καθώς και μια *ειδική* R-διγραμμική απεικόνιση

$$\varphi : M \times N \longrightarrow W,$$

η οποία προσδιορίζει μια *R-γραμμική* απεικόνιση $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R\left(W, Z\right)$ για *οιαδήποτε* $\beta \in \mathrm{Bil}_R(M, N; W)$ (όπου Z τυχών R-μόδιος), ούτως ώστε η $\widetilde{\beta}$ να περιγράφει *ουσιώδεις ιδιότητες* τής β. Αυτό το ζεύγος (W, φ) καλείται «τανυστικό γινόμενο» των M και N, και -πέραν τού ότι πληροί την προαναφερθείσα «καθολική συνθήκη»- είναι και μονοσημάντως ορισμένο. (Βλ. θεωρήματα C.3.8 και C.3.9).

C.3.6 Ορισμός. Έστω ότι M και N είναι δυο R-μόδιοι. Κάθε ζεύγος (W, φ), αποτελούμενο από έναν R-μόδιο W και μια R-διγραμμική απεικόνιση

$$\varphi : M \times N \longrightarrow W,$$

καλείται **τανυστικό γινόμενο των** M **και** N **υπεράνω τού** R όταν πληροί την ακόλουθη *καθολική συνθήκη*: Για κάθε R-διγραμμική απεικόνιση β από τον $M \times N$

[6] Οι εξισώσεις $ab = 0_K, cd = 0_K, ad = 1_K, bc = -1_K$ δεν διαθέτουν κοινές λύσεις $\left(\left(a,b\right),\left(c,d\right)\right)$ εντός τού $K^2 \times K^2$.

[7] Εάν η $\mathrm{Im}\left(\beta\right)$ ήταν γραμμικός υπόχωρος τού K-διαν. χώρου $V = K^4$, τότε $\mathrm{Im}\left(\beta\right) = \mathrm{Lin}_K\left(\mathrm{Im}\left(\beta\right)\right)$ και

$$\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Im}\left(\beta\right) \subseteq V \Longrightarrow V = \mathrm{Lin}_K\left(\mathcal{X}\right) \subseteq \mathrm{Lin}_K\left(\mathrm{Im}\left(\beta\right)\right) \subseteq \mathrm{Lin}_K\left(V\right) = V,$$

οπότε θα είχαμε $\mathrm{Im}\left(\beta\right) = V$, πράγμα άτοπο, διότι $(0_K, 0_K, 1_K, 0_K) \notin \mathrm{Im}\left(\beta\right)$.

σε έναν *τυχόντα* R-μόδιο Z υπάρχει ένας *μονοσημάντως ορισμένος* ομομορφισμός $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(W, Z)$, ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\beta"'] & W \arrow[d, dotted, "\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(W,Z)"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

μεταθετικό, ήτοι

$$\beta(x, y) = \widetilde{\beta}\left(\varphi\left(x, y\right)\right), \ \ \forall\left(x, y\right) \in M \times N.$$

(Η πρόταση C.3.7 μας παρέχει δύο χρηστικές ιδιότητες για το ζεύγος (W, φ), οι οποίες, όταν ισχύουν από κοινού, ισοδυναμούν με την ως άνω καθολική συνθήκη. Εξάλλου, μέσω τού θεωρήματος C.3.11 αποδεικνύεται *κατασκευαστικώς* η ύπαρξη τανυστικού γινομένου για *οιουσδήποτε* R-μοδίους M και N. Προηγείται το θεώρημα C.3.8, το οποίο μας εγγυάται τη μοναδικότητά του.)

C.3.7 Πρόταση. *Ένα ζεύγος (W, φ), αποτελούμενο από έναν R-μόδιο W και μια R-διγραμμική απεικόνιση $\varphi : M \times N \longrightarrow W$, είναι ένα τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M και N εάν και μόνον εάν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *Η εικόνα $\mathrm{Im}\,(\varphi)$ τής φ παράγει τον W, ήτοι ισχύει $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = W$.*

(ii) *Για κάθε R-διγραμμική απεικόνιση β από τον $M \times N$ σε έναν τυχόντα R-μόδιο Z υπάρχει ένας ομομορφισμός $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(W, Z)$, τέτοιος ώστε $\beta = \widetilde{\beta} \circ \varphi$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. "$\Rightarrow$" Έστω (W, φ) ένα τανυστικό γινόμενο των M και N. Η ιδιότητα (ii) περιέχεται στον ορισμό C.3.6. Για την επαλήθευση τής (i) θεωρούμε τον υπομόδιο $Z := \mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi))$ τού W και την R-διγραμμική απεικόνιση

$$\beta : M \times N \longrightarrow Z, \ (x, y) \longmapsto \beta(x, y) := \varphi(x, y).$$

Η καθολική συνθήκη που πληροί το τανυστικό γινόμενο των M και N εγγυάται την ύπαρξη μοναδικού $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(W, Z)$ ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, dotted, bend left, "\widetilde{\beta}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ M \times N \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\beta"'] & & Z \arrow[ul, hook', "\iota"'] \end{tikzcd}$$

μεταθετικό (όπου $\iota : Z \hookrightarrow W$ η συνήθης ένθεση). Επομένως,

$$\widetilde{\beta} \circ \varphi = \beta \Rightarrow (\iota \circ \widetilde{\beta}) \circ \varphi = \iota \circ (\widetilde{\beta} \circ \varphi) = \iota \circ \beta = \varphi = \ \mathrm{id}_W \circ \varphi$$

$$\Rightarrow \iota \circ \widetilde{\beta} = \ \mathrm{id}_W \ \ \text{(λόγω τής μοναδικότητας τέτοιου ομομορφισμού, βλ. C.3.6)}$$

$$\underset{\text{A.3.22}}{\Longrightarrow} [\text{η } \iota \text{ είναι επίρριψη}] \Rightarrow Z = \mathrm{Im}(\iota) = W.$$

"$\Leftarrow$" Αρκεί να αποδείξουμε τη μοναδικότητα τού ομομορφισμού $\widetilde{\beta}$ με την ιδιότητα $\beta = \widetilde{\beta} \circ \varphi$. Εάν υπάρχει $\widetilde{\beta}' \in \mathrm{Hom}_R(W, Z)$ με $\beta = \widetilde{\beta}' \circ \varphi$, τότε

$$\widetilde{\beta}' \circ \varphi = \widetilde{\beta} \circ \varphi \Rightarrow \widetilde{\beta}'\Big|_{\mathrm{Im}(\varphi)} = \widetilde{\beta}\Big|_{\mathrm{Im}(\varphi)} \Rightarrow \widetilde{\beta}' = \widetilde{\beta}$$

(λόγω τής (i)). $\square$

C.3.8 Θεώρημα. (Μοναδικότητα τού τανυστικού γινομένου) *Εάν τα* (W, φ) *και* (W', φ') *είναι τανυστικά γινόμενα των* R*-μοδίων* M *και* N*, τότε υπάρχει ένας μονοσημάντως ορισμένος ισομορφισμός* $h : W \xrightarrow{\cong} W'$*, ούτως ώστε να ισχύει* $h \circ \varphi = \varphi'$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από την καθολική συνθήκη που πληρούν τα τανυστικά γινόμενα (W, φ) και (W', φ') (βλ. C.3.6)

$$[\exists h \in \mathrm{Hom}_R(W, W') : h \circ \varphi = \varphi'] \text{ και } [\exists h' \in \mathrm{Hom}_R(W', W) : h' \circ \varphi' = \varphi]$$

επί τη βάσει τού ακόλουθου μεταθετικού διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} W & M \times N \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi'"] & W \arrow[dl, bend left, "h"] \\ & W' \arrow[ul, bend left, "h'"] & \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[from=1-3, to=2-2, phantom, "\circlearrowright"] \end{tikzcd}$$

αφού θέσουμε $Z := W', \beta := \varphi'$ και $\widetilde{\beta} := h$ στην πρώτη περίπτωση, και, αντιστοίχως, $Z := W, \beta := \varphi$ και $\widetilde{\beta} := h'$ στη δεύτερη περίπτωση. Επομένως,

$$\left.\begin{array}{r} (h' \circ h) \circ \varphi = \varphi = \mathrm{id}_W \circ \varphi, \\ h' \circ h \in \mathrm{Hom}_R(W, W) \\ \mathrm{id}_W \in \mathrm{Hom}_R(W, W) \end{array}\right\} \Rightarrow h' \circ h = \mathrm{id}_W$$

(εξαιτίας τής μοναδικότητας τού ομομορφισμού με την εν λόγω ιδιότητα) και κατ' αναλογίαν $h \circ h' = \mathrm{id}_{W'}$. Αυτό σημαίνει ότι αμφότεροι οι h, h' είναι ισομορφισμοί με $h' = h^{-1}$. $\square$

C.3.9 Σημείωση. (i) Εάν το (W, φ) είναι ένα τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M και N και $g : W \xrightarrow{\cong} Z$ ένας ισομορφισμός R-μοδίων, τότε, με ανάλογη συλλογιστική, δείχνουμε ότι *και το* $(Z, g \circ \varphi)$ είναι ένα τανυστικό γινόμενο των M και N.

(ii) Κατ' ουσίαν, το θεώρημα C.3.8 μας πληροφορεί ότι ένα τανυστικό γινόμενο (W, φ) των M και N, εφόσον υπάρχει, είναι *μονοσημάντως ορισμένο* «μέχρις ισομορφισμού». Μάλιστα, όπως θα δούμε αργότερα (στο εδ. C.5.37), στην ειδική περίπτωση κατά την οποία αμφότεροι οι M και N είναι ελεύθεροι και πεπερασμένως παραγόμενοι, υπάρχει και η δυνατότητα επιλογής ενός «καλού εκπροσώπου» από την κλάση των (ανά δύο ισομόρφων) ζευγών (W, φ).

C.3.10 Ορισμός. Έστω ότι οι M και N είναι δυο R-μόδιοι. Θεωρούμε τον ελεύθερο R-μόδιο $R^{(M\times N)}$ με το σύνολο

$$\operatorname{Im}(\delta) = \left\{ \delta_{(x,y)} \;\middle|\; (x,y) \in M \times N \right\}$$

ως μια βάση του, όπου η δ είναι η ενριπτική απεικόνιση

$$\delta : M \times N \longrightarrow R^{(M\times N)}, \;\; (x,y) \longmapsto \delta_{(x,y)},$$

με

$$M \times N \ni (x,y) \longmapsto \delta_{(x,y)}(a,b) := \begin{cases} 1_R, & \text{όταν } (x,y) = (a,b), \\ 0_R, & \text{όταν } (x,y) \neq (a,b). \end{cases}$$

(Βλ. A.6.5 και A.6.12.) Εν συνεχεία ορίζουμε τον υπομόδιο $\Xi_{M,N}(R)$ τού $R^{(M\times N)}$ τον παραγόμενο από τα στοιχεία τής μορφής

(i) $\delta_{(r_1 x + r_2 x', y)} - r_1\, \delta_{(x,y)} - r_2\, \delta_{(x',y)}$, $(x,x',y) \in M \times M \times N$, $(r_1,r_2) \in R \times R$, και
(ii) $\delta_{(x, r_1 y + r_2 y')} - r_1\, \delta_{(x,y)} - r_2\, \delta_{(x,y')}$, $(x,y,y') \in M \times N \times N$, $(r_1,r_2) \in R \times R$,

και συμβολίζουμε απλώς ως π τον φυσικό επιμορφισμό

$$\pi^{R^{(M\times N)}}_{\Xi_{M,N}(R)} : R^{(M\times N)} \longrightarrow R^{(M\times N)} / \,\Xi_{M,N}(R).$$

Τώρα πλέον έχουμε στη διάθεσή μας όλα εκείνα τα τεχνικά μέσα, τα οποία θα απαιτηθούν για την *κατασκευή* τανυστικού γινομένου για *οιουσδήποτε* R-μοδίους M και N.

C.3.11 Θεώρημα. (Ύπαρξη τού τανυστικού γινομένου)
Για οιουσδήποτε R-μοδίους M και N, το ζεύγος (W,φ), όπου

$$\boxed{W := R^{(M\times N)} / \,\Xi_{M,N}(R), \quad \varphi := \pi \circ \delta} \tag{C.6}$$

αποτελεί τανυστικό γινόμενο των M και N.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αυτή θα παρουσιασθεί σε τρία διαδοχικά βήματα.

Βήμα 1ο. Η απεικόνιση $\varphi := \pi \circ \delta : M \times N \longrightarrow W$ είναι *R-διγραμμική*. Πράγματι· για οιαδήποτε $r_1, r_2 \in R$, $x_1, x_2 \in M$ και $y \in N$ έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi(r_1x_1 + r_2x_2, y) = \delta_{(r_1x_1+r_2x_2,y)} + \Xi_{M,N}(R), \\[1ex] r_1\varphi(x_1,y) + r_2\varphi(x_2,y) = r_1\delta_{(x_1,y)} + r_2\delta_{(x_2,y)} + \Xi_{M,N}(R), \\[1ex] \text{C.3.10} \Rightarrow \delta_{(r_1x_1+r_2x_2,y)} - (r_1\delta_{(x_1,y)} + r_2\delta_{(x_2,y)}) \in \Xi_{M,N}(R). \end{array} \right\}$$

Εξ αυτών έπεται ότι $\varphi(r_1x_1 + r_2x_2, y) = r_1\varphi(x_1,y) + r_2\varphi(x_2,y)$. Παρομοίως, για οιαδήποτε $r_1, r_2 \in R$, $x \in M$ και $y_1, y_2 \in N$,

$$\varphi(x, r_1y_1 + r_2y_2) = r_1\varphi(x,y_1) + r_2\varphi(x,y_2).$$

Βήμα 2ο. Έστω Z τυχών R-μόδιος και έστω $\beta \in \mathrm{Bil}_R(M, N; Z)$. Κατόπιν διπλής εφαρμογής τής καθολικής συνθήκης που πληροί ο ελεύθερος R-μόδιος $(R^{(M\times N)}, \delta)$ επί τού $M \times N$ για τις απεικονίσεις φ και β (βλ. A.6.1 και A.6.5) λαμβάνουμε μονοσημάντως ορισμένους

$$\overline{\varphi} \in \mathrm{Hom}_R(R^{(M\times N)}, W) : \overline{\varphi} \circ \delta = \varphi \;\text{ και }\; \overline{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(R^{(M\times N)}, Z) : \overline{\beta} \circ \delta = \beta.$$

Σημειωτέον ότι $\overline{\varphi} = \pi$ (λόγω τής μοναδικότητας τού $\overline{\varphi}$ με αυτήν την ιδιότητα, καθόσον $\pi \circ \delta =: \varphi$). Ως εκ τούτου, προκύπτει το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
 & M \times N \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
R^{(M\times N)} \arrow[uur, bend left, "\overline{\varphi}=\pi"] \arrow[rr, "\overline{\beta}"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Βήμα 3ο. Από την R-διγραμμικότητα τής β έπεται ότι $\Xi_{M,N}(R) \subseteq \mathrm{Ker}(\overline{\beta})$. Λόγω αυτού τού εγκλεισμού είναι δυνατή η εφαρμογή τής καθολικής ιδιότητας A.4.6 (i) για τον πηλικομόδιο W στον $\overline{\beta}$ και η απόκτηση ενός και μόνον

$$\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(W, Z) : \widetilde{\beta} \circ \pi = \widetilde{\beta} \circ \overline{\varphi} = \overline{\beta}.$$

Προφανώς, $\widetilde{\beta} \circ \varphi = \widetilde{\beta} \circ (\overline{\varphi} \circ \delta) = (\widetilde{\beta} \circ \overline{\varphi}) \circ \delta = \overline{\beta} \circ \delta = \beta.$

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[ddr, dashed, bend left, "\widetilde{\beta}"] & \\
 & M \times N \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
R^{(M\times N)} \arrow[uur, bend left, "\overline{\varphi}=\pi"] \arrow[rr, "\overline{\beta}"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Για να δείξουμε ότι ο $\widetilde{\beta}$ είναι μονοσημάντως ορισμένος *και ως προς αυτήν την ιδιότητα* αρκεί (δυνάμει τής προτάσεως C.3.7) να δείξουμε ότι η εικόνα τής φ είναι ένα σύνολο γεννητόρων τού W. Τούτο έπεται από τις ισότητες

$$\begin{aligned} \mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi)) &= \mathrm{Lin}_R(\varphi(M \times N)) = \mathrm{Lin}_R(\pi(\delta(M \times N))) \\ &= \pi(\mathrm{Lin}_R(\delta(M \times N))) = \pi(\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}(\delta))) = \pi(R^{(M\times N)}) = W, \end{aligned}$$

με την τρίτη εξ αυτών οφειλόμενη στην επιρριπτικότητα τού π και με την πέμπτη προκύπτουσα από το λήμμα A.6.2 και το θεώρημα A.6.5. $\square$

C.3.12 Ορισμός. Δοθέντων δυο R-μοδίων M και N, κατασκευάζουμε το ζεύγος (W, φ) μέσω τού (C.6) και χρησιμοποιούμε τον (κλασικό) συμβολισμό:

$$M \otimes_R N := W.$$

Δυνάμει τού θεωρήματος C.3.8 και τής σημειώσεως C.3.9 μπορούμε, αναφερόμενοι -από τούδε και στο εξής- στο $(M \otimes_R N, \varphi)$, να ομιλούμε για **το τανυστικό γινόμενο** των R-μοδίων M και N. Επίσης, ονομάζουμε την φ **τανυστική απεικόνιση** τού W.

C.3.13 Ορισμός. Τα στοιχεία τού υποκειμένου συνόλου W τού τανυστικού γινομένου $(W = M \otimes_R N, \varphi)$ των R-μοδίων M και N ονομάζονται **τανυστές**. Ιδιαιτέρως, κάθε τανυστής τής μορφής

$$x \otimes y := \varphi(x, y) \in \operatorname{Im}(\varphi), \text{ για κάποια } x \in M, y \in N,$$

καλείται **αποσυντιθέμενος** (ή **στοιχειώδης**) **τανυστής**[8] τού W.

C.3.14 Πόρισμα. *Έστω $(W = M \otimes_R N, \varphi)$ το τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M και N. Τότε ισχύουν οι ακόλουθοι υπολογιστικοί κανόνες για τους αποσυντιθέμενους τανυστές τού W:*

(i) $(x_1 + x_2) \otimes y = (x_1 \otimes y) + (x_2 \otimes y)$, *για κάθε* $x_1, x_2 \in M$ *και κάθε* $y \in N$,

(ii) $x \otimes (y_1 + y_2) = (x \otimes y_1) + (x \otimes y_2)$, *για κάθε* $x \in M$ *και κάθε* $y_1, y_2 \in N$,

(iii) $r(x \otimes y) = (rx \otimes y) = (x \otimes ry)$, *για κάθε* $x \in M, y \in N$, *και κάθε* $r \in R$,

(iv) $0_M \otimes y = 0_W = x \otimes 0_N$, *για κάθε* $x \in M$ *και* $y \in N$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $x \otimes y = \varphi(x, y)$, όλοι οι αναγραφόμενοι υπολογιστικοί κανόνες έπονται άμεσα από την R-διγραμμικότητα τής $\varphi : M \times N \longrightarrow W$. □

C.3.15 Πόρισμα. *Έστω $(W = M \otimes_R N, \varphi)$ το τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M και N. Τότε για κάθε τανυστή $w \in W$ υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους στοιχεία $x_i \in M, y_i \in N$ και $r_i \in R, 1 \leq i \leq k$, $k \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε να ισχύει η ισότητα*

$$w = \sum_{i=1}^{k} r_i (x_i \otimes y_i). \tag{C.7}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $\mathrm{Lin}_R(\operatorname{Im}(\varphi)) = W$ (κατά την πρόταση C.3.7), κάθε στοιχείο τού W γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αποσυντιθέμενων τανυστών. □

C.3.16 Πόρισμα. *Εάν M, N είναι R-μόδιοι, με τουλάχιστον έναν εξ αυτών τετριμμένο, τότε και το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_R N$ είναι τετριμμένος R-μόδιος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από το πόρισμα C.3.15 και από το (iv) τού πορίσματος C.3.14. □

[8] Για δοθέντα αποσυντιθέμενο τανυστή $u \otimes v$, τα u και v ονομάζονται ενίοτε *παράγοντές* του.

C.3.17 Σημείωση. Το αντίστροφο τού πορίσματος C.3.16 δεν είναι αληθές αν δεν πληρούνται κάποιες επιπρόσθετες συνθήκες. (Βλ. παράδειγμα C.3.20 (ii), καθώς και το (ii) τού πορίσματος C.4.11.)

C.3.18 Πόρισμα. *Έστω $W = M \otimes_R N$ το τανυστικό γινόμενο των R-μοδίων M και N. Τότε κάθε $w \in W$ γράφεται ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους αποσυντιθέμενων τανυστών.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η παράσταση (C.7) τυχόντος $w \in W$ μπορεί (μέσω τής C.3.14 (iii)) να γραφεί ως:

$$w = \sum_{i=1}^{k} r_i \left(x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \left(r_i x_i \otimes y_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \left(x_i \otimes r_i y_i\right),$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

C.3.19 Παρατήρηση. (i) Εξ όσων αναφέρονται στην απόδειξη τού C.3.18 η παράσταση (C.7) και η παράσταση ενός τανυστή $w \in W$ ως άθροισμα πεπερασμένου πλήθους αποσυντιθέμενων τανυστών *δεν* είναι -εν γένει- μονοσημάντως ορισμένες.

(ii) Θα πρέπει, επιπροσθέτως, να επισημανθεί ότι -εν γένει- είναι δυνατή *η ύπαρξη μη αποσυντιθέμενων τανυστών* $w \in W$. Για ένα απλό παράδειγμα βλ. C.4.9.

C.3.20 Παραδείγματα. Στο σημείο αυτό δίνουμε κάποια πρώτα «απτά» παραδείγματα τανυστικών γινομένων $M \otimes_R N$ δυο R-μοδίων M και N.

(i) Εάν $R = \mathbb{Z}$ και $M = N = \mathbb{Z}_2$, τότε

$$\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2.$$

Πράγματι· το καρτεσιανό γινόμενο των M και N είναι το

$$\{([0]_2\,, [0]_2)\,, ([0]_2\,, [1]_2)\,, ([1]_2\,, [0]_2)\,, ([1]_2\,, [1]_2)\}.$$

Επομένως ο $R^{(M \times N)}$ είναι ένας ελεύθερος $\mathbb{Z}$-μόδιος βαθμίδας 4 με το

$$\{\delta_{([0]_2,[0]_2)}, \delta_{([0]_2,[1]_2)}, \delta_{([1]_2,[0]_2)}, \delta_{([1]_2,[1]_2)}\}$$

ως μια βάση του. Δεδομένου ότι $2\,[a]_2 = [2a]_2 = [0]_2$ για κάθε $a \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\begin{cases} \delta_{([0]_2,[0]_2)} - 0 \cdot \delta_{([0]_2,[0]_2)} = \delta_{([0]_2,[0]_2)} \in \Xi_{M,N}\left(R\right), \\ \\ \delta_{([0]_2,[1]_2)} - 0 \cdot \delta_{([0]_2,[1]_2)} = \delta_{([0]_2,[1]_2)} \in \Xi_{M,N}\left(R\right), \\ \\ \delta_{([1]_2,[0]_2)} - 0 \cdot \delta_{([1]_2,[0]_2)} = \delta_{([1]_2,[0]_2)} \in \Xi_{M,N}\left(R\right), \\ \\ \text{και } 2\delta_{([a]_2,[b]_2)} = \delta_{([0]_2,[0]_2)} \in \Xi_{M,N}\left(R\right), \ \ \forall\,(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ωστόσο, όπως διαπιστώνει κανείς εύκολα, $\delta_{\left([1]_2,[1]_2\right)} \notin \Xi_{M,N}(R)$, οπότε

$$M \otimes_R N = R^{(M\times N)}/\Xi_{M,N}(R) = \left\{\Xi_{M,N}(R), \delta_{\left([1]_2,[1]_2\right)} + \Xi_{M,N}(R)\right\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

(ii) Το τανυστικό γινόμενο δυο μη τετριμμένων μοδίων δεν είναι κατ' ανάγκην μη τετριμμένο. (Πρβλ. C.4.11). Π.χ., εάν $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_m$ και $N = \mathbb{Z}_n$, όπου $m, n \in \mathbb{N}$ με μκδ$(m,n) = 1$, τότε

$$\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \{0\}.$$

Πράγματι· τούτο έπεται από το ότι

$$[a]_m \otimes [b]_n = 0_{\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n}, \ \ \forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z},$$

σε συνδυασμό με το πόρισμα C.3.18. Η εν λόγω ισότητα αποδεικνύεται ως εξής: Επειδή $\exists\,(\mu,\nu) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : \mu m + \nu n = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&[a]_m \otimes [b]_n = 1\cdot([a]_m \otimes [b]_n) = (\mu m + \nu n)([a]_m \otimes [b]_n) \\
&= \mu m([a]_m \otimes [b]_n) + \nu n([a]_m \otimes [b]_n) \\
&= (\mu m\,[a]_m \otimes [b]_n) + ([a]_m \otimes \nu n\,[b]_n) \\
&= (\mu\,\underbrace{[ma]_m}_{=[0]_m} \otimes [b]_n) + ([a]_m \otimes \nu\,\underbrace{[nb]_n}_{=[0]_n}) \\
&= 0_{\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n} + 0_{\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n} = 0_{\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n}.
\end{aligned}$$

(Βλ. πόρισμα C.3.14.) Σημειωτέον ότι, γενικότερα, για *οιουσδήποτε* $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε[9]

$$\boxed{\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\text{μκδ}(m,n)}.} \tag{C.8}$$

(iii) Έστω M είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος. Τότε για κάθε σύνολο $J \neq \varnothing$ ισχύει

$$\boxed{M^{(J)} \cong R^{(J)} \otimes_R M.}$$

Πράγματι· η απεικόνιση

$$\varphi : R^{(J)} \times M \longrightarrow M^{(J)}, \ \ \left((r_j)_{j\in J}, x\right) \longmapsto (r_j x)_{j\in J},$$

είναι R-διγραμμική και για κάθε $(x_j)_{j\in J} \in M^{(J)}$ έχουμε

$$(x_j)_{j\in J} = \sum_{j\in J} \varphi(e_j, x_j),$$

[9] Βλ. παρατήρηση C.5.13.

όπου $(e_j)_{j\in J}$ είναι η συνήθης βάση τού $R^{(J)}$, οπότε

$$\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = M^{(J)}.$$

Εξάλλου, εάν Z είναι τυχών R-μόδιος και $\beta \in \mathrm{Bil}_R\left(R^{(J)}, M; Z\right)$, τότε η απεικόνιση

$$\widetilde{\beta} : M^{(J)} \longrightarrow Z, \quad \widetilde{\beta}((x_j)_{j\in J}) := \sum_{j\in J} \beta\,(e_j, x_j)$$

αποτελεί έναν ομομορφισμό R-μοδίων για τον οποίο ισχύει

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}(\varphi(((r_j)_{j\in J}, x))) &= \widetilde{\beta}((r_j x)_{j\in J}) = \sum_{j\in J} r_j \beta\,(e_j, x)\\ &= \sum_{j\in J} \beta\,(r_j e_j, x) = \beta((r_j)_{j\in J}, x), \quad \forall ((r_j)_{j\in J}, x) \in R^{(J)} \times M.\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, το ζεύγος $(M^{(J)}, \varphi)$ είναι (μέχρις ισομορφισμού) το τανυστικό γινόμενο των $R^{(J)}$ και M. (Βλ. C.3.7 και C.3.8). Προφανώς, όταν $n \in \mathbb{N}$ και $J = \{1,..., n\}$, λαμβάνουμε

$$M^n = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n \text{ φορές}} \cong R^n \otimes_R M.$$

(iv) Εάν $m, n \in \mathbb{N}$, τότε ο R-μόδιος $\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ όλων των $(m \times n)$-πινάκων με τις εγγραφές τους ειλημμένες από τον R (βλ. A.2.5 (v)) μπορεί να ιδωθεί ως το τανυστικό γινόμενο των R^m και R^n, καθότι

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \cong \mathrm{Mat}_{m\times 1}(R) \otimes_R \mathrm{Mat}_{n\times 1}(R) \cong R^m \otimes_R R^n.}$$

Πράγματι· η απεικόνιση

$$\psi : \mathrm{Mat}_{m\times 1}(R) \times \mathrm{Mat}_{n\times 1}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(R),$$

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & \cdots & \vdots\\ x_my_1 & \cdots & x_my_n\end{pmatrix},$$

είναι R-διγραμμική και για κάθε πίνακα $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ έχουμε

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} \psi\left(\mathbf{E}_i^{(1)}, (a_{i1}, a_{i2},..., a_{in})\right),$$

όπου

$$\left\{ \mathbf{E}_i^{(1)} := \begin{pmatrix} \delta_{i1}\\ \delta_{i2}\\ \vdots\\ \delta_{im}\end{pmatrix} \;\middle|\; 1 \le i \le m \right\}$$

είναι η συνήθης βάση τού $\mathrm{Mat}_{m\times 1}(R)$ (με το δ_{ij} να εκφράζει -ως είθισται- το σύμβολο τού Kronecker), οπότε $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}(\psi)) = \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$. Εξάλλου, εάν η

$$\left\{ \mathbf{E}_j^{(2)} := \begin{pmatrix} \delta_{j1} \\ \delta_{j2} \\ \vdots \\ \delta_{jn} \end{pmatrix} \;\middle|\; 1 \leq j \leq n \right\}$$

είναι η συνήθης βάση τού $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(R)$, η οικογένεια πινάκων

$$\left(\mathbf{E}_{ij} := \psi\left(\mathbf{E}_i^{(1)}, \mathbf{E}_j^{(2)} \right) \right)_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n}$$

είναι η συνήθης βάση τού ελευθέρου R-μοδίου $\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ (όπου, για δοθέντα i, j, η στην i-στή γραμμή και j-στή στήλη ευρισκομένη εγγραφή τού πίνακα $(\mathbf{E}_{ij})$ είναι το μοναδιαίο στοιχείο 1_R τού R, ενώ οι υπόλοιπες εγγραφές είναι $= 0_R$). Εάν λοιπόν ο Z είναι τυχών R-μόδιος και

$$\beta \in \mathrm{Bil}_R\left(\mathrm{Mat}_{m\times 1}(R), \mathrm{Mat}_{n\times 1}(R); Z\right),$$

τότε η απεικόνιση

$$\widetilde{\beta} : \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \longrightarrow Z,\;\; \widetilde{\beta}(\mathbf{E}_{ij}) := \beta(\mathbf{E}_i^{(1)}, \mathbf{E}_j^{(2)}), \forall\, (i,j) \in \{1,..,m\} \times \{1,..,n\}.$$

αποτελεί έναν ομομορφισμό R-μοδίων για τον οποίο ισχύει

$$\left[\widetilde{\beta}(\psi(\mathbf{E}_i^{(1)}, \mathbf{E}_j^{(2)})) = \beta(\mathbf{E}_i^{(1)}, \mathbf{E}_j^{(2)}), \forall\, (i,j) \in \{1,..,m\} \times \{1,..,n\} \right] \Longrightarrow \widetilde{\beta} \circ \psi = \beta.$$

Κατά συνέπειαν, το ζεύγος $(\mathrm{Mat}_{m\times n}(R), \psi)$ είναι (μέχρις ισομορφισμού) το τανυστικό γινόμενο των $\mathrm{Mat}_{m\times 1}(R) \cong R^m$ και $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(R) \cong R^n$ το οριζόμενο υπεράνω τού R. (Βλ. C.3.7, C.3.8 και C.5.6 (iii).) Προφανώς, επειδή για κάθε

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \in \mathrm{Mat}_{m\times 1}(R) \times \mathrm{Mat}_{n\times 1}(R)$$

έχουμε

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_my_1 & \cdots & x_my_n \end{pmatrix},$$

η ως άνω διαδικασία κατασκευής τού τανυστικού γινομένου μπορεί να εκτελεσθεί και για γραμμοπίνακες (στη θέση των στηλοπινάκων).

C.4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

Για τη διευκόλυνση των υπολογισμών που απαιτούνται για τον προσδιορισμό τού τανυστικού γινομένου δύο δοθέντων R-μοδίων παρατίθενται οι κύριες ιδιότητες τού “$\otimes_R$” (στα θεωρήματα C.4.1, C.4.5, C.4.6 και C.4.7).

C.4.1 Θεώρημα. (Μεταθετικότητα τού “$\otimes_R$”)
Για οιουσδήποτε R-μοδίους M, N υφίσταται κανονιστικός ισομορφισμός

$$\boxed{M \otimes_R N \overset{\cong}{\longrightarrow} N \otimes_R M}$$

ο οποίος ορίζεται από τον τύπο

$$M \otimes_R N \ni x \otimes y \longmapsto y \otimes x \in N \otimes_R M.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε τα ταν. γινόμενα $(W = M \otimes_R N, \varphi)$ και $(W' = N \otimes_R M, \varphi')$. Η απεικόνιση

$$\beta : M \times N \longrightarrow N \otimes_R M,\ (x, y) \longmapsto \beta(x, y) := y \otimes x = \varphi'(y, x),$$

είναι R-διγραμμική. Άρα υπάρχει μοναδικός $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(W, W')$ με

$$\widetilde{\beta}(\varphi(x, y)) = \widetilde{\beta}(x \otimes y) = \beta(x, y) = y \otimes x,\ \forall (x, y) \in M \times N.$$

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes_R N = W \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\beta}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
M \times N \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\beta"'] & & N \otimes_R M \ (=: Z)
\end{tikzcd}$$

Επίσης, η απεικόνιση

$$\gamma : N \times M \longrightarrow M \otimes_R N,\ (y, x) \longmapsto \gamma(y, x) := x \otimes y = \varphi(x, y),$$

είναι R-διγραμμική. Άρα υπάρχει μοναδικός $\widetilde{\gamma} \in \mathrm{Hom}_R(W', W)$ με

$$\widetilde{\gamma}(\varphi'(y, x)) = \widetilde{\gamma}(y \otimes x) = \gamma(y, x) = x \otimes y,\ \forall (x, y) \in M \times N.$$

$$\begin{tikzcd}
 & N \otimes_R M = W' \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
M \times N \arrow[ur, "\varphi'"] \arrow[rr, "\gamma"'] & & M \otimes_R N \ (=: Z)
\end{tikzcd}$$

Για κάθε $(x,y) \in M \times N$ έχουμε προφανώς

$$\left\{ \begin{array}{l} (\widetilde{\beta} \circ \widetilde{\gamma})(\varphi'(y,x)) = \widetilde{\beta}(x \otimes y) = \varphi'(y,x) \\ \\ (\widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\beta})(\varphi(x,y)) = \widetilde{\gamma}(y \otimes x) = \varphi(x,y) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\widetilde{\beta} \circ \widetilde{\gamma})\Big|_{\mathrm{Im}(\varphi')} = \mathrm{id}_{W'}|_{\mathrm{Im}(\varphi')} \\ \\ (\widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\beta})\Big|_{\mathrm{Im}(\varphi)} = \mathrm{id}_{W}|_{\mathrm{Im}(\varphi)} \end{array} \right\},$$

οπότε $\widetilde{\beta} \circ \widetilde{\gamma} = \mathrm{id}_{W'}$ και $\widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\beta} = \mathrm{id}_W$. ($\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = W$ και $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi')) = W'$, βλ. C.3.7). Αυτό σημαίνει ότι αμφότεροι οι $\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$ είναι ισομορφισμοί με $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\beta}^{-1}$. $\square$

C.4.2 Σημείωση. Η μεταθετικότητα αυτή ισχύει για R-μοδίους με ακρίβεια ισομορφισμού. Ωστόσο, όταν $M = N$ και $x_1, x_2 \in M$, οι αποσυντιθέμενοι τανυστές $x_1 \otimes x_2$ και $x_2 \otimes x_1$ τού $M \otimes_R M$ δεν είναι κατ' ανάγκην ίσοι (αφού ο υφιστάμενος αυτομορφισμός τού $M \otimes_R M$ δεν είναι κατ' ανάγκην η ταυτοτική απεικόνιση).

C.4.3 Θεώρημα. *Για οιονδήποτε R-μόδιο M υφίστανται κανονιστικοί ισομορφισμοί*

$$\boxed{R \otimes_R M \xrightarrow{\cong} M \otimes_R R \xrightarrow{\cong} M.}$$

Απόδειξη. Για τον πρώτο ισομορφισμό βλ. θεώρημα C.4.1 (με τους R και M στη θέση των εκεί παρατεθέντων M και N, αντιστοίχως). Η απεικόνιση

$$\beta : M \times R \longrightarrow M,\ (x,r) \longmapsto \beta(x,r) := rx,$$

είναι R-διγραμμική. Ως εκ τούτου, εάν φ είναι η τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R R$, τότε υπάρχει μοναδικός $\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R R, M)$ με $\widetilde{\beta} \circ \varphi = \beta$.

$$\begin{tikzcd} & M \otimes_R R \arrow[dr, dashed, bend left, "\widetilde{\beta}"] & \\ M \times R \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\beta"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & & M\ (=: Z) \arrow[ul, "\beta'"] \end{tikzcd}$$

Από την άλλη μεριά, η απεικόνιση

$$\beta' : M \longrightarrow M \otimes_R R,\ x \longmapsto \beta'(x) := x \otimes 1_R,$$

αποτελεί ομομορφισμό R-μοδίων, για κάθε $x \in M$ έχουμε

$$\widetilde{\beta}(\beta'(x)) = \widetilde{\beta}(x \otimes 1_R) = \widetilde{\beta}(\varphi(x, 1_R)) = \beta(x, 1_R) = 1_R x = x,$$

οπότε $\widetilde{\beta} \circ \beta' = \mathrm{id}_M$, ενώ για κάθε ζεύγος $(x,r) \in M \times R$ έχουμε

$$\begin{aligned} \beta'(\widetilde{\beta}(\varphi(x,r))) &= \beta'(\beta(x,r)) = \beta'(rx) = (rx) \otimes 1_R \\ &= r(x \otimes 1_R) = x \otimes r = \varphi(x,r), \end{aligned}$$

οπότε $(\beta' \circ \widetilde{\beta})\Big|_{\mathrm{Im}(\varphi)} = \mathrm{id}_{M\otimes_R R}|_{\mathrm{Im}(\varphi)} \Rightarrow \beta' \circ \widetilde{\beta} = \mathrm{id}_{M\otimes_R R}$ (διότι κατά την πρόταση C.3.7, $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = M \otimes_R R$). Εξ αυτών έπεται ότι αμφότεροι οι $\widetilde{\beta}, \beta'$ είναι ισομορφισμοί με $\beta' = \widetilde{\beta}^{-1}$. $\square$

C.4.4 Παρατήρηση. Ειδικότερα, για $M = R$, έχουμε $R \otimes_R R \cong R$.

C.4.5 Θεώρημα. (Προσεταιριστικότητα τού "$\otimes_R$")
Για οιουσδήποτε R-μοδίους L, M, N υφίσταται κανονιστικός ισομορφισμός

$$\boxed{(L \otimes_R M) \otimes_R N \xrightarrow{\cong} L \otimes_R (M \otimes_R N).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε τα τανυστικά γινόμενα $(W = L \otimes_R M, \varphi)$,

$$(U = (L \otimes_R M) \otimes_R N, \psi) \;\; \text{και} \;\; (U' = L \otimes_R (M \otimes_R N), \psi').$$

Παγιώνοντας ένα $z \in N$ διαπιστώνουμε (μέσω τού πορίσματος C.3.14) ότι η απεικόνιση

$$\beta_z : L \times M \longrightarrow U', \; (x, y) \longmapsto \beta_z(x, y) := x \otimes (y \otimes z),$$

είναι R-διγραμμική. Από τον ορισμό C.3.6 τού τανυστικού γινομένου (W, φ) διασφαλίζεται η ύπαρξη ενός και μόνον $\widetilde{\beta}_z \in \mathrm{Hom}_R(W, U')$ με $\widetilde{\beta}_z \circ \varphi = \beta_z$. Προφανώς, για κάθε ζεύγος $(x, y) \in L \times M$,

$$\widetilde{\beta}_z(\varphi(x, y)) = \widetilde{\beta}_z(x \otimes y) = \beta_z(x, y) = x \otimes (y \otimes z).$$

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\beta}_z"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ L \times M \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\beta_z"'] & & U' \end{tikzcd}$$

Επιπροσθέτως, λόγω των ισχυόντων υπολογιστικών κανόνων (τού C.3.14), *και* η απεικόνιση $\gamma : W \times N \longrightarrow U'$ η οριζόμενη επί των αποσυντιθέμενων τανυστών τού W μέσω τού τύπου

$$\gamma((x \otimes y), z) := \beta_z(x, y) = x \otimes (y \otimes z), \; \forall z \in N,$$

είναι R-διγραμμική. Από τον ορισμό C.3.6 τού τανυστικού γινομένου (U, ψ) διασφαλίζεται η ύπαρξη ενός και μόνον $\widetilde{\gamma} \in \mathrm{Hom}_R(U, U')$ με την ιδιότητα: $\widetilde{\gamma} \circ \psi = \gamma$.

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\gamma}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ W \times N \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "\gamma"'] & & U' \end{tikzcd}$$

Προφανώς, για κάθε τριάδα $(x, y, z) \in L \times M \times N$,

$$\widetilde{\gamma}(\psi(\varphi(x, y), z)) = \widetilde{\gamma}(\psi(x \otimes y, z)) = \gamma(x \otimes y, z) = \beta_z(x, y) = x \otimes (y \otimes z).$$

Παρομοίως, είναι δυνατός ο προσδιορισμός μιας R-διγραμμικής απεικονίσεως $\vartheta : L \times (M \otimes_R N) \longrightarrow U$, για την οποία υπάρχει μοναδικός $\widetilde{\vartheta} \in \mathrm{Hom}_R(U', U)$ με την ιδιότητα: $\widetilde{\vartheta} \circ \psi' = \vartheta$, όπου

$$\widetilde{\vartheta}(x \otimes (y \otimes z)) = (x \otimes y) \otimes z, \ \forall (x, y, z) \in L \times M \times N.$$

$$\begin{tikzcd}
 & U' \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\vartheta}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
L \times (M \otimes_R N) \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[rr, "\vartheta"'] & & U
\end{tikzcd}$$

Επειδή $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\psi)) = U$ και $\mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}\,(\psi')) = U'$, έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} (\widetilde{\vartheta} \circ \widetilde{\gamma})\Big|_{\mathrm{Im}(\psi)} = \mathrm{id}_U|_{\mathrm{Im}(\psi)} \\ \\ (\widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\vartheta})\Big|_{\mathrm{Im}(\psi')} = \mathrm{id}_{U'}|_{\mathrm{Im}(\psi')} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\vartheta} \circ \widetilde{\gamma} = \mathrm{id}_U \\ \widetilde{\gamma} \circ \widetilde{\vartheta} = \mathrm{id}_{U'} \end{array} \right\},$$

απ' όπου έπεται ότι αμφότεροι οι $\widetilde{\gamma}, \widetilde{\vartheta}$ είναι ισομορφισμοί με $\widetilde{\vartheta} = \widetilde{\gamma}^{-1}$. □

C.4.6 Θεώρημα. (Επιμεριστική ιδιότητα) *Για οιεσδήποτε οικογένειες R-μοδίων $(M_j)_{j \in J}$ και $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ υφίσταται κανονιστικός ισομορφισμός*

$$\boxed{(\bigoplus_{j \in J} M_j) \otimes_R (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda) \stackrel{\cong}{\longrightarrow} \bigoplus_{(j,\lambda) \in J \times \Lambda} (M_j \otimes_R N_\lambda).}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $W := \bigoplus_{(j,\lambda) \in J \times \Lambda} (M_j \otimes_R N_\lambda)$,

$$M := \bigoplus_{j \in J} M_j \ \text{ και } \ N := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda,$$

και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\varphi : M \times N \longrightarrow W, \ \ \varphi((x_j)_{j \in J}, (y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) := (x_j \otimes y_\lambda)_{(j,\lambda) \in J \times \Lambda}.$$

Θα αποδείξουμε ότι το ζεύγος (W, φ) αποτελεί τανυστικό γινόμενο των M και N. Έστω Z τυχών R-μόδιος και έστω $\beta \in \mathrm{Bil}_R(M, N; Z)$. Ας συμβολίσουμε ως

$$\mathrm{in}_j^M : M_j \hookrightarrow M, \ \mathrm{in}_\lambda^N : N_\lambda \hookrightarrow N \ \text{ και } \ \mathrm{in}_{j,\lambda}^W : M_j \otimes_R N_\lambda \hookrightarrow W$$

τις φυσικές ενθέσεις καθενός προσθετέου εντός των ευθέων αθροισμάτων M, N και W, αντιστοίχως, και ως

$$\varphi_{j,\lambda} : M_j \times N_\lambda \longrightarrow M_j \otimes_R N_\lambda$$

η τανυστική απεικόνιση τού $M_j \otimes_R N_\lambda$ για κάθε ζεύγος $(j,\lambda) \in J \times \Lambda$. Εφαρμόζοντας την καθολική συνθήκη που πληροί το $(M_j \otimes_R N_\lambda, \varphi_{j,\lambda})$ για την

$$\beta_{j,\lambda} := \beta \circ (\mathrm{in}_j^M \times \mathrm{in}_\lambda^N) \in \mathrm{Bil}_R(M_j, N_\lambda; Z)$$

λαμβάνουμε μοναδικόν $\widetilde{\beta}_{j,\lambda} \in \mathrm{Hom}_R(M_j \otimes_R N_\lambda, Z)$ με $\widetilde{\beta}_{j,\lambda} \circ \varphi_{j,\lambda} = \beta_{j,\lambda}$.

$$\begin{tikzcd}
M_j \times N_\lambda \arrow[r, "\varphi_{j,\lambda}"] \arrow[dr, "\beta_{j,\lambda}"'] \arrow[dd, hook, "\mathrm{in}_j^M \times \mathrm{in}_\lambda^N"'] & M_j \otimes_R N_\lambda \arrow[d, dashed, "\widetilde{\beta}_{j,\lambda}"] \arrow[ddr, hook, bend left, "\mathrm{in}_{j,\lambda}^W"] & \\
 & Z & \\
M \times N \arrow[ur, "\beta"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & W \arrow[ul, dashed, "\gamma_{j,\lambda}"']
\end{tikzcd}$$

Εν συνεχεία, εφαρμόζοντας για τους ομομορφισμούς $\widetilde{\beta}_{j,\lambda}$ την καθολική συνθήκη τού συγκινομένου $(W, (\mathrm{in}_{j,\lambda}^W)_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda})$ (βλ. A.5.7 και A.5.12) λαμβάνουμε μονοσημάντως ορισμένους

$$\gamma_{j,\lambda} \in \mathrm{Hom}_R(W, Z) : \gamma_{j,\lambda} \circ \mathrm{in}_{j,\lambda}^W = \widetilde{\beta}_{j,\lambda}, \ \forall (j,\lambda) \in J \times \Lambda.$$

Εάν $\gamma := \bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} \gamma_{j,\lambda}$, τότε για κάθε $((x_j)_{j\in J}, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) \in M \times N$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(\gamma \circ \varphi)\left((x_j)_{j\in J}, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\right) &= \gamma((x_j \otimes y_\lambda)_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda}) = \sum_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} \widetilde{\beta}_{j,\lambda}(x_j \otimes y_\lambda) \\
&= \sum_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} \beta_{j,\lambda}(x_j, y_\lambda) = \sum_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} (\beta \circ (\mathrm{in}_j^M \times \mathrm{in}_\lambda^N))(x_j, y_\lambda) \\
&= \sum_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} \beta(\mathrm{in}_j^M(x_j), \mathrm{in}_\lambda^N(y_\lambda)) = \beta(\sum_{j\in J} x_j, \sum_{\lambda\in\Lambda} y_\lambda) = \beta((x_j)_{j\in J}, (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}),
\end{aligned}$$

ήτοι $\gamma \circ \varphi = \beta$. Εξάλλου, από τον ορισμό τής φ είναι φανερό ότι $W = \mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}(\varphi))$. Συνεπώς το (W, φ) αποτελεί πράγματι τανυστικό γινόμενο των M και N. (Βλ. πρόταση C.3.7.) Αρκεί, τέλος, να εφαρμοσθεί το θεώρημα C.3.8. □

C.4.7 Θεώρημα. (Τανυστικό γινόμενο δυο ελευθέρων R-μοδίων) *Εάν M, N είναι δυο ελεύθεροι R-μόδιοι, τότε και το τανυστικό γινόμενό τους $M \otimes_R N$ είναι ένας ελεύθερος R-μόδιος. Ειδικότερα, εάν $(x_j)_{j\in J}$ και $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι βάσεις των M και N, αντιστοίχως, τότε η οικογένεια $\{x_j \otimes y_\lambda \mid (j,\lambda) \in J \times \Lambda\}$ συνιστά μια βάση τού $M \otimes_R N$. Ως εκ τούτου,*

$$\boxed{\mathrm{rank}_R(M \otimes_R N) = \mathrm{rank}_R(M)\,\mathrm{rank}_R(N).} \tag{C.9}$$

Απόδειξη. Εάν ένας εκ των M, N είναι τετριμμένος, τότε ο ισχυρισμός είναι προδήλως αληθής. Έστω ότι αμφότεροι είναι μη τετριμμένοι. Εξ υποθέσεως,

$M = \bigoplus_{j\in J} Rx_j$ και $N = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Ry_\lambda$. Από το θεώρημα C.4.6 συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} M \otimes_R N &= \left(\bigoplus_{i\in I} Rx_i\right) \otimes_R \left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Ry_\lambda\right) \\ &\cong \bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} (Rx_i \otimes_R Ry_\lambda) = \bigoplus_{(j,\lambda)\in J\times\Lambda} R\,(x_i \otimes y_\lambda)\,. \end{aligned}$$

Η (C.9) είναι επακόλουθο τού ότι $\mathrm{rank}_R\,(M \otimes_R N) = \mathrm{card}(J)\cdot\,\mathrm{card}(\Lambda)$. □

C.4.8 Πόρισμα. *Εάν V_1, V_2 είναι διανυσματικοί χώροι οριζόμενοι υπεράνω ενός σώματος K, τότε*

$$\boxed{\dim_K(V_1 \otimes_K V_2) = \dim_K(V_1)\dim_K(V_2).} \tag{C.10}$$

C.4.9 Παράδειγμα. Έστω K ένα σώμα και έστω $\{e_1 = (1_K, 0_K), e_2 = (0_K, 1_K)\}$ η συνήθης βάση τού K-διανυσματικού χώρου K^2. Εάν $V := K^2 \otimes_K K^2$, τότε η (C.10) δίδει $\dim_K(V) = 4$ και το σύνολο $\{\, e_i \otimes e_j \mid i, j \in \{1, 2\}\}$ αποτελεί μια βάση τού V. Σημειωτέον ότι ο τανυστής $v \in V$ ο οριζόμενος μέσω τού τύπου

$$v := e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$$

δεν είναι αποσυντιθέμενος. Πράγματι· εάν υποθέσουμε ότι υπάρχουν διανύσματα

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \in K^2, \quad y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 \in K^2,$$

τέτοια ώστε να ισχύει $v = x \otimes y$, τότε, εφαρμόζοντας τους υπολογιστικούς κανόνες τού πορίσματος C.3.14 λαμβάνουμε

$$e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 = \lambda_1\mu_1\,(e_1 \otimes e_1) + \lambda_1\mu_2\,(e_1 \otimes e_2) + \lambda_2\mu_1\,(e_2 \otimes e_1) + \lambda_2\mu_2\,(e_2 \otimes e_2)\,,$$

ή -ισοδυνάμως-

$$\lambda_1\mu_1\,(e_1 \otimes e_1) + (\lambda_1\mu_2 - 1_K)\,(e_1 \otimes e_2) + (\lambda_2\mu_1 - 1_K)\,(e_2 \otimes e_1) + \lambda_2\mu_2\,(e_2 \otimes e_2) = 0_V\,,$$

απ' όπου συνάγεται ότι

$$\lambda_1\mu_1 = \lambda_1\mu_2 - 1_K = \lambda_2\mu_1 - 1_K = \lambda_2\mu_2 = 0_K.$$

Τούτο είναι προδήλως ένα σύστημα *μη συμβιβαστών* ισοτήτων. Άτοπο!

C.4.10 Πόρισμα. *Έστω ότι οι M και N είναι δυο R-μόδιοι και ότι ο N είναι ελεύθερος έχων την οικογένεια $(y_j)_{j\in J}$ ως μια βάση του. Τότε η απεικόνιση*

$$M^{(J)} \longrightarrow M \otimes_R N, \;\; (x_j)_{j\in J} \longmapsto \sum_{j\in J} x_j \otimes y_j,$$

είναι ένας ισομορφισμός R-μοδίων και -ως εκ τούτου- κάθε τανυστής $w \in M \otimes_R N$ γράφεται μονοσημάντως[10] *υπό τη μορφή*

$$w = \sum_{j \in J} x_j \otimes y_j, \;\; x_j \in M^{(J)}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η εν λόγω βάση καθορίζει έναν ομομορφισμό R-μοδίων

$$\alpha : M^{(J)} \longrightarrow M \otimes_R N \cong M \otimes_R \bigoplus_{j \in J} Ry_j \cong \bigoplus_{j \in J} (M \otimes_R Ry_j) \;\; (\cong M \otimes_R R^{(J)})$$

$$\alpha((x_j)_{j \in J}) := \sum_{j \in J} x_j \otimes y_j,$$

(Πρβλ. C.3.20 (iii) και θεώρημα C.4.6. Σημειωτέον ότι, για κάθε δείκτη $j \in J$, $M \otimes_R R \cong M \otimes_R Ry_j$ μέσω τής απεικονίσεως $x \otimes 1_R \longmapsto x \otimes y_j$). Από την άλλη μεριά, η απεικόνιση

$$\theta : M \times N \longrightarrow M^{(J)}, \quad \theta(x, \sum_{j \in J} \mu_j y_j) := \left(\mu_j x\right)_{j \in J},$$

είναι R-διγραμμική, οπότε (κατά τα C.3.6, C.3.8, C.3.11 και C.3.12) υπάρχει μονοσημάντως ορισμένος $\widetilde{\theta} \in \mathrm{Hom}_R \left(M \otimes_R N, M^{(J)}\right)$, ούτως ώστε να ισχύει

$$\widetilde{\theta}(x \otimes \sum_{j \in J} \mu_j y_j) = \left(\mu_j x\right)_{j \in J}.$$

Επειδή (προφανώς) $\alpha \circ \widetilde{\theta} = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}$ και $\widetilde{\theta} \circ \alpha = \mathrm{id}_{M^{(J)}}$, ο α είναι ένας ισομορφισμός R-μοδίων (και $\alpha^{-1} = (\widetilde{\theta})^{-1}$). Ως εκ τούτου, κάθε $w \in M \otimes_R N$ γράφεται μονοσημάντως υπό τη μορφή $w = \sum_{j \in J} x_j \otimes y_j, \;\; x_j \in M^{(J)}$, καθότι το $M^{(J)}$ είναι ισόμορφο με ένα *ευθύ άθροισμα*. (Βλ. A.5.14, A.5.15 και A.5.16 (i)). □

C.4.11 Πόρισμα. *Έστω ότι οι M και N είναι δυο ελεύθεροι R-μόδιοι και R μια ακεραία περιοχή. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα*:

(i) *Εάν $x \in M$ και $y \in N$, τότε*

$$x \otimes y = 0_{M \otimes_R N} \Longleftrightarrow (x = 0_M \;\; \text{ή} \;\; y = 0_N).$$

(ii) *Εάν το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_R N$ είναι τετριμμένος R-μόδιος, τότε τουλάχιστον ένας εκ των M και N οφείλει να είναι τετριμμένος.*

---

[10] Δοθέντων δυο τανυστών $w = \sum_{j=1}^{\kappa} x_j \otimes y_j$ και $w' = \sum_{\varrho=1}^{\kappa'} x'_\varrho \otimes y'_\varrho$ από το $M \otimes_R N$, μπορούμε να υποθέσουμε -χωρίς βλάβη τής γενικότητας- (εισάγοντας, εν ανάγκη, μηδενικούς όρους τής μορφής $0_M \otimes y$, $y \in N$) ότι $\kappa = \kappa'$. Η ιδιότητα τού «μονοσήμαντου», η οποία υπονοείται (για αθροίσματα *με πεπερασμένο πλήθος όρων*) στη διατύπωση τού πορίσματος, σημαίνει ότι από κάθε ισότητα $\sum_{j=1}^{\kappa} x_j \otimes y_j = \sum_{j=1}^{\kappa} x'_j \otimes y_j$ συμπεραίνουμε ότι $x_j = x'_j$, για όλους τους δείκτες j, $1 \leq j \leq \kappa$. Σημειωτέον ότι, στην περίπτωση κατά την οποία ισχύει

$$\sum_{j=1}^{\kappa} x_j \otimes y_j = 0_{M \otimes_R N} \; (= \sum_{j=1}^{\kappa} 0_M \otimes y_j),$$

λαμβάνουμε $x_j = 0_M$, για κάθε j, $1 \leq j \leq \kappa$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Αρκεί να αποδειχθεί μόνον η συνεπαγωγή “$\Rightarrow$”. (Βλ. C.3.14 (iv).) Υποθέτουμε ότι η $(x_i)_{i\in I}$ είναι μια βάση τού M και η $(y_j)_{j\in J}$ μια βάση τού N. Τότε

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \in M^{(I)},\ \ y = \sum_{j\in J} \mu_j y_j \in N^{(J)},$$

για κάποια (πεπερασμένου πλήθους) λ_i και $\mu_j \in R$. Επομένως, κατά το C.4.10,

$$0_{M\otimes_R N} = x\otimes y = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}\left(\left(\lambda_i\mu_j\right)x_i\right)\right)\otimes y_j \Rightarrow \sum_{i\in I}\left(\lambda_i\mu_j\right)x_i = 0_M,\ \forall j\in J,$$

απ’ όπου έπεται ότι

$$\lambda_i\mu_j = 0_R,\ \forall\,(i,j)\in I\times J, \tag{C.11}$$

διότι η $(x_i)_{i\in I}$ είναι μια βάση τού M. Ας υποθέσουμε ότι $x\neq 0_M$. Τότε υπάρχει ένας τουλάχιστον δείκτης $i_\bullet \in I$, ούτως ώστε να ισχύει $\lambda_{i_\bullet} \neq 0_R$. Επειδή ο δακτύλιος R είναι ακεραία περιοχή, η (C.11) δηλοί ότι

$$[\mu_j = 0_R,\ \forall j\in J] \Longrightarrow y = 0_N.$$

Κατ’ αναλογίαν, εάν υποθέσουμε ότι $y\neq 0_N$, καταλήγουμε στο ότι $x = 0_M$.

(ii) Εάν αμφότεροι οι M και N είναι μη τετριμμένοι, τότε υπάρχουν δύο στοιχεία $x\in M\smallsetminus\{0_M\}$ και $y\in N\smallsetminus\{0_N\}$. Τούτο σημαίνει ότι και το τανυστικό γινόμενο $M\otimes_R N$ είναι κατ’ ανάγκην μη τετριμμένο, διότι -λόγω τής (i)- $x\otimes y\neq 0_{M\otimes_R N}$.□

C.4.12 Σημείωση. Τα (i) και (ii) τού πορίσματος C.4.11 δεν είναι κατ’ ανάγκην αληθή όταν οι M, N δεν είναι ελεύθεροι, όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει μέσω τού παραδείγματος C.3.20 (ii). (Πρβλ. C.2.9 (iii).)

C.5 ΤΑΝΥΣΤΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΟΜΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ

Η έννοια τού τανυστικού γινομένου γενικεύεται κατά τρόπο φυσικό ακόμη και για ομομορφισμούς R-μοδίων.

C.5.1 Πρόταση. *Εάν υποθέσουμε ότι M, M', N και N' είναι τέσσερεις R-μόδιοι, τότε για κάθε $f\in \mathrm{Hom}_R(M,M')$ και κάθε $g\in\mathrm{Hom}_R(N,N')$ υπάρχει ένας μονοσημάντως ορισμένος ομομορφισμός*

$$f\overline{\otimes} g \in \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, M'\otimes_R N'),$$

ο οποίος ικανοποιεί την

$$\boxed{\left(f\overline{\otimes} g\right)(x\otimes y) = f(x)\otimes g\,(y)\,,\ \ \forall (x,y)\in M\times N} \tag{C.12}$$

και καθιστά το διάγραμμα

$$\boxed{\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f\times g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "f\overline{\otimes}g"] \\ M' \times N' \arrow[r, "\varphi'"'] & M' \otimes_R N' \end{tikzcd}} \tag{C.13}$$

μεταθετικό. Εν προκειμένω, η φ (και αντιστοίχως, η φ') συμβολίζει την τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R N$ (και αντιστοίχως, τού $M' \otimes_R N'$).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\beta : M \times N \longrightarrow M' \otimes_R N', \quad \beta\,(x,y) := f(x) \otimes g\,(y)\,, \ \ \forall (x,y) \in M \times N.$$

Κανείς ελέγχει εύκολα ότι η β είναι R-διγραμμική (λόγω των υπολογιστικών κανόνων τού πορίσματος C.3.14 και τού ότι οι f και g είναι R-γραμμικές). Επομένως, κατά τον ορισμό C.3.6, υπάρχει μία (μονοσημάντως ορισμένη) γραμμική απεικόνιση

$$\widetilde{\beta} \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

η οποία καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} & M \otimes_R N \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\beta}"] & \\ M \times N \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\beta"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowright"] & & M' \otimes_R N' \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Θέτοντας $f\overline{\otimes}g := \widetilde{\beta}$ λαμβάνουμε την (C.12), διότι η εικόνα $\widetilde{\beta}(x \otimes y)$ τού αποσυντιθέμενου τανυστή $x \otimes y$ μέσω τής $\widetilde{\beta}$ ισούται με $f(x) \otimes g\,(y)$ για κάθε $(x,y) \in M \times N$. Επιπροσθέτως,

$$\begin{aligned} (f\overline{\otimes}g)\,(\varphi(x,y)) &= (f\overline{\otimes}g)\,(x \otimes y) = f(x) \otimes g\,(y) \\ &= \varphi'\,(f(x), g(y)) = \varphi'\,((f \times g)\,(x,y)) \end{aligned}$$

για κάθε $(x,y) \in M \times N$, δηλαδή το διάγραμμα (C.13) είναι όντως μεταθετικό, ενώ για οιονδήποτε ομομορφισμό $\theta \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$ με αυτήν την ιδιότητα (: $\theta \circ \varphi = \varphi' \circ (f \times g)$) έχουμε

$$\theta|_{\mathrm{Im}(\varphi)} = (f\overline{\otimes}g)|_{\mathrm{Im}(\varphi)}\,,$$

οπότε κατ' ανάγκην $\theta = f\overline{\otimes}g$, διότι $\mathrm{Lin}_R\,(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = M \otimes_R N$. □

C.5.2 Ορισμός. Ο $f\overline{\otimes}g \in \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$ ο ορισθείς μέσω τής προτάσεως C.5.1 καλείται **τανυστικό γινόμενο των ομομορφισμών f και g.**

C.5.3 Σημείωση. Το σύμβολο “$\overline{\otimes}$” εισήχθη αντί τού “$\otimes$” προκειμένου να επιτευχθεί σαφής διάκριση μεταξύ τού ομομορφισμού $f\overline{\otimes}g$ και τού τανυστή

$$f \otimes g \in \mathrm{Hom}_R(M, M') \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, N'),$$

ήτοι τού τανυστικού γινομένου των f και g *θεωρουμένων ως στοιχείων των μοδίων των ομομορφισμών* $\mathrm{Hom}_R(M, M')$ και $\mathrm{Hom}_R(N, N')$, αντιστοίχως. Εν γένει, δεν είναι δυνατή η χρήση τού ενός στη θέση τού άλλου, όπως διαπιστώνουμε μέσω τού παραδείγματος C.5.35. Όμως -εκ παραλλήλου- θα πρέπει να επισημανθεί, ότι οι ικανές συνθήκες, υπό τις οποίες ο (κανονιστικός) ομομορφισμός R-μοδίων

$$\mathrm{Hom}_R(M, M') \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')$$

καθίσταται ισομορφισμός, είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες από θεωρητικής πλευράς. (Βλ. θεώρημα C.5.34.)

C.5.4 Πρόταση. *Για οιουσδήποτε R-μοδίους M και N ισχύει η ισότητα*

$$\boxed{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} \mathrm{id}_N = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}.} \tag{C.14}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\varphi : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ η τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R N$. Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M \times \mathrm{id}_N"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N \arrow[d, "\mathrm{id}_{M \otimes_R N}"] \\ M \times N \arrow[r, "\varphi"'] & M \otimes_R N \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, διότι

$$\mathrm{id}_{M \otimes_R N}(\varphi(x, y)) = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}(x \otimes y) = x \otimes y = \varphi(x, y) = \varphi((\mathrm{id}_M \times \mathrm{id}_N)(x, y))$$

για κάθε $(x, y) \in M \times N$, οπότε η (C.14) είναι προφανής από την C.5.1. $\square$

C.5.5 Πρόταση. *Δοθέντων έξι R-μοδίων M, M', M'' και N, N', N'', καθώς και τεσσάρων ομομορφισμών*

$$\left\{ \begin{array}{ll} f \in \mathrm{Hom}_R(M, M'), & f' \in \mathrm{Hom}_R(M', M'') \\ & \\ g \in \mathrm{Hom}_R(N, N'), & g' \in \mathrm{Hom}_R(N', N'') \end{array} \right\},$$

η σύνθεση τού τανυστικού γινομένου των ομομορφισμών τής πρώτης και τού τανυστικού γινομένου των ομομορφισμών τής δεύτερης στήλης (τού ανωτέρω παρατεθέντος καταλόγου) ισούται με το τανυστικό γινόμενο τής συνθέσεως των ομομορφισμών τής πρώτης γραμμής και τής συνθέσεως των ομομορφισμών τής δεύτερης γραμμής, ήτοι

$$\boxed{(f' \overline{\otimes} g') \circ (f \overline{\otimes} g) = (f' \circ f) \overline{\otimes} (g' \circ g).} \tag{C.15}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς, $(f' \times g') \circ (f \times g) = (f' \circ f) \times (g' \circ g)$. Εάν υποθέσουμε ότι οι $\varphi, \varphi', \varphi''$ είναι οι τανυστικές απεικονίσεις των $M \otimes_R N$, $M' \otimes_R N'$ και $M'' \otimes_R N''$, αντιστοίχως, τότε, λόγω τής μεταθετικότητας τού διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f \times g"] \arrow[dd, bend right=60, "(f' \circ f) \times (g' \circ g)"'] & M \otimes_R N \arrow[d, "f \overline{\otimes} g"'] \arrow[dd, bend left=60, "(f' \overline{\otimes} g') \circ (f \overline{\otimes} g)"] \\
M' \times N' \arrow[r, "\varphi'"'] \arrow[d, "f' \times g'"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & M' \otimes_R N' \arrow[d, "f' \overline{\otimes} g'"'] \\
M'' \times N'' \arrow[r, "\varphi''"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & M'' \otimes_R N''
\end{tikzcd}$$

η ισότητα (C.15) έπεται άμεσα από την πρόταση C.5.1. □

C.5.6 Πρόταση. *Έστω ότι M, M', N και N' είναι τέσσερεις δοθέντες R-μόδιοι και ότι $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ και $g \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$. Τότε το τανυστικό γινόμενο $f \overline{\otimes} g$ των f και g έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $\mathrm{Im}\,(f \overline{\otimes} g) = \mathrm{Lin}_R\,(\{\, f(x) \otimes g\,(y) \mid (x, y) \in M \times N\})$.

(ii) *Εάν οι f και g είναι επιμορφισμοί, τότε και ο $f \overline{\otimes} g$ είναι επιμορφισμός.*

(iii) *Εάν οι f και g είναι ισομορφισμοί, τότε και ο $f \overline{\otimes} g$ είναι ισομορφισμός, και μάλιστα ισχύει $(f \overline{\otimes} g)^{-1} = f^{-1} \overline{\otimes} g^{-1}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Εάν η $\varphi : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ είναι η τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R N$, τότε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(f \overline{\otimes} g) &= (f \overline{\otimes} g)\,(M \otimes_R N) = (f \overline{\otimes} g)\,(Lin_R\,(\varphi\,(M \times N))) \\
&= \mathrm{Lin}_R\,((f \overline{\otimes} g)\,(\varphi\,(M \times N))) = \mathrm{Lin}_R\,(\{(f \overline{\otimes} g)\,(x \otimes y) \mid (x, y) \in M \times N\}) \\
&= \mathrm{Lin}_R\,(\{\, f(x) \otimes g\,(y) \mid (x, y) \in M \times N\})\,.
\end{aligned}$$

(ii) Υποθέτουμε ότι η $\varphi' : M' \times N' \longrightarrow M' \otimes_R N'$ είναι η τανυστική απεικόνιση τού $M' \otimes_R N'$. Κατά το (i) έχουμε

$$\mathrm{Im}\,(f \overline{\otimes} g) = \mathrm{Lin}_R(\mathrm{Im}(\varphi'|_{f(M) \times g(N)})).$$

Εάν λοιπόν οι f και g είναι επιμορφισμοί, τότε $f\,(M) = M'$, $g(N) = N'$, οπότε

$$\mathrm{Im}\,(f \overline{\otimes} g) = \mathrm{Lin}_R\,(\mathrm{Im}\,(\varphi')) = M' \otimes_R N'.$$

(iii) Εάν οι f και g είναι ισομορφισμοί, τότε διαθέτουν αντιστρόφους

$$f^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(M', M) \quad \text{και} \quad g^{-1} \in \mathrm{Hom}_R(N', N),$$

αντιστοίχως, οπότε

$$\left\{ \begin{array}{ll} f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{M'}, & g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_{N'} \\ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_M, & g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_N \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(f \circ f^{-1}\right) \overline{\otimes} \left(g \circ g^{-1}\right) = \mathrm{id}_{M'} \overline{\otimes} \mathrm{id}_{N'} \\ \left(f^{-1} \circ f\right) \overline{\otimes} \left(g^{-1} \circ g\right) = \mathrm{id}_M \overline{\otimes} \mathrm{id}_N \end{array} \right\}.$$

Χρησιμοποιώντας τις (C.14) και (C.15) οι προκείμενες ισότητες γράφονται ως εξής:

$$\left\{\begin{array}{l} (f\overline{\otimes}g)\circ\left(f^{-1}\overline{\otimes}g^{-1}\right)=\mathrm{id}_{M'\otimes_R N'}, \\ \left(f^{-1}\overline{\otimes}g^{-1}\right)\circ(f\overline{\otimes}g)=\mathrm{id}_{M\otimes_R N} \end{array}\right\}.$$

Άρα η απεικόνιση $f\overline{\otimes}g$ είναι ένας ισομορφισμός και $(f\overline{\otimes}g)^{-1}=f^{-1}\overline{\otimes}g^{-1}$. □

C.5.7 Σημείωση. Συμπέρασμα ανάλογο των (ii), (iii) τής C.5.6 *δεν* ισχύει -εν γένει- και για *μονομορφισμούς* f και g. (Βλ. σημείωση C.5.10.) Ορισμένες ικανές συνθήκες υπό τις οποίες έχουμε διατήρηση τής προκειμένης ιδιότητας περιγράφονται στο πόρισμα C.5.22.

C.5.8 Θεώρημα. *Έστω M ένας R-μόδιος. Τότε μέσω κάθε ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$N'\xrightarrow{\ f\ }N\xrightarrow{\ g\ }N''\longrightarrow\{0\}$$

επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$M\otimes_R N'\xrightarrow{\ \mathrm{id}_M\overline{\otimes}f\ }M\otimes_R N\xrightarrow{\ \mathrm{id}_M\overline{\otimes}\ g\ }M\otimes_R N''\longrightarrow\{0\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f)\subseteq\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}g)$. Κατά την πρόταση C.5.5,

$$(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}g)\circ(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f)=(\underbrace{\mathrm{id}_M\circ\mathrm{id}_M}_{=\mathrm{id}_M})\overline{\otimes}(\underbrace{g\circ f}_{=0})=0.$$

(ii) $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}g)\subseteq\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f)$. Θεωρούμε τον φυσικό επιμορφισμό

$$\pi^{M\otimes_R N}_{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f)}:M\otimes_R N\longrightarrow(M\otimes_R N)/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f).$$

Λόγω τού εγκλεισμού τού αποδειχθέντος στο (i) έχουμε τη δυνατότητα εφαρμογής τής καθολικής ιδιότητας A.4.6 τού προκειμένου πηλικομοδίου. Συνεπώς υφίσταται μοναδικός

$$\theta\in\ \mathrm{Hom}_R((M\otimes_R N)/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f),M\otimes_R N'')$$

ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & M\otimes_R N \arrow[dl, "\pi^{M\otimes_R N}_{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f)}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_M\overline{\otimes}g"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ (M\otimes_R N)/\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f) \arrow[rr, dashed, "\theta"'] & {} & M\otimes_R N'' \end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι ο θ είναι *μονομορφισμός* (διότι τότε θα έχουμε $\mathrm{Ker}(\pi^{M\otimes_R N}_{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes} f)}) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes} f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes} g)$ δυνάμει τού θεωρήματος Α. 3.24). Δοθέντων δυο στοιχείων $y_1, y_2 \in N$ με $g(y_1) = g(y_2)$ παρατηρούμε ότι

$$y_1 - y_2 \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) \Rightarrow [\exists y' \in N' : y_1 - y_2 = f(y')]$$
$$\Rightarrow [x\otimes y_1 - x\otimes y_2 = x\otimes f(y') \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes} f), \forall x \in M].$$

Επειδή ο g είναι εξ υποθέσεως επιμορφισμός, ορίζεται καλώς (λόγω των προαναφερθέντων) η R-διγραμμική απεικόνιση

$$\alpha : M \times N'' \longrightarrow (M\otimes_R N)/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes} f)$$
$$(x, y'') \longmapsto \alpha(x, y'') := (x\otimes y) + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes} f),$$

όπου $y \in N$ είναι τέτοιο ώστε να ισχύει $g(y) = y''$. Σύμφωνα με την καθολική συνθήκη που πληροί το τανυστικό γινόμενο $M\otimes_R N''$, υφίσταται μοναδικός

$$\widetilde{\alpha} \in \ \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N'', (M\otimes_R N)/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes} f))$$

ο οποίος καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
& M\otimes_R N'' \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\alpha}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
M\times N'' \arrow[ur, "\text{ταν. απ.}"] \arrow[rr, "\alpha"'] & {} & (M\otimes_R N)/\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes} f)
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό. Επειδή για κάθε $(x, y) \in M \times N$ έχουμε

$$(\widetilde{\alpha}\circ\theta)\left((x\otimes y) + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes} f)\right) = \widetilde{\alpha}((\mathrm{id}_M\overline{\otimes} g)(x\otimes y))$$
$$= \widetilde{\alpha}(x\otimes g(y)) = \alpha(x, g(y)) = (x\otimes y) + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes} f),$$

η σύνθεση $\widetilde{\alpha}\circ\theta$ ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση επί ενός συστήματος γεννητόρων τού πηλικομοδίου $(M\otimes_R N)/\,\mathrm{Im}(\mathrm{id}_M\overline{\otimes} f)$. Κατά συνέπειαν,

$$\widetilde{\alpha}\circ\theta = \mathrm{id}_{(M\otimes_R N)/\,\mathrm{Im}(id_M\overline{\otimes} f)} \underset{\text{A.3.23}}{\Longrightarrow} [\text{ο } \theta \text{ είναι όντως μονομορφισμός}].$$

(iii) Ο $\mathrm{id}_M\overline{\otimes} g$ είναι επιμορφισμός. Τούτο έπεται άμεσα (από το (ii) τής προτάσεως C.5.6) λόγω τού ότι αμφότεροι οι id_M και g είναι επιμορφισμοί. □

Παρομοίως αποδεικνύεται και το ακόλουθο (το οποίο μπορεί να εκληφθεί, τρόπον τινά, ως *δυϊκό* τού θεωρήματος C.5.8).

C.5.9 Θεώρημα. *Έστω M ένας R-μόδιος. Τότε μέσω κάθε ακριβούς ακολουθίας R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων τής μορφής*

$$N' \xrightarrow{\ f\ } N \xrightarrow{\ g\ } N'' \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$N' \otimes_R M \xrightarrow{f \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M} N \otimes_R M \xrightarrow{g\, \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M} N'' \otimes_R M \longrightarrow \{0\}.$$

C.5.10 Σημείωση. Οι επαγόμενες ακριβείς ακολουθίες των θεωρημάτων C.5.8 και C.5.9 δεν είναι κατ' ανάγκην βραχείες ακριβείς ακολουθίες, ακόμη και όταν οι δοθείσες «ακολουθίες εκκινήσεως» είναι βραχείες ακριβείς ακολουθίες[11]. Επί παραδείγματι, εάν $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, τότε μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{k\, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}$$

(όπου $g(\xi) := [\xi]_k, \forall \xi \in \mathbb{Z}$, βλ. B.1.3 (iv)) επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k} \overline{\otimes} (k\, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}})} \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k} \overline{\otimes} g} \mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_k \longrightarrow \{0\}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k} \overline{\otimes} (k\, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}))([a]_k, b) = [a]_k \otimes kb = k[a]_k \otimes b = [0]_k \otimes b = 0_{\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}},$$

οπότε ο $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k} \overline{\otimes} (k\, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}})$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός με πυρήνα του ολόκληρον τον

$$\mathbb{Z}_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k \ncong \{0\}.$$

Κατά συνέπειαν, ο $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_k} \overline{\otimes} (k\, \mathrm{id}_{\mathbb{Z}})$ *δεν είναι μονομορφισμός.*

C.5.11 Πόρισμα. *Εάν M είναι ένας R-μόδιος και I ένα ιδεώδες τού R, τότε υφίσταται ισομορφισμός*

$$\boxed{M/IM \xrightarrow{\cong} (R/I) \otimes_R M.} \tag{C.16}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\iota : I \hookrightarrow R$ η συνήθης ένθεση. Μέσω τής βραχείας ακριβούς ακολουθίας

$$\{0\} \longrightarrow I \overset{\iota}{\hookrightarrow} R \overset{\pi_I^R}{\twoheadrightarrow} R/I \longrightarrow \{0\}$$

επάγεται (σύμφωνα με το θεώρημα C.5.9) η ακριβής ακολουθία

$$I \otimes_R M \xrightarrow{\iota \overline{\otimes} \mathrm{id}_M} R \otimes_R M \xrightarrow{\pi_I^R \overline{\otimes} \mathrm{id}_M} (R/I) \otimes_R M \longrightarrow \{0\}.$$

Ως γνωστόν, ο ομομορφισμός $f : R \otimes_R M \longrightarrow M$, ο οριζόμενος μέσω τού τύπου

$$f(r \otimes x) := rx, \ \forall (r, x) \in R \times M,$$

[11]Μια ικανή συνθήκη, υπό την οποία έχουμε διατήρηση τής προκειμένης ιδιότητας, δίδεται στα θεωρήματα C.5.14 και C.5.15.

είναι *ισομορφισμός*[12], έχων ως αντίστροφό του $\vartheta := f^{-1}$ τον

$$\vartheta : M \xrightarrow{\cong} R \otimes_R M,\ x \longmapsto \vartheta(x) := 1_R \otimes x.$$

Ο επιμορφισμός $(\pi_I^R \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M) \circ \vartheta$ έχει ως πυρήνα του την εικόνα

$$\mathrm{Im}(f \circ (\iota \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)) = f(\mathrm{Im}(\iota \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)) = IM$$

τού $f \circ (\iota \overline{\otimes} \mathrm{id}_M)$, όπως προκύπτει από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
I \otimes_R M \arrow[r, "\iota\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] \arrow[dr, "f\circ(\iota\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)"'] & R \otimes_R M \arrow[r, "\pi_I^R\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] \arrow[d, bend left, "f \circlearrowleft", "\cong"'] & (R/I) \otimes_R M \arrow[r] & \{0\} \\
& M \arrow[u, bend left, "\circlearrowleft \vartheta", "\cong"'] \arrow[ur, "(\pi_I^R\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)\circ\vartheta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Από το 1ο θεώρημα ισομορφισμών A.4.7 έπεται ότι $M/IM \cong (R/I) \otimes_R M$. □

C.5.12 Πόρισμα. *Εάν τα I, J είναι ιδεώδη τού R, τότε υφίσταται ισομορφισμός*

$$\boxed{R/(I+J) \xrightarrow{\cong} (R/I) \otimes_R (R/J).} \tag{C.17}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Στην ειδική περίπτωση όπου $M = R/J$ ο (C.16) δίδει

$$R/(I+J) \cong (R/J)/(I+J/J) = (R/J)/I(R/J) \xrightarrow{\cong} (R/I) \otimes_R (R/J),$$

ήτοι τον (C.17). □

C.5.13 Παρατήρηση. Για *οιουσδήποτε* $m, n \in \mathbb{N}$ έχουμε (λόγω τού (C.17))

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \otimes_R (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}),$$

απ' όπου έπεται (μέσω τού A.4.8) ο (C.8), καθώς $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ = μκδ$(m, n)\mathbb{Z}$.

C.5.14 Θεώρημα. *Εάν η* $\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$ *είναι μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε και η επαγομένη ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g} M \otimes_R N'' \longrightarrow \{0\}$$

είναι μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία.

[12]Πρβλ. απόδειξη τού θεωρήματος C.4.3.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κατά το θεώρημα B.1.28,

$$\exists \alpha \in \mathrm{Hom}_R(N, N') : \alpha \circ f = \mathrm{id}_{N'}.$$

Επομένως για κάθε $(x, y) \in M \times N'$ έχουμε

$$((\mathrm{id}_M \overline{\otimes} \alpha) \circ (\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f))(x, y) \underset{\text{C.5.5}}{=} (\underbrace{\mathrm{id}_M \circ \mathrm{id}_M}_{=\mathrm{id}_M}) \overline{\otimes} (\underbrace{\alpha \circ f}_{=\mathrm{id}_{N'}})(x, y)$$

$$= (x, y) \Rightarrow (\mathrm{id}_M \overline{\otimes} \alpha) \circ (\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f) = \mathrm{id}_{M \otimes_R N'},$$

οπότε ο $\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f$ είναι μονομορφισμός. (Βλ. λήμμα A.3.23.) Υπολείπεται η εφαρμογή των θεωρημάτων C.5.8 και B.1.28. □

Παρομοίως αποδεικνύεται και το ακόλουθο (το οποίο μπορεί να εκληφθεί, τρόπον τινά, ως *δυϊκό* τού θεωρήματος C.5.14).

C.5.15 Θεώρημα. *Εάν η* $\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$ *είναι μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων, τότε και η επαγομένη ακολουθία*

$$\{0\} \longrightarrow N' \otimes_R M \xrightarrow{f \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M} N \otimes_R M \xrightarrow{g\, \overline{\otimes}\, \mathrm{id}_M} N'' \otimes_R U \longrightarrow \{0\}$$

είναι μια διασπώμενη βραχεία ακριβής ακολουθία.

C.5.16 Ορισμός. Ένας R-μόδιος M καλείται **ισόπεδος** (flat R-module) όταν για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $f : N' \to N$ ο επαγόμενος ομομορφισμός

$$\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f : M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N$$

είναι ωσαύτως μονομορφισμός.

C.5.17 Πρόταση. *Για έναν R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες*:

(i) *Ο M είναι ισόπεδος.*

(ii) *Για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$$

η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g} M \otimes_R N'' \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έπεται άμεσα από το θεώρημα C.5.8, σε συνδυασμό με τον ορισμό C. 5.16. □

C.5.18 Παράδειγμα. Εάν $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, τότε ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_k$ *δεν είναι ισόπεδος*. (Βλ. εδ. C.5.10.)

C.5.19 Πρόταση. *Για έναν R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο M είναι ισόπεδος.*

(ii) *Για οιαδήποτε βραχεία ακριβή ακολουθία R-μοδίων και ομομορφισμών R-μοδίων*

$$\{0\} \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow \{0\}$$

η βραχεία ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow N' \otimes_R M \xrightarrow{f \overline{\otimes} \mathrm{id}_M} N \otimes_R M \xrightarrow{g \overline{\otimes} \mathrm{id}_M} N'' \otimes_R M \longrightarrow \{0\}$$

είναι ακριβής.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i)⇒(ii) Επειδή ο M είναι ισόπεδος, εάν λάβουμε υπ' όψιν την πρόταση C.5.17 και το θεώρημα C.5.9 μπορούμε να κατασκευάσουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & M \otimes_R N' \arrow[r, "\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N \arrow[r, "\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N'' \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \{0\} \\
 & N' \otimes_R M \arrow[r, "f \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"'] & N \otimes_R M \arrow[r, "g \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"'] & N'' \otimes_R M \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

που έχει ακριβείς γραμμές και κατακόρυφα βέλη τα οποία υποδηλούν τους ισομορφισμούς τους κατασκευασθέντες στο θεώρημα C.4.1. Από αυτό έπεται ότι $\mathrm{Ker}(f \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f) \cong \{0\}$.

(ii)⇒(i) Επειδή η ανωτέρω βραχεία ακολουθία είναι εξ υποθέσεως ακριβής, εάν λάβουμε υπ' όψιν το θεώρημα C.5.8 μπορούμε να κατασκευάσουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes_R N' \arrow[r, "\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N \arrow[r, "\mathrm{id}_M \overline{\otimes} g"] \arrow[d, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \otimes_R N'' \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & N' \otimes_R M \arrow[r, "f \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"'] & N \otimes_R M \arrow[r, "g \overline{\otimes} \mathrm{id}_M"'] & N'' \otimes_R M \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

που έχει ακριβείς γραμμές και κατακόρυφα βέλη τα οποία υποδηλούν τους ισομορφισμούς τους κατασκευασθέντες στο θεώρημα C.4.1. Από αυτό έπεται ότι $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f) \cong \mathrm{Ker}(f \overline{\otimes} \mathrm{id}_M) \cong \{0\}$, ήτοι ότι ο M είναι ισόπεδος. □

C.5.20 Πόρισμα. *Ένας R-μόδιος M είναι ισόπεδος εάν και μόνον εάν για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $f : N' \to N$ ο $f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ είναι μονομορφισμός.*

C.5.21 Πόρισμα. *Εάν ένας R-μόδιος M είναι ισόπεδος, τότε για κάθε μονομορφισμό R-μοδίων $f : N' \to N$ αμφότεροι οι $\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f$ και ο $f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ είναι μονομορφισμοί.*

C.5.22 Πόρισμα. *Ας υποθέσουμε ότι M, M', N και N' είναι τέσσερεις R-μόδιοι και ότι $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ και $g \in \mathrm{Hom}_R(N, N')$. Εάν ισχύει τουλάχιστον μία εκ των συνθηκών:*

(i) *οι M' και N είναι ισόπεδοι,*

(ii) *οι M και N' είναι ισόπεδοι,*

τότε το τανυστικό γινόμενο $f\overline{\otimes}g$ των f και g έχει την εξής ιδιότητα: Εάν αμφότεροι οι f και g είναι μονομορφισμοί, τότε και το $f\overline{\otimes}g$ είναι μονομορφισμός.

Απόδειξη. Το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R N' \arrow[dr, "f\overline{\otimes}\mathrm{id}_{N'}"'] & M \otimes_R N \arrow[l, "\mathrm{id}_M\overline{\otimes}g"'] \arrow[r, "f\overline{\otimes}\mathrm{id}_N"] \arrow[d, "f\overline{\otimes}g"] & M' \otimes_R N \arrow[dl, "\mathrm{id}_{M'}\overline{\otimes}g"] \\
& M' \otimes_R N' &
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, διότι (κατά την πρόταση C.5.5)

$$f\overline{\otimes}g = (\mathrm{id}_{M'}\overline{\otimes}g) \circ (f\overline{\otimes}\mathrm{id}_N) = (f\overline{\otimes}\mathrm{id}_{N'}) \circ (\mathrm{id}_M\overline{\otimes}g),$$

οπότε ο ισχυρισμός είναι αληθής δυνάμει των πορισμάτων C.5.20 και C.5.21, και των (i) και (iv) τής προτάσεως A.3.15. □

C.5.23 Πρόταση. *Για μια οικογένεια R-μοδίων $(M_j)_{j\in J}$ οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Το ευθύ άθροισμα $M := \bigoplus_{j\in J} M_j$ είναι ισόπεδος R-μόδιος.*

(ii) *Ο M_j είναι ισόπεδος R-μόδιος για κάθε $j \in J$.*

Απόδειξη. Εάν $f : N' \to N$ είναι ένας μονομορφισμός R-μοδίων, τότε προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R N' \arrow[r, "\mathrm{id}_M\overline{\otimes}f"] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & M \otimes_R N \arrow[d, "\cong"] \\
\bigoplus_{j\in J}(M_j \otimes_R N') \arrow[r, "\bigoplus_{j\in J}\left(\mathrm{id}_{M_j}\overline{\otimes}f\right)"'] & \bigoplus_{j\in J}(M_j \otimes_R N)
\end{tikzcd}$$

τα κατακόρυφα βέλη τού οποίου συμβολίζουν τους ισομορφισμούς που έχουν θεσπισθεί στο θεώρημα C.4.6. Προφανώς,

$$[\text{O } \mathrm{id}_M \overline{\otimes} f \text{ είναι μονομορφισμός}] \Leftrightarrow [\text{ο } \bigoplus_{j\in J} \left(\mathrm{id}_{M_j} \overline{\otimes} f\right) \text{ είναι μονομορφισμός}]$$

$$\Leftrightarrow [\text{ο } \mathrm{id}_{M_j} \overline{\otimes} f \text{ είναι μονομορφισμός για κάθε } j \in J],$$

όπου η τελευταία αμφίπλευρη συνεπαγωγή έπεται από τη δεύτερη εκ των ισοτήτων (A.15) και από την πρόταση A.3.13. □

C.5.24 Λήμμα. *Ο R-μόδιος R είναι ισόπεδος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $f : N' \to N$ είναι ένας μονομορφισμός R-μοδίων, τότε προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} N' \arrow[r, "f"] & N \arrow[d, "\cong"] \\ R \otimes_R N' \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "\mathrm{id}_R \overline{\otimes} f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & R \otimes_R N \end{tikzcd}$$

τα κατακόρυφα βέλη τού οποίου συμβολίζουν τους ισομορφισμούς που έχουν θεσπισθεί στο θεώρημα C.4.3. Ο $\mathrm{id}_R \overline{\otimes} f$ είναι μονομορφισμός (ως σύνθεση μονομορφισμών). □

C.5.25 Θεώρημα. *Κάθε προβολικός R-μόδιος είναι ισόπεδος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω P τυχών προβολικός R-μόδιος. Εάν ο P είναι τετριμμένος, τότε αυτός είναι προδήλως ισόπεδος[13]. Ας υποθέσουμε (από εδώ και στο εξής) ότι ο P είναι μη τετριμμένος. Σύμφωνα με το θεώρημα C.2.7 ο P είναι ευθύς προσθετέος ενός (κατ' ανάγκην μη τετριμμένου) ελευθέρου R-μοδίου F. Επομένως υπάρχει υπομόδιος P' τού F, τέτοιος ώστε να ισχύει $F = P \oplus P'$. Έστω $\mathcal{X}$ μια βάση τού F. Τότε $F \cong R^{(\mathcal{X})} \cong \bigoplus_{x\in\mathcal{X}} Rx$, όπου $Rx \cong R$, $\forall x \in \mathcal{X}$. (Βλ. A.6.6 και A.6.16.) Επειδή ο ίδιος ο R (ως R-μόδιος) είναι ισόπεδος (κατά το λήμμα C.5.24), ο F είναι ισόπεδος λόγω τής προτάσεως C.5.23. Και επειδή $F = P \oplus P'$, αμφότεροι οι P και P' οφείλουν να είναι ισόπεδοι (και πάλι λόγω τής προτάσεως C.5.23). □

C.5.26 Σημείωση. *Υπομόδιοι* ισόπεδων R-μοδίων δεν είναι κατ' ανάγκην ισόπεδοι.

(i) Επί παραδείγματι, ο δακτύλιος $R = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ως R-μόδιος είναι ισόπεδος (σύμφωνα με το λήμμα C.5.24). Ωστόσο, το ιδεώδες του $I := 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (ιδωθέν ως υπομόδιός του) *δεν είναι ισόπεδος* R-μόδιος, διότι εάν $\iota : 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ είναι η συνήθης

[13] Βλ. πόρισμα C.3.16 και ορισμό C.5.16.

ένθεση, τότε η σύνθεση

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathrm{id}_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \overline{\otimes} \iota"] \arrow[rr, bend right, "f \circ (\mathrm{id}_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \overline{\otimes} \iota)"'] & (2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \arrow[r, "f", "\cong"'] & 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \end{tikzcd}$$

όπου f ο ισομορφισμός τού θεωρήματος C.4.3, είναι *ο μηδενικός ομομορφισμός*, αφού για κάθε ζεύγος $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\begin{aligned} & f((\mathrm{id}_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \overline{\otimes} \iota)((2a + 4\mathbb{Z}) \otimes (2b + 4\mathbb{Z})) = f((2a + 4\mathbb{Z}) \otimes (2b + 4\mathbb{Z})) \\ & = (2a + 4\mathbb{Z})(2b + 4\mathbb{Z}) = 4ab + 4\mathbb{Z} = 4\mathbb{Z} = 0_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Άρα και η ίδια η $\mathrm{id}_{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} \overline{\otimes} \iota$ είναι ο μηδενικός ομομορφισμός και επειδή

$$2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \cong 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},$$

ο πυρήνας της είναι μη τετριμμένος.

(ii) Από την άλλη μεριά, όταν ο δακτύλιος αναφοράς R είναι μια Π.Κ.Ι., κάθε υπομόδιος ενός ισόπεδου R-μοδίου M είναι ισόπεδος. (Εν τοιαύτη περιπτώσει, οι έννοιες *ισόπεδος* και *στερούμενος στρέψεως* είναι ισοδύναμες. Βλ. θεώρημα D.3.25. Και είναι προφανές ότι κάθε υπομόδιος ενός R-μοδίου στερουμένου στρέψεως δεν μπορεί να διαθέτει αφ' εαυτού στρέψη.)

C.5.27 Λήμμα. *Ας υποθέσουμε ότι οι M και N είναι δυο R-μόδιοι και ότι υπάρχουν στοιχεία $x_1, ..., x_k \in M$, $y_1, ..., y_k \in N$, τέτοια ώστε να ισχύει*

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j = 0_{M \otimes_R N}. \tag{C.18}$$

Τότε υπάρχει κάποιος πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος M' τού M και κάποιος πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος N' τού N, ούτως ώστε να ισχύει $x_1, ..., x_k \in M'$, $y_1, ..., y_k \in N'$ και

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j = 0_{M' \otimes_R N'}. \tag{C.19}$$

Αποδειξη. Ταυτίζοντας το τανυστικό γινόμενο $M \otimes_R N$ (με ακρίβεια ισομορφισμού) με τον πηλικομόδιο $R^{(M \times N)}/\Xi_{M,N}(R)$ (όπως στο θεώρημα C.3.11) η (C.18) ισοδυναμεί με το ότι $\sum_{j=1}^{k} \delta_{(x_j, y_j)} \in \Xi_{M,N}(R)$. Τούτο σημαίνει ότι το άθροισμα $\sum_{j=1}^{k} \delta_{(x_j, y_j)}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τής μορφής C.3.10 (i) ή/και (ii), ήτοι ότι

$$\sum_{j=1}^{k} \delta_{(x_j, y_j)} = \sum_{\varrho=1}^{l} r_\varrho z_\varrho, \tag{C.20}$$

για κάποια $r_1, ..., r_l \in R$ και $z_1, ..., z_l \in \Xi_{M,N}(R)$. Επειδή στην (C.20) είναι παρόντα μόνον *πεπερασμένου πλήθους στοιχεία* τής βάσεως $\left\{ \delta_{(x,y)} \middle| \, (x,y) \in M \times N \right\}$ τού $R^{(M \times N)}$, υπάρχει η δυνατότητα επιλογής ενός πεπερασμένως παραγομένου υπομοδίου M' τού M και ενός πεπερασμένως παραγομένου υπομοδίου N' τού N κατά τέτοιον τρόπο, ώστε

$$(x,y) \in M' \times N' \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \text{το } \delta_{(x,y)} \text{ εμφανίζεται σε κάποιο} \\ \text{εκ των δύο μελών τής (C.20)} \end{array} \right].$$

Αρκεί προς τούτο να θέσουμε

$$M' := \mathrm{Lin}_R \left(\{x_1, ..., x_k\} \cup \left\{ x \in M \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{το } \delta_{(x,y)} \text{ εμφανίζεται στο δεύτερο} \\ \text{μέλος τής (C.20) για κάποιο } y \in N \end{array} \right\} \right)$$

και, κατ' αναλογίαν,

$$N' := \mathrm{Lin}_R \left(\{y_1, ..., y_k\} \cup \left\{ y \in N \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{το } \delta_{(x,y)} \text{ εμφανίζεται στο δεύτερο} \\ \text{μέλος τής (C.20) για κάποιο } x \in M \end{array} \right\} \right).$$

Προφανώς, $\sum_{j=1}^{k} \delta_{(x_j,y_j)} \in \Xi_{M',N'}(R)$. Επειδή δε το $M' \otimes_R N'$ ταυτίζεται (με ακρίβεια ισομορφισμού) με τον πηλικομόδιο $R^{(M' \times N')} / \Xi_{M',N'}(R)$, αυτή η σχέση ισοδυναμεί με την (C.19). □

C.5.28 Πρόταση. *Εάν ο M είναι ένας R-μόδιος για τον οποίο ισχύει ότι κάθε πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιός του περιέχεται σε κάποιον ισόπεδο υπομόδιό του, τότε και ο ίδιος ο M οφείλει να είναι ισόπεδος.*

Απόδειξη. Έστω $f : L \longrightarrow N$ ένας μονομορφισμός R-μοδίων και έστω τυχόν στοιχείο $z \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f)$. Επειδή $z \in M \otimes_R L$, υπάρχουν (σύμφωνα με το πόρισμα C.3.18) $k \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_k \in M$ και $y_1, ..., y_k \in L$ με

$$z = \sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j \Rightarrow 0_{M \otimes_R N} = (\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f)(z) = \sum_{j=1}^{k} x_j \otimes f(y_j).$$

Κατά το λήμμα C.5.27 υπάρχει κάποιος πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος M' τού M και κάποιος πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος N' τού N, ούτως ώστε να ισχύει $x_1, ..., x_k \in M'$, $f(y_1), ..., f(y_k) \in N'$ και

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes f(y_j) = 0_{M' \otimes_R N'}.$$

Εξ υποθέσεως, υπάρχει κάποιος *ισόπεδος* υπομόδιος M'' τού M με $M' \subseteq M''$. Έστω ότι οι $\iota_1 : M' \hookrightarrow M''$, $\iota_2 : M'' \hookrightarrow M$ και $\iota_3 : N' \hookrightarrow N$ είναι οι συνήθεις ενθέσεις και ότι

$$w := \sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j \in M' \otimes_R L.$$

Θεωρούμε το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes_R L \arrow[r, "\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f"] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & M \otimes_R N \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "\circlearrowleft"] & \\
M' \otimes_R L \arrow[ur, "(\iota_2 \circ \iota_1) \overline{\otimes} \mathrm{id}_L"] \arrow[r, "\iota_1 \overline{\otimes} \mathrm{id}_L"'] & M'' \otimes_R L \arrow[u, "\iota_2 \overline{\otimes} \mathrm{id}_L"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_{M''} \overline{\otimes} f"'] & M'' \otimes_R N \arrow[u, "\iota_2 \overline{\otimes} \mathrm{id}_N"] & M' \otimes_R N' \arrow[l, "\iota_1 \overline{\otimes} \iota_3"] \arrow[ul, "(\iota_2 \circ \iota_1) \overline{\otimes} \iota_3"'] \arrow[ul, phantom, shift left=4ex, "\circlearrowleft"]
\end{tikzcd}$$

Επειδή

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_{M''} \overline{\otimes} f)((\iota_1 \overline{\otimes} \mathrm{id}_L)(w)) &= (\mathrm{id}_{M''} \overline{\otimes} f) \left(\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes y_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} x_j \otimes f(y_j) = (\iota_1 \overline{\otimes} \iota_3) \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{k} x_j \otimes f(y_j) \right)}_{=0_{M' \otimes_R N'}} = 0_{M'' \otimes_R N},
\end{aligned}$$

έχουμε

$$\left. \begin{array}{r} (\iota_1 \overline{\otimes} \mathrm{id}_L)(w) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M''} \overline{\otimes} f) \\ M'' \text{ ισόπεδος} \Rightarrow \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_{M''} \overline{\otimes} f) = \{0_{M'' \otimes_R L}\} \end{array} \right\} \Rightarrow (\iota_1 \overline{\otimes} \mathrm{id}_L)(w) = \{0_{M'' \otimes_R L}\}$$

$$\Rightarrow z = ((\iota_2 \circ \iota_1) \overline{\otimes} \mathrm{id}_L)(w) = (\iota_2 \overline{\otimes} \mathrm{id}_L)((\iota_1 \overline{\otimes} \mathrm{id}_L)(w)) = \underbrace{(\iota_2 \overline{\otimes} \mathrm{id}_L)(0_{M'' \otimes_R L})}_{=0_{M \otimes_R L}},$$

οπότε $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f) = \{0_{M \otimes_R L}\} \underset{\text{A.3.13}}{\Longrightarrow}$ ο $\mathrm{id}_M \overline{\otimes} f$ είναι μονομορφισμός. Ως εκ τούτου, ο M είναι ισόπεδος. $\square$

C.5.29 Πόρισμα. *Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Q}$ είναι ισόπεδος και μη προβολικός.*

Απόδειξη. Έστω L ένας πεπερασμένως παραγόμενος υπομόδιος τού $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Q}$. Εάν ο L είναι τετριμμένος, τότε περιέχεται στον ελεύθερο (και, κατ' επέκταση, ισόπεδο) $\mathbb{Z}$-μόδιο $\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}$. Εάν ο L δεν είναι τετριμμένος, τότε αυτός γράφεται υπό τη μορφή

$$L = \mathrm{Lin}_{\mathbb{Z}}(q_1, ..., q_k), \;\; q_j = \tfrac{a_j}{b_j}, \;\; a_j, b_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$. Έστω $c :=$ εκπ$(b_1, ..., b_k)$. Κάθε $z \in L$ εκφράζεται ως ακέραιος γραμμικός συνδυασμός

$$z = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j q_j = \sum_{j=1}^{k} \tfrac{\lambda_j a_j}{b_j} = \tfrac{1}{c} \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j d_j \right),$$

όπου $d_j := \frac{c}{b_j}$ για κάθε $j \in \{1, ..., k\}$. Άρα $L \subseteq \frac{1}{c}\mathbb{Z}$, κι επειδή $\frac{1}{c}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$, ο L είναι ισόμορφος με ένα ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}$, ήτοι με έναν υπομόδιο τού ελευθέρου (και, κατ' επέκταση, ισόπεδου) $\mathbb{Z}$-μοδίου $\mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}$. Από την πρόταση C.5.28 συνάγεται ότι ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Q}$ *είναι ισόπεδος*. Από την άλλη μεριά, ο $\mathbb{Q}$ *δεν είναι προβολικός* $\mathbb{Z}$-μόδιος, διότι εάν ήταν, θα έπρεπε να είναι ελεύθερος, αφού ο $\mathbb{Z}$ είναι Π.Κ.Ι. (Βλ. πόρισμα C.2.10.) Εάν ο $\mathbb{Q}$ ήταν ελεύθερος $\mathbb{Z}$-μόδιος, τότε

$$\mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}^{(J)} \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z} x_j$$

(όπου $(x_j)_{j \in J}$ μια βάση) και ο αριθμός 1 θα εγράφετο *μονοσημάντως* ως

$$1 = \sum_{j \in J} \mu_j x_j, \text{ όπου } \mu_j \in \mathbb{Z} \text{ και } 1 \leq \text{card}(\{j \in J \mid \mu_j \neq 0\}) < \infty.$$

Επιλέγοντας έναν δείκτη $j_\bullet \in J$ με $\mu_{j_\bullet} \neq 0$ και έναν $\ell \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ με $\ell \nmid \mu_{j_\bullet}$, το κλάσμα $\frac{1}{\ell} \in \mathbb{Q}$ θα εγράφετο *μονοσημάντως* ως

$$\frac{1}{\ell} = \sum_{j \in J} \nu_j x_j, \text{ όπου } \nu_j \in \mathbb{Z} \text{ και } 1 \leq \text{card}(\{j \in J \mid \nu_j \neq 0\}) < \infty,$$

οπότε θα είχαμε

$$1 = \sum_{j \in J} \mu_j x_j = \sum_{j \in J} (\ell \nu_j) x_j \Rightarrow \mu_{j_\bullet} = \ell \nu_{j_\bullet} \Rightarrow \ell \mid \mu_{j_\bullet}.$$

Άτοπο! □

C.5.30 Θεώρημα. *Για οιονδήποτε R-μόδιο M οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Ο M είναι ισόπεδος.*

(ii) *Για κάθε πεπερασμένως παραγόμενο ιδεώδες I τού R, ο ομομορφισμός*

$$\iota \overline{\otimes} \text{id}_M : I \otimes_R M \longrightarrow R \otimes_R M \cong M \tag{C.21}$$

ο επαγόμενος μέσω τής συνήθους ενθέσεως $\iota : I \hookrightarrow R$ είναι μονομορφισμός (ή, ισοδυνάμως, $I \otimes_R M \cong IM \subseteq M$).

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Τούτο είναι πρόδηλο λόγω τού πορίσματος C.5.20.

(ii)⇒(i) **Βήμα 1ο**. Κατ' αρχάς, *για κάθε (όχι κατ' ανάγκην πεπερασμένως παραγόμενο) ιδεώδες J* τού δακτυλίου R, ο ομομορφισμός $j \overline{\otimes} \text{id}_M$ (όπου $j : J \hookrightarrow R$ η συνήθης ένθεση) *είναι μονομορφισμός*. Πράγματι· εάν J είναι τυχόν ιδεώδες τού R και $z \in \text{Ker}(j \overline{\otimes} \text{id}_M)$, τότε το z (ως στοιχείο τού $J \otimes_R M$) γράφεται υπό τη μορφή

$$z = \sum_{\varrho=1}^{k} a_\varrho \otimes b_\varrho, \text{ όπου } a_1, \ldots, a_k \in J \text{ και } b_1, \ldots, b_k \in M.$$

(Βλ. πόρισμα C.3.18.) Επειδή υφίσταται κάποιο *πεπερασμένως παραγόμενο* ιδεώδες I τού R που περιέχει τα $a_1, \ldots, a_k$, ο περιορισμός $j \overline{\otimes} \text{id}_M|_{I \otimes_R M}$ είναι *εξ υποθέσεως* μονομορφισμός. Επομένως, $z = 0_{I \otimes_R M} = 0_{J \otimes_R M}$, απ' όπου έπεται ότι $\text{Ker}(j \overline{\otimes} \text{id}_M) = \{0_{J \otimes_R M}\}$.

Βήμα 2ο. *Εάν W είναι ένας υπομόδιος ενός πεπερασμένως παραγομένου ελευθέρου R-μοδίου F*, τότε ο ομομορφισμός $\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ (όπου $\mathrm{j} : W \hookrightarrow F$ η συνήθης ένθεση) *είναι μονομορφισμός*. Τούτο είναι προφανές όταν ο F είναι τετριμμένος. Ας υποθέσουμε ότι ο F δεν είναι τετριμμένος. Τότε $F \cong R^n \cong \bigoplus_{\lambda=1}^n Re_\lambda$ (όπου $(e_\lambda)_{1\leq\lambda\leq n}$ η συνήθης βάση με το e_λ έχον το 1_R στη λ-οστή θέση και το 0_R στις υπόλοιπες). Άρα ο W είναι εμφυτεύσιμος εντός τού ευθέος αθροίσματος $\bigoplus_{\lambda=1}^n J_\lambda$ των υπομοδίων (= ιδεωδών) J_λ τού $Re_\lambda \cong R$, όπου το J_λ απαρτίζεται από τις λ-οστές συντεταγμένες των εικόνων των στοιχείων τού W μέσω τού ισομορφισμού $F \xrightarrow{\cong} R^n$. Επειδή οι (σύμφωνα με τα προαναφερθέντα στο βήμα 1) *μονομορφισμοί* $J_\lambda \otimes_R M \hookrightarrow Re_\lambda \otimes_R M$ δίδουν

$$\left(\bigoplus_{\lambda=1}^n J_\lambda\right) \otimes_R M \cong \bigoplus_{\lambda=1}^n (J_\lambda \otimes_R M) \hookrightarrow \bigoplus_{\lambda=1}^n (Re_\lambda \otimes_R M) \cong (\underbrace{\textstyle\bigoplus_{\lambda=1}^n Re_\lambda}_{\cong F}) \otimes_R M,$$

ο επαγόμενος ομομορφισμός $\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}$: $W \otimes_R M \longrightarrow F \otimes_R M$ είναι μονομορφισμός.

Βήμα 3ο. Το αποδειχθέν στο βήμα 2 εξακολουθεί να ισχύει *ακόμη και αν ο F δεν είναι πεπερασμένως παραγόμενος*. Εν τοιαύτη περιπτώσει, εάν $z \in \mathrm{Ker}(\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)$, το z (ως στοιχείο τού $W \otimes_R M$) γράφεται υπό τη μορφή

$$z = \sum_{\varrho=1}^k a_\varrho \otimes b_\varrho, \text{ όπου } a_1, ..., a_k \in W \text{ και } b_1, ..., b_k \in M.$$

(Βλ. πόρισμα C.3.18.) Επειδή υφίσταται *πεπερασμένως παραγόμενος* υπομόδιος U τού F που περιέχει τα $a_1, ..., a_k$, ο περιορισμός $\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M|_{U\otimes_R M}$ είναι μονομορφισμός (λόγω των προαναφερθέντων στο βήμα 2 με το U στη θέση τού *εκεί* παρατεθέντος W). Επομένως, $z = 0_{U\otimes_R M} = 0_{W\otimes_R M}$, απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{Ker}(\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) = \{0_{W\otimes_R M}\}$.

Βήμα 4ο. Έστω $f : N' \to N$ ένας μονομορφισμός R-μοδίων. Σύμφωνα με το πόρισμα A.6.23, $N \cong F/W$, όπου F κάποιος ελεύθερος R-μόδιος και W κάποιος υπομόδιος αυτού. Συνεπώς δημιουργείται μια βραχεία ακριβής ακολουθία

$$\{0\} \longrightarrow W \overset{\mathrm{j}}{\hookrightarrow} F \overset{\varpi}{\twoheadrightarrow} N \longrightarrow \{0\},$$

όπου $\mathrm{j} : W \hookrightarrow F$ η συνήθης ένθεση και ϖ η σύνθεση τού φυσικού επιμορφισμού π_W^F και τού ανωτέρου ισομορφισμού. Θέτοντας $W' := \{x \in F | \varpi(x) \in \mathrm{Im}(f)\}$ και

$$\vartheta : W' \longrightarrow N',\ x \longmapsto \vartheta(x) := y, \text{ όπου } \varpi(x) = f(y),$$

παρατηρούμε ότι η ϑ είναι αφ' ενός μεν *καλώς ορισμένη απεικόνιση*, διότι εάν $\varpi(x) = f(y) = f(y')$, τότε $y = y'$ (λόγω τής ενριπτικότητας τής f), αφ' ετέρου δε *επιμορφισμός*, διότι $\mathrm{Im}(\vartheta) = N'$ και για $r_1, r_2 \in R$ και $x_1, x_2 \in W'$ με $\varpi(x_1) = f(y_1)$ και $\varpi(x_2) = f(y_2)$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}&\varpi(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1\varpi(x_1) + r_2\varpi(x_2)\\ &= r_1f(y_1) + r_2f(y_2) = f(r_1y_1 + r_2y_2)\\ &\Rightarrow \vartheta(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1y_1 + r_2y_2 = r_1\vartheta(x_1) + r_2\vartheta(x_2).\end{aligned}$$

Επίσης, $W \subseteq W'$, καθόσον $W = \mathrm{Ker}(\pi_W^F)$. Εάν ως $\mu : W' \hookrightarrow F$ και $\nu : W \hookrightarrow W'$ σημειώσουμε τις συνήθεις ενθέσεις, τότε προκύπτει το εξής διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] & W \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\mathrm{id}_W"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W' \arrow[r, "\vartheta"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \{0\} \\
\{0\} \arrow[r] & W \arrow[r, "\mathrm{j}"'] & F \arrow[r, "\varpi"'] & N \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Η δεύτερή του γραμμή είναι εξ υποθέσεως ακριβής. Αλλά και η πρώτη του γραμμή είναι ακριβής, διότι από την ενριπτικότητα τής f έχουμε $\mathrm{Im}(\mu) \subseteq \mathrm{Ker}(\vartheta)$ και για κάθε $x \in \mathrm{Ker}(\vartheta)$ ισχύει

$$\vartheta(x) = 0_{N'} \Rightarrow \varpi\,(x) = f(0_{N'}) = 0_N \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(\varpi) = \mathrm{Im}(\mu).$$

Επιπροσθέτως, το ανωτέρω διάγραμμα είναι και *μεταθετικό*, διότι

$$\mu \circ \nu = \mathrm{j} \circ \mathrm{id}_W$$

και για κάθε $x \in W'$ έχουμε

$$(f \circ \vartheta)(x) = f(\vartheta(x)) = f(y), \ \text{ όπου } \ \varpi\,(\mu(x)) = \varpi\,(x) = f(y),$$

οπότε $f \circ \vartheta = \varpi \circ \mu$. Το επαγόμενο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
W \otimes_R M \arrow[r, "\nu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_W\overline{\otimes}\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{W\otimes_R M}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W' \otimes_R M \arrow[r, "\vartheta\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N' \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"] & \{0\} \\
W \otimes_R M \arrow[r, "\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] & F \otimes_R M \arrow[r, "\varpi\overline{\otimes}\mathrm{id}_M"'] & N \otimes_R M \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

είναι ωσαύτως μεταθετικό με ακριβείς γραμμές (λόγω τής προτάσεως C.5.5 και τού θεωρήματος C.5.9). Από το βήμα 3 γνωρίζουμε (αν θεωρήσουμε τον W' αντί τού εκεί παρατεθέντος W και την ένθεση μ αντί τής εκεί παρατεθείσας j) ότι ο ομομορφισμός $\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ είναι μονομορφισμός. Έστω τυχόν $a \in \mathrm{Ker}(f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)$. Επειδή ο $\vartheta\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ είναι επιμορφισμός, υπάρχει $b \in W' \otimes_R M$, τέτοιο ώστε να ισχύει $a = (\vartheta\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(b)$. Κατά συνέπειαν,

$$\begin{aligned}
&0_{N\otimes_R M} = (f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(a)\\
&= ((f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) \circ (\vartheta\overline{\otimes}\mathrm{id}_M))\,(b) = ((\varpi\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) \circ (\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M))\,(b)\\
&\Rightarrow (\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(b) \in \ \mathrm{Ker}(\varpi\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) = \mathrm{Im}(\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)\\
&\Rightarrow [\exists c \in W \otimes_R M : (\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(b) = (\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(c)]\\
&\Rightarrow (\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(b) = ((\mathrm{j}\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) \circ \mathrm{id}_{W\otimes_R M})(c) = ((\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) \circ (\nu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M))(c)\\
&\underset{\mathrm{Ker}(\mu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)=\{0_{W'\otimes_R M}\}}{\Longrightarrow} b = (\nu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M)(c) \Rightarrow a = \underbrace{((\vartheta\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) \circ (\nu\overline{\otimes}\mathrm{id}_M))}_{=0}(c) = 0_{N'\otimes_R M}.
\end{aligned}$$

Επομένως, $\mathrm{Ker}(f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M) = \{0_{N'\otimes_R M}\} \Rightarrow$ ο $f\overline{\otimes}\mathrm{id}_M$ είναι μονομορφισμός και ο M ισόπεδος (λόγω τού πορίσματος C.5.20). □

C.5.31 Σημείωση. (Αδρομερής ιεράρχηση R-μοδίων) Με τη βοήθεια τής προτάσεως C.2.4 και τού θεωρήματος C.5.25 επιτυγχάνεται η ακόλουθη ιεράρχηση των μέχρι τούδε γνωστών μας *ειδικών κλάσεων* R-μοδίων:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\text{διανυσματικοί}\\ \text{χώροι}\end{array}\right\} \subsetneqq \left\{\begin{array}{c}\text{ελεύθεροι}\\ \text{μόδιοι}\end{array}\right\} \subsetneqq \left\{\begin{array}{c}\text{προβολικοί}\\ \text{μόδιοι}\end{array}\right\} \subsetneqq \left\{\begin{array}{c}\text{ισόπεδοι}\\ \text{μόδιοι}\end{array}\right\} \subsetneqq \{\text{μόδιοι}\}}$$

Γνωρίζουμε ότι οι ανωτέρω εγκλεισμοί είναι αυστηροί, αφού, επί παραδείγματι,

(i) εάν $k, l \in \mathbb{N}, k \geq 2, l \geq 2$ και μκδ$(k, l) = 1$, τότε οι $\mathbb{Z}_{kl}$-μόδιοι $\mathbb{Z}_k$ και $\mathbb{Z}_l$ είναι προβολικοί και μη ελεύθεροι. (Βλ. C.2.9 (i).)

(ii) Ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Q}$ είναι ισόπεδος και μη προβολικός. (Βλ. πόρισμα C.5.29.)

(iii) Εάν $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, τότε ο $\mathbb{Z}$-μόδιος $\mathbb{Z}_k$ δεν είναι ισόπεδος. (Βλ. εδ. C.5.18.)

Από την άλλη μεριά, *για μοδίους οριζόμενους υπεράνω Π.Κ.Ι.* οι έννοιες *ελεύθερος* και *προβολικός* (και, αντιστοίχως, *ισόπεδος* και *στερούμενος στρέψεως*) είναι ισοδύναμες. (Βλ. πρόταση C.2.4, πόρισμα C.2.10 και θεώρημα D.3.25.) Μάλιστα, *και οι τέσσερεις αυτές έννοιες είναι ισοδύναμες* όταν περιοριζόμαστε στην κλάση των *πεπερασμένως παραγομένων μοδίων που ορίζονται υπεράνω Π.Κ.Ι.* (Βλ. πρόταση A.7.4.)

► **⊗ και Hom**. Αυτή η ενότητα θα κλείσει με την παράθεση δύο σημαντικών θεωρημάτων[14] που αφορούν στον συσχετισμό τού τανυστικού γινομένου μοδίων και των μοδίων ομομορφισμών.

Εάν M, N, L είναι τρεις R-μόδιοι και $\mathfrak{y}$ η απεικόνιση

$$\mathfrak{y} : \mathrm{Hom}_R(M, N) \times L \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_R L)$$

η οριζόμενη (για κάθε $(x, z) \in M \times L$ και κάθε $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$) ως εξής:

$$\mathfrak{y}(f, z)(x) := f(x) \otimes z,$$

τότε η $\mathfrak{y}$ είναι R-διγραμμική και, ως εκ τούτου, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$\boxed{\widetilde{\mathfrak{y}} : \mathrm{Hom}_R(M, N) \otimes_R L \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_R L)} \tag{C.22}$$

που καθιστά το κάτωθι διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_R(M, N) \otimes_R L \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\mathfrak{y}}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
\mathrm{Hom}_R(M, N) \times L \arrow[ur, "\text{ταν. απ.}"] \arrow[rr, "\mathfrak{y}"'] & & \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_R L)
\end{tikzcd}$$

[14] Για τις αποδείξεις αυτών βλ., π.χ., [85], ενότητα 3.7.

C.5.32 Θεώρημα. *Για τον ομομορφισμό* (C.22) *ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) *Εάν ο L είναι προβολικός, τότε ο $\widetilde{\mathfrak{h}}$ είναι μονομορφισμός.*

(ii) *Εάν ο L είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε ο $\widetilde{\mathfrak{h}}$ είναι ισομορφισμός.*

(iii) *Εάν ο M είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε ο $\widetilde{\mathfrak{h}}$ είναι ισομορφισμός.*

C.5.33 Σημείωση. Εάν M, N, L είναι τρεις R-μόδιοι, τότε (είναι εύκολο να δειχθεί ότι) υφίσταται και ένας κανονιστικός ισομορφισμός

$$\boxed{\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, L)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, L)}$$

(χωρίς επιπρόσθετους περιορισμούς).

Εν συνεχεία, θεωρούμε τέσσερεις R-μοδίους M, M', N, N' και τον κανονιστικό ομομορφισμό

$$\boxed{\mathfrak{z} : \mathrm{Hom}_R(M, M') \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, M' \otimes_R N')}$$

τον οριζόμενον ως εξής:

$$f \otimes g \longmapsto \mathfrak{z}(f \otimes g) := f \overline{\otimes} g.$$

(Πρβλ. σημείωση C.5.3.)

C.5.34 Θεώρημα. *Εάν τουλάχιστον ένα εκ των ζευγών $(M, N), (M, M'), (N, N')$ αποτελείται από προβολικούς πεπερασμένως παραγομένους R-μοδίους, τότε ο ομομορφισμός $\mathfrak{z}$ είναι ισομορφισμός.* (Εν τοιαύτη περιπτώσει, μπορεί κανείς να χρησιμοποιεί το τανυστικό γινόμενο $f \otimes g$ αντί τού $f \overline{\otimes} g$ και τανάπαλιν!)

C.5.35 Παράδειγμα. Εάν δεν πληρούται η συνθήκη η παρατεθείσα στη διατύπωση τού θεωρήματος C.5.34, τότε ο $\mathfrak{z}$ ενδέχεται να μην είναι ούτε μονομορφισμός ούτε επιμορφισμός! Επί παραδείγματι, θέτοντας[15]

$$M' = N' = R := \mathbb{Z}_4 \;\text{ και }\; M = N = \mathbb{Z}_2,$$

και θεωρώντας τόν $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4)$ που ορίζεται μέσω τού τύπου

$$f([a]_2) := [2a]_4, \;\; \forall a \in \mathbb{Z},$$

[15]Σημειωτέον ότι η $(\mathbb{Z}_2, +)$ καθίσταται $\mathbb{Z}_4$-μόδιος μέσω τού αριθμητικού πολλαπλασιασμού

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \ni ([k]_4, [a]_2) \longmapsto [ka]_2 \in \mathbb{Z}_2.$$

λαμβάνουμε για οιοδήποτε ζεύγος $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$,

$$
\begin{aligned}
&(f\overline{\otimes}f)([a]_2\otimes[b]_2)=f([a]_2)\otimes f([b]_2)\\
&=[2a]_4\otimes[2b]_4=[2]_4[a]_4\otimes[2b]_4=[2]_4\left([a]_4\otimes[2]_4[b]_4\right)\\
&=[2]_4[2]_4([a]_2\otimes[b]_2)=\underbrace{[4]_4}_{=[0]_4}([a]_2\otimes[b]_2)=0_{\mathbb{Z}_4\otimes_{\mathbb{Z}_4}\mathbb{Z}_4}.
\end{aligned}
$$

Άρα ο $f\overline{\otimes}f$ είναι ο *μηδενικός ομομορφισμός* και $f\otimes f\in\mathrm{Ker}(\mathfrak{z})$. Επειδή[16]

$$
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_2, \tag{C.23}
$$

οι τρεις εκ των τεσσάρων αποσυντιθέμενων τανυστών τού

$$
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4)\otimes_{\mathbb{Z}_4}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_2\otimes_{\mathbb{Z}_4}\mathbb{Z}_2
$$

είναι ίσοι με το $0_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4)\otimes_{\mathbb{Z}_4}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4)}$, διότι ένας (τουλάχιστον) εκ των παραγόντων τους είναι ο μηδενικός ομομορφισμός. Αμφότεροι οι παράγοντες τού εναπομένοντος, *τετάρτου* αποσυντιθέμενου τανυστή οφείλουν, ως εκ τούτου, να είναι ίσοι με το μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο τού (C.23), ήτοι με τον f. Κατά συνέπειαν, ο εν λόγω τέταρτος αποσυντιθέμενος τανυστής είναι ο $f\otimes f$. Όμως ο $f\otimes f$ είναι κατ' ανάγκην *μη μηδενικός*, καθόσον

$$
\left\{\begin{array}{l}
\mathbb{Z}_2\otimes_{\mathbb{Z}_4}\mathbb{Z}_2\cong(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\\
\underset{(\mathrm{C.17})}{\cong}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}+2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\cong(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})\underset{\mathrm{A.4.13}}{\cong}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_2\ncong\{0\}.
\end{array}\right\} \tag{C.24}
$$

Αυτό σημαίνει ότι ο $\mathrm{Ker}(\mathfrak{z})$ *δεν είναι τετριμμένος* και, κατ' επέκταση, ότι ο $\mathfrak{z}$ *δεν είναι μονομορφισμός*. Επιπροσθέτως, *και ο ίδιος ο* $\mathfrak{z}$ *είναι μηδενικός*, διότι κάθε τανυστής (ανήκων στο πεδίο ορισμού του) είναι προδήλως τής μορφής $\kappa(f\otimes f)$, όπου $\kappa\in\{[0]_4,[2]_4\}$, και

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{z}([0]_4(f\otimes f))=0_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2\otimes_{\mathbb{Z}_4}\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_4\otimes_{\mathbb{Z}_4}\mathbb{Z}_4)}\\
&=[2]_4(\underbrace{f\overline{\otimes}f}_{=0})=[2]_4\mathfrak{z}(f\otimes f)=\mathfrak{z}([2]_4(f\otimes f)).
\end{aligned}
$$

Από την άλλη μεριά, οι (C.24) και (C.23) και η παρατήρηση C.4.4 δίδουν

$$
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2\otimes_{\mathbb{Z}_4}\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_4\otimes_{\mathbb{Z}_4}\mathbb{Z}_4)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4)\cong\mathbb{Z}_2\ncong\{0\},
$$

πράγμα που σημαίνει ότι ο $\mathfrak{z}$ *δεν είναι ούτε επιμορφισμός* (αφού ο ανωτέρω μόδιος, όντας μη τετριμμένος, διαθέτει ένα στοιχείο που αδυνατεί να ανήκει στην εικόνα τού $\mathfrak{z}$).

[16] Έστω τυχών $g\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4)$. Τότε $g([1]_2)=[\lambda]_4$ για κάποιον $\lambda\in\{1,2,3\}$. Είναι άμεσος ο έλεγχος τού ότι η απεικόνιση $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_4)\ni g\longmapsto[\lambda]_2\in\mathbb{Z}_2$ αποτελεί ισομορφισμό $\mathbb{Z}_4$-μοδίων.

C.5.36 Πόρισμα. *Για οιουσδήποτε R-μοδίους M και N ορίζεται ο κανονιστικός ομομορφισμός*

$$\boxed{\mathfrak{k} : \mathrm{Hom}_R(M,R) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, R)}$$

μέσω τού τύπου

$$\mathfrak{k}(f \otimes g)(x \otimes y) := f(x)g(y),$$

για οιαδήποτε ζεύγη $(f,g) \in \mathrm{Hom}_R(M,R) \times \mathrm{Hom}_R(N,R)$ και $(x,y) \in M \times N$. Εάν τουλάχιστον ένας εκ των M, N είναι προβολικός και πεπερασμένως παραγόμενος, τότε ο $\mathfrak{k}$ είναι ισομορφισμός. Εν τοιαύτη περιπτώσει, υφίσταται ισομορφισμός[17]

$$\boxed{\mathrm{Bil}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R), \mathrm{Hom}_R(N,R); R) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,R), R).}$$

Εάν, μάλιστα, αμφότεροι οι M και N είναι πεπερασμένως παραγόμενοι και ελεύθεροι, τότε

$$\boxed{\mathrm{Bil}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R), \mathrm{Hom}_R(N,R); R) \cong M \otimes_R N,}$$

και η απεικόνιση

$$\varphi : M \times N \longrightarrow \mathrm{Bil}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R), \mathrm{Hom}_R(N,R); R)$$

η οριζόμενη μέσω τού (απλούστατου) τύπου

$$\boxed{\varphi(x,y)(f,g) := f(x)g(y),} \tag{C.25}$$

για οιαδήποτε ζεύγη $(x,y) \in M \times N$ και $(f,g) \in \mathrm{Hom}_R(M,R) \times \mathrm{Hom}_R(N,R)$, μπορεί να θεωρηθεί ως τανυστική απεικόνιση τού $M \otimes_R N$.

C.5.37 Σημείωση. Για *οιουσδήποτε πεπερασμένως παραγομένους και ελευθέρους* R-μοδίους M και N το ζεύγος

$$(\mathrm{Bil}_R(\mathrm{Hom}_R(M,R), \mathrm{Hom}_R(N,R); R), \varphi)$$

(όπου φ η (C.25)) μπορεί να εκληφθεί ως ένας «καλός εκπρόσωπος» τής κλάσεως ισομορφίας όλων των ζευγών (W, φ) που «υλοποιούν» το τανυστικό τους γινόμενο. (Πρβλ. εδ. C.3.9.) Γι' αυτόν ακριβώς τον λόγο χρησιμοποιείται σε ορισμένα βιβλία Γραμμικής Άλγεβρας[18], στην περίπτωση όπου ο R είναι σώμα, ως ένας άμεσος και σύντομος *ορισμός* τού τανυστικού γινομένου *δύο διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διαστάσεως*.

[17] Πρβλ. εδ. C.3.2.

[18] Βλ., π.χ., K. Hoffman & R. Kulze: *Linear Algebra*, 2nd ed., Prentice Hall, 1971, (§5.6, σελ. 166-168), S. Lang: *Linear Algebra*, 2nd ed., Addison Wesley, 1972, (XIII, §1), ή S.K. Berberian: *Linear Algebra*, Oxford University Press, 1992, (Ch. 13, §1, και ιδιαιτέρως την άσκηση 3 στη σελ. 316).